

2次元波動伝播問題における演算子積分時間領域境界要素法 および高速多重極法の適用

Time-Domain Boundary Element Method derived by Operational Quadrature Method
and Acceleration by Fast Multipole Method in 2D Wave Propagation Problem

福井卓雄¹⁾, 岡山美央²⁾, 石田貴之³⁾

Takuo FUKUI, Mio OKAYAMA, and Takayuki ISHIDA

- 1) 福井大学大学院工学研究科・教授 (〒 910-8507 福井市文京 3-9-1, E-mail: tak@taku.anc-d.fukui-u.ac.jp)
- 2) 福井工業大学付属福井高等学校 工業科・教諭 (〒 910-8505 福井市学園 3-6-1)
- 3) 福井大学大学院工学研究科 (〒 910-8507 福井市文京 3-9-1, E-mail: stone@taku.anc-d.fukui-u.ac.jp)

This paper is concerned with the time-domain boundary element method derived by the operational quadrature method in two dimensional wave propagation problems, and with the fast multipole method for this boundary element method. The formulation and numerical implementation of the boundary element method, and the basic formulas for the fast multipole method such as the multipole expansion, the local expansion, the translation relations of them, and the scaling method in the fast multipole algorithm are presented. Finally, formulation of the fast multipole method in two dimensional elastic wave propagation problem is proposed briefly.

Key Words : *Wave propagation problem, Time-domain boundary element method, Operational quadrature method, Fast multipole method, Elastic wave propagation problem*

1. はじめに

本論文では、2次元波動伝播問題における、演算子積分法を用いた時間領域境界要素法の定式化、およびこの型の境界要素法への高速多重極法の適用について述べる。

演算子積分法¹⁾は、繰り込み積分を離散化する手法であるが、時間領域境界要素法の定式化に有用な手法の一つである。とくに、波動伝播問題における数値解の安定性を向上させることが知られている他、基本解の Laplace 変換だけを使うので、粘弾性波動問題のように時間領域の基本解が閉じた形で得られない問題にも適用が可能であるという利点がある²⁾。

本論文では、著者らによる前報告^{3),4)}をもとに、演算子積分法を用いた時間領域境界要素法の定式化、および、得られる境界要素法における高速多重極法の適用についてまとめて述べる。さらに、ここで得られた手法を2次元弾性波動解析に適用するための指針についても述べる。

2. 波動伝播問題と境界積分方程式

2.1 初期値境界値問題

波動伝播問題の初期値境界値問題を考える。いま、与えられた領域を B 、その境界を ∂B とすると、問題は次のように記述される。

$$\nabla^2 u = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \text{in } B \quad (1)$$

$$u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) = v_0(\mathbf{x}) \quad (2)$$

$$u = \tilde{u} \quad \text{on } \partial B_1, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = \tilde{q} \quad \text{on } \partial B_2 \quad (3)$$

ここに、 ∇^2 は Laplace 作用素、 c は波の速度、 $\partial/\partial n$ は外向き法線微分であり、 \tilde{u}, \tilde{q} は境界上で与えられる関数である。また、 $\partial B = \partial B_1 \cup \partial B_2$ 、 $\emptyset = \partial B_1 \cap \partial B_2$ である。

2.2 境界積分方程式

初期値境界値問題 (1), (2), (3) の解 $u(\mathbf{x}, t)$ は、時間域の境界積分方程式

$$C(\mathbf{x})u(\mathbf{x}, t) = \overset{\circ}{u}(\mathbf{x}, t) + \int_{\partial B} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) * \frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{y}, t) dS_{\mathbf{y}} - \int_{\partial B} S(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) * u(\mathbf{y}, t) dS_{\mathbf{y}} \quad (4)$$

により表される。ここに、 C は自由項、 G, S は基本解および対応する二重層核であり、 $f * g$ は時間に関する繰り込み積分を表す。また、 $\overset{\circ}{u}(\mathbf{x}, t)$ は、初期条件による Cauchy 問題の解および内部の波源あるいは入射波などの外部擾乱による特解を表し、境界値には依存しない項である。

