

圧電体調和振動における 2 次元境界要素法の考察

A STUDY OF 2D-BEM FOR TIME-HARMONIC ANALYSIS OF PIEZOELECTRIC SOLIDS

高木 道明¹⁾, 神名 重男²⁾, 伊藤 大徳³⁾, 松本 敏郎⁴⁾

Michiaki TAKAGI, Shigeo KANNA, Hironori ITO, Toshiro MATSUMOTO

- 1) セイコーエプソン株式会社 (〒392-8502 長野県諏訪市大和 3-3-5, E-mail : takagi.michiaki@exc.epson.co.jp)
 2) 同上 (〒392-8502 長野県諏訪市大和 3-3-5, E-mail : Kanna.Shigeo@exc.epson.co.jp)
 3) 名古屋大学大学院工学研究科 (〒464-8603 名古屋市千種区不老町, E-mail : h_ito@nuem.nagoya-u.ac.jp)
 4) 同上 (〒464-8603 名古屋市千種区不老町, E-mail : t.matsumoto@nuem.nagoya-u.ac.jp)

A boundary element formulation for plane piezoelectric harmonic vibration problems is presented. Basic equations are derived from the three-dimensional governing differential equations based on the reduction of the partial differentiations into plane ones. Two-dimensional Radon transform is applied to derive the fundamental solution of the present problem. A BEM code based on the constant element discretization is also developed and the effectiveness of the present approach is validated through numerical test calculations for a quartz bar time-harmonic vibration.

Key Words: SAW, Time-harmonic vibration, BEM, Fundamental solution, Radon transform

1. はじめに

各種の民生装置のクロックに使用される水晶振動子および水晶 SAW(Surface Acoustic Wave)共振子等の設計および解析には、FEM (Finite Element Method) が活用されている。SAW 共振子の場合には、その素子構造が電極指とスペースの周期的繰り返し構造であるために、FEM を用いた 1 区間の周期的解析により成果が得られてきた。しかしながら最近では、素子小型化の動向に対応して、素子全体のより精密な振動解析による特性設計が求められている。この解析には多数の要素数を必要とするため実施されていない現状にある。ところで、SAW 共振子では素子の幅方向は一様変位状態とし、波の伝搬方向と深さ方向からなる 2 次元振動解を使用して特性計算がなされることが多いため、素子全体の 2 次元解析も有効であり、さらに要素数を少なくできる BEM(Boundary Element Method)を用いることが考えられる。一方、圧電体の調和振動解析としては、Denda, Wang 等の 2 次元に関する研究がある⁽¹⁾⁽²⁾。3 次元の理論定式化については、松本, 山中, 神谷, 鮫島等の報告がある⁽³⁾。

本研究では、計算機リソースの軽減できる SAW 共振子の 2 次元圧電体の調和振動解析コード開発を目的として、基礎式の導出過程では、松本らの 3 次元の基礎式⁽³⁾に基づき 2 次元化処理を行い、3 次元の場合と異なる 2 次元の Radon 逆変換は Hilbert 変換を経て定式化する。さらに手法の有効性については、水晶からなる矩形形状を有する細い振動片の縦振動につき、理論と BEM 解析結果を照合することにより検証する。

2. 理論

2.1 2 次元圧電体の基礎式

最初に、SAW の 3 つの変位成分を解析の対象として、 x_1, x_2, x_3 の 3 軸からなるデカルト座標系で記述された 3 次元の圧電体支配方程式から出発して、2 次元の場合の基礎式を導くことを考える。3 次元の圧電体に関する力のつりあい方程式、構成方程式、電荷方程式、変位ひずみ関係式はつぎのようになる。

$$\sigma_{ij,i} - \rho \ddot{u}_j + b_j = 0 \quad (1)$$

$$D_{i,i} - q = 0 \quad (2)$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} S_{kl} + e_{ij} \varphi_{,l} \quad (3)$$

$$D_i = e_{ikl} S_{kl} - \varepsilon_{il} \varphi_{,l} \quad (4)$$

$$S_{kl} = \frac{1}{2}(u_{k,l} + u_{l,k}) \quad (5)$$

ただし、 σ_{ij} は応力、 C_{ijkl} は弾性定数、 S_{kl} はひずみ、 e_{ij} 圧電定数、 ε_{il} は誘電率の各テンソルであり、 D_i は電束密度、 b_j は物体力、 u_k は変位、 \ddot{u}_j は加速度の各ベクトル、 q は電荷、 φ は電位、 ρ は密度である。また、小文字のアルファベットによる添字はデカルト座標系成分を表し、コンマの後の添字はその座標成分による偏微分を表し、繰り返し用いられる添え字については、総和規約が成り立つものとする。

いま、角周波数 ω の定振動状態を考えると、

$$u_k = U_k(\mathbf{x}) \exp(-i\omega t), \quad \varphi = \varphi(\mathbf{x}) \exp(-i\omega t) \quad (6)$$

