

RBF を用いた選点法による非定常熱伝導解析 (3次元問題での検討)

Collocation Method Using RBF Applied to Transient Heat Conduction Analysis
(Study on Three-Dimensional Problems)

田中 正隆 *1, 白坂 英雄 *2, 小池 裕樹 *3

Masataka TANAKA*1, Hideo SHIRASAKA*2, and Hiroki KOIKE*3

- 1) 信州大学工学部機械システム工学科 (〒 380-8553 長野市若里 4-17-1, E-mail: dtanaka@gipwc.shinshu-u.ac.jp)
- 2) 信州大学大学院工学系研究科 (〒 380-8553 長野市若里 4-17-1, E-mail: h-shirasaka@artist.shinshu-u.ac.jp)
- 3) 信州大学工学部機械システム工学科 (〒 380-8553 長野市若里 4-17-1, E-mail: hiroki-k@artist.shinshu-u.ac.jp)

This paper is concerned with a collocation method with radial basis functions for transient heat conduction problems in a homogeneous body. Time derivatives of the governing equation is approximated by the finite difference scheme. The unknown coefficients in expansion are determined by solving a system of linear algebraic equations. This system of equations are obtained so that the approximate function satisfies the boundary conditions at the collocation points on the boundary and the governing equation at internal collocation points. The time derivative is then approximated by the backward finite difference method. First, we investigate relative numerical errors which depend on the approximate functions. Next, a combined 3-dimensional region composed of two different materials is analyzed, and the numerical results obtained the proposed method are compared with those by the usual Finite Element Method.

Key Words: Computational Mechanics, Meshless Method, Collocation Method, 3-D Analysis, Transient Heat Conduction, Radial Basis Function

1. はじめに

メッシュレス解法の一つとして、解析対象に点を配するだけで良いハイブリッド境界節点法 (HdBNM) が示されている。この手法は非均質定常熱伝導問題のような、支配方程式が非同次形となるものに対しても有効であり、拡張する際に、同次形の一般解及び、非同次形の特解の和として得る⁽¹⁾。同次形の一般解については、基本解と未知係数で、非同次形の特解については、近似関数と未知係数で近似する。対して非同次形一般解を近似関数と未知係数で直接近似する選点法もまた、点を配するのみで要素分割を必要としないメッシュレス解法である。境界節点数を N 、内点数を L とすると HdBNM が最終的に解くべきフルマトリックスは $2N + L$ であるのに対して選点法は $N + L$ であることから、メモリや計算時間について言えば選点法に分がある。また多領域問題では配点数がおおよそ領域倍数になることから、このことがより顕著になる。本論文においては、選点法の近似関数に Radial Basis Function を用いて、均質非定常熱伝導問題及び、選点法において優位性のある 2 領域問題について、数値解析例によりそ

の有効性について検討した。

2. 理論

2.1. 支配微分方程式

均質材料における非定常熱伝導問題に対する支配微分方程式は、次式で与えられる。

$$\lambda \nabla^2 u(x, t) = \rho c \dot{u}(x, t) \quad (1)$$

ただし、 λ は熱伝導率、 ρ は密度、 c は比熱、 $u(x, t)$ は温度を表し、 ∇ は 3 次元デカルト座標における微分演算子、境界条件、及び初期条件は次式で与える。

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \bar{u}, & x \in \Gamma_u \\ q(x, t) &= \frac{\partial u(x, t)}{\partial n} = \bar{q}, & x \in \Gamma_q \\ u(x, 0) &= u_0, & x \in \Omega \end{aligned} \quad (2)$$

ただし、 n は境界 Γ 上の単位外向き法線ベクトルであり、 $\partial u(x,t)/\partial n$ は $u(x,t)$ の法線方向勾配を表すものとする。また、 Γ_u 、 Γ_q 、 Ω はそれぞれ温度既知境界、熱流束既知境界、領域である。さらに、 \bar{u} 、 \bar{q} 、 u_0 は既知の境界値および初期温度である。