3. 演算子積分法による時間領域境界要素法の定式化

3.1 演算子積分法

Lubich¹⁾は、繰り込み積分

$$f * g(x) = \int_0^x f(x-t)g(t) dt \quad x \geq 0 \quad (5)$$

の近似値を離散化繰り込み積

$$\sum_{0 \leq j\Delta t \leq x} \omega_j(\Delta t)g(x - j\Delta t) \quad (6)$$

により計算する場合の重み $\omega_j(\Delta t)$ を

$$\begin{aligned} \omega_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=\rho} F\left(\frac{\delta(\zeta)}{\Delta t}\right) \zeta^{-n-1} d\zeta \\ &\simeq \frac{\rho^{-n}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} F\left(\frac{\delta(\zeta_l)}{\Delta t}\right) \exp\left(-2\pi i \frac{nl}{L}\right) \end{aligned} \quad (7)$$

で与える方法を提案した。ここに、 F は f の Laplace 変換であり、逆変換の存在を保証するためには、引数の実部が正のとき正則でなければならない(詳しい条件については文献¹⁾を参照)。 $\delta(\zeta)$ は近似に利用する差分法(線形マルチステップ法)の生成多項式の商である。また、引数 ζ_l は半径 $\rho < 1$ の円周上の点 $\zeta_l = \rho \exp(2\pi i l/L)$ である。 ρ は目標とする精度 ϵ により決定されるパラメータであり、 $\rho^L = \sqrt{\epsilon}$ としている。

3.2 演算子積分法による境界積分方程式の離散化

演算子積分法を時間域境界積分方程式(4)に適用して、積分方程式の離散近似を求める。まず、境界上において、空間領域の近似基底 $\phi_i(\mathbf{x})$ を導入して、境界値を

$$u(\mathbf{x}, t) = \sum_i \phi_i(\mathbf{x})u_i(t), \quad \frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{x}, t) = \sum_i \phi_i(\mathbf{x})q_i(t) \quad (8)$$

の形に近似する。ここで、 u_i, q_i は空間的に離散化された境界値の時間関数である。つぎに、境界積分方程式(4)を(6)の形に離散化することによって、離散化積分方程式

$$\begin{aligned} C(\mathbf{x})u(\mathbf{x}, n\Delta t) &= \dot{u}(\mathbf{x}, n\Delta t) \\ &+ \sum_i \sum_{k=1}^n [A_i^{n-k}(\mathbf{x})q_i(k\Delta t) - B_i^{n-k}(\mathbf{x})u_i(k\Delta t)] \end{aligned} \quad (9)$$

が得られる。ここに、影響関数 A_i^m, B_i^m は重みの近似表現(7)により

$$A_i^m(\mathbf{x}) = \frac{\rho^{-m}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \hat{A}_i^l(\mathbf{x}) \exp\left(-2\pi i \frac{ml}{L}\right) \quad (10)$$

$$B_i^m(\mathbf{x}) = \frac{\rho^{-m}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \hat{B}_i^l(\mathbf{x}) \exp\left(-2\pi i \frac{ml}{L}\right) \quad (11)$$

となる。 \hat{A}_i^l, \hat{B}_i^l は、基本解および二重層核の Laplace 変換 $\hat{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s), \hat{S}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s)$ に対する空間的影響関数

$$\hat{A}_i^l(\mathbf{x}) = \int_{\partial B} \hat{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s_l) \phi_i(\mathbf{y}) dS_y \quad (12)$$

$$\hat{B}_i^l(\mathbf{x}) = \int_{\partial B} \hat{S}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s_l) \phi_i(\mathbf{y}) dS_y \quad (13)$$

である。パラメータ s_l については以下で説明する。

基本解の Laplace 変換は波動方程式(1)の Laplace 変換

$$\nabla^2 \hat{u} - \frac{p^2}{c^2} \hat{u} = 0 \quad (14)$$

の基本解として得られる。 p は Laplace 変換パラメータである。2次元問題の場合の基本解および二重層核は

$$\hat{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s) = \frac{1}{2\pi} K_0(sr) \quad (15)$$

$$\hat{S}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s) = \frac{\partial \hat{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s)}{\partial n_y} = -\frac{s}{2\pi} \frac{\partial r}{\partial n_y} K_1(sr) \quad (16)$$

である。ここに、 $r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ であり、 K_n は第2種変形 Bessel 関数である。また、表記を簡潔にするために $s = p/c$ とおいた。したがって、(12), (13)におけるパラメータ s_l は、この定義に(7)に現われる引数を用いて、 $s_l = \delta(\zeta_l)/c\Delta t$ で与えられる。

