

非ニュートン流体解析のための格子ボルツマン法

A LATTICE BOLTZMANN METHOD FOR NON-NEWTONIAN FLUID FLOWS

吉野 正人¹⁾, 堀田 陽平²⁾, 廣實 孝史³⁾, 遠藤 守信⁴⁾

Masato YOSHINO, Yoh-hei HOTTA, Takafumi HIROZANE and Morinobu ENDO

- 1) 信州大学工学部機械システム工学科 (〒 380-8553 長野市若里 4-17-1, E-mail: masato@shinshu-u.ac.jp)
 2) 信州大学大学院機械システム工学専攻 (〒 380-8553 長野市若里 4-17-1, E-mail: t05a137@amail.shinshu-u.ac.jp)
 3) 信州大学工学部機械システム工学科 (〒 380-8553 長野市若里 4-17-1, E-mail: t031070@mail.shinshu-u.ac.jp)
 4) 信州大学工学部電気電子工学科 (〒 380-8553 長野市若里 4-17-1, E-mail: endo@endomoribu.shinshu-u.ac.jp)

A lattice Boltzmann method for non-Newtonian fluid flows is proposed. In this method, additional terms based on local shear rate is introduced into the equilibrium distribution function for an incompressible viscous fluid. Channel flows between parallel plates are calculated for shear-thickening and shear-thinning fluids to measure the velocity profiles. The calculated results are in good agreement with theory. Also, the present method is found to be more stable and accurate than other LBM models with variable relaxation time dependent on the local shear rate. In addition, the present method is applied to flows through a two-dimensional porous structure to obtain flow characteristics at a pore scale. The relation between pressure drops and fluid flux (i.e. superficial velocity) is investigated and found to be in accordance with Darcy's law for non-Newtonian fluids.

Key Words: Lattice Boltzmann Method (LBM), Lattice Kinetic Scheme (LKS), Non-Newtonian Fluids, Carreau Model, Power-Law Model, Porous Structure, Darcy's Law

1. はじめに

近年, 格子ボルツマン法⁽¹⁾⁽²⁾ (Lattice Boltzmann Method, 以下 LBM と呼ぶ) は, 粘性流体の熱流動解析の新しい手法として注目されてきており, 特に多孔質内流れや多成分系流れ, また最近では混相流などのいわゆる複雑流れに適用され成功をおさめている。これらで扱われている流体はほとんどがニュートン流体であるが, 非ニュートン流体を扱える LBM についても, これまでにいくつかの研究が行われてきた。例えば, Aharonov ら⁽³⁾ や Boek ら⁽⁴⁾ は, 粘性係数がせん断速度に依存する非ニュートン流体 (shear-thinning および shear-thickening 流体⁽⁵⁾) のための LBM を提案し, 簡単な構造をもつ二次元多孔質内流れに適用して, 手法の妥当性を確認している。また, Gabbanelli ら⁽⁶⁾ も同様に, 平行平板間のチャネル流や凹部における非ニュートン流体問題の計算を行い, 計算精度に関する検討や他の手法による結果との比較を行っている。さらに, Sullivan ら⁽⁷⁾ は, 本手法を三次元に拡張し, 不規則的な複雑構造の三次元多孔質内における非ニュートン流体の挙動について詳細な計算および解析を行っている。

ところで, せん断速度に依存した粘性係数の導入方法に関して言えば, 上述のどの手法においても, 各時刻における局

所のせん断速度に応じて緩和時間を変化させることにより, 粘性係数を決定している。一方, 緩和時間は LBM の数値安定性と関係するパラメータであるため (例えば文献 (8) を参照), せん断速度の値によっては数値不安定になることが考えられる。実際に, Gabbanelli ら⁽⁶⁾ は, 安定に計算が行える粘性係数の上限と下限の値を設定し, それらの値を超えないような範囲の緩和時間を用いることによってこの問題を回避している。また, 彼らの研究によると, このスキームは空間に関してほぼ一次精度しか保証されていないため, 既存の手法は, 数値安定性および計算精度の観点からすれば, まだ確立されたものとは言い難い。

