

まくらぎ支持された無限長レールの加振応答解析

VIBRATION ANALYSIS OF A LOADED INFINITE RAIL WITH DISCRETE SUPPORTS

阿部 和久¹⁾, 古屋 卓稔²⁾, 紅露 一寛³⁾

Kazuhiisa ABE, Takutoshi FURUYA and Kazuhiro KORO

¹⁾新潟大学工学部建設学科 (〒950-2181 新潟市西区五十嵐二の町 8050, E-mail:abe@eng.niigata-u.ac.jp)²⁾新潟大学大学院自然科学研究科 (〒950-2181 新潟市西区五十嵐二の町 8050)³⁾新潟大学大学院自然科学研究科 (〒950-2181 新潟市西区五十嵐二の町 8050, E-mail:kouro@eng.niigata-u.ac.jp)

Dynamic response of a loaded infinite rail periodically supported by sleepers is analyzed. Harmonic motion of the railway track model due to vertical excitation is described by means of the Floquet principle. This theory reduces the wave propagation problem in a periodic infinite structure to that in a unit cell. The irreducible region of the periodic structure is represented by the sleeper distance. In this region the rail is modeled by a Timoshenko beam, and the sleeper is given by a mass. Rail deflection is obtained by the Floquet transform. Besides, the response sensitivity to the stiffness of rubber pads is discussed. The interaction of a stationary wheel and the railway track is also investigated. Through those analyses, the feasibility of the developed method is validated.

Key Words : railway track, receptance, periodic structure, Floquet's principle

1. はじめに

レールの動特性は、列車の走行安定性や軌道破壊、地盤振動などに影響を及ぼすため、その適切な評価が重要となる。特にレールは断面寸法に比べ長手方向に細長い構造を有しており、それに沿った方向へ伝播する波動が動的応答において支配的となる。そのため、レールを無限長の弾性体またははりとしてモデル化し、その中を伝播する波動の分散特性や変形モードなどが調べられてきた^{1),2),3)}。

なお、実際の軌道において、レールはまくらぎにより等間隔に離散支持されている。したがって、無限長周期構造としての動特性について検討することも必要となる。このような構造における波動伝播問題は、いわゆる Floquet 原理⁴⁾(2次元、または3次元場における Bloch の定理に相当)に基づき効率的に解析することができる。当該手法による場合、無限長周期構造の問題は、それを構成する最小単位(ユニットセル)の問題に帰着して解くことができる。文献^{4),5)}では、そのような定式化に基づき、剛性が周期変動する連続バネや離散バネにより支持された無限長 Euler ばりにおける波動伝播特性について検討がなされている。また著者ら⁶⁾は、レールを Timoshenko ばりによりモデル化し、まくらぎとの連成下における軌道の分散特性について、Floquet 解析を通し考察した。

軌道系における振動はレールと車輪との接触によって発生する。したがって、上述のような分散特性の把握に加え、加振応答や車輪との連成振動についての解析も有用な知見を与える。なお、実際の軌道系は何らかの減衰性

を有するため、そのような条件を考慮した解析では、十分に長い軌道モデルを採用することで打ち切り端からの反射波の影響を低減できる。しかしながら、高速走行荷重に対する準定常応答や、地盤との連成までも考慮に入れた場合の解析では、長尺または離散自由度の大きなモデルの採用を余儀なくされ、解析において計算量軽減のための何らかの工夫が必要となる。このような場合においても、Floquet 解析によれば、1つのまくらぎ区間で与えられる1ユニットの問題に帰着して解くことが可能であり、解法の効率化が期待できる。

そこで本研究では、Floquet 解析を用いた軌道系の連成振動解析手法の構築へ向けた一試みとして、レール・まくらぎより成る無限軌道の定点加振応答を対象とした解析過程を構成する。なお、Floquet 原理に基づく定点加振応答解析は既往の研究でも用いられており⁷⁾、卓越周波数とたわみ形状との関係などが検討されている。ただし、解は1ユニット内で得られる一般解に基づき構成されており、そのため複雑な連成系への展開は容易でない。以下では、Floquet 変換を活用し有限要素法による一般的離散化解法を構成する。その下で、加振応答解析の結果と前述の分散特性との対比を通し、卓越振動応答に寄与するモードについて調べる。また、レール・まくらぎ間およびまくらぎ・道床間に装着されるゴムパッドの剛性が応答に及ぼす影響について考察する。さらに、停止車輪と無限軌道系との連成振動解析に当該手法を適用し、車輪の存在が結果に及ぼす影響について確認し、それらを通して構成手法の適用性について検証する。