とにおいて、式(6)を式(3)~(5)に代入し、式(3)~(5)をさらに式(1)、(2)に代入すれば、真電荷がない場合、次式が得られる。

$$C_{ijk} U_{k,li} + \rho \omega^2 U_j(x) + e_{lij} \varphi_{,li} = -b_j \quad (7)$$

$$e_{ikl} U_{k,li} - \varepsilon_{il} \varphi_{,li} = q = 0 \quad (8)$$

さらに、変位ベクトルとして $U_4 = \varphi$ と定義し、式(7)、(8)をまとめると、次のように書ける。

$$\Gamma_{JK} U_K = 0 \quad (9)$$

ここで、 Γ_{JK} は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{jk} &= C_{ijk} \partial_i \partial_l + \rho \omega^2 \delta_{jk} & (j, k = 1, 2, 3) \\ \Gamma_{j4} &= e_{lij} \partial_l \partial_i & (j = 1, 2, 3, K = 4) \\ \Gamma_{4k} &= e_{ikl} \partial_l \partial_i & (J = 4, k = 1, 2, 3) \\ \Gamma_{44} &= \varepsilon_{il} \partial_l \partial_i \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

ただし、 δ_{jk} は Kronecker のデルタ、式(10)の添え字は小文字の場合には1から3までとるものとする。また偏微分 ∂_i や ∂_i は平面を構成する直交座標 x_1 または x_3 による微分であり、ひずみ $S_{2l} = S_{l2}$ ($l = 1, 2, 3$) は0とする。さらにまた式(9)に対応して、2次元での基本解 U_{KM}^* は次式を満足する。

$$\Gamma_{JK} U_{KM}^* = -\delta_{JM} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (11)$$

ただし、 $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ はデルタ関数、 \mathbf{x}, \mathbf{y} は2点の座標である。

つぎに Γ を境界領域とする境界積分方程式を導く。式(9)の両辺に基本解 U_{JM}^* をかけて平面領域 Ω で積分すると、

$$\int_{\Omega} \Gamma_{JK} U_K \cdot U_{JM}^* d\Omega = 0 \quad (12)$$

となる。 Γ_{JK} の成分を具体的に代入して変形すると次式が得られる⁽³⁾。

$$\int_{\Gamma} U_{JM}^* T_J d\Gamma - \int_{\Gamma} T_{JM}^* U_J d\Gamma + \int_{\Omega} \Gamma_{JK} U_{KM}^* U_K d\Omega = 0 \quad (13)$$

ここで、各変数は m_i を境界の外向き単位法線ベクトルとして、

$$T_j = (C_{ijk} U_{k,l} + e_{ij} U_{4,l}) m_i \quad (14)$$

$$T_4 = (e_{ikl} U_{k,l} - \varepsilon_{il} U_{4,l}) m_i \quad (15)$$

$$T_{JM}^* = (C_{ijk} U_{kM,l}^* + e_{ij} U_{4M,l}^*) m_i \quad (16)$$

$$T_{4M}^* = (e_{ikl} U_{kM,l}^* - \varepsilon_{il} U_{4M,l}^*) m_i \quad (17)$$

式(13)の U_{KM}^* に式(11)の基本解を代入すれば、静弾性問題における Somigliana の公式と同じ形の次式が得られる。

$$U_M(\mathbf{y}) + \int_{\Gamma} T_{JM}^* U_J d\Gamma = \int_{\Gamma} U_{JM}^* T_J d\Gamma \quad (18)$$

さらに、積分方程式の正則化を検討する⁽³⁾。式(18)を次のように変形する。

$$\begin{aligned} U_M(\mathbf{y}) + \int_{\Gamma} T_{JM}^* \{U_J(\mathbf{x}) - U_J(\mathbf{y})\} d\Gamma \\ + \int_{\Gamma} T_{JM}^* U_J(\mathbf{y}) d\Gamma = \int_{\Gamma} U_{JM}^* T_J d\Gamma \end{aligned} \quad (19)$$

第3項の T_{JM}^* は静的な部分とそれ以外の部分の和として書ける。すなわち、次のようになる。

$$T_{JM}^* = T_{JM}^{*S} + T_{JM}^{*R} \quad (20)$$

ここで、 T_{JM}^{*S} は T_{JM}^* の静的な部分(特異性を有する部分)、 T_{JM}^{*R} はそれ以外の正則な部分である。 T_{JM}^{*S} は式(16)と(17)を介して U_{JM}^{*S} と関係づけられ、 U_{JM}^{*S} は式(11)で $\omega = 0$ としたときの基本解(静的な問題の基本解)に対応している。したがって、式(20)を式(19)に代入して変形すると、最終的に次式に帰着する。

$$\begin{aligned} \left(\int_{\Gamma} T_{JM}^{*R} d\Gamma \right) U_J(\mathbf{y}) + \int_{\Gamma} T_{JM}^* \{U_J(\mathbf{x}) - U_J(\mathbf{y})\} d\Gamma \\ = \int_{\Gamma} U_{JM}^* T_J d\Gamma \end{aligned} \quad (21)$$