3.3 時間ステップ解析

(1) 時間ステップ方程式

境界上に M 個の要素と選点 $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_M$ をとる。境界 ∂B が滑らかであるときには、 $C = 1/2$ であるから、離散化方程式(9)は

$$\begin{aligned} \sum_i^M \left\{ \left[\frac{\phi_i(\mathbf{x}_j)}{2} + B_i^0(\mathbf{x}_j) \right] u_i(n\Delta t) - A_i^0(\mathbf{x}_j) q_i(n\Delta t) \right\} \\ = \dot{u}(\mathbf{x}_j, n\Delta t) + \sum_i^M \sum_{k=1}^{n-1} A_i^{n-k}(\mathbf{x}_j) q_i(k\Delta t) \\ - \sum_i^M \sum_{k=1}^{n-1} B_i^{n-k}(\mathbf{x}_j) u_i(k\Delta t) \end{aligned} \quad (17)$$

と表される。第 n ステップにおいて、この式の右辺は既知である。したがって、境界値 u_i または q_i が与えられていれば、この式は第 n ステップの未知境界値に関する代数方程式となり、 $n = 1$ からはじめて、ステップごとに境界値を決定していくことができる。ただし、第0ステップにおける境界値は0と仮定されているので、もし値がある場合には、それを \dot{u} に含めて考える必要がある。

(2) 計算量と記憶容量

計算量と必要記憶容量について検討しておく。まず、時間ステップ解析の前段階で影響係数を(10), (11)によりすべて計算する。(12), (13)の評価に $O(M^2 L)$ の計算が必要である。影響係数の計算には(10), (11)の繰り込み積の計算が必要であるが、この計算にはFFTを使うことができるので、結果として、影響係数を求める段階における計算量は $O(M^2 L \log L)$ となる。

つぎに、時間ステップ解析においては、各ステップにおいて右辺の繰り込み計算と方程式の解法が必要である。繰り込み計算の計算量は $O(M^2 L)$ である。方程式の解法には、反復法を効率良く使っても $O(M^2)$ の計算が必要となるが、波動伝播問題の場合の影響係数 $A_i^0(\mathbf{x}_j), B_i^0(\mathbf{x}_j)$ は非零要素が少なく帯行列化できるので、実際の計算量は $O(M)$ で済む。結局、第 N ステップまでの時間ステップ解析の計算量は $O(M^2 LN)$ となり、全解析の計算量も $O(M^2 LN)$ となる。必要記憶容量は、影響係数の大きさによって決まるので、 $O(M^2 L)$ となる。

$L < N$ の場合には (17) の右辺の繰り込みに切り捨てが生じる。これを避けるために $L = N$ とすると、この場合の全解析における計算量は $O(M^2N^2)$ となる。

(3) 計算パラメータの決定

計算を実行するためには計算パラメータ $c\Delta t$, L , ρ を決めなければならない。これらは次のようにして決める。

$c\Delta t$ この値は要素の大きさに適合するようにとられるべきである。ただし、通常的时间領域境界要素法と異なっており、 Δt を小さくとっても解析は安定である。

L Δt と関連して、遅延ポテンシャルの繰り込み積の切り捨て誤差を考慮して決める。特別の理由がなければ、 $L = N$ とする。 L は影響係数の計算 (10), (11) における FFT のサイズとなるので 2 の中乗の値をとる。

ρ 想定する誤差 ϵ と L の値に対して、 $\rho^L = \sqrt{\epsilon}$ を満足するようにとる。すなわち、 $\rho = 10^{\log_{10} \epsilon / 2L}$ とする。

Fig.1 に、2 次の前進差分を用いるときの $\delta(\zeta)$ に対する ρ の影響を複素平面上にプロットしたものを示す。

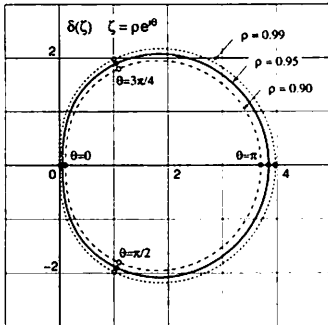


Fig.1 2 次の前進差分を用いるときの $\delta(\zeta) = \sum_m (1-\zeta)^m / m$

影響係数の計算に現われる変形 Bessel 関数は、その引数の絶対値が大きいとき、 $K_n(z) \sim \exp(-z)$ である。いま、引数は $sr = r\delta(\zeta)/c\Delta t$ である。Fig.1 によれば、 $r/c\Delta t$ が大きければ、引数の値は $\theta = \pi$ の付近で相当に大きな値となる可能性がある。したがって、影響係数の計算において計算精度を落とさずに適切な切り捨てを行うことができる。いま、必要な 10 進桁数を b とすると、切り捨ての条件は $e^{-\text{Re}[sr]} < 10^{-b}$ である。したがって、 $\text{Re}[sr]$ に対する条件は $\text{Re}[sr] > b \log_{10}$ となる。この処置により、計算時間を 1~2 割程度短縮することができる。

