

圧縮クリープ試験を用いた緩和弾性係数の同定法について

IDENTIFICATION OF RELAXATION MODULUS USING COMPRESSION CREEP TEST

辰己 正和¹⁾, 荒井 政大²⁾, 筒井 喜平³⁾
Masakazu TATSUMI, Masahiro ARAI and Kihei TSUTSUI

- 1) 信州大学大学院工学系研究科 (院生) (〒380-8553 長野市若里 4-17-1, E-mail : tatsumi@str1.shinshu-u.ac.jp)
2) 信州大学工学部機械システム工学科 (〒380-8553 長野市若里 4-17-1, E-mail : arai@shinshu-u.ac.jp)
3) (株) ランスモア (〒101-0064 東京都千代田区猿楽町 2-7-7, E-mail : tsutsui@lancemore.jp)

An identification technique for relaxation modulus of the viscoelastic materials was developed. As mentioned in the literatures, relaxation function can be estimated by unidirectional compression creep test. A creep function derived by experiment testing can be converted into relaxation function using Duhamel's convolution integral. In the present study, the accuracy of the relaxation functions obtained by the technique as discussed above was increased by the definition of true stress and true strain. Experimental results of the relation between creep deformation and time was converted into the true stress-strain creep function correcting the variation of the cross-section area of the specimen. Numerical demonstration was carried out to illustrate the effectiveness of the alternative estimation technique of the relaxation function. Through some numerical results, we can confirmed that the creep deformation derived by the FEM analysis using the alternative relaxation function is almost identical to that of experimental result measured by creep test.

Key Words: Thermo-Viscoelasticity, Creep Function, Relaxation Modulus, Laplace Transform, Maxwell Model, Press Forming, Glass Lens, Resin Mold, Finite Element Method

1. 緒 論

デジタルカメラや液晶プロジェクタなどの民生機器, 内視鏡に代表される医療機器, レーザーなどを用いた各種の分析機器など, ガラス製光学デバイスの用途は年々拡大しつつある。特に近年はガラスレンズの生産コストの低減, また非球面化などへの要請から, モールドプレス成形による製造法が注目を集めるようになった⁽¹⁾。

ガラスレンズのモールドプレスに関する数値シミュレーションにおいては, 金型とガラス材の非線形接触・大変形問題となることはもちろん, ガラスの弾性係数が温度と時間に依存する熱粘弾性体であることを考慮する必要がある⁽²⁾。

これまで著者らのグループでは, ガラスレンズのプレス成形を有限要素シミュレーションより評価し, 一連の成果を得てきた^(3, 4)。その結果, ガラスレンズのモールドプレス成形において生じる残留応力およびガラスレンズの成形精度は, ガラスの熱粘弾性特性^(5, 6)に起因して, 成形圧力や加圧時間, 冷却速度といった種々の成形パラメータに強く依存することを見出している。

しかしながら, これまでの研究においては, 一軸圧縮クリープ試験により求められた緩和弾性係数の同定精度に少なからず課題を残していた。この理由は, 微小変形理論に基づくクリープ関数の定義を, 大変形状態のクリープ試験にそのまま適用して緩和弾性係数を求めていたことに起因している。そのため, 結果として同定された緩和弾性係数を用いてクリープ試験のシミュレーションを行っても, もとの実験を完全に再現するに至らず, 結果として数値シミュレーションを繰り返すことによって緩和弾性係数のモデルにおける諸係数を修正せざるを得ないのが実状であった。さらには, 成形シミュレーションにおいて実際の結果と異なる大きな体積変化が生じるなどの点も, 克服すべき課題として挙げられていた。

そこで本研究では, 一軸圧縮クリープ試験からクリープ関数を算出する際に, 大変形状態においても十分な近似精度を確保するための手法について詳細に検討した。クリープ試験時の断面積を補正し, 真ひずみと真応力を用いたクリープ関数を導出するとともに, 体積変化を考慮した上で効果的な材料パラメータの与え方を提案した。有限要素法コード ANSYS⁽⁷⁾を用いた数値シミュレーション結果を用いて, 本論文で提案する一連の手法の有効性について検証した。

ここで本研究では, 一軸圧縮クリープ試験からクリープ関数を算出する際に, 大変形状態においても十分な近似精度を確保するための手法について詳細に検討した。クリープ試験時の断面積を補正し, 真ひずみと真応力を用いたクリープ関数を導出するとともに, 体積変化を考慮した上で効果的な材料パラメータの与え方を提案した。有限要素法コード ANSYS⁽⁷⁾を用いた数値シミュレーション結果を用いて, 本論文で提案する一連の手法の有効性について検証した。