2. Floquet 解析の概要

本研究では、まくらぎ支持された無限長レールの加振応答解析を、Floquet 変換^{8),9)}に基づき実施する。以下に Floquet 変換の概要を示す。

2.1 Floquet 変換

一次元関数 $f(x)$, ($x \in \mathbb{R}$) の Floquet 変換 $\tilde{f}(\tilde{x}, \kappa)$ を次式で定義する。

$$\tilde{f}(\tilde{x}, \kappa) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(\tilde{x} + nL)e^{in\kappa L} \quad (1)$$

ここで、 $-L/2 < \tilde{x} < L/2$, $-\pi/L < \kappa < \pi/L$ であり、 κ を Floquet 波数と呼ぶ。

Floquet 変換は、 \tilde{x} と κ について各々次のような周期性を持つ。

$$\tilde{f}\left(\tilde{x}, \kappa + \frac{2n\pi}{L}\right) = \tilde{f}(\tilde{x}, \kappa) \quad (\text{第1種周期性}) \quad (2)$$

$$\tilde{f}(\tilde{x} + nL, \kappa) = e^{-in\kappa L} \tilde{f}(\tilde{x}, \kappa) \quad (\text{第2種周期性}) \quad (3)$$

ただし、 $n \in \mathbb{Z}$ とする。

2.2 逆 Floquet 変換

逆 Floquet 変換は次式により与えられる。

$$f(\tilde{x} + nL) = \frac{L}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{L}}^{\frac{\pi}{L}} \tilde{f}(\tilde{x}, \kappa) e^{-in\kappa L} d\kappa \quad (4)$$

2.3 無限周期構造の Floquet 解析

長さ L の周期性を有する無限に長い構造における支配方程式が次式により与えられているものとする。

$$\mathcal{L}(x)f(x) = g(x) \quad (5)$$

ここで、 \mathcal{L} は支配方程式における線形微分作用素、 $f(x)$ は解、 $g(x)$ は入力データ (外力項) である。なお、 $f(x), g(x)$ に周期性を課す必要はない。

式(5)の両辺に Floquet 変換を施すことで次式を得る。

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{L}(\tilde{x} + nL)f(\tilde{x} + nL)e^{in\kappa L} \\ = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(\tilde{x} + nL)e^{in\kappa L} \end{aligned} \quad (6)$$

当該構造は周期長 L の周期性を持つので、 $\mathcal{L}(\tilde{x} + nL) = \mathcal{L}(\tilde{x})$ が成り立つ。したがって、式(5)の Floquet 変換より最終的に次式を得る。

$$\mathcal{L}(\tilde{x})\tilde{f}(\tilde{x}, \kappa) = \tilde{g}(\tilde{x}, \kappa) \quad (7)$$

すなわち、各 κ の下で、周期長 L で与えられる 1 ユニット内の問題を設定し、それを式(3)の第2種周期性を課して解き、式(4)により逆変換を求めることで、無限周期構造の解 $f(x)$ を得ることができる。

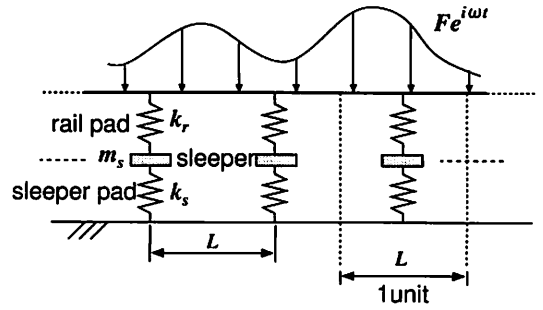


Fig. 1 A rail discretely supported by sleepers.