そこで本研究では, 稲室によって提案された格子運動論スキーム⁽⁹⁾ (Lattice Kinetic Scheme, 以下 LKS と呼ぶ) のアイデアを参考にして, せん断速度に関係した項を局所平衡分布に付加することにより, 非ニュートン流体解析のための LBM を提案した。また, それを用いて平行平板間流れの計算を行い, 提案した手法の計算精度について調べた。さらに, 本手法を矩形物体からなる二次元多孔質内の流動問題に適用し, 局所的な流れ場の計算ならびに圧力損失との関係について考察を行った。

2. 計算手法

2.1. 非ニュートン流体のモデル

本研究では、非圧縮性粘性流体を考える。非ニュートン流体では、粘性係数が局所のせん断速度に依存し、一般には、せん断速度が大きくなるにつれて粘性係数が減少する流体 (shear-thinning 流体) が多い。このような非ニュートン流体を表した Carreau モデル⁽¹⁰⁾では、みかけの粘性係数は次式のように与えられる。

$$\frac{\mu - \mu_\infty}{\mu_0 - \mu_\infty} = [1 + (\lambda\dot{\gamma})^2]^{\frac{n-1}{2}} \quad (n > 0) \quad (1)$$

ここで、 $\dot{\gamma}$ はせん断速度、 μ_0 はゼロせん断粘性係数 ($\dot{\gamma} \rightarrow 0$ のときの粘性係数)、 μ_∞ は無限大せん断粘性係数 ($\dot{\gamma} \rightarrow \infty$ のときの粘性係数)、 λ は時定数、 n は指数である。せん断速度 $\dot{\gamma}$ は、対称変形速度テンソル $e_{\alpha\beta}$ と次のような関係がある。

$$\dot{\gamma} = \sqrt{e_{\alpha\beta}e_{\alpha\beta}} \quad (2)$$

ただし、

$$e_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} \right) \quad (3)$$

ここで、 \mathbf{u} は流速であり、添字 α, β はデカルト座標を表し総和規約に従うものとする。また、式 (1) を簡略化したべき乗則モデル (もしくは Ostwald-de Waele モデル)⁽¹¹⁾ もよく用いられ、その場合の粘性係数は次式で与えられる。

$$\mu = \mu_1 \dot{\gamma}^{(n-1)} = \mu_1 (e_{\alpha\beta}e_{\alpha\beta})^{\frac{n-1}{2}} \quad (4)$$

上式において、 $n = 1$ の時にはニュートン流体に対応し、 μ_1 はニュートン流体の粘性係数に相当する。また $n > 1$ では、せん断速度が増加すると粘性係数も大きくなり、ダイラタント流体あるいは shear-thickening 流体と呼ばれる流体を表す。一方、 $0 < n < 1$ では、せん断速度の増加につれて粘性係数が減少し、プラスチックなどの擬塑性流体もしくは shear-thinning 流体と呼ばれる流体を表す。

2.2. 定式化

使用する物理量はすべて、代表長さ H 、粒子の代表速さ c 、代表時間 $t_0 = H/U$ (U : 流れの代表速さ)、および基準密度 ρ_0 を用いて無次元化したものである⁽¹²⁾。格子気体モデルとして、以下の説明では 2 次元 9 速度モデルに対して行うが、3 次元 15 速度モデル⁽¹³⁾の場合にも同様である。また、本研究では計算メモリの節約と数値安定性を考慮した LKS⁽⁹⁾を導入する。なお、2 次元 9 速度モデルの \mathbf{c}_i は、 $\mathbf{c}_1 = \mathbf{0}$ 、 $\mathbf{c}_i = [\cos(\pi(i-2)/2), \sin(\pi(i-2)/2)]$ ($i = 2, 3, 4, 5$)、および $\mathbf{c}_i = \sqrt{2}[\cos(\pi(i-11)/2), \sin(\pi(i-11)/2)]$ ($i = 6, 7, 8, 9$) で与えられる。

本手法では、時刻 t に格子点 \mathbf{x} における流体の密度 ρ および流速 \mathbf{u} をそれぞれ次式で定義する。

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^9 f_i^{\text{eq}}(\mathbf{x} - \mathbf{c}_i \Delta x, t - \Delta t) \quad (5)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\rho(\mathbf{x}, t)} \sum_{i=1}^9 \mathbf{c}_i f_i^{\text{eq}}(\mathbf{x} - \mathbf{c}_i \Delta x, t - \Delta t) \quad (6)$$