4. 高速多重極法の適用

前節の考察により、時間ステップ境界要素法 (17) の計算量は $O(M^2LN)$ であり、必要記憶容量は $O(M^2L)$ である。ここでは、高速多重極法を適用して計算量および必要記憶容量を縮小する手法を導入する。

4.1 高速多重極法の定式化

高速多重極アルゴリズムに関しては文献⁵⁾に詳しい。ここでは、アルゴリズムを構成するために必要な道具立て、すなわち、基本解の多重極展開、場の多重極展開と局所展開、および多重極展開から局所展開への変換、多重極・局所展開の展開中心の移動に関する公式について述べる。

(1) 基本解の多重極展開

ここで対象とする場は、基本解 (15) により生成される場であり、諸公式は周波数領域波動問題における Hankel 関数を変形 Bessel 関数に置き換えることにより得られる。したがって、導かれる高速多重極法も周波数領域波動問題の場合⁶⁾と類似したものとなる。

Fig.2 に示すように、観測点 x 、源点 y に対し、点 y の近くに多重極点 y_0 をとり、 $x - y_0$ および $x - y$ の極座標表現をそれぞれ (r, θ) , (ρ, ϕ) とする。

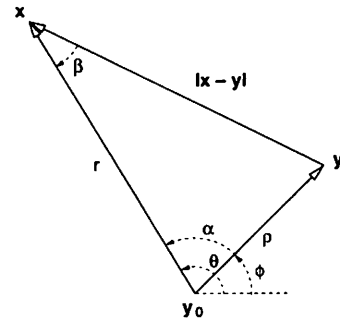


Fig.2 多重極展開における極座標系

基本解 (15) に Graf の加法定理⁷⁾を用いて展開すると

$$\hat{G}(x, y, s) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} K_n(sr) I_n(s\rho) e^{in(\theta-\phi)} \quad (18)$$

となる。ここに、 I_n は第 1 種変形 Bessel 関数である。ここで、問題とする場の多重極展開を

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} M_n K_n(sr) e^{in\theta} \quad (19)$$

で定義する。ここに、 M_n は多重極モーメントである。(18) を参照すれば、基本解の多重極モーメントは

$$M_n^G = I_n(s\rho) e^{-in\phi} \quad (20)$$

となる。二重層核についても、(16) により

$$M_n^S = \left[n_\rho s I_n'(s\rho) - n_\phi \frac{in I_n(s\rho)}{\rho} \right] e^{-in\phi} \quad (21)$$

と書くことができる。ここに、 (n_ρ, n_ϕ) は単位法線ベクトル n の (ρ, ϕ) における極座標成分である。

(2) 多重極展開、局所展開、移動公式

多重極展開 (19) に対して、局所展開を

$$u(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} L_n I_n(sr) e^{-in\theta} \quad (22)$$

で定義する。

多重極点の移動による展開係数の変換 (M2M)、多重極展開から局所展開への変換 (M2L)、局所展開点の移動による展開係数の変換 (L2L) は、Graf の加法定理をそれぞれの場合に適用すれば導くことができる。それらの結果をま

とめると次のようになる。

$$M'_n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} M_m I_{n-m}(s\rho) e^{-i(n-m)\phi} \quad (23)$$

$$L_n = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m M_m K_{n+m}(s\rho) e^{i(n+m)\phi} \quad (24)$$

$$L'_n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^{n-m} L_m I_{n-m}(s\rho) e^{i(n-m)\phi} \quad (25)$$

ここで、 M'_n 、 L'_n は展開点の移動により得られる新しい展開係数を表す。また、座標値 (ρ, ϕ) は、新しい展開点から古い展開点を見た相対座標の極座標値である。

(3) 多重極展開のスケーリング

変形 Bessel 関数は、 $|z|$ が大きいとき、

$$I_n(z) \sim e^{|\operatorname{Re}\{z\}|}, \quad K_n(z) \sim e^{-z} \quad (26)$$

である。移動公式 (23) や (25) においては変換に $I_n(s\rho)$ が使われるため、セルのサイズが大きい場合には、変換によって展開係数の値が発散したり、あるいは、 $I_n(s\rho)$ そのものが発散する可能性がある。したがって、多重極展開および局所展開に適切なスケーリングを導入してやることが安定なアルゴリズムのために必須となる。