3. レール・まくらぎ系の調和加振解析

3.1 解析モデル

Fig.1 に示す様に、等間隔 L でまくらぎ支持されている無限長レールを考える。レールには調和加振 $F(x)e^{i\omega t}$ が鉛直方向に作用しているものとする。なお、 ω は円振動数、 t は時刻である。レールは Timoshenko ばりで与え、まくらぎは質点でモデル化する。道床は剛体とし、レール・まくらぎ間、およびまくらぎ・道床間にはそれぞれ軌道パッド k_r と防振パッド k_s が装着されている。

以上の条件の下、まくらぎ支持点が中央に位置する様に、Floquet 解析における 1 ユニットを設定する (Fig.1)。Timoshenko ばりの離散化では、たわみを 3 次 Hermite 補間、断面回転角を 3 節点 2 次補間により近似する TIM7 要素¹⁰⁾を用いた。なお、精度を確認の上、以下の解析では 1 ユニット内のレールを 6 要素で等分割した。

3.2 軌道系の Floquet 解析

式(7)を Fig.1 に示したレール・まくらぎ連成系の 1 ユニットに適用すると、次の離散化式を得る。

$$\begin{aligned} [\bar{\mathbf{v}}_1 \ \bar{\mathbf{v}}_2 \ \bar{\mathbf{v}}_3] \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} & \mathbf{K}_{13} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} & \mathbf{K}_{23} \\ \mathbf{K}_{31} & \mathbf{K}_{32} & \mathbf{K}_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{u}}_1 \\ \tilde{\mathbf{u}}_2 \\ \tilde{\mathbf{u}}_3 \end{Bmatrix} \\ - \omega^2 [\bar{\mathbf{v}}_1 \ \bar{\mathbf{v}}_2 \ \bar{\mathbf{v}}_3] \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} & \mathbf{M}_{13} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} & \mathbf{M}_{23} \\ \mathbf{M}_{31} & \mathbf{M}_{32} & \mathbf{M}_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{u}}_1 \\ \tilde{\mathbf{u}}_2 \\ \tilde{\mathbf{u}}_3 \end{Bmatrix} \\ = [\bar{\mathbf{v}}_1 \ \bar{\mathbf{v}}_2 \ \bar{\mathbf{v}}_3] \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{F}}_{01} + \tilde{\mathbf{F}}_1 \\ \tilde{\mathbf{F}}_2 \\ \tilde{\mathbf{F}}_{03} + \tilde{\mathbf{F}}_3 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (8)$$

ここで、 $\tilde{\mathbf{u}}_1, \tilde{\mathbf{u}}_3$ はそれぞれユニット左右端における節点変位の部分ベクトル、 $\tilde{\mathbf{u}}_2$ はまくらぎ鉛直変位を含む $\tilde{\mathbf{u}}_1, \tilde{\mathbf{u}}_3$ 以外の自由度成分に対応する変位ベクトルである。 $\bar{\mathbf{v}}_i$ ($i = 1, \dots, 3$) はこれらに対応する仮想変位成分、 $(\bar{\cdot})$ は共役な複素成分である。 $\mathbf{K}_{ij}, \mathbf{M}_{ij}$ は、1 ユニットをはり要素とまくらぎ質点により離散化して得られる有限要素方程式の剛性行列と質量行列の部分行列である。また、 $\tilde{\mathbf{F}}_{01}, \tilde{\mathbf{F}}_{03}$ はユニット両端における断面力、 $\tilde{\mathbf{F}}_i$ は鉛直加振力の Floquet 変換より与えられる節点力である。

Table 1 Analytical conditions of rail.

mass density(kg/m ³)	7880
cross sectional area(m ²)	64.05×10 ⁻⁴
Young's modulus(GPa)	206
Poisson's ratio	0.33
shear factor	0.34

ユニット両端における節点変位と断面力は、以下の第2種周期性を有する。

$$\tilde{u}_3 = e^{-i\kappa L} \tilde{u}_1, \quad \tilde{v}_3 = e^{i\kappa L} \tilde{v}_1, \quad \tilde{F}_{03} = -e^{-i\kappa L} \tilde{F}_{01} \quad (9)$$

式(9)を(8)に代入して次式を得る。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} + \mathbf{K}_{33} + 2\mathbf{K}_{13} \cos \kappa L & \mathbf{K}_{12} + \mathbf{K}_{23} e^{i\kappa L} \\ \mathbf{K}_{12} + \mathbf{K}_{23} e^{-i\kappa L} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_2 \end{Bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11} + \mathbf{M}_{33} + 2\mathbf{M}_{13} \cos \kappa L & \mathbf{M}_{12} + \mathbf{M}_{23} e^{i\kappa L} \\ \mathbf{M}_{12} + \mathbf{M}_{23} e^{-i\kappa L} & \mathbf{M}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{F}_1 + \tilde{F}_3 e^{i\kappa L} \\ \tilde{F}_2 \end{Bmatrix} \quad (10)$$