ここで、

$$f_i^{\text{eq}} = E_i \rho \left[1 + 3c_{i\alpha} u_\alpha + \frac{9}{2} c_{i\alpha} c_{i\beta} u_\alpha u_\beta - \frac{3}{2} u_\alpha u_\alpha + A \Delta x \left(\frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} \right) c_{i\alpha} c_{i\beta} \right] \quad (7)$$

および、 $E_1 = 4/9$ 、 $E_i = 1/9$ ($i = 2, 3, 4, 5$)、 $E_i = 1/36$ ($i = 6, 7, 8, 9$) である。ここで、 $\alpha, \beta = x, y$ であり (添字 α, β はデカルト座標を表し総和規約に従う)、 Δx は格子間隔、 Δt は時間刻みである。本手法では、時間刻みを $\Delta t = \text{Sh} \Delta x$ となるように選ぶ。ここで、 $\text{Sh} (= U/c)$ はストローハル数と呼ばれる無次元数である。また、通常の LKS では、 A は $O(1)$ のパラメータであるが、本手法ではせん断速度に関係する変数となる。

圧力 p は流体の密度と次の関係がある。

$$p = \frac{1}{3} \rho \quad (8)$$

また、流体の粘性係数 μ は、 A および Δx に関係し次式で与えられる。

$$\mu = \left(\frac{1}{6} - \frac{2}{9} A \right) \Delta x \quad (9)$$

したがって、Carreau モデルに従う流体に対しては、

$$A = \frac{3}{4} - \frac{9}{2} \mu_\infty (\Delta x)^{-1} - \frac{9}{2} (\mu_0 - \mu_\infty) [1 + (\lambda\dot{\gamma})^2]^{\frac{n-1}{2}} (\Delta x)^{-1} \quad (10)$$

とすれば式 (1) を実現することができる。一方、べき乗則モデルに従う流体に対しては、

$$A = \frac{3}{4} - \frac{9}{2} \mu_1 \dot{\gamma}^{(n-1)} (\Delta x)^{-1} \quad (11)$$

とすれば式 (4) との対応が可能になる。なお、各式に現れる流速の一階微分には、テーラー級数展開を用いて導出される次の二次精度差分近似式を用いた。

$$\frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} \approx \frac{1}{6\Delta x} \sum_{i=2}^9 c_{i\alpha} u_\beta(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i \Delta x) \quad (12)$$

3. 計算結果および考察

3.1. 平行平板間流れのシミュレーション

提案した手法の妥当性を確認するために、二次元平行平板間流れの計算を行った。二枚の平板の位置を $y = \pm 1/2$ とし、 x 方向に一定の圧力勾配を与えて非ニュートン流体を流すことにより、定常状態における流速を求めた。境界条件として、各平板上にはすべりなし境界条件を用い、入口・出口には圧力差を伴う周期境界条件を用いた。ここで、ニュートン流体の場合、厳密解はよく知られているポアズイユ速度分布となる。一方、非ニュートン流体の場合、粘性係数が式 (4) に従うべき乗則流体に対しては、断面平均速度で規格化した流速の厳密解が次のように与えられる⁽¹¹⁾。

$$u_{\text{exa}}^*(y) = \frac{u_{\text{exa}}(y)}{\bar{u}_{\text{exa}}} = \frac{2n+1}{n+1} [1 - |2y|^{(1+1/n)}] \quad (13)$$

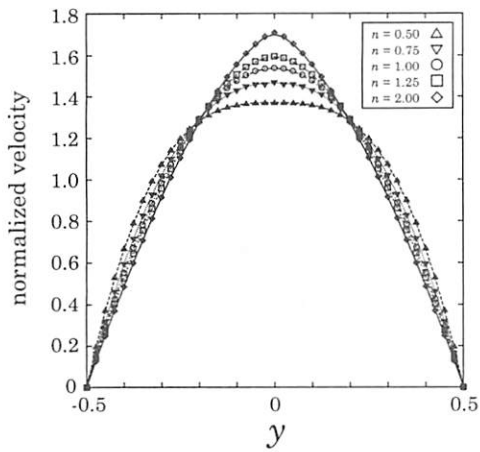


Fig. 1 Normalized velocity profiles of channel flow between parallel plates for different power indices. The solid lines represent exact solution.