2. 理 論

2.1 クリープ関数と緩和弾性係数 以下, 線形粘弾性体の応力-ひずみ関係について考える。線形粘弾性体の構成方程式は, 緩和弾性係数 $E(t)$ を用いて次式のような Duhamel のたたみ込み積分で定義できる。

$$\sigma(t) = \int_0^t E(t-\tau) \frac{d}{d\tau} \epsilon(\tau) d\tau + E(t) \epsilon(0) \quad (1)$$

ここで $\epsilon(t)$ は粘弾性体に作用するひずみ, $\sigma(t)$ はそれにより生じる応力であり, $\epsilon(0)$ は初期ひずみを表す。同様に, クリープ関数 $J(t)$ を用いて応力-ひずみ関係を記述すると以下のようになる。

$$\epsilon(t) = \int_0^t J(t-\tau) \frac{d}{d\tau} \sigma(\tau) d\tau + J(t) \sigma(0) \quad (2)$$

式 (1), 式 (2) を Laplace 変換すると, それぞれ次式を得る.

$$\bar{\sigma}(s) = s\bar{E}(s)\bar{\epsilon}(s) \quad (3)$$

$$\bar{\epsilon}(s) = s\bar{J}(s)\bar{\sigma}(s) \quad (4)$$

ただし, 's' は Laplace 変換パラメータである. 式 (3), 式 (4) より応力とひずみを消去すると以下の式を得る.

$$\bar{E}(s) = \frac{1}{s^2\bar{J}(s)} \quad (5)$$

よって, 実験によりクリープ関数 $J(t)$ が得られれば, Laplace 変換, 逆変換を用いて緩和弾性係数 $E(t)$ を算出できることがわかる.

2・2 大変形時における体積変化について はじめに, ヤング率 E , ポアソン比 ν の弾性体に一軸応力が作用する場合の体積変化について考えてみる. 大変形時のひずみを真ひずみ (対数ひずみ) で表した上で変形前の体積 V_0 と変形後の体積 V の比を計算すると, 以下のようになる.

$$V/V_0 = \exp\{(1 - 2\nu)\epsilon_x\} \quad (6)$$

上式から明らかなように, ポアソン比が 0.5 の場合, 体積変化は 0 となる. ちなみに体積弾性率 K は,

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} \quad (7)$$

と定義されるから, ポアソン比が 0.5 に近付けば, 体積弾性率は無限大となる.

線形粘弾性体の体積変化について議論する場合, 厳密には Laplace 変換領域での議論が必要となるが, ポアソン比を一定とすると, 縦ひずみ ϵ_x が増加するに従い体積が大きく変化することは式 (6) から直観的に理解できよう.

他方, 実際の粘弾性材料では, 大変形が生じた場合の体積変化が極めて小さいことが実験により確かめられている. 著者らがやっている直径 10mm, 高さ 10mm の円柱状ガラス試験片を用いたクリープ試験の結果では, 圧縮ひずみが 50% を越えるような極めて大きな変形状態においても, 体積変化の実測値は 1% をはるかに下回っており, 計測誤差や試験片ごとのばらつきを考慮すれば, 数値解析上はほとんど無視しうるほど小さい体積変化であった.

粘弾性材料を扱った種々の論文においては, ポアソン比を時間によらず一定として扱うことが多い^(3, 4). しかしながら, ポアソン比が一定であれば, 緩和弾性係数 $E(t)$ の時間変化に伴い, 体積弾性率 $K(t)$ も大きく変化する. これが粘弾性体の大変形問題を解析した場合に, 実際よりもはるかに大きな体積変化が生じてしまう理由である.

そこで本論文では, 大変形時の過大な体積変化を抑制するため, 体積弾性率を時間によらず一定であると仮定して定式化する. 体積弾性率の初期値, すなわち瞬間弾性率として定義される体積弾性率 K_0 を, 瞬間弾性率 E_0 およびポアソン比 ν_0 を用いて式 (7) により定めると, 結果としてステップ応答関数として定義される体積弾性率 $K(t)$ の Laplace 変換は以下のようになる.

$$\bar{K}(s) = \frac{1}{s}K_0, \quad \left(K_0 = \frac{E_0}{3(1 - 2\nu_0)}\right) \quad (8)$$

ポアソン比は, Laplace 変換領域における $\bar{K}(s)$ と $\bar{E}(s)$ を用いて以下のように定義される.

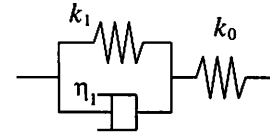


Fig.1 Kelvin's model.

