

# 温度依存性材料における非定常熱伝導問題への ハイブリッド境界節点法の応用

## THE HYBRID BOUNDARY NODE METHOD APPLIED TO THE TRANSIENT HEAT CONDUCTION PROBLEMS

白坂 英雄<sup>1)</sup>, 田中 正隆<sup>2)</sup>, Jianming ZHANG<sup>3)</sup>

Hideo SHIRASAKA, Masataka TANAKA and Jianming ZHANG

- 1) (株) 東芝 PC 設計部門 (〒198-8710 東京都青梅市末広町 2-9, E-mail: h-shirasaka@artist.shinshu-u.ac.jp)  
 2) 信州大学工学部 (〒380-8553 長野市若里 4-17-1, E-mail: dtanaka@gipwc.shinshu-u.ac.jp)  
 3) 信州大学工学部 (〒380-8553 長野市若里 4-17-1, E-mail: zhangjm@homer.shinshu-u.ac.jp)

In this paper, the hybrid boundary node method (HdBNM) is extended to the solution of potential problems in three dimensions which are governed by a Poisson-type differential equation. Even in the HdBNM, the collocation points are located on the boundary as well as in the internal domain. The solution of the problem can be the sum of the general solution to the homogeneous differential equation and to the particular solution of the non-homogeneous differential solution. The general solution is obtained in the usual manner of the HdBNM, while the particular solution is searched by distributing an appropriate number of the collocation points in the domain. The radial basis function (RBF) is also applied to evaluate the volume integrals in this solution. The usefulness of the proposed solution procedure is demonstrated through computation of 3-D samples of the transient heat conduction problem in a temperature-dependent material.

**Key Words:** Meshless Method, Hybrid Boundary Node Method, Transient Heat Conduction Problem, Temperature-dependent Materials, Fundamental Solution, RBF

### 1. まえがき

本報では、温度依存性材料の非定常熱伝導問題に対するメッシュレス解法に基づく効率的な数値解析手法について提案する。熱伝導問題では熱伝導率などの材料定数を一定と仮定して解析を行うことが多いが、高温状態では熱伝導率は温度に依存するため、温度依存材料として扱わなければならない。この場合には温度依存材料は非線形熱伝導問題となり、熱伝導率を一定と仮定した場合に比べて、解析は容易ではない。線形問題に対するメッシュレス解法の一つとして、境界型のメッシュレス解法であるハイブリッド境界節点法 (Hybrid Boundary Node Method=HdBNM) が提案されている。変分原理に移動最小自乗近似 (MLS) を結合した HdBNM は要素分割を一切必要とせず、領域表面に節点を配置するだけでよいメッシュレス解法である。

本研究では、HdBNM を用いて Poisson 型の支配微分方程式で表される熱伝導問題へ拡張した。この場合、Poisson 型の支配微分方程式の非同次項を扱わなければならない。境界及び、領域への点の配置を必要とする。非同次方程式の一般解

を近似関数で直接的に近似する方法<sup>(1)</sup>に対して、本手法においては同次方程式の一般解と非同次方程式の特解の和により間接的に非同次方程式の一般解を求める。同次方程式の一般解は HdBNM により得られる。一方、非同次方程式の特解は、領域に適当に点を配し、距離基底関数 (RBF) を導入することにより求められる。本報では定式化の詳細と開発した解析プログラムによる温度依存材料における 3次元定非常熱伝導問題解析例を示し、本手法の有効性について検討する。

### 2. 理論的背景

熱伝導率が温度に依存して連続的に変化する非定常熱伝導問題に対する支配微分方程式は、内部発熱がない場合、次式で与えられる。

$$\nabla\{\lambda(u)\nabla u(x,t)\} = \rho c \dot{u}(x,t) \quad (1)$$

ただし、 $u(x,t)$  は温度、 $\lambda(u)$  は熱伝導率、 $\rho$  は密度、 $c$  は比熱、 $\nabla$  は微分演算子を表すものとする。上式において境界条

件は次式ようになる。また、非定常熱伝導での初期条件は問題ごとに初期温度が指定される。

$$\begin{aligned} u(x) &= \bar{u} && \text{on } \Gamma_u \\ q(x) &= \frac{\partial u(x)}{\partial n} = \bar{q} && \text{on } \Gamma_q \\ \lambda(u) \frac{\partial u(x,t)}{\partial n} + h\{u(x,t) - u_a\} &= 0 && \text{on } \Gamma_a \\ u(x,0) &= u_0 \end{aligned} \quad (2)$$