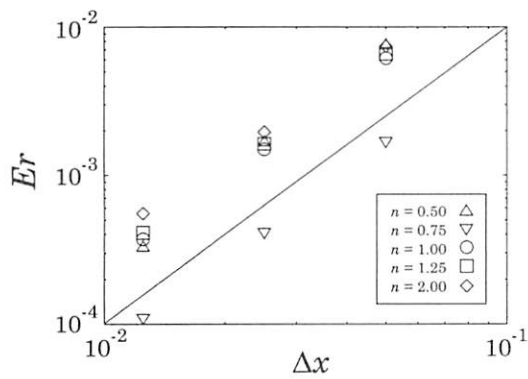


Fig. 2 Error norms of channel flow between parallel plates with $\Delta x = 1/20, 1/40$ and $1/80$. The solid line indicates an incline of 2.

ここで、 \bar{u} は断面平均速度であり、添字の *exa* および上付きの * はそれぞれ、厳密解および規格化を表す。

まず、格子間隔を $\Delta x = 1/40$ に固定し、前節のべき乗則流体のモデルを用いて指数を $n = 0.5, 0.75, 1, 1.25, 2$ としたときの計算を行った。各ケースに対する定常状態における速度分布を Fig. 1 に示す。図には、式 (13) により求められる厳密解も実線で併記してある。定常判定には、各格子点における相対速度差が 10^{-8} 以下となる条件を与えた。この図から、いずれのケースにおいても計算結果は厳密解と良く一致していることがわかる。次に、各ケースに対して格子間隔を $\Delta x = 1/20, 1/40, 1/80$ と変化させて同様の計算を行い、計算結果と厳密解との相対誤差を求めた。誤差ノルムには次式を用いた。

$$Er = \frac{\sum_y |u^* - u_{exa}^*|}{\sum_y |u_{exa}^*|} \quad (14)$$

ここで、誤差を評価する場所は $\Delta x = 1/20$ のケースの格子点を基準とし、どのケースに対しても、 y 座標が $\pm j/20$ ($j = 0, 1, 2, \dots, 10$) の合計 21 個の同一格子点に対する和を計算した。得られた結果をグラフにしたものを Fig. 2 に示す。この図から、 $n = 0.5, 0.75, 1, 1.25, 2$ に対して、誤差が減少する割合

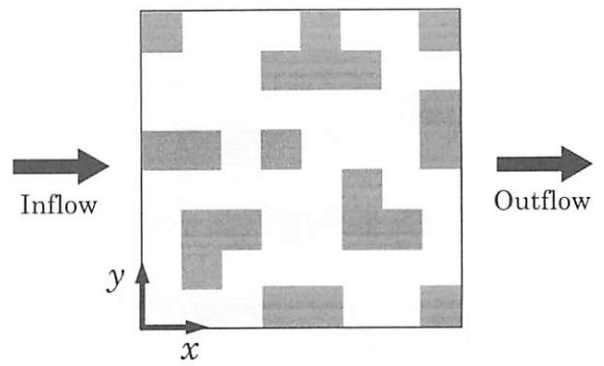


Fig. 3 Two-dimensional porous structure.

(グラフの傾き) はそれぞれ 2.163, 2.033, 2.032, 2.010, 1.921 となり、提案された手法はほぼ二次精度であることがわかる。また、誤差の大きさはいずれのケースも 1% 以下となり、Gabbanelli らによる同様の問題に対する誤差⁽⁶⁾と比較すると、本手法の方が平均的に 1/10 程度精度が良い結果が得られた。この理由の一つとして、彼らの手法では数値安定性を保つために、打ち切りべき乗則モデル⁽¹¹⁾(truncated power-law model)を用いていることが挙げられる。つまりこのモデルでは、せん断速度の上限と下限に閾値を設定し、それらの値を超える範囲では粘性係数が一定値となるように与えるため、特に両壁近傍での誤差が大きくなることが一因と考えられる。