Table 1 Numerical results of simulation of creep test for Kelvin's model

Time [s]	Normal Strain ϵ_x	Transverse Strain ϵ_y	Volume Ratio V/V_0
1	-0.00996	0.00498	0.999996
10	-0.09517	0.04758	0.999996
100	-0.63213	0.31606	0.999996
1000	-0.99996	0.49998	0.999996

$$\nu(s) = \frac{3\bar{K}(s) - \bar{E}(s)}{6\bar{K}(s)} \quad (9)$$

ここで, 体積弾性率を一定とすることにより, 大変形が生じた際の体積変化が抑制されることを簡単な数値実験により検証する. モデルとして, Fig.1 に示されるような 3 要素 Kelvin モデルに従う粘弾性体について考える. このモデルのクリープ関数 $J(t)$ および緩和弾性係数 $E(t)$ は以下のようになる.

$$J(t) = \frac{1}{k_0} + \frac{1}{k_1} \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{t}{\lambda_1}\right) \right\} \quad (10)$$

$$E(t) = k_0 \exp\left(-\frac{t}{p_1}\right) + q_0 \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{t}{p_1}\right) \right\} \quad (11)$$

それぞれ Laplace 変換すると,

$$\bar{J}(s) = \frac{1}{sk_0} + \frac{1}{sk_1(1 + s\lambda_1)} \quad (12)$$

$$\bar{E}(s) = \frac{q_0 + sk_0p_1}{s(1 + sp_1)} \quad (13)$$

ただし,

$$\lambda_1 = \frac{\eta_1}{k_1}, \quad q_0 = \frac{k_0k_1}{k_0 + k_1}, \quad p_1 = \frac{\eta_1}{k_0 + k_1}$$

である. 一般的なガラス材料を想定し, 計算におけるパラメータは以下の値を用いた

$$k_0 = 100[\text{GPa}], \quad k_1 = 1.0[\text{MPa}], \quad \eta_1 = 100[\text{MPa}\cdot\text{s}]$$

また, 時刻 $t = 0$ におけるポアソン比を $\nu_0 = 0.3$ と定義した. なお, 瞬間弾性率 E_0 は k_0 に一致する.

この粘弾性材料に, 大きさ 1.0MPa の一軸圧縮応力が作用した場合について, 荷重方向ひずみ ϵ_x , 横ひずみ ϵ_y の応答を求めて体積変化を計算した. なお, ϵ_y に関しては Laplace 変換領域でのひずみを求め, 数値的に Laplace 逆変換を行って時刻歴を求めている. ひずみ ϵ_x , ϵ_y , および初期体積に対する体積比 V/V_0 の計算結果を Table 1 に示す.

表に示されているように, ひずみが増加しても, 体積率は一定のままである. これは体積弾性率を一定としたためであり, ある意味で当然の結果である. すなわち, 体積変化は初期弾性率により決まる弾性変形分から見積もることができ, 時間に伴う緩和の効果は生じない. また, 現実の材料を想定した本計

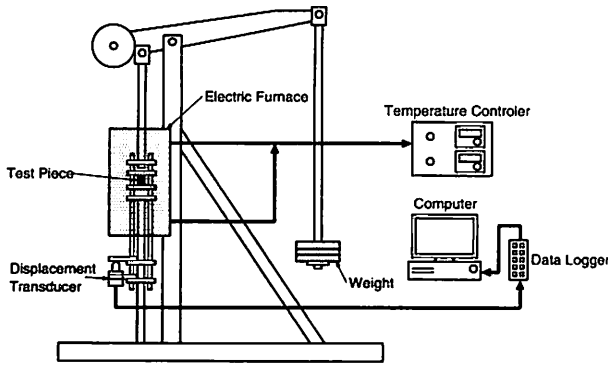


Fig.2 Schematic of creep test.

算結果において、その体積変化は約 0.0004%程度と極めて微小となることも確かめられる。

なお、体積弾性率を一定とする代わりに、ポアソン比を一定(=0.3)として計算したところ、 $t = 1000s$ において、体積が約 33%減少する計算結果を得た。この結果からも、体積弾性率を一定とする定式化の妥当性が示されているといえる。

2.3 実験データを用いたクリープ関数の計算法

既に述べたように、著者らのグループでは、ガラス材料の熱粘弾性特性の測定に対し、一軸圧縮クリープ試験を採用している。クリープ試験装置は Fig.2 に示すとおりであり、ガラス材料ないし強化プラスチックなどの熱粘弾性材料を電気炉内に設置し、試験片の上下より一定荷重を付与することによりクリープ試験を実施するものである。

通常は、試験荷重を P 、試験片の断面積を A_0 、試験片の長さを L_0 、測定された変位の時刻歴を $u(t)$ とすれば、線形粘弾性体のクリープ関数 $J(t)$ は、単位応力あたりのひずみ応答として以下のように得ることがきる。

$$J(t) = \frac{A_0 u(t)}{PL_0} \quad (14)$$

しかしながら、一軸圧縮クリープ試験により材料のクリープ関数を求める場合、その応力およびひずみの取扱いにいくつかの問題が生じる。一つめは、クリープ変形がすすむにつれて試験片の断面積が変化することにより、応力も変化することである。すなわち、一軸圧縮クリープ試験においては、応力が時間とともに変化するのである。二つめはひずみの取り扱いである。一般には簡便化のためにクリープ関数の計算にも公称ひずみを用いることが多いが、実際には大ひずみ・大変形のクリープ変形では、真ひずみを用いなければならない。

