

変曲点型速度分布を持つ剪断流の線形不安定性に対する スケーリング則について

SCALING LAW FOR LINEAR INSTABILITY IN SHEAR LAYERS WITH AN INFLECTIONAL VELOCITY PROFILE

松原 雅春¹⁾

Masaharu MATSUBARA

1) 信州大学工学部機械システム工学科 (〒380-8553 長野市若里4-17-1, E-mail: mmatsu@shinshu-u.ac.jp)

Linear instability of an inflectional velocity profile may occur not only in free shear layers such as jets and wakes, but also in streaky structures that appear as Götler vortices, Dean vortices and streaks in a flat plate boundary layer induced by free stream turbulence. The criteria and growth rates of this instability for two-dimensional disturbance in several base flows have been investigated in the viscous linear stability theory. Comparison between these base flows shows the general criterion and parameters for the instability which can be normalized with the maximum shear of the base flow and the velocity difference between the infinitesimal positions from the inflectional point. This normalization can be in general use for simple prediction of breakdown of streaky structures in transitional flows.

Key Words: Shear layer, Laminar-turbulent transition, Linear stability, Inflectional velocity profile

1. はじめに

流速分布がある条件の変曲点を持つと、変曲点型不安定性が起こることが古くから知られている⁽¹⁾。このタイプ不安定性は一次不安定としてだけでなく、別の不安定性によって誘起された流れ場で起こる二次的な不安定性としても知られ、多くの遷移過程の途中で観察される一般的な不安定性と言える。例えば、物体の後流や噴流などのように初めから変曲点を持つ場合、流れ方向に波数を持つ大規模な渦構造が観察されるが、この渦の発生および成長に関してはこの不安定性によってうまく説明されている。さらに最初に変曲点を持たない速度分布であっても、ゲルトラー流やデイーン流における遠心力や回転流れでのコリオリ力で誘起される外力型不安定性によって流れ場がゆがめられ、変曲点型不安定性が二次不安定として発生することが明らかになっている⁽²⁾⁽³⁾。また外乱を受ける平板境界層においても、境界層にストリーク構造を持つ攪乱が成長し、そのストリークに変曲点型不安定性が発生し乱流へと遷移することが知られている⁽⁴⁾。

変曲点型不安定性については基礎流れが $U = \tanh y$ の場合に対し粘性を考慮した計算が行われている⁽⁵⁾⁽⁶⁾。しかし、広範囲な流れ場において変曲点型不安定性が観察されるにも

関わらず、不安定性と流速分布形状との関係についてはあまり研究されておらず、基礎流れについての一般的なパラメータについては見いだされていないのが現状である。そのため、実験で観察された二次不安定性が定量的に安定理論と比較されることが少なく、観測された不安定性が変曲点型不安定性であるとの確信が得られない場合が多い。

ここでは、二次不安定として変曲点型不安定性が起こる場合の一般的なスケーリング則を見いだすため、基礎流れ分布として単調増加するせん断層について注目した。二次不安定で起こりうる基礎流れの典型例として \tanh 関数に加え高次の多項式関数を採上げ、その場合の線形安定性をスペクトル法を用いて計算し、基礎流れと攪乱の関係についての一般性を明らかにすることを目的とする。

2. 計算方法

流れは非圧縮粘性流体とし、以下のナビア・ストークス方程式と連続の式を満たすものとする。

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2)$$

ここで、 u_i は流速、 p は圧力、 Re はレイノルズ数である。多くの実験によれば変曲点型攪乱は流れ方向に波数を持ち、一般的にスパン方向には波数を持たない。その位相速度はほぼ基礎流れ変曲点の流速に一致し、その流速で移動する観察者から見るとこの攪乱は空間発展ではなく時間発展をしている。このことから攪乱は流れ方向の波数 α だけ持ち、時間的に成長すると仮定した。また、二次不安定として現れる変曲点型速度分布は流れ方向に変化するものの、変曲点不安定性は成長速度が非常に速いため、基礎流れを平行流として扱うことができることが多い⁽⁷⁾。そこで基礎流れを $U_i = (U(y), 0, 0)$ とした。流速 u_i は次式のように基礎流れと攪乱成分との和として表せる。

$$u_i = U_i + \hat{u}_i(y) \exp i(\alpha x - i\omega t) \quad (3)$$

ここで \hat{u}_i は攪乱成分、 α は流れ方向の波数、 ω は時間成長率である。この式 (3) を式 (1) に代入し、攪乱を微小として非線形項を無視し、式 (2) を使って整理すると、以下の Orr-Sommerfeld 方程式が導かれる。

$$\left[(\omega + i\alpha U)(D^2 - \alpha^2) - i\alpha U'' - \frac{1}{Re}(D^2 - \alpha^2)^2 \right] \hat{v} = 0 \quad (4)$$