3.2. 多孔質内流れのシミュレーション

本手法を用いて矩形物体からなる二次元多孔質内における流れ解析を行った。Fig. 3 に示すように、一辺が $L = 64\Delta x$ の正方形領域内に、矩形物体を任意に配置した構造を考える。このときの空隙率は $\varepsilon = 0.6875$ である。初期条件は、全領域で $\rho = 1, \mathbf{u} = \mathbf{0}$ とした。一方、入口・出口には圧力差を伴う周期境界条件、上下の境界には通常の周期境界条件を用いた。また、物体上にはすべりなし境界条件を適用した。なお、本問題では境界上で流速の一階微分を求めなければならないが、物体上、領域の境界、および入口・出口において、それらの接線方向には二次精度の中心差分、法線方向には二次精度の片側差分を用いてそれぞれ近似した。以下では、Carreau モデルを用いて計算を行った。ここで、パラメータの値は $\mu_\infty = 0, \mu_0 = 2/9\Delta x$ で一定とした。異なる指数 n に対して、入口・出口の圧力差 Δp を $10^{-6} \sim 10^{-2}$ の範囲で変化させた。

計算結果の一例として、 $\Delta p = 1 \times 10^{-2}$ のときの $n = 0.75$ および $n = 1$ に対する過渡状態後の流速ベクトルを Fig. 4 に示す。図において、ベクトルの長さは各ケースの空塔速度が同じ長さになるように規格化されている。非ニュートン流体 ($n = 0.75$) の場合では、流体が空間的に広い場所を選択的に流れ、物体の後方やコーナー付近にはあまり流れていない部分が見られる [図 (a)]。一方、ニュートン流体 ($n = 1$) の場合では、流体は物体に沿って流れ、空隙のほとんどの領域が流路になっていることがわかる [図 (b)]。次に、各ケースにおける流体のフラックス q と圧力損失 Δp との関係を図 5 に示

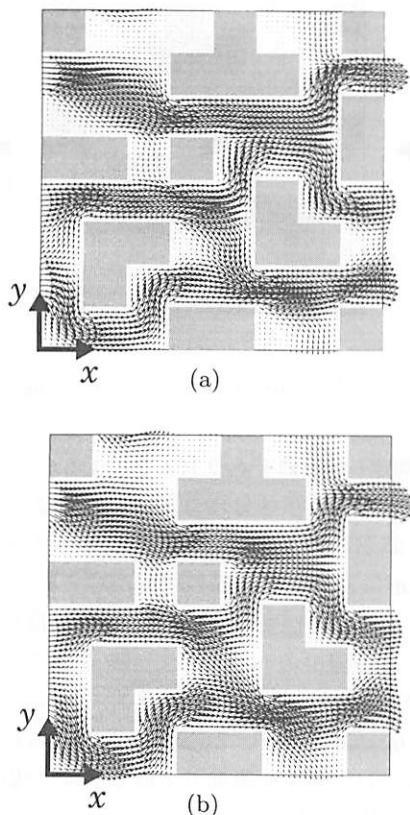


Fig. 4 Calculated velocity vectors of flows through porous structure: (a) non-Newtonian shear-thinning fluid for $n = 0.75$; (b) Newtonian fluid for $n = 1$. Note that the length of vectors is normalized so that the superficial velocity has the same length in both cases.

す、ここで、フラックスは、流れ方向に垂直な断面を通過する流量をその空隙部分の面積で除した値で定義した。よってこの定義によれば、フラックスは空塔速度と等しくなる。一般に、多孔質内流れにおけるフラックス（あるいは流量）と圧力損失との間には、低レイノルズ数域において、ニュートン流体の場合と同様にダルシー則が成り立つことが知られている⁽¹⁴⁾。Fig. 5より、 $n = 0.75$ および $n = 1$ のいずれにも直線関係が見られることから、本計算結果もダルシー則に従うことがわかった。