ただし、ここで $\mathbf{K}_{ij} = \mathbf{K}_{ji}, \mathbf{M}_{ij} = \mathbf{M}_{ji}$ としている。

式(10)より各 κ に対する解を求め、式(4)を計算することで無限長軌道の応答を求めることができる。

3.3 集中荷重の Floquet 変換

以下では、まくらぎ間のレール中央、またはまくらぎ位置において、レールを鉛直単位集中荷重により加振する場合を解析対象とする。この場合、荷重 $F(x)$ は次式で与えられる。

$$F(x) = \delta(x - x_0) \quad (11)$$

ここで、 $\delta(x)$ は Dirac のデルタ関数である。なお、 x_0 は荷重の作用位置とする。

式(11)に式(1)の Floquet 変換を適用する。 $|x_0| < L/2$ とする場合、デルタ関数の Floquet 変換は、次式のようにデルタ関数により与えられる。

$$\tilde{\delta}(\tilde{x} - x_0, \kappa) = \delta(\tilde{x} - x_0) \quad (12)$$

4. レール・まくらぎ系の加振応答

4.1 解析条件

レールは 50N レールを想定し、まくらぎ間隔は $L=60\text{cm}$ 、レール一本当りのまくらぎ質量 (1/2 本分) は 100kg とし、各パッド類のバネ定数は $k_r = \bar{k}_r(1 + ci)$ 、 $k_s = \bar{k}_s(1 + ci)$ 、により複素剛性で与える。なお、 $\bar{k}_r=110\text{MN/m}$ 、 $\bar{k}_s=30\text{MN/m}$ としたものを基本系とし、 $c=0.2^{11)}$ と設定した。レールに関する設定値の詳細を Table 1 に示す。

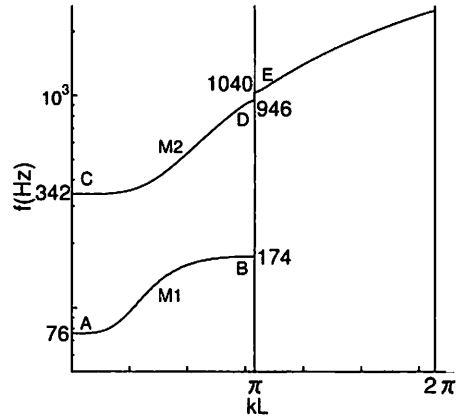


Fig. 2 Dispersion curves of a rail supported by sleepers⁶⁾.

4.2 分散特性

式(10)の右辺における荷重項と減衰 (c) をゼロとすると、振動数 ω と Floquet 波数 κ に関する固有値問題を求める。当該方程式を解くことで、レール内を伝播する波動の分散特性を得ることができる。文献6)では、このような手法に基づき、まくらぎにより離散支持された無限長レールの波動伝播特性を調べた。以下では、本研究における強制振動解析との比較の目的で、その結果のみを示す。

Fig.2 は、本解析条件に対して求めた主要波数 $k(\text{rad/m})$ と周波数 $f(\text{Hz})$ との関係 (分散曲線) を $k \leq 2\pi/L$ の範囲で示したものである。図より、レール内を無限遠まで伝播する波動が存在する周波数帯 (パス・バンド) と、存在しない周波数帯 (ストップ・バンド) とが交互に分布することが確認できる。各バンド端点 ($k = 0, \pi/L, 2\pi/L, \dots$) は定在波モードに対応しており、この位置における波動はまくらぎ支持点で全反射する。 $k < \pi/L$ の範囲では、各波数に対して2種類の伝播モードが存在している。詳細は割愛するが、76~174Hzをパス・バンドに持つモード (以下 M1 と呼ぶ) は大きなまくらぎ振動を伴うもので、まくらぎの無い軌道系には存在しないモードである。一方、それより高周波数域のものは、まくらぎ振動を殆ど伴わず、主にレールと軌道パッドから成る部分構造系での伝播モード (以下 M2 と呼ぶ) に対応している。なお、前者はまくらぎ振動を伴うことから、まくらぎ下に装着された防振パッドを伸縮させ、ひいては地盤振動を惹き起こす要因となっているものと考えられる。