既存の数値シミュレーション^(3,4)においてはこれらの問題を見逃し、公称応力と公称ひずみによるクリープ関数を用いたため、有限要素法による成形解析において少なからず誤差を生じていた。特に同定された緩和弾性係数を用い、クリープ試験を汎用有限要素コードを用いて模擬すると、クリープ試験終了時の最終変形量に誤差が生じることから、無次元時間において定義される弾性率 (E_∞) を修正するなどして対処せざるを得ないのが実情であった。そこで本論文ではこれらの問題を回避するため、以下のような手順で実験データより大ひずみ・大変形に対応したクリープ関数を算出する。

まず、試験片の変位より、クリープ試験におけるひずみ履歴を真ひずみによって記述する。

$$\epsilon(t) = \ln \frac{L(t)}{L_0} \quad (15)$$

ただし、 $L(t) = u(t) + L_0$ である。次に、応力の変化について考える。前節の数値計算に示されているように、粘弾性体の変形に伴う体積変化は微小であるから、大変形時には体積変化が生じないものとみなして、計算を簡略化する。この近似を用いると、時刻 t における断面積を $A(t)$ は、

$$A(t) = A_0 \frac{L_0}{L(t)} = A_0 e^{-\epsilon} \quad (16)$$

となる。よって、試験片に作用する真応力の履歴は次式のように見積もられる。

$$\sigma(t) = \frac{P}{A(t)} = \frac{P}{A_0} e^{\epsilon} \quad (17)$$

さて、たまたみ込み積分の定義式 (2) よりクリープ関数を求めるために、ひずみ $\epsilon(t)$ 、応力 $\sigma(t)$ 、クリープ関数 $J(t)$ を時間軸に対して等間隔に離散化し、 $\epsilon_i, \sigma_i, J_i$ ($i = 0, N$) と定義する。式 (2) の時間微分に対して差分近似を適用すると、次式のようになる。

$$\epsilon_i = \sum_{k=1}^i J_{i-k} \left(\frac{\sigma_k - \sigma_{k-1}}{\Delta t} \right) \Delta t + J_i \sigma_0 \quad (18)$$

すなわち、クリープ関数 J_i は、

$$J_i = \frac{\epsilon_i}{\sigma_0} - \sum_{k=1}^i J_{i-k} \frac{\sigma_k - \sigma_{k-1}}{\sigma_0} \quad (19)$$

のように逐次的演算により求められることがわかる。

2.4 Maxwell モデルによる緩和弾性係数の近似

これまで議論したように、対象材料のクリープ関数 $J(t)$ が実験により得られれば、Laplace 変換を適用することにより解析に必要な緩和弾性係数を求めることができる。しかしながらこれらの演算は、Laplace 像空間上の演算および数値的な Laplace 逆変換の過程を経るため、演算過程において数値的な誤差が重畳しやすいなどの問題がある。

そこで本手法では、実験により得られたクリープ関数を解析的に Laplace 変換可能な関数を用いて近似する。クリープ関数の近似には、さまざまな関数を用いることができるが、本論文では最も簡便な近似法としてべき級数を用いた近似を採用した。

まず、実験により測定されたクリープ関数を、以下のようにべき級数和により近似する。

$$J(t) = \sum_{i=1}^N a_i t^i + \frac{1}{E_0} \quad (20)$$

ここで、定数項は離散データを近似した際の 0 次の係数を用いずに、瞬間弾性率 E_0 を用いて直接与えている点に注意されたい。

式 (20) を Laplace 変換すると、以下の式を得る。

$$\bar{J}(s) = \sum_{i=1}^N a_i \frac{i!}{s^{i+1}} + \frac{1}{sE_0} \quad (21)$$

式 (5) および式 (21) より、緩和弾性係数の Laplace 変換 $\bar{E}(s)$ は以下のように求められる。

$$\bar{E}(s) = \frac{1}{s^2 \left\{ \sum_{i=1}^N a_i \frac{i!}{s^{i+1}} + \frac{1}{sE_0} \right\}} \quad (22)$$

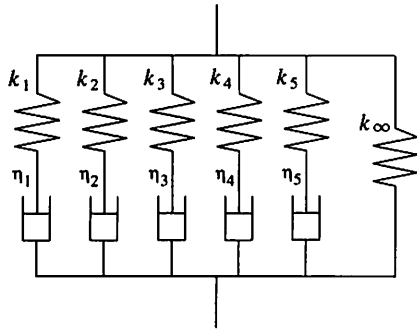


Fig.3 Maxwell model.