2.2. 選点法による定式化

温度 $u(x,t)$ を次式で近似する。

$$u(x,t) = \sum_{\ell=1}^{N+L} f(x, z_\ell) \alpha_\ell(t) \quad (3)$$

また、熱流速 $q(x,t)$ は次式のように示す。

$$q(x,t) = \sum_{\ell=1}^{N+L} \frac{\partial f(x, z_\ell)}{\partial n} \alpha_\ell(t) \quad (4)$$

ただし、 N は境界節点数、 L は内点数、 α は未知係数で、 $f(x, z^\ell)$ は近似関数であり、 z_ℓ は選点である。式 (3)、(4) において境界の各点における既知の値の集まりを U とし、それに伴う近似関数を ϕ として次式のように表す。

$$U(x,t) = \sum_{\ell=1}^{N+L} \phi(x, z_\ell) \alpha_\ell(t) \quad (5)$$

また、式 (1) に式 (3) を適用することで次式を得る。

$$\sum_{\ell=1}^{N+L} \nabla^2 f(x, z_\ell) \alpha_\ell(t) = \rho c \dot{u}(x,t) \quad (6)$$

式 (6) における、温度 $u(x,t)$ の時間微分 $\dot{u}(x,t)$ に関しては差分近似を適用する。このとき、初回の計算においては後退差分近似、2 回目以降の計算においては二次曲線差分近似を適用するものとする。初回の計算における近似式は次式となる。

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{u(x,t) - u(x,t - \Delta t)}{\Delta t} \quad (7)$$

ただし、 Δt はタイムステップ幅、 $u(x,t - \Delta t)$ は 1 ステップ前の温度を表すものとする。また、2 回目以降の差分近似に次式を適用する。

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{3u(x,t) - 4u(x,t - \Delta t) + u(x,t - 2\Delta t)}{2\Delta t} \quad (8)$$

現在求めている温度 $u(x,t)$ の差分近似に関する係数を K_p 、初期条件、または見かけの初期条件を集めたものを u' とし、式 (7)、(8) について次式のように表す。

$$\dot{u} = K_p u + u' \quad (9)$$

式 (9) を式 (6) へ適用することで次式を得る。ただし、式 (9) に含まれる u については、式 (3) を用いる。

$$\sum_{\ell=1}^{N+L} \frac{\lambda}{\rho c} \nabla^2 f(x, z_\ell) \alpha_\ell(t) - K_p \sum_{\ell=1}^{N+L} f(x, z_\ell) \alpha_\ell(t) = u' \quad (10)$$

以上より、境界においては式 (5) から N 個、領域においては

式 (10) から L 個の式より、 $N+L$ 個の未知係数 α を求めることができる。

2.3. 2 領域問題

部分的に均質な領域がいくつか結合した領域に対しては、各領域ごとに連立方程式をたて、領域間の適切な結合条件を用いることにより、一つの連立方程式に帰着させることができる。ここでは、図 3 に示すような領域を二つの部分領域 Ω_1 、 Ω_2 に分割した場合について考える。領域 Ω_1 について、

$$\begin{bmatrix} H^1 \\ f^1(x, z) \\ \partial f^1(x, z)/\partial n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{N+L+m} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} G^1 \\ u^{1I} \\ q^{1I} \end{Bmatrix} \quad (11)$$

領域 Ω_2 について、

$$\begin{bmatrix} H^2 \\ f^2(x, z) \\ \partial f^2(x, z)/\partial n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{N+L+m} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} G^2 \\ u^{2I} \\ q^{2I} \end{Bmatrix} \quad (12)$$