4.3 レールたわみのレセプタンス

レール中央およびまくらぎ位置に単位調和加振を加えた時の、各加振点箇所におけるレールの変位応答振幅 (レセプタンス) を求めた。それらの結果を Fig.3 に示す。いずれの結果においても、2つの共通した周波数で変位応答が卓越していることが分かる。これらは、Fig.2 に示した2つのモードの $k = 0$ におけるバンド下端周波数 76Hz と 342Hz に対応している。当該の振動モードでは、レール

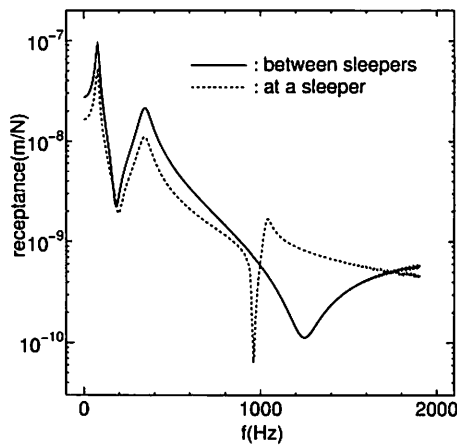


Fig. 3 Receptance of a rail excited between sleepers and at a sleeper.

ルは殆ど変形せず (よって $k = 0$), 剛体に近い状態で上下振動している⁶⁾.

M2のモードにおけるパス・バンド端 (Fig.2のD点) はまくらぎを節とする定在波モード (いわゆる pinned-pinned resonance) を与える. 一方, M1の伝播モードのパス・バンド上端B点, およびM2のモードにおけるE点は, D点と同じたわみ波長を持つが, まくらぎ位置を腹とした定在波モードに対応している⁶⁾. したがって, レール中央加振では前者に対応する周波数において応答が卓越し, 一方, まくらぎ位置加振では後者に対応する周波数において応答が卓越する可能性がある. Fig.3では, まくらぎ位置加振時において, E点に対応する周波数 (1040Hz) でピークが現れている. また, 上述のとおりD点のモードはまくらぎを節としたものとなるため, まくらぎ位置を加振した場合に, それに対応する周波数 (946Hz) 付近の応答に顕著な落ち込みが認められ, 伝播モードと矛盾のない対応が確認できる.

しかしながら, レール中央加振時において, D点に対応する卓越応答が発生していない. ちなみに文献7)ではUIC 60レールを対象とした同様の解析結果が示されており, 上述の76Hzと342Hzの周波数に相当すると思われるピークの他に, M2のモードのD点に対応した応答の卓越が示されている. D点のモードに関するこの差異の原因については明らかでは無いが, 文献7)と本解析とはパッドの剛性を始めとする軌道系の設定が異なっており, それらの違いが異なる結果を与えたものと考えられる.

4.4 たわみ振幅の距離分布

レール中央加振の場合を対象に, レール各点におけるたわみ振幅の分布を調べた. それらの結果をFig.4に示す. ここでは強制加振で認められた2つの卓越周波数 (76Hzと342Hz)に加え, M1モードのパス・バンドのほぼ中央における周波数 (120Hz)での加振結果を示した. なお, まくらぎ位置加振の場合も概ね同様の結果を得た.

2つのバンド端周波数 (76Hzと342Hz)で加振した場

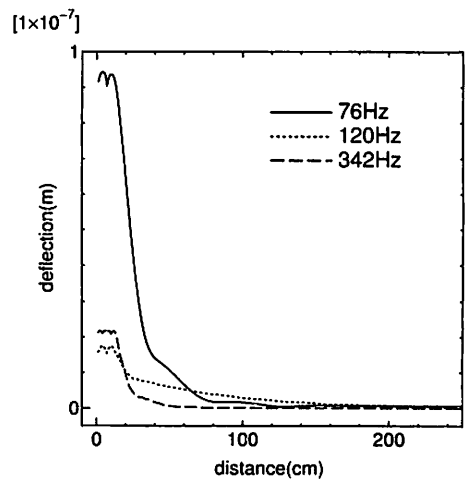


Fig. 4 Distribution of rail deflection (excitation between sleepers).

合は, 120Hz加振に比べ加振点近傍において相対的に大きな変位振幅を与えている. また, 振幅はまくらぎ2区間程度 (120cm) 離れると十分に小さな値にまで減衰しており, 影響はそれほど遠方にまで及ばないことがわかる. 一方, 120Hz加振の場合, 加振点での変位振幅は相対的に小さな値を与えるものの, 加振点から60~200cmの範囲においては上述の2ケースよりむしろ大きな振幅を与える結果となった.