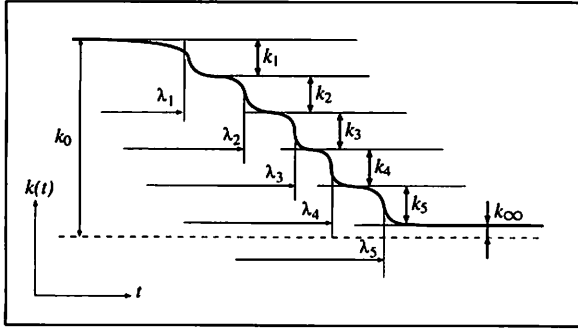


Fig.4 Relation of parameter k_i and η_i on Maxwell model.

なお、本論文における実際の計算では、汎用有限要素法コード ANSYS⁽⁷⁾の仕様に従い、縦弾性係数 $E(t)$ ではなく、せん断弾性率と体積弾性率の緩和弾性係数を FEM 計算に用いている。これら 3つの緩和弾性係数 $E(t)$ 、 $G(t)$ および $K(t)$ の間には、Laplace 像空間上にて以下の関係式が成立する。

$$\bar{G}(s) = \frac{3\bar{K}(s)\bar{E}(s)}{9\bar{K}(s) - \bar{E}(s)} \quad (23)$$

なお、せん断の瞬間弾性率 G_0 、および時刻無限大におけるせん断弾性率 G_∞ は次式により求められる。

$$G_0 = \frac{3K_0E_0}{9K_0 - E_0}, \quad G_\infty = \frac{3K_\infty E_\infty}{9K_\infty - E_\infty} \quad (24)$$

最終的に、式 (22) により得られる $\bar{E}(s)$ 、式 (8) より得られる $\bar{K}(s)$ を式 (23) に代入すれば緩和弾性係数 $G(t)$ の Laplace 変換 $\bar{G}(s)$ が得られ、それを Laplace 逆変換することによって実時間軸上のせん断緩和弾性係数 $G(t)$ を得ることができる。なお、本論文では、時間後半におけるリングングが少なく、任意の時刻における実時間解が求められるといった利点から、細野の方法⁽⁸⁾を用いて数値 Laplace 逆変換を行った。

さて、汎用有限要素法コードにおける解析を想定し、得られた緩和弾性係数のデータをさらに離散モデルにより近似することを考える。本論文では、クリープ試験により求められた緩和弾性係数を Maxwell モデルを用いて近似する^(3, 4, 9, 10)。今回用いた Maxwell モデルは、Fig.3 に示されるような弾性要素と粘性要素からなる 5つのユニットが並列に接続され、さらに時刻無限大に対応する弾性要素 k_∞ が付加された計 11 自由度のモデルである。このモデルの緩和弾性係数 $k(t)$ は次式により表される。

$$k(t) = \sum_{i=1}^5 k_i \exp\left(\frac{-t}{\lambda_i}\right) + k_\infty \quad (\lambda_i = \eta_i/k_i) \quad (25)$$

Table 2 Initial and infinit-time elastic moduli.

E_0	124.80[GPa]
K_0	102.97[GPa]
G_0	48.07[GPa]
ν_0	0.298
$E_\infty(\text{nominal})$	1.783[MPa]
$E_\infty(\text{true})$	0.3109[MPa]
$G_\infty(\text{nominal})$	0.5942[MPa]
$G_\infty(\text{true})$	0.1036[MPa]

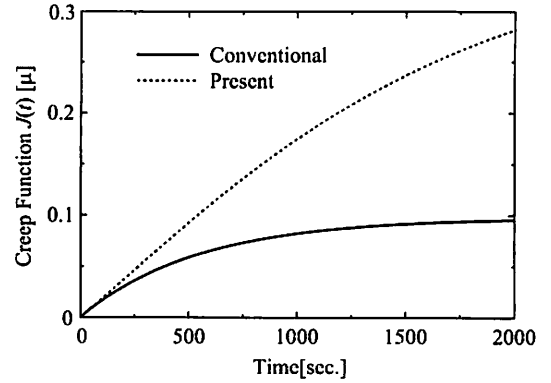


Fig.5 Creep function $J(t)$.

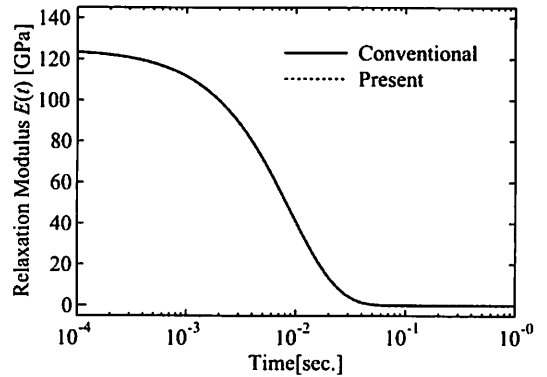


Fig.6 Relaxation function $E(t)$.