2.2 2次元 Radon 変換と逆変換

変位基本解 U_{JM}^* と応力基本解 T_{JM}^* を求めるに際して、2次元の Radon 変換を使用する(Fig. 1 参照)。Radon 変換の定義式を次に示す。

$$F(s, \mathbf{n}) = R[f(\mathbf{x})] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathbf{x}) \delta(s - \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (22)$$

ここで、 \mathbf{x} は平面内の点、 $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ は単位円周上のベクトルであり、積分は直線 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = s$ 上の値 $f(\mathbf{x})$ に対して行われ、 $F(s, \mathbf{n})$ に変換する。また逆変換については、次式で与えられている⁽⁴⁾。

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial F(\sigma)/\partial \sigma}{s - \sigma} d\sigma \right\} d\theta(\mathbf{n}), \quad s = \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} \quad (23)$$

ここで、積分は単位円周上の $\mathbf{n} = (\cos\theta, \sin\theta)$ につき行われる。また $\{ \}$ 内は次式で定義される Hilbert 変換である⁽⁴⁾。

$$H[f](s) = \frac{1}{\pi} \int_{-x}^{+x} f(\sigma) / (s - \sigma) d\sigma \quad (24)$$

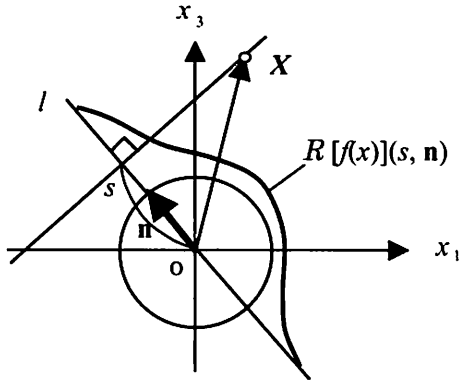


Fig. 1 Two-dimensional Radon transform

2.3 変位と電位基本解

つぎに、変位と電位の基本解を求める。式(11)に式(22)の Radon 変換を施す。ギリシャ文字の添え字は 1, 3 をとるものとする、

Radon 変換に関する微分公式

$$R[f(x)_{,\mu\nu}] = n_\mu n_\nu F(s, \mathbf{n})_{,ss} \quad (25)$$

と δ 関数の公式を使用し、式(7)と(8)を参照して、

$$\begin{aligned} & (C_{j\mu k\nu} n_\mu n_\nu \partial_s^2 + \rho\omega^2 \delta_{jk}) F_{kM}^*(s, \mathbf{n}) \\ & + e_{\mu\nu j} n_\mu n_\nu \partial_s^2 F_{4M}^* = -\delta_{jM} \delta\{\mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})\} \quad (26) \\ & e_{\mu k\nu} n_\mu n_\nu \partial_s^2 F_{kM}^* - \varepsilon_{\mu\nu} n_\mu n_\nu \partial_s^2 F_{4M}^* = -\delta_{4M} \delta\{\mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})\} \end{aligned} \quad (27)$$

が得られる。ここで $R[U_{kM}^*(\mathbf{x})] = F_{kM}^*(s, \mathbf{n})$ とする。つぎに式(27)から F_{4M}^* を求め式(26)に代入して整理すると次式が得られる。

$$\{Q_{jk}(\mathbf{n}) \partial_s^2 + \rho\omega^2 \delta_{jk}\} F_{kM}^*(s, \mathbf{n}) = -P_{jM}(\mathbf{n}) \delta\{\mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})\} \quad (28)$$

ただし、

$$Q_{jk}(\mathbf{n}) = C_{j\mu k\nu} n_\mu n_\nu + \beta_j(\mathbf{n}) \beta_k(\mathbf{n}) / \alpha(\mathbf{n}), \quad (j, k = 1, 2, 3)$$

$$P_{jM}(\mathbf{n}) = \delta_{jM} + \beta_j(\mathbf{n}) / \alpha(\mathbf{n}) \delta_{4M}, \quad (M = 1, 2, 3, 4)$$

$$\alpha(\mathbf{n}) = \varepsilon_{ij} n_i n_j, \quad \beta_k(\mathbf{n}) = e_{ikl} n_l n_i, \quad (k = 1, 2, 3)$$

であり、 $Q_{jk}(\mathbf{n})$ は \mathbf{n} 方向の平面波の実効的弾性定数を与える。 $Q_{jk}(\mathbf{n})$ は正の定数からなる対称行列なので 3 個の実根を有するから、固有値を λ_m 、 E_{jm} ($j = 1, 2, 3$) をその固有ベクトルとすれば次の関係式が成り立つ。

$$Q_{jk}(\mathbf{n}) E_{km} = \lambda_m E_{jm} \quad (29)$$

つぎに、基本解 U_{kM}^* を \mathbf{n} 方向に伝搬する 3 個の平面波の固有ベクトル E_{km} と未知定数 V_{mM} の積の和として合成する。

$$F_{kM}^*(s, \mathbf{n}) = \sum_m E_{km} V_{mM}(s, \mathbf{n}), \quad (m = 1, 2, 3) \quad (30)$$