76Hzと342Hz加振では定在波モードが卓越するが, このモードでは, 前述のとおり波動はまくらぎ位置で全反射する. したがって, 1点を加振した場合, そこから伝播して行く主要な波動はまくらぎ位置で反射し, それより遠方へ伝播しなくなる. そのため, 加振点近傍では共振が発生し大きな振幅を与えるが, 距離と共に急減衰する結果となる. これに対し120Hz加振では, Fig.2に示したように進行波モードが発生する. 当該波動は, 無減衰系であれば減衰することなく無限遠まで伝播して行く. そのため, レール変位振幅の距離減衰性が相対的に低減されたものと考えられる.

4.5 まくらぎ反力の周波数応答

次に, まくらぎ下に装着された防振パッドからまくらぎに作用する反力と, 入力周波数との関係について調べる. 解析結果をFig.5に示す. 図にはレール中央加振の場合と, まくらぎ位置加振の場合を合わせて示した. なお, レール中央加振においては, 加振点に最近接するまくらぎでの反力を求めた.

いずれの加振位置の場合においても, 76Hzに大きなピークが発生している. 分散曲線の議論の際にも述べたとおり, 当該周波数における振動モードでまくらぎは大きく上下振動する. そのため, 大きな反力を生じたものと考えられる. また, このことから, M1の伝播モードのパス・バンド下端における振動モードが, 地盤振動に大きく影響を及ぼすことが推測できる. なお, 342Hz付近にも小さなピークが認められ, M2モードのバンド下端

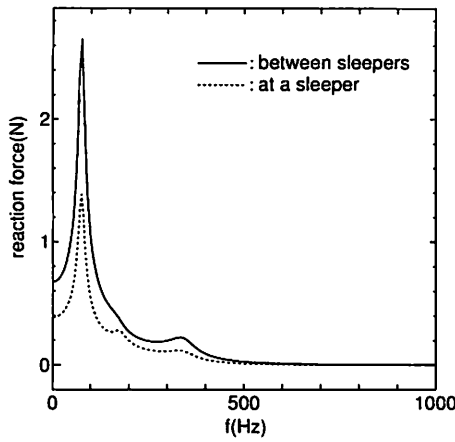


Fig. 5 Relation between reaction force under a sleeper and frequency.

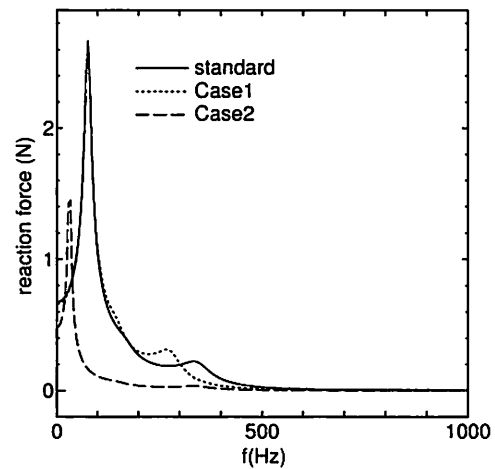


Fig. 7 Influence of stiffness of pads on reaction force under a sleeper (excitation between sleepers).

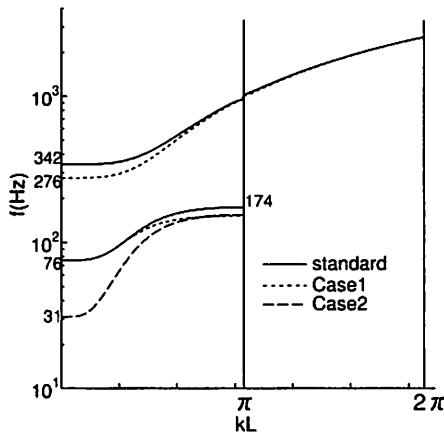


Fig. 6 Influence of stiffness of pads on dispersion curves⁶⁾.