ここで k_1, k_2, \dots, k_5 および $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_5$ は Maxwell モデルの各要素に対応する係数である。また、 k_∞ は無限時間経過後の弾性率をそれぞれ表す。

Fig.3 のモデルにより近似された緩和弾性係数を模式的に示したのが Fig.4 である。すなわち、時間の経過とともに各ユニット (k_i, λ_i) 毎に段階的に緩和が生じ、最終的に k_∞ へと収束する性質を示す。なお、本論文では探索次元を少なくするため、弾性定数 k_1, k_2, \dots, k_5 を既知量として与え、緩和速度を規定する $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_5$ のみを未知パラメータとして探索を行った。

なお、時刻無限大における弾性率 k_∞ は、クリープ試験における試験片の最終形状より求めた。また、 $k_1, k_2, \dots, k_5, k_\infty$ の各弾性係数は、瞬間弾性率 k_0 との間で成立する以下の条件式を満たすべきことに注意されたい。

$$k_0 = \sum_{i=1}^5 k_i + k_\infty \quad (26)$$

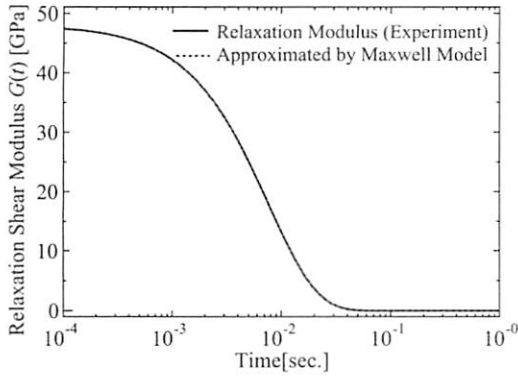


Fig.7 Approximated shear relaxation modulus $G(t)$ by Maxwell model (using present method).

Table 3 Coefficient of Maxwell model (Conventional method)

k_1	11.15213[GPa]	λ_1	7.625 [ms]
k_2	11.15213[GPa]	λ_2	7.750 [ms]
k_3	11.15213[GPa]	λ_3	7.750 [ms]
k_4	11.15213[GPa]	λ_4	7.875 [ms]
k_5	4.12961[GPa]	λ_5	7.875 [ms]
k_∞	0.5942[MPa](= G_∞)		

Table 4 Coefficient of Maxwell model (Present method)

k_1	11.15213[GPa]	λ_1	7.625 [ms]
k_2	11.15213[GPa]	λ_2	7.625 [ms]
k_3	11.15213[GPa]	λ_3	7.750 [ms]
k_4	11.15213[GPa]	λ_4	7.875 [ms]
k_5	4.13011[GPa]	λ_5	8.000 [ms]
k_∞	0.1036[MPa](= G_∞)		

3. 緩和弾性係数の同定

本節では、直径 10mm、高さ 10mm の円柱状のガラス試験片を用いて実施されたクリープ試験の結果を用い、実際に緩和弾性係数の同定を試みる。Fig.2 に示す試験装置を使用し、円柱試験片の上部より一定荷重 (=98N) を作用させた場合について変位の時刻歴を計測した。なお、ガラス試料は TaF-3 であり、今回の計算では TaF-3 のガラス転移温度である 680°C の試験データを用いた。

試験片の常温でのヤング率 E_0 とポアソン比 ν_0 は、共鳴超音波スペクトロスコピー法^(11, 12)により算出した。また、クリープ試験においてデータ収録を終えた後もしばらく荷重をかけ続けることにより、最終的な変形量を計測した。個々の試験片においてややばらつきが認められたものの、時間が十分経過した時点における試験片の変形量は約 7mm であった。この値より、時刻無限大のヤング率 E_∞ を計算した。

Table 2 に、時刻 $t = 0$ における弾性率 E_0 , G_0 , K_0 , ν_0 の値と、時刻無限大における弾性率 E_∞ , G_∞ を示す。なお、時刻無限大における弾性率は、公称ひずみ・公称応力を用いる場合と、真ひずみ・真応力を用いて計算する場合とでは値が異なるため、表には両者の場合の値を併記した。

Fig.5 は、公称ひずみ・公称応力の定義に従い計算されたクリープ関数と、本論文で導出した真応力・真ひずみを用いたクリープ関数を比較したものである。両者の差は一見して非常に大きく、特に最終変形量においては、実に 3 倍近くの差が

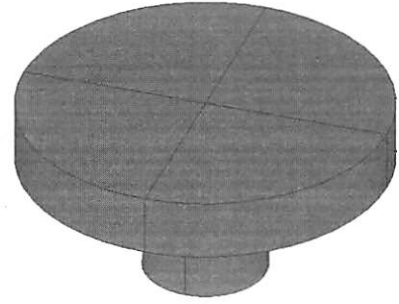


Fig.8 3D image of analyzed model of creep test.