ここで、 $D = d/dy$ の微分オペレーター、 \hat{v} は攪乱の y 方向流速成分 $\hat{v} = \hat{u}_2$ である。

二次不安定として変曲点型不安定性が起こる場合、その速度分布は変曲点の勾配に対し両側の極値をとる点が \tanh 関数と比べ近い場合が多い。そのため本研究では次式で示す 6 種類の基礎流れについて計算を行った。ただしこれらの分布は一般性を見いだすために選んだに過ぎない。

$$U_1 = \tanh y$$

$$U_3 = (-y_3^3 + 3y_3)/2$$

$$U_5 = (3y_5^5 - 10y_5^3 + 15y_5)/8$$

$$U_7 = (-5y_7^7 + 21y_7^5 - 35y_7^3 + 35y_7)/16$$

$$U_9 = (35y_9^9 - 180y_9^7 + 378y_9^5 - 420y_9^3 + 315y_9)/128$$

$$U_s = \sin y$$

ここで $y_3 = 2y/3$, $y_5 = 8y/15$, $y_7 = 16y/35$, $y_9 = 128y/315$ である。これらの速度分布は Fig. 1(a) に示すように変曲点において速度が 0 で点対称性を持つ奇関数である。ただし、 U_5 と U_7 は省略してある。変曲点における速度勾配は 1 に、また $y = 0$ から外側に向かって最初の極値 ($\tanh y$ の場合は極限値) を正側では 1、負側では -1 になるように係数を決めた。これは、速度分布からの変曲点型不安定性を支配する因子が、両側無限遠の速度差と変曲点における速度勾配と仮定したためである。また 5 次以上の多項式に対しては、極値をとる位置で高次の微分が連続になるようにしてある。基礎流れ場のスケールが最大せん断速度 $S = (dU/dy)_{y=0}$ と両側無限遠での速度差 ΔU で定義すると、レイノルズ数 Re は次式によって決定できる。

$$Re = \frac{1}{4} \frac{\Delta U^2}{\nu S} \quad (5)$$

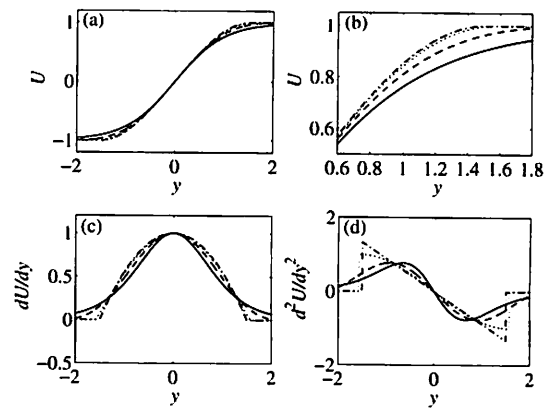


Fig. 1 Velocity profiles and their derivatives of the base flows. —: $\tanh y$, ---: $U_9(y)$, - - -: $U_7(y)$, ···: $\sin y$.

ここで、 ν は動粘性係数である。また、 $\tanh y$ の場合以外では $y = 0$ から正の方向に向かって最初の極点から外側の速度を 1、 $y = 0$ から負の方向に向かって最初の極点から外側の速度を -1 としている。

Fig. 1(a) を見てもわかる通り、変曲点での傾きを 1 として規定しているため、これらの分布の違いは比較的小さくその違いは変曲点からはなれた位置にしか見られない。Fig. 1(b) は $y = 1.2$ 付近を拡大したものだが、 $\tanh y$ が最もゆっくりと漸近し、 U_9 , U_7 , U_5 , $\sin y$ の順に極値をとるのが速くなり、 U_3 が最も速く極値をとる。流速分布としてはあまり違いがないが Fig. 1(c) に示す一次微分や Fig. 1(d) の二次微分では違いが明らかで、 $\sin y$ と U_3 に関しては極値をとる位置で二次微分に不連続性がある。