いま、 $\check{I}_n(z) = e^{-z} I_n(z)$ 、 $\check{K}_n(z) = e^z K_n(z)$ とおく。セル C_ρ (ρ はセルの対角長の半分の長さを表す) におけるスケーリングされた多重極モーメントおよび局所展開係数を

$$\check{M}_{\rho,n} = e^{-s\rho} M_n, \quad \check{L}_{\rho,n} = e^{s\rho} L_n \quad (27)$$

で表すことにする。このとき、演算子積分法成立の条件から $\operatorname{Re}\{s\rho\} > 0$ であることに注意が必要である。したがって、セル C_ρ における多重極展開 (19) および局所展開 (22) は

$$u(\mathbf{x}) = \frac{e^{s(\rho-r)}}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \check{M}_n \check{K}_n(sr) e^{in\theta} \quad (28)$$

$$u(\mathbf{x}) = e^{-s(\rho-r)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \check{L}_n \check{I}_n(sr) e^{-in\theta} \quad (29)$$

となる。

スケーリングされた展開係数に対する移動公式は、定義 (27) および展開形 (28)、(29) を移動公式 (23)、(24)、(25) に当てはめれば導くことができる。たとえば、セル C_ρ からセル $C_{2\rho}$ への M2M の場合には、Fig.3 のように考えて、

$$\begin{aligned} \check{M}_{2\rho,n} &= e^{-2s\rho} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{s\rho} \check{M}_{\rho,m} e^{s\rho} \check{I}_{n-m}(s\rho) e^{-i(n-m)\phi} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \check{M}_{\rho,m} \check{I}_{n-m}(s\rho) e^{-i(n-m)\phi} \end{aligned} \quad (30)$$

となる。同様にして、セル C_ρ レベルの M2L、セル $C_{2\rho}$ からセル C_ρ への L2L は

$$\check{L}_{\rho,n} = \frac{e^{s(2\rho-r)}}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m \check{M}_{\rho,m} \check{K}_{n+m}(sr) \times e^{i(n+m)\theta} \quad (31)$$

$$\check{L}_{\rho,n} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^{n-m} \check{L}_{2\rho,m} \check{I}_{n-m}(s\rho) e^{i(n-m)\phi} \quad (32)$$

となる。ここで、M2L における (r, θ) はセルの中心間の相対座標の極座標値である。

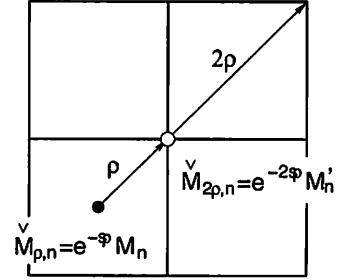


Fig.3 M2M におけるスケーリング

以上で高速多重極アルゴリズムを実行するための道具立ては整った。

4.2 時間ステップ解析

高速多重極法は行列-ベクトル積を高速に計算する手法である。時間ステップ方程式 (17) においては、右辺の $\{\mathbf{A}^m \mathbf{q}^k\}_j = \sum_i A_i^m(\mathbf{x}_j) q_i(k\Delta t)$ および $\{\mathbf{B}^m \mathbf{u}^k\}_j = \sum_i B_i^m(\mathbf{x}_j) u_i(k\Delta t)$ の計算に高速多重極法を使う。たとえば、 $\mathbf{A}^m \mathbf{q}^k$ は (10)、(12) によって

$$\begin{aligned} \sum_i A_i^m(\mathbf{x}_j) q_i(k\Delta t) &= \frac{\rho^{-m}}{L} \\ &\times \sum_{l=0}^{L-1} \left[\sum_i q_i(k\Delta t) \int_{\partial B} \hat{G}(\mathbf{x}_j; \mathbf{y}, s_l) \phi_i(\mathbf{y}) dS_y \right] \\ &\times e^{-2\pi i m l / L} \end{aligned} \quad (33)$$

と書ける。ここで [] 内は境界上の積分の項であるから、この部分の計算が高速多重極法により高速化され、FFT を適用して $\mathbf{A}^m \mathbf{q}^k$ ($m = 0, \dots, L-1$) が計算される。この計算の計算量は $O(L \times O(\text{FMM}) + M \times O(\text{FFT}))$ である。 $\mathbf{B}^m \mathbf{u}^k$ についても同様である。