$n$  は境界  $\Gamma$  上の単位外向き法線ベクトルであり、 $\partial u(x,t)/\partial n$  は  $u(x,t)$  の法線方向勾配を表すものとする。また  $\Gamma_u$ ,  $\Gamma_q$ ,  $\Gamma_a$  はそれぞれ温度既知境界, 熱流束既知境界, 対流伝達境界である。 $\bar{u}$ ,  $\bar{q}$ ,  $u_0$  は既知の境界値および初期値である。 $h$  は熱伝達率,  $u_a$  は外部雰囲気温度である。式 (1) は次式のように展開することができる。

$$\nabla^2 u(x,t) = \frac{-1}{\lambda(u)} \left\{ \nabla \lambda(u) \nabla u(x,t) - \rho c \dot{u}(x,t) \right\} \quad (3)$$

式 (3) は、非同次形であり、その一般解は次式のように、同次形の一般解  $u^h$  及び、非同次形の特解  $u^p$  の和として表す。

$$u = u^h + u^p \quad (4)$$

これより境界条件は以下のように書き改める。

$$\begin{aligned} u^h &= \bar{u} - u^p && \text{on } \Gamma_u \\ q^h &= \bar{q} - q^p && \text{on } \Gamma_q \end{aligned} \quad (5)$$

同次形の一般解  $u^h$  については、次式のように近似する。

$$u^h = \sum_{\ell=1}^N u^*(x, y_\ell) \alpha_\ell \quad (6)$$

ここで、 $N$  は境界節点数、 $\alpha$  は  $N$  個の未定係数である。 $u^*$  は次式のような 3 次元 Laplace 方程式の基本解である。

$$u^*(x, y_\ell) = \frac{1}{4\pi r(x, y_\ell)} \quad (7)$$

式 (3) の非同次項について次式のように近似する。

$$\frac{-1}{\lambda(u)} \left\{ \nabla \lambda(u) \nabla u(x,t) - \rho c \dot{u}(x,t) \right\} = \sum_{m=1}^{N+L} f(x, z_m) \beta_m \quad (8)$$

ここで、式 (8) に含まれる温度の時間微分  $\dot{u}(x,t)$  に差分近似を適用する。このとき、初回の計算においては後退差分近似、2 回目以降の計算においては二次曲線差分近似を適用するものとする。初回の計算における近似式は次式となる。

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{u(x,t) - u(x,t - \Delta t)}{\Delta t} \quad (9)$$

ただし、 $\Delta t$  はタイムステップ幅、 $u(x,t - \Delta t)$  は 1 ステップ前の温度を表す。また 2 回目以降の差分近似に次式を適用する。

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{3u(x,t) - 4u(x,t - \Delta t) + u(x,t - 2\Delta t)}{2\Delta t} \quad (10)$$

1 ステップ又は、2 ステップ前の各点における温度を見かけの初期条件とする。これより、式 (8) は次式のようになる。

$$\begin{aligned} -\frac{\nabla \lambda(u)}{\lambda(u)} \nabla u(x,t) + \frac{\rho c}{\lambda(u) \Delta t} k_o u(x,t) - \frac{\rho c}{\lambda(u) \Delta t} k_p u_0 \\ = \sum_{m=1}^{N+L} f(x, z_m) \beta_m \end{aligned} \quad (11)$$

ただし、 $N$  は境界節点数、 $L$  は内部選点数、 $u_0$  は見かけの初期条件、 $k_o, k_p$  は用いる差分近似に対応した係数、 $\beta_m$  は未定係数、 $z_m$  は選点を表すものとする。 $f(x, z_m)$  は近似関数であり Compactly Supported Radial Basis Function<sup>(5)(6)</sup> と呼ばれる観測点と選点との距離の関数を使用する。ここで用いる近似関数は次式のような WendLand 関数の  $C^2$  級の関数を使用する。 $a$  は近似関数の影響半径である。

$$f(x, z_m) = \begin{cases} (1 - r_m/a)^4 (4r_m/a + 1) & 0 \leq r_m \leq a \\ 0 & r_m > a \end{cases} \quad (12)$$