(C点)に対応する振動モードによってもわずかながら反力が増幅し得ることがわかる。

さらに、まくらぎ位置加振の場合においては、174Hz付近にも小さなピークが存在しており、M1モードのパス・バンド上端(B点)に対応した応答の存在が認められる。このことより、レールのたわみ応答では当該モードの発生はピークとして現れなかったものの、反力には幾分明瞭に反映されていることが確認できる。

4.6 パッド類の剛性が結果に及ぼす影響

地盤振動低減に、パッド類の低バネ定数化が有効であることが知られている¹²⁾。ここでは、加振応答解析と伝播モードの分散特性との対応関係の検討を通し、低バネ定数化の影響について確認する。なお、以下の解析では、列車走行安定性の制約下で実際に用いられているパッド剛性を参考に、軌道パッドのバネ定数を70MN/mに低減した場合(Case 1)と、防振パッドのバネ定数を5MN/mに低減した場合(Case 2)の2ケースについて検討する。

まず、各ケースにおける分散曲線を Fig.6 に示す⁶⁾。レール直下に装着されている軌道パッドの低バネ定数化

(Case 1)、およびまくらぎ下の防振パッドの低バネ定数化(Case 2)が、それぞれ M2 モードと M1 モードのパス・バンド下端周波数の低減に寄与することが確認できる。

次に、調和加振に対するまくらぎ反力の周波数応答を求めた結果を示す。Fig.7 は、レール中央加振の場合を図示したものである。なお、まくらぎ位置加振の場合もほぼ同様の結果となった。軌道パッドのバネ定数を低くした Case 1 では、100Hz 以上の周波数域が多少変化するが、主要な卓越周波数(76Hz)での応答には差異が認められない。Fig.6 に示した様に、当該ケースでは M2 モードの周波数域が低下するが、M1 モードはほとんど変化せず、そのため 76Hz における応答に変化が現れなかったことが理解できる。一方、防振パッドのバネ定数を低くした Case 2 では、主要な応答の周波数が約 30Hz に移動し、反力のピーク値自体も 1/2 程度にまで低減されており、低バネ定数化の効果が認められる。なお、Fig.6 では、Case 2 における M1 モードの周波数帯に大きな変化が認められ、バンド下端の周波数が 31Hz にまで低下しており、Fig.7 と符合した結果を与えている。

5. 停止車輪との連成応答

5.1 解析条件

次に、停止車輪とレール・まくらぎ系との連成応答特性について調べる。解析条件を Fig.8 に示す。単位調和加振は車輪に加える。解析に当り、レール・まくらぎは 4. の基本系と同一とし、車輪質量 m_w (台車のバネ下質量) を 350kg、車輪とレールの接触バネ k_w を 2000MN/m と設定した¹²⁾。

5.2 加振応答の評価

停止車輪は無限軌道上一箇所のみ置かれている。よって、車輪を含む連成系全体は周期性を持たず、Floquet 変換を適用した求解法を採ることはできない。ここでは、車輪と軌道系とを分離し、後者のインピーダンスを用いて連成系のレセプタンスを求める。

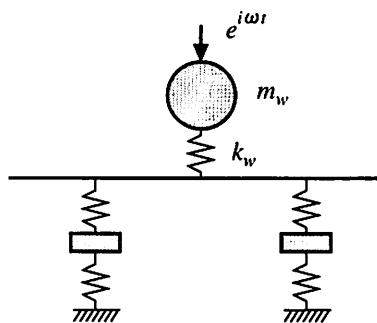


Fig. 8 Interaction of a railway track and a wheel.

まず、車輪の無い無限軌道系を対象に、車輪位置に単位調和振動力を加えた時の、加振位置におけるレールたわみ応答 $\hat{u}_0(\omega)$ (レセプタンス) を Floquet 解析により求めておく。すると、車輪位置における単位振幅のたわみ応答に対応する調和振動荷重の値 (インピーダンス: $K(\omega)$) は $1/\hat{u}_0(\omega)$ で与えられる。

以上より、車輪とレール間の接触バネの作用力を $F_w(\omega)$ とすると、作用力とレールたわみ \hat{u}_0 、および車輪鉛直変位 u_w との関係は次式で与えられる。

$$F_w = K(\omega)\hat{u}_0 = k_w(u_w - \hat{u}_0) \quad (13)$$

また、車輪の運動方程式は次式で与えられる。

$$k_w(u_w - \hat{u}_0) - m_w\omega^2 u_w = 1 \quad (14)$$

式(13), (14) から u_w を消去して、 \hat{u}_0 について解くと、車輪・軌道連成系におけるレールのレセプタンスを得る。

$$\hat{u}_0 = \frac{k_w}{(k_w - m_w\omega^2)K(\omega) - m_w\omega^2 k_w} \quad (15)$$