4. おわりに

非ニュートン流体解析のためのLBMを提案した。指数が $n = 0.5 \sim 2$ の範囲のべき乗則流体に対して、平行平板間流れの計算を行い、提案された手法の妥当性を確認した。また、本手法を用いて矩形物体からなる多孔質内流れの計算を行い、物体まわりの局所の流れ場を求めニュートン流体の結果と比較した。さらに、流体のフラックスと圧力損失の関係について調べたところ、得られた結果はダルシー則に従うことがわかった。今後の課題としては、三次元モデルへの拡張や複雑流路をもつ流れ場への本手法の適用などが挙げられる。

謝 辞

本研究は、「文部科学省の指定による長野・上田地域知的クラ

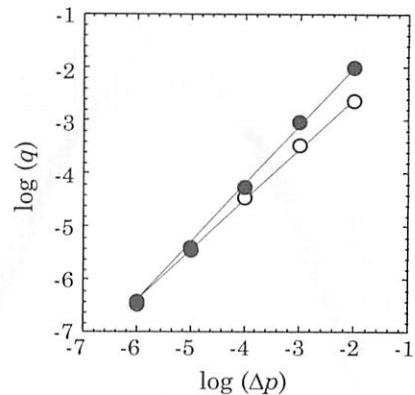


Fig. 5 Relation between pressure drops and fluid flux (i.e. superficial velocity) for flows through porous structure: ●, non-Newtonian shear-thinning fluid ($n = 0.75$); ○, Newtonian fluid ($n = 1$).

スター創成事業」の一環として実施したものであり、関係者各位に感謝いたします。

参考文献

- (1) S. Chen and G. D. Doolen: Lattice Boltzmann Method for Fluid Flows, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **30** (1998), pp. 329–364.
- (2) S. Succi: The Lattice Boltzmann Equation for Fluid Dynamics and Beyond, (2001), Oxford University Press.
- (3) E. Aharonov and D. H. Rothman: Non-Newtonian Flow (through Porous Media): A Lattice Boltzmann Method, *Geophys. Res. Lett.*, **20** (1993), pp. 679–682.
- (4) E. S. Boek, J. Chin and P. V. Coveney: Lattice Boltzmann Simulation of the Flow of Non-Newtonian Fluids in Porous Media, *Int. J. Mod. Phys. B*, **17** (2003), pp. 99–102.
- (5) 中村喜代次: 非ニュートン流体力学, (1997), コロナ社.
- (6) S. Gabbanelli, G. Drazer and J. Koplik: Lattice Boltzmann Method for Non-Newtonian (Power-Law) Fluids, *Phys. Rev. E*, **72** (2005), 046312.
- (7) S. P. Sullivan, L. F. Gladden and M. L. Johns: Simulation of Power-Law Fluid Flow through Porous Media using Lattice Boltzmann Techniques, *J. Non-Newton. Fluid Mech.*, **133** (2006), pp. 91–98.
- (8) J. D. Sterling and S. Chen: Stability Analysis of Lattice Boltzmann Methods, *J. Comput. Phys.*, **123** (1996), pp. 196–206.
- (9) T. Inamuro: A Lattice Kinetic Scheme for Incompressible Viscous Flows with Heat Transfer, *Philos. Trans. R. Soc. Lond. A*, **360** (2002), pp. 477–484.
- (10) R. B. Bird, R. C. Armstrong and O. Hassager: Dynamics of Polymeric Liquids, (1987), Vol. 1, 2nd Ed., John Wiley & Sons Inc.
- (11) R. B. Bird, W. E. Stewart and E. N. Lightfoot: Transport Phenomena, (1960), and its 2nd Ed., (2001), John Wiley & Sons Inc.
- (12) T. Inamuro, M. Yoshino and F. Ogino: Accuracy of the Lattice Boltzmann Method for Small Knudsen Number with Finite Reynolds Number, *Phys. Fluids*, **9** (1997), pp. 3535–3542.
- (13) Y. Qian, D. d’Humières and P. Lallemand: Lattice BGK Models for the Navier–Stokes Equation, *Europhys. Lett.*, **17** (1992), pp. 479–484.
- (14) J. R. A. Pearson and P. M. J. Tardy: Models of Non-Newtonian and Complex Fluids through Porous Media, *J. Non-Newton. Fluid Mech.*, **102** (2002), pp. 447–473.