ここで、近似関数の特解  $F(x, z_m)$  は次式のようになる。

$$\nabla^2 F(x, z_m) = f(x, z_m) \quad (13)$$

非同次形の特解  $u^p$  は次式のようになる。

$$u^p(x) = \sum_{m=1}^{N+L} F(x, z_m) \beta_m \quad (14)$$

次式は (6) を座標一階微分したものである。

$$\nabla u^h(x) = \sum_{\ell=1}^N \nabla u^*(x, y_\ell) \alpha_\ell \quad (15)$$

また次式は式 (14) を座標一階微分したものである

$$\nabla u^p(x) = \sum_{m=1}^{N+L} \nabla F(x, z_m) \beta_m \quad (16)$$

式 (4) を座標一階微分したものに式 (15), (16) を代入しさらに式 (11) に代入し整理することで次式のような未定係数  $\alpha_\ell$ ,  $\beta_m$  の関係式を得る。

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^N \left( \nabla u^* \frac{\nabla \lambda(u)}{\lambda(u)} + \frac{\rho c}{\lambda(u) \Delta t} k_o u^* \right) \alpha_\ell \\ + \sum_{m=1}^{N+L} \left( \nabla F \frac{\nabla \lambda(u)}{\lambda(u)} + f + \frac{\rho c}{\lambda(u) \Delta t} k_o F \right) \beta_m = \frac{\rho c}{\lambda(u) \Delta t} k_p u_0 \end{aligned} \quad (17)$$

式中の  $\nabla \lambda(u)$  は次式のように展開することができる。

$$\frac{\partial \lambda(u)}{\partial x_i} = \frac{\partial \lambda(u)}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad (18)$$

また、式 (18) 中の温度  $u$  の座標微分については近似関数を用いて評価する。まず、温度  $u(x,t)$  を次式で近似する。

$$u(x,t) = \sum_{m=1}^{N+L} g(x, z_m) \gamma_m \quad (19)$$

ただし、 $\gamma_m$  は未定係数を表す。ここで上式を 1 階微分すると次式を得る。

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i} = \sum_{m=1}^{N+L} \frac{\partial g(x, z_m)}{\partial x_i} \gamma_m \quad (20)$$

式 (19), (20) が全ての境界節点と内部選点に対して成り立つと仮定すると未知係数  $\gamma$  が消去でき、温度の座標微分は近似関数をマトリック成分とする  $\mathbf{J}$ , 及び座標微分した  $\mathbf{J}_{x_i}$  を用いて次式のように評価することができる。

$$\mathbf{u}_{x_i} = \mathbf{J}_{x_i} \mathbf{J}^{-1} \mathbf{u} \quad (21)$$

同様に  $\nabla u^*$  についても近似関数を用いて次式のように評価することで、 $\nabla u^*$  中の  $1/r^3$  の特異性を回避できる。ただし、式 (21) 中には  $1/r$  の特異性を有するので、ソース点と観測点一致する場合には、ソース点を内部方向に微小にずらすことで発散を回避する。移動量は近傍点との距離を  $r_n$  とすると  $0.3r_n$  とする。

$$\mathbf{u}_{\mathbf{x}_i}^* = \mathbf{J}_{\mathbf{x}_i} \mathbf{J}^{-1} \mathbf{u}^* \quad (22)$$

式 (17) で、未定係数  $\alpha_\ell$  に掛かる係数を  $\mathbf{G}$ 、未定係数  $\beta_m$  に掛かる係数を  $\mathbf{F}$  として次式のようなマトリックス形式で表す。

$$[\mathbf{G}]\{\boldsymbol{\alpha}\} + [\mathbf{F}]\{\boldsymbol{\beta}\} = k_p \{\mathbf{u}_0\} \quad (23)$$

$2N + L$  個の未定係数に対して上式は  $N + L$  個の式であり、全ての未定係数を求めるためには残り  $N$  個の式が必要となる。これより、 $N$  個の式の導出を行う。均質材料における HdBNM は最終的に以下の式 (2) より境界未知量を求める。

$$\sum_{I=1}^N \int_{\Gamma_s} \frac{\partial u_I^*}{\partial n} \nu_J(x) \alpha_I d\Gamma = \sum_{I=1}^N \int_{\Gamma_s} \Phi_I \nu_J(x) q_I^h d\Gamma \quad (24)$$

$$\sum_{I=1}^N \int_{\Gamma_s} u_I^* \nu_J(x) \alpha_I d\Gamma = \sum_{I=1}^N \int_{\Gamma_s} \Phi_I \nu_J(x) u_I^h d\Gamma \quad (25)$$