式 (4) から最大成長率の ω を求める場合、固有値問題としてすべてのモードをまとめて解くのが一般的であるが、その場合は求めるモード数が有限なため解の中に正しくない解が存在する。そのため何らかの方法で多数の解の中から真の最大成長率を持つ解を抽出する必要がある。本研究では境界条件を一部省き常微分方程式を解き、その解が省いた境界条件を満たすように固有値を繰り返し計算で求めた。この手法は片側の境界条件を決め、そこからルンゲ・クッタ法などで前進積分し、反対側の境界条件を満たすように固有値を繰り返し計算するシューティング法と本質的に積分方法が違うだけである。本手法では初めに α と ω を予測し、その値を基に一部の境界条件を除いてスペクトル法のひとつであるコロケーション法で積分する。積分後、除いた境界条件が満たされるよう ω を変化させながら繰り返し計算をして求めた。この方法の利点は同じコードで時間成長と空間成長の両方が解けることと、解を探すときのアルゴリズムが良ければすべてのモードをまとめて解くよりも計算が速いことである。ただし、初めに固有値に近い α と ω を予測しなくてはならず、その予測方法には経験的な手法に頼らざるを得ない。

基礎流れが変曲点周りで点対称性を持つ場合、位相速度が変曲点における基礎流れの流速と一致することが一般的に知

られている。実験結果⁽⁴⁾でも、変曲点型の攪乱の位相速度は変曲点での基礎流れの流速とほぼ一致する。また、基礎流れが $\tanh y$ の場合の粘性を考慮した線形安定性では、基礎流れの変曲点の流速と一致する攪乱の成長が最も大きいことが知られている⁽⁵⁾。このことから、位相速度を変曲点での基礎流れの流速とし、 $\text{Im}(\omega) = 0$ として解を求めた。

スペクトル法を用いた積分にはチェビシエフ多項式を用い、モード数 60 とした。境界条件としては以下の式を用いた。

$$\left. \begin{array}{l} \hat{v} = 1 \\ \text{Re}(d\hat{v}/dy) = 0 \\ \text{Im}(d^2\hat{v}/dy^2) = 0 \\ \text{Re}(d^3\hat{v}/dy^3) = 0 \end{array} \right\} \text{ at } y = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{v} = 0 \\ d\hat{v}/dy = 0 \end{array} \right\} \text{ as } y \rightarrow \infty$$

実際の積分では $y = 0$ において $\text{Re}(d\hat{v}/dy) = 0$ の条件を外して積分を行い、この条件を満たすように ω を繰り返し計算で求めた。無限遠の取り扱いについては種々の方法があるが、本研究では単純に $y = 20$ を無限遠と見なした。

Table 1 で、求めた解と過去の計算結果と比較してみる。ここで $c_i = \omega/\alpha$ である。この表から少なくとも 3 桁程度の精度があることがわかる。ただし本研究で扱った変曲点型の基礎流れの場合、 α が小さい場合誤差は大きくなる傾向があり、そのときの誤差については後述する。

Table 1 Comparison to a previous result

Re	α_r	α_i	$c_i(\text{present})$	$c_i(\text{Betchov})$
10	0.5	0	0.14460	0.14406
30	0.5	0	0.27878	0.27935

3. 線形安定性

Table 2 に各 Re における最大成長を持つ解を数値的に示す。 $Re = 1000$ の場合どの基礎流れでも最大成長波長 $\alpha_{r,\max}$ は 0.40 から 0.45 の間で、それらの最大と最小の差は α 自身の値に対し 1 割にも達しない。さらに、成長率 ω_{\max} に関してはほぼ 0.19 の値をとることがわかる。このことは本研究で用いた基礎流れのスケーリングが攪乱の成長に対して適切であることを示唆している。また $Re = 1$ の場合、 $\alpha_{r,\max}$ は 0.107 付近ではほぼ一定である。成長率 ω_{\max} に関しては数値的にばらつきがあるが、これは絶対値が小さいためで、この程度の値では実験においてはほとんど成長しない大きさである。

基礎流れが $\tanh y$ の場合の固有関数とその導関数を Fig. 2 に示す。境界条件を満たしつつ、滑らかな変化をする解であることがわかる。固有関数の実部と虚部の比が $y > 1$ ではほぼ一定でこの付近では位相が一定であることがわかる。