式(29)、(30)を式(28)に代入し、両辺に E_{jm} をかけて j について和をとり、 $E_{jm} E_{jn} = \delta_{mn}$ の関係を使い整理すると、

$$(\lambda_m \partial_s^2 + \rho\omega^2) V_{mM}(s, \mathbf{n}) = -E_{jm} P_{jM}(\mathbf{n}) \delta(s - \mathbf{n} \cdot \mathbf{y}) \quad (31)$$

式(31)の変数 s の微分方程式を Fourier 変換すると、次のようになる。

$$F[V_{mM}(s, \mathbf{n})] = \{E_{jm} P_{jM}(\mathbf{n}) / (\lambda_m \xi^2 - \rho\omega^2)\} \exp(-i\xi \mathbf{n} \cdot \mathbf{y}) \quad (32)$$

さらに、上式に Fourier 逆変換 F^{-1} を実行して次式が得られる。

$$\begin{aligned} & V_{mM}(s, \mathbf{n}) \\ & = \frac{1}{2\pi} \int_{-x}^{+x} \{E_{jm} P_{jM}(\mathbf{n}) / (\lambda_m \xi^2 - \rho\omega^2)\} \exp(i\xi |s - \mathbf{n} \cdot \mathbf{y}|) d\xi \end{aligned} \quad (33)$$

式(33)において留数定理を用いると、未知定数 V_{mM} は次式右辺の実部で与えられる。

$$V_{mM}(s, \mathbf{n}) = \text{Re} \left[i E_{jm} P_{jM}(\mathbf{n}) / (2\lambda_m k_m) \exp(ik_m |s - \mathbf{n} \cdot \mathbf{y}|) \right] \quad (34)$$

ただし、 $k_m = \omega / v_m$ 、 $\lambda_m = \rho v_m^2$ の関係があり、 k_m は波数、 v_m は縦波 (1 個) および横波 (2 個) の速度である。

最後に、Radon 逆変換を行う。式(23)の計算にあたり、まず式(34)を式(30)に代入し、 s を σ に変えて得られる $F_{kM}^*(\sigma, \mathbf{n})$ の 1 階微分を求めると、

$$\partial F_{kM}^*(\sigma, \mathbf{n}) / \partial \sigma = -g(\zeta) E_{kM}(\mathbf{n}) \quad (35)$$

$$g(\zeta) = \text{sgn}(\zeta) \exp(+ik_m |\zeta|), \quad \zeta = \sigma - \mathbf{n} \cdot \mathbf{y}$$

$$E_{kM}(\mathbf{n}) = \sum_{m=1}^3 (1/\lambda_m) E_{km} E_{jm} P_{jM}(\mathbf{n})$$

であり、 sgn は符号関数である。式(35)を式(24)に代入すると、変位の基本解 $U_{kM}^*(\mathbf{x})$ ($k=1 \sim 3$, $M=1 \sim 4$) が次式のように得られる。

$$\begin{aligned} & U_{kM}^*(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \text{Re} \left[\frac{1}{4\pi^2} \int_0^\pi E_{kM}(\mathbf{n}) H[-\pi g(\zeta)] d\theta(\mathbf{n}) \right] \\ & = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\pi E_{kM}(\mathbf{n}) K(\zeta) d\theta(\mathbf{n}), \quad \zeta = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \end{aligned} \quad (k = 1, 2, 3) \quad (36)$$

さらに Hilbert 変換 $H[g(\zeta)]$ について、次の諸関係式を導くことができる。ただし、 $U(\zeta) = 1, (\zeta \geq 0)$ は単位階段関数である。

$$H[g(\zeta)] = H[\exp(ik_m \zeta)] - 2H[\cos(k_m \zeta) U(-\zeta)] \quad (37)$$

$$H[\exp(ik_m \zeta)] = -i \exp(ik_m \zeta) \quad (38)$$

$$\begin{aligned} & H[\cos(k_m \zeta) U(-\zeta)] = -(1/\pi) \{ \cos(k_m \zeta) \text{ci}(k_m \zeta) \\ & + \sin(k_m \zeta) \text{si}(k_m \zeta) \}, \quad (\zeta \geq 0) \end{aligned} \quad (39)$$

あらためて、式(36)の核関数 $K(\eta = k_m |\zeta|)$ は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} & K(\zeta) = -\pi \sin \eta - 2 \left[\cos \eta \{-\gamma + \ln \eta - \text{Ci}(\eta)\} \right. \\ & \left. + \sin \eta \{-\pi/2 + \text{Si}(\eta)\} \right], \quad \eta = k_m |\zeta| \end{aligned} \quad (40)$$