ここで、 $\nu$  は重み関数、 $\Phi$  は形状関数、 $N$  は総節点数を表す。解析領域を  $\Omega$  とし、その境界面を  $\Gamma$ 、境界面に配した節点を中心に移動最小自乗近似により球体のサブドメインを形成。これを  $\Omega_s$  とし、 $\Omega_s$  と  $\Gamma$  の共有する面を  $\Gamma_s$  とする。2 式をマトリックス形式で書き表すと次式となる。

$$[\mathbf{U}]\{\boldsymbol{\alpha}\} = [\mathbf{H}]\{\mathbf{q}^h\} \quad (26)$$

$$[\mathbf{V}]\{\boldsymbol{\alpha}\} = [\mathbf{H}]\{\mathbf{u}^h\} \quad (27)$$

ここで

$$U_{IJ} = \int_{\Gamma_s} \frac{\partial U_I}{\partial n} \nu_J(x) d\Gamma \quad (28)$$

$$V_{IJ} = \int_{\Gamma_s} U_I \nu_J(x) d\Gamma \quad (29)$$

$$H_{IJ} = \int_{\Gamma_s} \Phi_I \nu_J(x) d\Gamma \quad (30)$$

$$\boldsymbol{\alpha}^T = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N] \quad (31)$$

$$\mathbf{q}^{hT} = [q_1^h, q_2^h, \dots, q_N^h] \quad (32)$$

$$\mathbf{u}^{hT} = [u_1^h, u_2^h, \dots, u_N^h] \quad (33)$$

式 (14) における  $u^p$  及びその法線方向勾配である  $q^p$  を次式のようにマトリックス形式で表す。

$$\{\mathbf{u}^p\} = [\mathbf{F}]\{\boldsymbol{\beta}\} \quad (34)$$

$$\{\mathbf{q}^p\} = \left[ \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial n} \right] \{\boldsymbol{\beta}\} \quad (35)$$

式 (5) の境界条件に式 (34)、(35) を代入したうえで境界全体に関して式 (26)、(27) へ適用し整理したものが次式となる。

$$[\mathbf{H}]^{-1}[\mathbf{V}]\{\boldsymbol{\alpha}\} + [\mathbf{F}]\{\boldsymbol{\beta}\} = \{\hat{\mathbf{u}}\} \quad (36)$$

$$[\mathbf{H}]^{-1}[\mathbf{U}]\{\boldsymbol{\alpha}\} + \left[ \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial n} \right] \{\boldsymbol{\beta}\} = \{\hat{\mathbf{q}}\} \quad (37)$$

$\hat{\mathbf{u}}$ 、 $\hat{\mathbf{q}}$  は境界上の値であることを示し、未知量、既知量それぞれを含んでいるものとする。また対流熱伝達境界においては、次式が成り立つ。

$$\frac{1}{h} \hat{\mathbf{q}} + \hat{\mathbf{u}} = u_a \quad (38)$$

上式について式 (36)、(37) を適用することで、次式を得る。

$$\left( \frac{1}{h} [\mathbf{H}]^{-1}[\mathbf{U}] + [\mathbf{H}]^{-1}[\mathbf{V}] \right) \{\boldsymbol{\alpha}\} + \left( \frac{1}{h} [\partial \mathbf{F} / \partial n] + [\mathbf{F}] \right) \{\boldsymbol{\beta}\} = \{\mathbf{u}_a\} \text{ on } \Gamma_{u_a} \quad (39)$$

式 (36)、(37) 及び式 (39) において境界条件として規定するものを次式のように集める。

$$[\mathbf{A}] = \begin{cases} [\mathbf{H}]^{-1}[\mathbf{V}] & \text{on } \Gamma_u \\ [\mathbf{H}]^{-1}[\mathbf{U}] & \text{on } \Gamma_q \\ \left( \frac{1}{h} [\mathbf{H}]^{-1}[\mathbf{U}] + [\mathbf{H}]^{-1}[\mathbf{V}] \right) & \text{on } \Gamma_a \end{cases} \quad (40)$$

$$[\mathbf{B}] = \begin{cases} [\mathbf{F}] & \text{on } \Gamma_u \\ [\partial \mathbf{F} / \partial n] & \text{on } \Gamma_q \\ \left( \frac{1}{h} [\partial \mathbf{F} / \partial n] + [\mathbf{F}] \right) & \text{on } \Gamma_a \end{cases} \quad (41)$$

$$[\mathbf{C}] = \begin{cases} \{\hat{\mathbf{u}}\} & \text{on } \Gamma_u \\ \{\hat{\mathbf{q}}\} & \text{on } \Gamma_q \\ \{\mathbf{u}_a\} & \text{on } \Gamma_a \end{cases} \quad (42)$$