第 k ステップの境界値 \mathbf{q}^k が決定されれば、 $\mathbf{A}^m \mathbf{q}^k$ ($m = 0, \dots, L-1$) が同時に計算されるので、これを使った時間ステップ解析の手順について考えよう。第 n ステップにおける \mathbf{A} に関する右辺の和を $\mathbf{u}_A^n = \sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{A}^{n-k} \mathbf{q}^k$ で表す。 \mathbf{u}_A^n は第 n ステップにおける \mathbf{q} による遅延ポテンシャルを表している。これを行列の形で表現すると

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_A^1 \\ \mathbf{u}_A^2 \\ \mathbf{u}_A^3 \\ \mathbf{u}_A^4 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_A^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{A}^1 \mathbf{q}^1 \\ \mathbf{A}^2 \mathbf{q}^1 + \mathbf{A}^1 \mathbf{q}^2 \\ \mathbf{A}^3 \mathbf{q}^1 + \mathbf{A}^2 \mathbf{q}^2 + \mathbf{A}^1 \mathbf{q}^3 \\ \dots\dots\dots \\ \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{q}^1 + \dots\dots\dots + \mathbf{A}^1 \mathbf{q}^{n-1} \end{bmatrix} \quad (34)$$

となる。すなわち、第 k ステップの \mathbf{q}^k が決定されれば、上式の \mathbf{q}^k に関する項がすべて計算されることになる。

時間ステップ計算はつぎのようになる。いま、第 k ステップにおいて \mathbf{u}_A^n の部分積 $\tilde{\mathbf{u}}_A^n = \sum_{l=1}^{k-1} \mathbf{A}^{n-l} \mathbf{q}^l$ を考える。高速多重極法により $\mathbf{A}^m \mathbf{q}^k$ を計算し、部分積を更新して

$$\tilde{\mathbf{u}}_A^{k+m} + \mathbf{A}^m \mathbf{q}^k \Rightarrow \tilde{\mathbf{u}}_A^{k+m} \quad m = 1, \dots, L-1 \quad (35)$$

とすれば、第 n ステップが開始される時点で $\mathbf{u}_A^n = \tilde{\mathbf{u}}_A^n$ となっており、時間ステップ計算を進めることができる。

全計算の計算量は $O(M(L \log L)N)$ であるが、一般的には $O(L \times O(\text{"FMM"})) \gg O(M \times O(\text{"FFT"}))$ であると考えられるので、実質的には $O(MLN)$ と考えて良いだろう。必要記憶容量は $O(ML)$ である。

5. 数値解析例

5.1 計算効率の検証

本解法の計算効率を確認するために、半径 a の円形空洞による平面入射波（階段波）の散乱問題を要素数を変えて解析した。計算パラメータとして、 $\Delta t = a/8c$, $\rho \simeq 0.9$, 総ステップ数 $N = L = 128$ とし、 $\delta(\zeta) = \sum_m^2 (1-\zeta)^m/m$ を用いた。また、高速多重極法の展開は、 $p = 10$ として、 $\pm p$ で打ち切った。本解法 (FMB: 高速多重極法を適用した演算子積分境界要素法) と従来法 (BEM: 3. で定式化した演算子積分境界要素法) との計算時間の比較を Table 1 に示す。表の列の、「影響係数」は影響係数 \mathbf{B}^m (BEM: $m = 0, \dots, L-1$, FMB: $m = 0$, 非零要素) の計算時間を、「1 ステップ」は 1 ステップの計算時間を表す。また、Fig. 4 に、FMB と BEM との全計算時間の比較を示す。

表より、BEM の計算時間の大部分は影響係数の計算に使われており、FMB では影響係数の計算よりもステップごとの計算の方に負荷がかかっていることがわかる。これは、FMB では各ステップで高速多重極法の計算を行っているためである。BEM の影響係数の計算量は $O(M^2 L \log L)$ であり、必要な記憶容量は $O(M^2 L)$ であるので、計算機の記憶容量の制限のために $M = 1024, 2048, 4096$ の計算は実行できなかった。また、BEM の 1 ステップの計算は極めて早いですが、その計算量は $O(M^2 N)$ である。表の下線を

Table 1 本解法 (FMB) と従来法 (BEM) の計算時間の比較 ($N = L = 128$)

	M	影響係数 (sec)	1 ステップ (sec)	全計算時間 (sec)
BEM	64	80.09	0.002	80.44
	128	293.82	0.01	295.12
	256	1134.75	0.04	1139.60
	512	4478.29	0.15	4497.45
	1024	—	—	<u>16928.05</u>
	2048	—	—	<u>64793.39</u>
	4096	—	—	<u>248001.6</u>
FMB	64	11.13	35.57	4564.33
	128	33.65	64.69	8313.41
	256	73.12	163.14	20955.63
	512	218.14	226.78	29246.03
	1024	751.67	559.47	77484.29
	2048	2927.17	1054.84	137946.75
	4096	10858.80	1570.30	211857.79