ただし、 γ は定数であり、式(39)、(40)における諸関数にはつき

の関係がある。

$$\begin{aligned} si(\eta) &= -\pi/2 + Si(\eta), & Si(\eta) &= \int_0^\eta \frac{\sin \eta}{\eta} d\eta, \\ ci(\eta) &= -\gamma + \ln \eta - Ci(\eta), & Ci(\eta) &= \int_0^\eta \frac{1 - \cos \eta}{\eta} d\eta \end{aligned}$$

さらに残りの電気項 $U_{KM}^*(\mathbf{x})$ ($K=4, M=1\sim 4$) は、以下のように求まる。式(27)を変形して、

$$\partial_s^2 F_{4M}^* = [\beta_k(\mathbf{n}) \partial_s^2 F_{kM}^*(\zeta) + \delta_{4M} \delta(\zeta)] / \alpha(\mathbf{n}) \quad (41)$$

ただし、 $\zeta = s - \mathbf{n} \cdot \mathbf{y}$ である。式(41)の右辺第1項については、Radon 逆変換を行うにあたり、 s で積分した後、式(35)で与えられる F_{kM}^* の1階微分を代入して Hilbert 変換し、さらに Radon 逆変換を行うことにより次式が得られる。

$$\begin{aligned} U_{I4M}^*(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \quad (M=1, 2, 3, 4) \\ = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\pi \frac{\beta_k(\mathbf{n})}{\alpha(\mathbf{n})} E_{kM}(\mathbf{n}) K(\zeta) d\theta(\mathbf{n}), \quad \zeta = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{y}) \end{aligned} \quad (42)$$

式(41)の右辺第2項は $M=4$ に対応し、部分積分を実行して求めた $\partial F_{44}^* / \partial s$ を式(24)に代入して次式で与えられる。

$$U_{II44}^*(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi \frac{\ln|\mathbf{n} \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{y})|}{\alpha(\mathbf{n})} d\theta(\mathbf{n}) \quad (43)$$

従って、式(42)と(43)から、 U_{KM}^* ($K=4, M=1\sim 4$) は次式となる。

$$U_{4M}^* = U_{I4M}^* + \delta_{4M} U_{II4M}^* \quad (M=1, 2, 3, 4) \quad (44)$$

2.4 応力と電束密度基本解

応力と電束密度の基本解 T_{JM}^* は、式(16), (17)に前節で得られた基本解 U_{KM}^* の座標微分 $U_{KM,\mu}^*$ を代入して得られる。式(36)および(42), (43)の \mathbf{x} 座標による微分は、いずれも核関数 $K(\zeta)$, $\zeta = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{y})$ および $\ln|\zeta|$ についての \mathbf{x} 座標による微分となる。すなわちこれらは、以下ようになる。

$$U_{KM,\mu}^* = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\pi E_{kM}(\mathbf{n}) K(\zeta)_{,\mu} d\theta(\mathbf{n}) \quad (45)$$

$$\begin{aligned} U_{I4M,\mu}^* &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\pi \frac{\beta_k(\mathbf{n})}{\alpha(\mathbf{n})} E_{kM}(\mathbf{n}) K(\zeta)_{,\mu} d\theta(\mathbf{n}) \\ &\quad (M=1, 2, 3, 4) \end{aligned} \quad (46)$$

$$U_{II44,\mu}^* = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi \frac{n_\mu}{\alpha(\mathbf{n}) \zeta} d\theta(\mathbf{n}) \quad (47)$$

ただし、 $\mu=1, 3$ である。また、

$$K(\zeta)_{,\mu} = k_m n_\mu Q(\eta), \quad (\eta = km|\zeta|) \quad (48)$$

$$Q(\eta) = \text{sgn}(\zeta) [-\pi \cos \eta - 2\{(A_1 + A_2) + (B_1 + B_2)\}]$$

$$A_1 = -\sin \eta \{-\gamma + \ln \eta - Ci(\eta)\}$$

$$A_2 = \cos \eta \{1/\eta - 1 + (\cos \eta / \eta)\}$$

$$B_1 = \cos \eta \{-\pi/2 + Si(\eta)\}$$

$$B_2 = \sin \eta (\sin \eta / \eta)$$

である。

これらを用いて、表面力の基本解 T_{kM}^* , ($k=1, 2, 3$) は、 m_i を境界領域 Γ の外向き単位法線ベクトルとして式(16)の関係式は、式(45)から(47)の $U_{KM,\mu}^*$ を代入して、

$$T_{kM}^* = C_{ikj\mu} U_{jM,\mu}^* m_i + e_{\mu ki} U_{4M,\mu}^* m_i \quad (49)$$

となる。また式(4)で与えられる電束密度ベクトルの基本解 D_i^* を用いて、式(17)の表面電荷密度 $T_{4M}^* = D_{iM}^* m_i$ は、

$$T_{4M}^* = e_{ik\mu} m_i U_{kM,\mu}^* - \epsilon_0 (\epsilon_r)_{i\mu} m_i U_{4M,\mu}^* \quad (50)$$