式 (36)、(37) 及び式 (39) を一つにまとめたものが次式となる。

$$[\mathbf{A}]\{\boldsymbol{\alpha}\} + [\mathbf{B}]\{\boldsymbol{\beta}\} = [\mathbf{C}] \quad (43)$$

上式と式 (23) とを連立させて解くことにより未定係数  $\boldsymbol{\alpha}$ 、 $\boldsymbol{\beta}$  を求めることができる。しかし、 $\lambda(u)$ 、 $\nabla \lambda(u)$  は未知温度を含んでいるために非線形問題となり、このままでは計算することができない。この非線形性に対し、本研究では繰り返し計算により計算を行う。まず 1 ステップ前の温度を仮定する温度として、 $\lambda(u)$ 、 $\nabla \lambda(u)$  を計算して、得られた温度を新たに仮定する温度とし、同様の計算を行う。仮定した温度と得られた温度が十分近い値になるまで、この計算を繰り返す。ここで収束判定には次式を用いた。

$$\frac{|u - u'|}{u_\gamma} < 0.001 \quad (44)$$

ただし、 $u$  は温度の計算結果、 $u'$  は仮定した温度、 $u_\gamma$  は基準温度である。

### 3. 例題解析と考察

Fig.1 に示すような一辺が 0.2[m] の立方体モデルを用いて数値解析を行う。境界節点を 1 面当り 25 点、計 150 点。領域においては、各軸方向に境界節点の位置に合わせる形で 5 点、計 125 点を配置する。境界条件を  $x_1$  軸に垂直な面において外部雰囲気温度 500[°C]、熱伝達率 2000[W/m<sup>2</sup>K] の対流熱伝達境界条件、その他の面においては断熱境界条件  $q = 0$ [W/m<sup>2</sup>] を与えるものとする。また、初期温度は領域全体に一様に 100[°C] として与える。影響半径  $a = 1.0$  とする。材料定数は、密度 7800[kg/m<sup>3</sup>]、比熱 440[J/kgK] とし、熱伝導率  $\lambda$  は温度に依存するように次式で仮定する。

$$\lambda(u) = 98.43 - 0.09155u + 2.554 \times 10^{-5}u^2 \quad (45)$$

比較対象として、 $x_2$  方向のみを考えた 1 次元の差分近似を用いた。タイムステップ幅が 10 秒の HdBNM、1 秒の FDM 及び、温度に依存せず、熱伝導率を初期状態から一定とした場合の厳密解の温度分布を Fig.3 に示す。ただし HdBNM は  $x_1 = 0.1$ [m]、 $x_3 = 0.1$ [m] における  $x_2$  方向の内点における温