5.3 解析結果

車輪位置におけるレールのたわみ振幅を Fig.9 に示す。図には比較のため、車輪の無い場合の結果 (Fig.3 に対応) を合わせて示した。なお、車輪はレール中央およびまくらぎ位置に設定した。図より、車輪の導入により卓越周波数が低下する様子が確認できる。なお、軌道系の調和加振では、荷重位置によらず M1 モード下端周波数 (76Hz) に応答のピークが現れた。一方、車輪を考慮した本解析では、車輪位置により卓越周波数が異なっている。これは、車輪とまくらぎとの位置関係により連成系の振動特性が変化するためであり、本解析条件ではピーク周波数の値が 10Hz 程度変動し得ることがわかる。

6. おわりに

まくらぎにより離散支持された無限長レールの調和加振応答解析を実施した。解析では Floquet 変換を用い、まくらぎ間隔で与えられる周期構造の 1 ユニットの離散化することで無限構造の応答を求めた。解析結果と過去に実施した伝播モード解析 (分散曲線) との対比を通し、応答の卓越周波数が軌道系のパス・バンドにおける最下端周波数に対応することがわかった。また、軌道パッドの

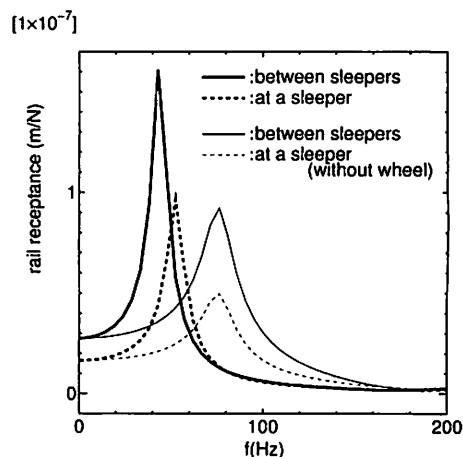


Fig. 9 Receptance of rail under the wheel/rail interaction.

低バネ定数化がまくらぎ反力の低減に有効であることも再確認した¹²⁾。さらに、車輪との連成によりピーク周波数が低下することを確認した。これらを通して当該解法の適用性を検証することができた。

なお、本解析では定点加振を対象とした。今後は移動荷重に対する応答解析への Floquet 変換の適用可能性などについて検討して行きたい。

参考文献

- 1) Thompson, D.J. : Wheel-rail noise generation, Part III: rail vibration, *J. Sound Vib.*, **161**, 421-446, 1993.
- 2) Gavrić, L. : Computation of propagative waves in free rail using a finite element technique, *J. Sound Vib.*, **185**, 531-543, 1995.
- 3) Knothe, K.L., Strzyzakowski, Z. and Willner, K. : Rail vibrations in the high frequency range, *J. Sound Vib.*, **169**, 111-123, 1994.
- 4) Tassilly, E. : Propagation of bending waves in a periodic beam, *Int. J. Engng Sci.*, **25**, 85-94, 1987.
- 5) Mead, D.J. : Free wave propagation in periodically supported, infinite beams, *J. Sound Vib.*, **11**, 181-197, 1970.
- 6) 古屋卓稔, 阿部和久, 紅露一寛 : 無限長レール・まくらぎ連成系における波動伝播特性, 土木学会第 62 回年次学術講演会概要集, 2007 (発表予定).
- 7) Knothe, K.L. and Grassie, S.L. : Modelling of railway track and vehicle/track interaction at high frequencies, *Vehicle Sys. Dyn.*, **22**, 209-262, 1993.
- 8) Clouteau, D., Elhabre, M.L. and Aubry, D. : Periodic BEM and FEM-BEM coupling, *Comput. Mech.*, **25**, 567-577, 2000.
- 9) Clouteau, D., Arnst, M., Al-Hussaini, T.M. and Degrande, G. : Freefield vibrations due to dynamic loading on a tunnel embedded in a stratified medium, *J. Sound Vib.*, **283**, 173-199, 2005.
- 10) Nickel, R.E. and Secor, G.A. : Convergence of consistently derived Timoshenko beam finite elements, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, **5**, 243-253, 1972.
- 11) Luo, Y. : Frequency analysis of infinite continuous beam under axial loads, *J. Sound Vib.*, **213**, 791-800, 1998.
- 12) 阿部和久, 佐藤大輔, 古田 勝 : 地下鉄軌道における各種防振対策の解析的検討, 鉄道力学論文集, 第 7 号, 7-12, 2003.