ここで、 ϵ_0 は真空の誘電率、 $(\epsilon_r)_{i\mu}$ は比誘電率である。

3. Cauchy の主値積分の手法

2次元の場合には、式(36)~(48)に見られるように、基本解 U_{KM}^* , T_{KM}^* を計算する Radon 逆変換に際して核関数 $K(\eta)$ とその導関数 $Q(\eta)$ において、 $\eta = k_m \mathbf{n} \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{y}) = 0$ を満たす条件で特異点を含む積分に遭遇する。そのため通常の数値積分により全区間 $\theta = 0 \sim \pi$ をそのまま積分しても基本解の値を精度良く評価することができない。この積分は次のような Cauchy の主値⁽⁵⁾ ⁽⁶⁾として評価する。すなわち、特異点 c を含む積分において、次式で定義されるものである。

$$v.p. \int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \left[\int_a^{c-\epsilon} f(x) dx + \int_{c+\epsilon}^b f(x) dx \right] \quad (51)$$

本研究においては、Radon 逆変換の計算に際して有限の積分値を得るために、式(36), (45)の場合には以下のようにした。

まず、特異点 $\zeta = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{y}) = 0$ なる単位ベクトル \mathbf{n} の方位角 θ_0 を中心として対称なサンプリング点 θ_j を等間隔に多数配置する。また特異点を含む区間において、 θ_j における式(36), (45)の被積分関数 G^1, G^2 のサンプル値を次式で与える。

$$\begin{aligned} G_j^1 &= \frac{1}{4\pi^2} \left[E_{kM}(\mathbf{n}_j) \{ K(\zeta_j) + 2 \ln |\zeta_j| \} \right. \\ &\quad \left. - E_{kM}(\mathbf{n}_j) \{ v.p. \int_{a_j}^b 2 \ln |\zeta| d\theta \} / d\theta_j \right] \end{aligned} \quad (52)$$

$$\begin{aligned} G_j^2 &= \frac{1}{4\pi^2} \left[E_{kM}(\mathbf{n}_j) \left\{ K(\zeta_j)_{,\mu} + \frac{2}{\zeta_j} \right\} \right. \\ &\quad \left. - E_{kM}(\mathbf{n}_j) \left\{ v.p. \int_{a_j}^b \frac{2}{\zeta} d\theta \right\} / d\theta_j \right] \end{aligned} \quad (53)$$

ただし、各々第1項は非正則な部分 ($2 \ln |\zeta|$, $2/\zeta$) を分離した正則な部分、第2項は非正則な部分の解析的積分値を区間 $d\theta_j$ で割った近似関数である。また、 θ_j は $-\pi/2 \leq \theta_j - \theta_0 \leq \pi/2$ の範囲をとる。特に特異点 θ_0 を含む区間 $[-a_j, +a_j]$ においては、十分に区間長 $2a_j$ を小さくすれば、式(36)と(45)の $E_{kM}(\mathbf{n})$ はこの区間内で一定とみなせるから、式(52), (53)の第2項が導ける。式(51)から、式(52)の主値は $-4|a_j \ln(a_j) - a_j|$ 、式(53)の主値は 0

となる。

従って式(36)の U_{kM}^* は、1例として2次の内挿関数 ϕ^k ($k=1, 2, 3$) および6積分点のGauss積分公式を用いて、式(52)から次式のように部分 Δ_j の総和で与えられる ($U_{kM,\mu}^*$ も同様)。

$$\sum \Delta_j = \sum_{j=1}^n \left[\sum_{i=1}^6 f^j(\xi_i) w_i \right] \quad (54)$$

ただし、

$$f^j(\xi_i) = \sum_{k=1}^3 \phi^k(\xi_i) G_k^q J^k(\xi_i) \quad (q=1, 2) \quad (55)$$

$$\phi^1(\xi) = \frac{1}{2}\xi(\xi-1), \phi^2(\xi) = (1-\xi)(1+\xi), \phi^3(\xi) = \frac{1}{2}\xi(\xi+1) \quad (56)$$

また、 ξ ($-1 \leq \xi \leq 1$) は無次元座標、 $J^k(\xi)$ は円弧を2次関数で近似することによるヤコビアン、 w_i は重み係数である⁷⁾。

4. 解析例

以上導出した2次元BEMの基礎式に基づき、積分方程式(21)を一定要素で離散化して解析コードを作成した。解析コードの検証を目的とし、つぎに述べる振動片の振動変位の計算を行い、2D-BEMによる調和振動解析と理論解析結果とを比較した。

振動片は x_1, x_3 軸からなるデカルト座標系で記述された矩形の平面形状を有し、水晶結晶の光軸方向を x_3 軸として 0.5λ の長さ寸法 $a = 31.615$ [μm]、また電気軸方向を x_1 軸として 0.04λ の幅寸法 $b = 2.5292$ [μm]とする。ただし、 λ は x_3 軸方向に伝搬する縦波速度の波長、 $\lambda = v/f$ 、 $v = 6323$ [m/sec]、共振周波数 $F = 100$ [MHz]である。ただし、単位の表示はSI接頭語を使用する。