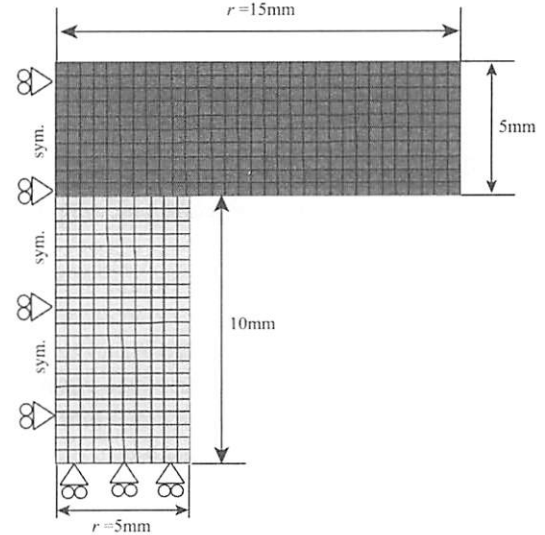


Fig.9 Element division of FEM analysis.

生じていることがわかる。

Fig.6 は、上記 Fig.5 で示されたクリープ関数を 10 次のべき級数で近似したのちに Laplace 変換し、式 (22) を用いて緩和弾性係数の Laplace 変換 $\bar{E}(s)$ を求め、最終的に細野の方法による数値 Laplace 逆変換によって実時間の緩和弾性係数 $E(t)$ を求めた結果である。従来法 (Conventional) と本手法 (Present) による緩和弾性係数の同定結果は、グラフを見る限り特に明確な差は認められないが、クリープ関数における時間後半の値の差に起因して、実際には $t = 0.1s$ 以降の最終的な収束値において若干の差が生じている。

次に、本論文の提案手法を用い、せん断の緩和弾性係数 $G(t)$ を求めた結果を Fig.7 に示す。グラフの実線が式 (23) を用いて算出された緩和弾性係数 $G(t)$ であり、グラフの破線は実線のカーブを Maxwell モデルで近似して得られた結果を示している。なお、従来法を用いた計算されたせん断弾性係数は、グラフ上では提案手法による結果との差が確認できないため、Fig.7 には提案手法により求めた結果のみを示した。5 ユニットの並列要素からなる Maxwell モデルにより、せん断弾性率の緩和弾性係数が高い精度で近似可能であることが確かめられる。

従来法と提案手法のそれぞれの場合について探索計算により同定された Maxwell モデルの諸係数 k_i , λ_i を Table 3、および Table 4 に示す。これらの諸係数のうち、下位の桁を除いて明らかに値が異なるのは $k_\infty = G_\infty$ など一部の係数のみであるが、この僅かな差が計算結果に大きな影響を及ぼすことが後の解析例にて明らかになる。

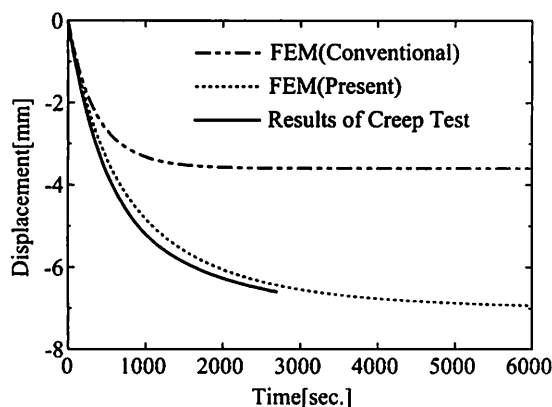


Fig.10 Normal displacement in creep test estimated by FEM analysis

4. 有限要素法による数値シミュレーション

最後に、前章で同定された緩和弾性係数を用いて汎用有限要素法コード ANSYS による数値シミュレーションを行った。Fig.8 は解析モデルの3次元図である。直径 10mm、長さ 10mm のガラス試験片の上面に、直径 30mm のステンレス円板にて圧縮荷重を作用させ、試験片の下面は荷重方向の変位を拘束する条件で計算を行った。各寸法は実際のクリープ試験に準じている。円板の中央に大きさ 98N の垂直荷重を作用させ、その際の試験片のクリープ変形挙動を数値解析によって模擬した。