* 下線の数値は予想計算時間

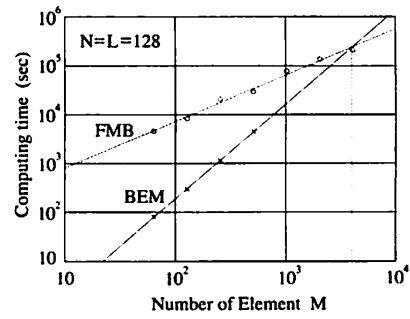


Fig. 4 要素数に対する全計算時間の比較

施した数値は、両対数グラフ (Fig. 4) のプロットから推定したものである。図から明らかなように、FMB の計算時間は要素数にほぼ比例しているが、BEM の計算時間は要素数の 2 乗に比例している。したがって、要素数が大きくなった場合には、FMB による計算の方が BEM による計算よりも早くなることがわかる。

この計算例は、要素数に対する計算時間を計測するために行ったもので、実用的な計算を想定したものではないことを注意しておく。実用的には、要素サイズに応じて時間増分を決めることになるので、要素数が増加するほど時間増分が小さくなって、計算時間は増加するはずである。しかし、その場合でも本解法は従来法と比較して計算量を縮小できることは上の検証結果より明らかである。

5.2 計算精度の確認

Fig. 5 に、演算子積分境界要素法による境界上の代表点における解を通常的时间領域境界要素法の解と比較したものを示す。計算条件は 5.1 の場合と同じである。図では、 u の接線勾配の時間履歴を示している。演算子積分境界要素法では、 Δt を小さくするほど解が改善されることがわかる。

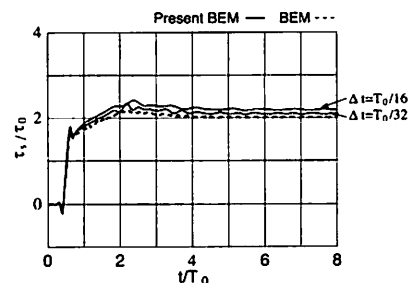


Fig. 5 演算子積分境界要素法による解の精度

Table 2 に、高速多重極法を用いた場合 (FMB) の解と従来法 (BEM) の解との数値の比較を示す。解析条件は 5.1 と同じである。両者にほとんど差はなく、FMB は BEM と同じ結果を出していることが確認された。

Table 2 本解法 (FMB) と従来法 (BEM) の計算値の比較

		32 ステップ	64 ステップ	128 ステップ
BEM	u	3.22603	7.14407	15.1565
	$\partial u / \partial s$	2.1143	2.0661	2.0237
FMB	u	3.22601	7.14402	15.1564
	$\partial u / \partial s$	2.1147	2.0669	2.0251

6. 弾性波動問題における境界要素法

等方等質な弾性体中の波動伝播問題への本解法の拡張について簡単に述べる。場の変位 u_i は Navier の方程式

$$c_T^2 u_{i,jj} + (c_L^2 - c_T^2) u_{j,ji} + X_i = \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (36)$$

を満足するものとする。ここに、 c_L, c_T は縦波および横波の位相速度であり、 X_i は物体力である。

この問題における境界積分方程式はよく知られており、スカラー波動伝播問題の場合と同様に、3. で述べた方法により、時間領域境界要素法を導くことができる(例えば文献²⁾)。ここでは、基本解の表現と高速多重極法を適用するためのポテンシャル表現についてだけ述べる。

Navier 方程式 (36) の基本解の Laplace 変換は、縦波および横波についての、波動方程式 (1) の基本解の Laplace 変換 (15)

$$g_L(r) = \frac{1}{2\pi} K_0(s_L r), \quad g_T(r) = \frac{1}{2\pi} K_0(s_T r) \quad (37)$$

を使って、

$$\hat{G}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{G} \left[g_T \delta_{ij} - \frac{1}{s_T^2} (g_T - g_L)_{,ij} \right] \quad (38)$$

と表すことができる。ここに、 $s_{L,T} = \delta(\zeta)/c_{L,T} \Delta t$ であり、 G はせん断弾性係数で、 $r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ である。これから、集中荷重 X_i による変位場 u_i^G は

$$u_i^G(\mathbf{x}) = \hat{G}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) X_j \\ = \frac{1}{s_T^2 G} \left[((g_L)_{,k} X_k)_{,i} + e_{3ij} (e_{3kl} (g_T)_{,l} X_k)_{,j} \right] \quad (39)$$