つぎに比較するための理論解としては、振動状態を1次元化して定量的比較する目的で、振動片の x_3 軸方向の両端に式(14)の表面力 $T_1 = T_2 = 0$ 、 $T_3 = \pm\sigma$ 、 $\sigma = 1$ [MPa]で加振し、変位の x_1 軸成分 U_1 、平面に垂直な x_2 軸成分 U_2 および電位 φ を0とした。また、動作周波数 f は共振周波数 F から十分離れた $0.5F$ を選択した。この条件において、 x_3 軸方向変位の振幅 $U_3(x_3)$ は、 $U_1, U_2 = 0$ 、 $U_{3,11} = 0$ の条件下で次の微分方程式が導かれる。

$$c_{33}U_3(x_3)_{,33} + \rho\omega^2U_3(x_3) = 0 \quad (57)$$

ここで、 $c_{33} = C_{3333} = 105.9$ [GPa]は水晶の弾性定数⁸⁾、 $\rho = 2.6487$ [kg/m^3]は密度、 $\omega = 2\pi f$ [rad/sec]は角周波数である。振幅の理論解は次式となる。

$$U_3(x_3) = A\sin(kx_3) + B\cos(kx_3) \quad (58)$$

ただし、

$$A = \sigma/(kc_{33}), \quad B = -\sigma\{1 - \cos(ak)\}/\{kc_{33}\sin(ak)\}$$

$$k = \omega/v = 2\pi f/v, \quad v = \sqrt{c_{33}/\rho} = 6323 \text{ [m/sec]}$$

である。

一方、BEMの計算においては、幅 x_1 方向は4等分割、長さ x_3 方向は10等分割の合計28個の一定要素を用い(Fig. 2参照)、Radon逆変換のための半円周積分は、1度ずつ分割した180節点を使用して3点ずつを2次の内挿関数で補間し、いずれも6積分点のGauss積分公式により計算した。また固有ベクトル E_m は式(29)をCardano法により3次方程式を解いて求め、連立方程式はGaussの消去法で計算した。水晶の材料定数はつぎを使用した。弾性定数[GPa]はそれぞれ $c_{11} = 86.83$ 、 $c_{33} = 105.9$ 、 $c_{44} = 58.26$ 、 $c_{66} = 39.877$ 、 $c_{12} = 7.08$ 、 $c_{13} = 11.95$ 、 $c_{14} = c_{36} = -18.07$ 、圧電定数[C/m^2]はそれぞれ $e_{12} = -e_{11} = e_{26} = 0.171$ 、 $e_{25} = -e_{14} = 0.0406$ 、比誘電率は $\epsilon_{r11} = \epsilon_{r22} = 4.43$ 、 $\epsilon_{r33} = 4.63$ とした。

つぎに計算結果を示す。Fig. 3は理論解と本研究で示すBEMとの比較である。BEMの計算条件としては、振動片の周囲境界における変位の x_1 軸成分 U_1 、平面に垂直な x_2 軸成分 U_2 および電位 φ を0に拘束した。また表面力成分 T_3 の周波数 f は $0.5F$ の場合である。振幅 $U_3(x_3)$ は、 $0.1 < x_3/a < 0.9$ の範囲で、2.6%以内の相対差で一致している。つぎにFig. 4は電場のみを計算したものである。振動片の長手方向(x_3 軸)両端の電圧を ± 1 [V]、側面電束密度 $D_n = 0$ に設定した場合で、各点は振動片の外周の各要素が示す電位 φ であり、側面の要素番号5から14および19から28にかけて、理論的にも妥当な直線的変化が得られている。さらにFig. 5とFig. 6は、各要素の変位成分 U_1, U_2, U_3 (Fig. 5)と電束密度 D_n (Fig. 6)の計算結果である。計算条件は、振動片の周囲境界において、電位 $\varphi = 0$ で変位の拘束をせずに、動作周波数 $f = 0.5F$ で両端加振している。ひずみ S_{11} のみが寄与するため、電束密度は $D_n = e_{11}S_{11}$ で与えられる。Fig. 5において、中央部の要素番号10と23における変位 U_1 の差 -4.22×10^{-12} を幅 b 割って得られる $S_{11} = -1.67 \times 10^{-6}$ から、 $D_n = 2.85 \times 10^{-7}$ が得られる。これはFig. 6の中央値に近い値となっている。またポアソン比 $|S_{11}/S_{33}|$ は、同様にして得られる $S_{33} = 7.80 \times 10^{-6}$ から0.214と算出でき、熔融石英の0.17に近い値となっている。

5. 結言

本研究では、2次元解析が有効な弾性表面波デバイスの特性計算を目的として、計算機リソースの軽減できると考えられる2D-BEMの解析コードの開発を検討した。3D-BEM基礎式を2次元化処理して2D-BEMの基礎式を導出した。2次元問題の定式化において特異な現象として、Radon逆変換に際しての特異