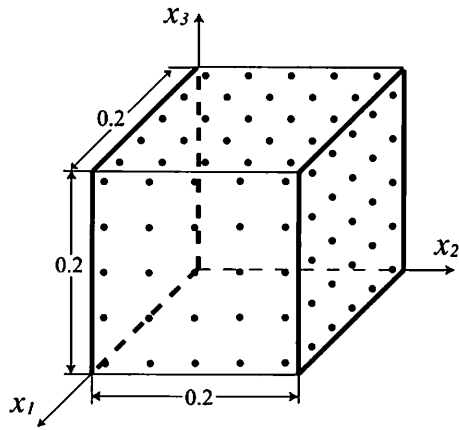


Fig. 1 Analysis model and boundary node

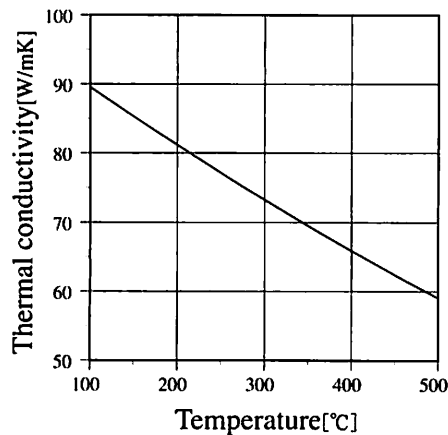


Fig. 2 Temperature dependence of thermal conductivity

度分布である。温度依存性材料は、温度の上昇に伴って熱伝導率が低下しているため、熱伝導率が一定の場合に比べ、温度上昇率は低下する。故に、HdBNM 及び、FDM の結果に温度依存性の影響が現れていることが分かる。また、タイムステップ幅の影響も無く、HdBNM と FDM ではほぼ一致した解を得ている。また Fig.4 においては、 $x_1$  に垂直で  $x_2 = 0.2$  [m] の面における 20 秒ごとの熱流速の分布を示す。立ち上がりで、FDM と HdBNM において、大きな差異が観られるが、これはタイムステップ幅を大きく採ったためであると考えられる。それ以降はほぼ一致していることから、大きな時間ステップ幅においても、全体的な精度への影響は少ないと考えられる。

#### 4. あとがき

本研究では、境界型のメッシュレス解法であるハイブリッド境界節点法 (HdBNM) を用いて、支配微分方程式が Poisson 型の方程式となる温度依存性材料へ適用するための定式化を示した。本手法では、境界及び領域における要素分割を一切必要とせず、解析準備段階での負担を大幅に軽減できる。本手法の有効性の検討の為に、3次元立方体モデルにおいて FDM と比較した。

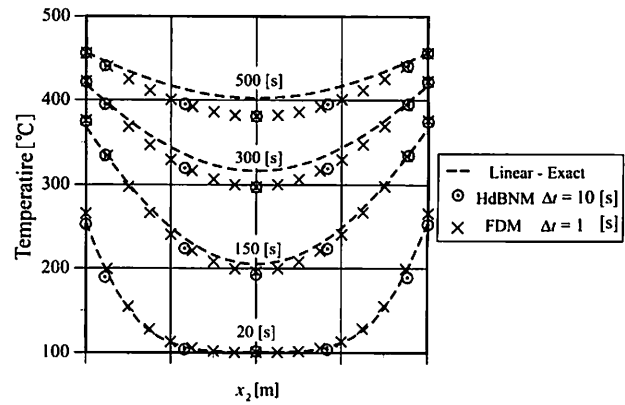


Fig. 3 Temperature distribution along axis  $x_2$

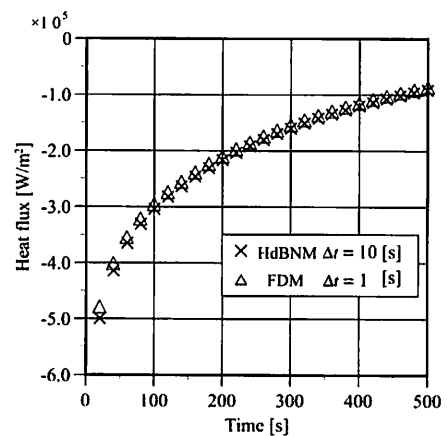


Fig. 4 Heat flux variation on  $x_1=0.2$

#### 参考文献

- (1) 田中正隆, 白坂英雄, 小池裕樹: RBF 法を用いた選点法による非定常熱伝導解析 (3次元問題での検討), 計算数理工学論文集, 6-2 (2006), pp.121-124.
- (2) M. Tanaka, J.M. Zhang, T. Matsumoto: Boundary-type meshless solutions of potential problems, 境界要素法論文集, 20 (2003), pp.21-26.
- (3) 田中正隆, 松本敏郎, 高桑晋: 温度依存性材料の非定常熱伝導問題に対する時間ステップ DRMBEM, 境界要素法論文集, 20 (2003), pp.45-50.
- (4) 田中正隆, 松本敏郎, 楊慶峰: 時間ステップ近似スキームに基づく2次元非定常熱伝導方程式の境界要素法解析, 日本機械学会論文集 (A 編), 11 (1993), pp.856-862.
- (5) P.W. Partridge, C.A. Brebbia, L.C. Wrobel: *The Dual Reciprocity Boundary Element Method*, Computational Mechanics Publications, 1992,
- (6) C.S. Chen, C.A. Brebbia, H. Power: Dual reciprocity method using compactly supported radial basis functions, *Commun. Numer. Meths. Engng.*, 15, 1999, pp.137-150.