となる。対応する二重層核を g_L, g_T で表せば、

$$\hat{S}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\delta_{ij} n_k^y (g_T)_{,k} - n_i^y (g_T)_{,j} \\ - \left(1 - 2 \frac{s_L^2}{s_T^2} \right) n_j^y (g_L)_{,i} + \frac{2}{s_T^2} n_k^y (g_T - g_L)_{,ijk} \quad (40)$$

となる。したがって、食い違い U_i による変位場 u_i^S は

$$u_i^S(\mathbf{x}) = \hat{S}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) U_j \\ = - (V_{jk} (g_L)_{,jk})_{,i} - e_{3im} [e_{3kn} V_{jk} (g_T)_{,nj}]_{,m} \quad (41)$$

となる。ここに、

$$V_{jk} = \frac{1}{s_T^2 G} [\lambda \delta_{jk} n_m^y U_m + G (n_k^y U_j + n_j^y U_k)] \quad (42)$$

である。ここで、 λ は Lamè 定数である。

(39), (41) によれば、変位 u_i^G, u_i^S は、Helmholtz 分解

$$u_i(\mathbf{x}) = \phi_{,i} + e_{3ij} \psi_{,j} \quad (43)$$

の形となっている。したがって、変位ポテンシャル ϕ, ψ の多重極展開を

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} M_n K_n(s_L r) e^{in\theta} \quad (44)$$

$$\psi(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} N_n K_n(s_L r) e^{in\theta} \quad (45)$$

と書くことにすれば、基本解および二重層核による多重極モーメントは

$$M_n^G = -X_k \frac{\partial}{\partial y_k} [I_n(s_L \rho) e^{-in\varphi}] \quad (46)$$

$$N_n^G = -e_{3kl} X_k \frac{\partial}{\partial y_l} [I_n(s_T \rho) e^{-in\varphi}] \quad (47)$$

$$M_n^S = V_{jk} \frac{\partial^2}{\partial y_j \partial y_k} [I_n(s_L \rho) e^{-in\varphi}] \quad (48)$$

$$N_n^S = e_{3km} V_{jk} \frac{\partial^2}{\partial y_m \partial y_j} [I_n(s_T \rho) e^{-in\varphi}] \quad (49)$$

となる。

以上によって、弾性波動問題の高速多重極法は、変位ポテンシャルの高速多重極法として実現できることが明らかとなった。したがって、4. の手法をそのまま適用することができる。

7. おわりに

2次元波動伝播問題において、演算子積分法を用いた時間領域境界要素法の定式化、および、これに高速多重極法を適用して計算を高速化する手法について述べた。

演算子積分法による時間領域境界要素法の定式化は極めて簡便であり、また、基本解の Laplace 変換が閉じた形で与えられる問題であれば容易に適用できる。この型の時間領域境界要素法への高速多重極法の適用は比較的容易である。アルゴリズムの中にスケーリングを導入する必要はあるものの、展開項数は比較的小さくすることができ、計算精度も維持することができる。

最後に、2次元弾性波動問題へも本手法をそのまま拡張して適用できることを示した。

参考文献

- 1) Lubich, C. : Convolution quadrature and discretized operational calculus I and II, *Numer. Math.*, **52** (1988) pp. 129-145 and pp. 413-425.
- 2) Schanz, M. and H. Antes : A new visco- and elastodynamic time domain boundary element formulation, *Comput. Mech.*, **20** (1997) pp. 452-459.
- 3) 岡山美央, 福井卓雄 : 2次元波動問題における離散作用素積分境界要素法, 計算工学講演会論文集, **9** (2004) pp. 311-314.
- 4) 福井卓雄, 岡山美央 : 演算子積分法を用いた時間領域境界要素法における高速多重極法の適用, 計算工学講演会論文集, **10** (2005) pp. 587-590.
- 5) Greengard, L. and V. Rokhlin : A fast algorithm for particle simulations, *J. Comput. Phys.*, **73** (1987) pp. 325-348.
- 6) 福井卓雄, 勝本順三 : 高速多重極境界要素法による2次元散乱問題の解析, BEM・テクノロジー・コンファレンス論文集, **7** (1997) pp. 47-52.
- 7) Abramowitz, M. and I.A. Stegun : *Handbook of Mathematical Functions*, Dover (1960)