積分がある。これについては、Cauchyの主値積分の意味で近似計算することにより、十分な精度が得られることがわかった。また解析コードの検証のために、水晶からなる矩形形状を有する振動片の1次元調和振動解析を行い、理論計算結果とほぼ良好な一致が得られた。今後は、さらに2次元調和振動解析の検証も行いSAWデバイスの解析に適用する必要がある。

参考文献

- (1) M. Denda, C.Y. Wang, Y.K. Yong: 2-D time-harmonic BEM for solids of general anisotropy with application to eigenvalue problems, *Journal of Sound and Vibration* **261**(2003), pp. 247-276.
- (2) M. Denda, Y.K. Yong: Two-dimensional boundary element analysis of quartz surface wave resonators, *IEEE FCS*, (2000), pp. 290-295.
- (3) 松本敏郎, 田中正隆, 神谷志輔, 鮫島悠之: 圧電材料の境界要素法による3次元定常振動解析の効率化, *計算理工学*, **5** (2005), pp. 67-72.
- (4) S. Helgason: *The Radon Transform*, Birkhäuser, Boston, 2nd ed., (1998), pp. 18-19.
- (5) M. Ameen: *Computational elasticity*, Alpha Science International Ltd., Harrow, U.K., (2005), pp. 490-492.
- (6) M. Guiggiani: Computing principal value integrals in 3D BEM for time-harmonic elastodynamics-a direct approach, *Communications in Applied Numerical Methods*, **8** (1992), pp. 141-149.
- (7) 田中正隆, 松本敏郎, 中村正行: 境界要素法, 培風館, (1991), pp. 55-62.
- (8) 柴山幹夫編集: 弾性波素子技術ハンドブック, 日本學術振興会弾性波素子技術第150委員会, オーム社, (1991), pp. 541-542.

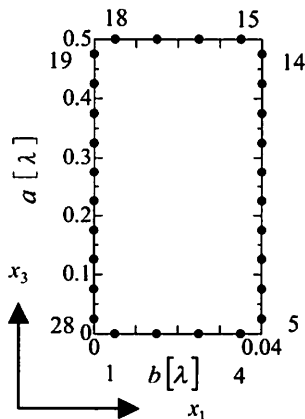


Fig. 2 Element's positions on a resonator chip.

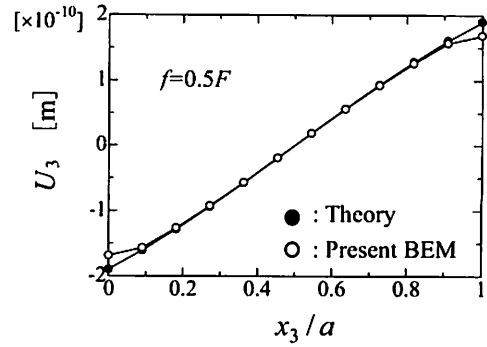


Fig. 3 Results for U_3 for $f = 0.5F$.

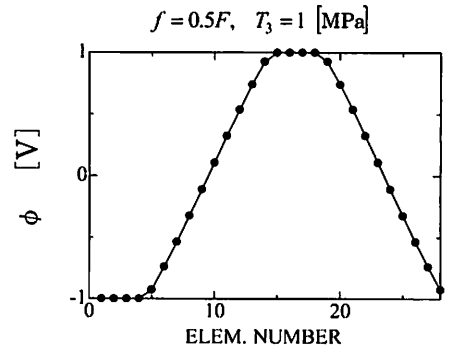


Fig. 4 Electric potential calculated by present 2D-BEM.

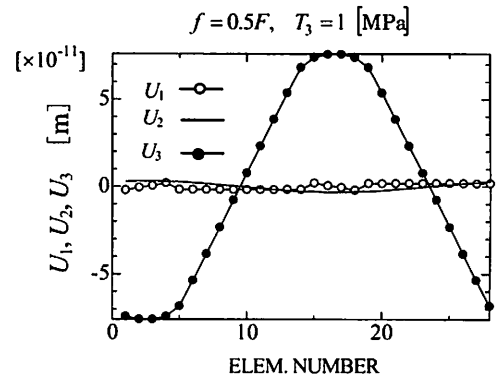


Fig. 5 Displacements U_1, U_2, U_3 calculated by 2D-BEM.

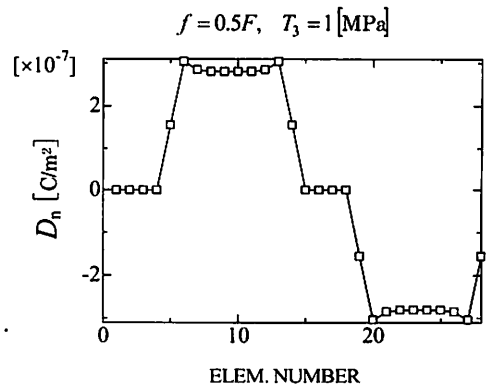


Fig. 6 Electric displacement D_n calculated by 2D-BEM.