Table 2 Eigenvalues for the six base profiles

Base flow	Re	$\alpha_{r,\max}$	ω_{\max}
$\tanh y$	1000	0.44279	0.18809
$U_3(y)$	1000	0.40895	0.19441
$U_5(y)$	1000	0.41530	0.19279
$U_7(y)$	1000	0.41877	0.19207
$U_9(y)$	1000	0.42066	0.19165
$\sin y$	1000	0.42146	0.19410
$\tanh y$	1	0.10616	0.0039740
$U_3(y)$	1	0.10681	0.0041188
$U_5(y)$	1	0.10692	0.0040070
$U_7(y)$	1	0.10701	0.0038878
$U_9(y)$	1	0.10696	0.0039085
$\sin y$	1	0.10937	0.0011759

$y = 0$ で実部は極性を変えないのに対し、虚部は奇関数で、 $y = 0$ を挟んで位相関係が入れ替わっている。

成長率の等高線図を Fig. 3 に示す。 $\tanh y$ の場合は中立安定曲線に対する Re が非常に大きい場合と非常に小さい場合に対する極限関数⁽¹⁾を図中に太い破線で示している。これらの極限関数は本計算結果の中立安定曲線とよく一致している。このことは α が小さい場合でも十分な精度で計算されていることを示しており、前述した α が小さい場合の誤差についてはこの α の範囲では問題ないと言える。ただし、さらに α が小さい場合の成長率は無限遠と見なした位置により変化したため、攪乱振幅が 0 となる位置を $y = 14$ と $y = 20$ とした場合の成長率の差が 2 桁目以上変化する α まで図中に示している。Fig. 3 を見るとどの基礎流れにおいても成長率は Re の増加とともに減少していき、大きな Re になると成長率はほとんど変化しなくなる。これは変曲点型不安定性が本質的に非粘性理論から説明でき、粘性はただ攪乱の成長を弱める方向にしか働かないことがわかる。この特徴は Tollmien-Schlichting 波のような粘性が起因する不安定性とは決定的に違う。また、 Re が比較的大きい場合に注目すると $\tanh y$ が広い α の範囲で攪乱が増幅するのに対し、 U_3 の場合や $\sin y$ を見てわかる通り、成長する α の範囲が狭く攪乱に対する波数選択性が $\tanh y$ に比べ強いことがわかる。

この違いは、各 Re で成長率 ω を比較した Fig. 4 を見るとさらによくわかる。 $Re = 1$ の場合、成長率は基礎流れにほとんど依存しないのに対し、 Re が大きくなると $\alpha > \alpha_{r,\max}$ で成長率が基礎流れに依存している。ここでは U_5 、 U_7 は示していないが、成長する波数範囲の広いつまり波数選択性が弱い方から順に並べると、 $\tanh y$ 、 U_9 、 U_7 、 U_5 で、 U_3 と

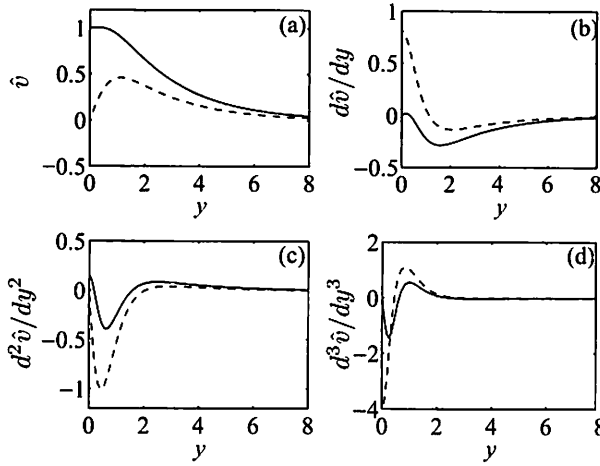


Fig. 2 Eigenfunction for the hyper-tangent profile and its derivatives. $Re = 1000$, $\alpha_{r,max}=0.44279$, $\omega_{max,}=0.18809$.

—: Real part, ---: Imaginary part.