なお、実際には円板の変形はガラス試料のそれに比して小さく無視できる。また、円板とガラス試験片との摩擦は無視しているため、解析においてガラス試験片は荷重方向にほぼ均一な変形を生じた。また、実際の解析に際しては、Fig.9 に示すような軸対称モデルを用いており、4 辺形 8 節点要素を用いて大変形効果を考慮した解析を行った。

試験片上面の中央節点における変位の時刻歴の解析結果を Fig.10 に示す。公称ひずみと公称応力を用いて緩和弾性係数を導出した従来法の場合、明らかに誤差が生じており、試験片の最終変位量は実験結果の 40%程度に留まっている。

他方、真ひずみと真応力に基づく緩和弾性係数を用いた提案手法では、クリープ試験結果の得られている時間範囲において、解析結果と実験結果は非常によく一致していることがわかる。また、解析における最終的な変位も、本来の実験における試験片の最終変位 (約 -7mm) にほぼ収束していることが確かめられる。

実験結果と解析結果の差異はさまざまな要因が考えられるが、汎用有限要素法ではひずみ増分法が用いられていることに起因して、離散化誤差や時間ステップの設定に解析精度が影響を受けやすいためであろうと考えられる。しかしながら両者の差は非常に小さく、実用上は問題ないものと判断される。結果として、提案手法により同定された緩和弾性係数を用いれば、種々の汎用有限要素法コードにより大変形を伴う粘弾性体の解析が可能であることが示されたと考えられる。

5. 結 論

本論文では、一軸圧縮クリープ試験の結果を用いて粘弾性材料の緩和弾性係数を算出する一連の手法について詳細に検討した。一般に粘弾性材料の緩和弾性係数は、たたみ込み積分によりクリープ関数と関係づけられるが、大変形状態のクリープ関数を微小変形理論により単純に演算すると、予想をはるかに超えた誤差を生じる。そこでクリープ関数の評価において、試験時の逐次的な応力の変化を考慮し、さらにはひずみの定義に真ひずみを適用して大変形状態を適切に表現し得るクリープ関数を導出した。

得られたクリープ関数より Laplace 変換・逆変換を用いて緩和弾性係数を算出し、Maxwell モデルによる近似を適用した。同定された緩和弾性係数を用いて汎用有限要素法コード ANSYS による数値シミュレーションを実施し、実験におけるクリープ変形の挙動を数値計算によって忠実に模擬できることを確認するとともに、本手法により得られた緩和弾性係数が実用上有効な精度で同定されていることを確認した。

今後は実際のガラスレンズとシミュレーション結果の比較を詳細に行うことにより、本論文で提案した緩和弾性係数の同定手法の有効性についてさらに検討する予定である。

参考文献

- (1) 梅谷 誠：プレス成形によるガラスレンズの作成, NEW GLASS, **13**-2, (1998), pp.32-37.
- (2) 村上謙吉：レオロジー基礎論, (1991), 産業図書, pp.151-170.
- (3) 荒井政大, 山本和也, 中村淳之介, 伊藤寛明, 松倉利顕, 杉本公一：有限要素法によるガラスレンズのプレス成形シミュレーション, 日本機械学会論文集 (A), **72**-717, (2006), pp.683-690.
- (4) 荒井政大, 中村淳之介, 辰巳正和, 伊藤寛明, 松倉利顕, 杉本公一：温度場の不均一性を考慮したガラスレンズのモールドプレス解析, 日本計算数理工学論文集, **5**-2, (2005), pp.177-182.
- (5) 例えば, クリュチニコフ他, 千野英春訳：ガラスの科学, 科学普及新書, (1972), 東京図書.
- (6) 例えば, Holloway, D. G., 大井喜久男訳：ガラスの物理, モダンサイエンスシリーズ, (1977), 共立出版.
- (7) ANSYS ver.10.0, サイバネットシステム株式会社, URL: <http://www.cybernet.co.jp/ansys/>.
- (8) 細野敏夫：数値ラプラス変換, 電気学会論文集, **99**-10, (1979), pp.44-50.
- (9) 定ひずみ速度試験による線形粘弾性特性係数関数決定法：藤川正毅, 隆 雅久, 青山大輔, 三原康子, 小林卓哉, 実験力学, **4**-4, (2004), pp.53-58.
- (10) Collocation 法を基にした線形粘弾性マクスウェルモデルの Prony 級数近似法：藤川正毅, 隆 雅久, 実験力学, **3**-4, (2003), pp.60-66.
- (11) 荒井政大, 岡田尚寛, 鈴木春貴, 成田光裕：共振周波数を用いた異方性弾性定数の同定に関する境界要素解析, 日本機械学会論文集 (A), **70**-692, (2004), pp.532-539.
- (12) 荒井政大, 大鋸 学：解空間の尖鋭度を用いた RUS 法による弾性定数の同定：日本計算数理工学論文集, **6**-1, (2006), pp.69-72.