$\sin y$ が最も選択性が強い。この順序は Fig. 1 の基礎流れ分布と関係している。Fig. 1(b) を見ると U_3 , $\sin y$, U_5 , U_7 , U_9 , $\tanh y$, の順で漸近の仕方が緩やかになる。つまり、波数選択性の強さの順とほぼ一致しており、基礎流れの外側での漸近の仕方が波数選択性に強く影響していることがわかる。

どの Re でも成長率が最大となる波数 α や成長率 ω 自身の値は、基礎流れによらずほぼ一定である。よって、最大成長率への基礎流れによる影響は非常に小さいため、実験との比較などで最大成長を考える上では速度分布の形状はほとんど無視していいことがわかる。式 (5) で定義される Re が十分大きければ、実験で観察される実空間における最大成長波数 α^* と最大時間成長波率 ω^* は

$$\alpha^* = 0.41 \frac{S}{\Delta U}$$

$$\omega^* = 0.19S$$

で求められる。また、基礎流れの変曲点における流速が U_s の場合、時間成長率から見積もられる空間成長率は

$$\alpha_{i,max} = 0.19S/U_s$$

で求められる。

4. 結言

様々な変曲点を持つ基礎流れにおける線形安定計算を行った結果、変曲点型不安定性による攪乱は基礎流れの最大せん断速度と速度差により整理できることが明らかになった。また、基礎流れの流速分布形状の影響は最大成長する攪乱に対しては弱いことがわかった。さらにこの不安定性による波数選択性は基礎流れの流速分布が一定値に速く漸近するほど強くなることが示唆された。

参考文献

- (1) Drazin, P. G. and Reid, W.: Hydrodynamic stability, (1981), Cambridge University Press.

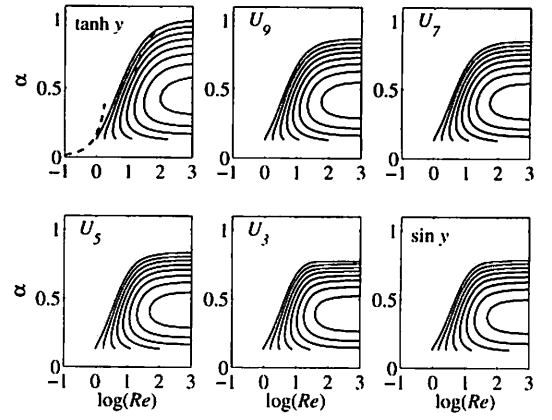


Fig. 3 Contour lines of growth rate ω . Contour spacing is 0.025. Negative contours are shown as dots.

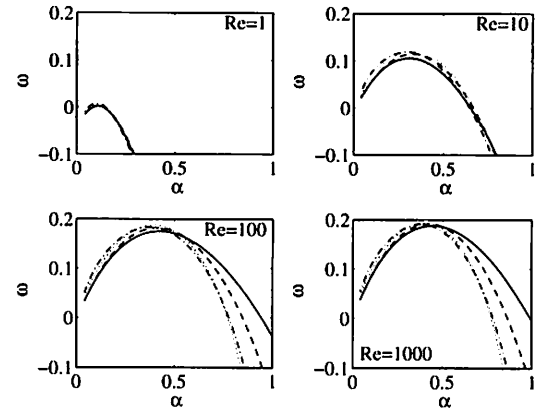


Fig. 4 Growth rate ω . —: $\tanh y$, ---: $U_9(y)$, - · - : $U_3(y)$, · · · : $\sin y$.

- (2) Swearingen, J. D. and Blackwelder, R. F.: The growth and breakdown of streamwise vortices in the presence of a wall, *J. Fluid Mech.*, **182**(1987), pp. 255–290.
- (3) Matsubara, M and Alfredsson, P. H.: Secondary instability in rotating channel flow, *J. Fluid Mech.*, **368**(1998), pp. 27–50.
- (4) Matsubara, M, Alfredsson: Disturbance growth in boundary layers subjected to free stream turbulence, *J. Fluid Mech.*, **430**(2001), pp. 149–168.
- (5) Betchov, R. and Szewczyk, A.: Stability of a shear layer between parallel streams, *Phys. Fluids*, **6**(1963), pp. 1391–1396.
- (6) Tatsumi, T., Gotoh, K. and Ayukawa, K.: The stability of a free boundary layer at large Reynolds number, *J. Phys. Soc. Japan*, **19**(1964), pp. 1966–1980.
- (7) Andersson, P., Brandt, L., Alessandro, B. and Henningson, D. S.: On the breakdown of boundary layer streaks, *J. Fluid Mech.*, **428**(2001), pp. 29–60.