ただし、 H 、 G は式 (5)、(10) から成る係数マトリックス及び既知ベクトルであり、領域間の界面における節点数を m とし、 N は界面節点数を除く境界節点である。 u^{1I} 、 q^{1I} 及び、 u^{2I} 、 q^{2I} はそれぞれの領域に属する界面における温度及び、熱流速であり、未知量である。領域 Ω_1 と Ω_2 の界面において、次の条件が成り立つ。

$$u^{1I} = u^{2I} \quad (13)$$

$$q^{1I} = -q^{2I} \quad (14)$$

以上より、式 (11)、式 (12) 中の未知量を消去し次式のように一つにまとめることができる。

$$\begin{bmatrix} H^1 & 0 \\ 0 & H^2 \\ f^1(x, z) & -f^2(x, z) \\ \frac{\partial f^1(x, z)}{\partial n} & \frac{\partial f^2(x, z)}{\partial n} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{N+L+m} \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{N+L+m} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} G^1 \\ G^2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (15)$$

3. 数値解析例

まず、近似関数の選択による精度の影響について検討するために簡単な解析条件における厳密解との比較を行う。次に、本手法の有効性について 2 領域を扱った例題解析を行う。比較対象には汎用 FEM 解析プログラム MSC.Nastran を用いた数値計算結果を用いる。

3.1. 解析例 1

選点法において用いられる近似関数に対しては多くの研究がなされており、観測点 x と選点 z_ℓ との距離の関数関数を使用する RBF を用いる⁽⁴⁾⁽⁵⁾。近似関数にはべき乗関数、Thin plate spline や Multiquadric、Compactly Supported Radial Basis Function 等が提案されている。しかし、 $\nabla^2 f(x, z_\ell)$ における座標の 2 階微分の為に、 r^4 より低い次数を含む関数

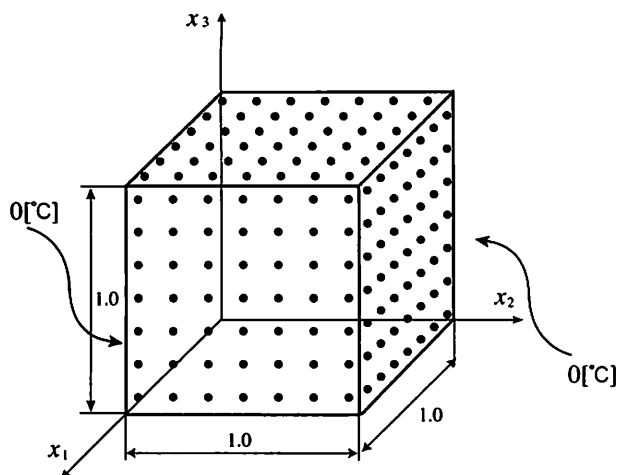


Fig.1 Analysis model

は、観測点と選点が一致する場合、つまり $r = 0$ の場合において特異性を持ってしまふ為、使用は避ける。ここでは、図1に示す立方体モデルに対する非定常熱伝導問題を考える。境界に1面辺り49点、計294点をかど点を避ける形で均等に配置し、内部に各軸方向に7点、計343点を均等に配置する。境界条件は、 x_1 軸に垂直で $x_2 = 0.0[\text{m}]$ と $x_2 = 1.0[\text{m}]$ で温度 $u=0[^\circ\text{C}]$ を与え、その他の面では断熱境界条件 ($q = 0[\text{W}/\text{m}^2]$) を与えるものとする。また初期温度は、領域において $\sin(\pi x_2)[^\circ\text{C}]$ として与える。材料定数は、密度 $\rho = 1[\text{kg}/\text{m}^3]$ 、比熱 $c = 1[\text{J}/\text{kgK}]$ とする。またタイムステップ幅は $\Delta t = 0.001[\text{s}]$ 。解析モデルは3次元であるが、1次元的な熱伝導として厳密解は次式のように与えられる⁽⁶⁾。

$$u(x_2, t) = e^{-\pi^2 a t} \sin(\pi x_2) \quad (a = \lambda/\rho c) \quad (16)$$

本報では、次式のような Compactly Supported Radial Basis Function の C^4 級、及び $n = 5, 7, 9, 11$ のべき乗関数を用いて、近似関数が解析精度に与える影響を厳密解と比較し検討を行う。Compactly supported radial basis function の C^4 級関数を用いた場合の $f(x, z_t)$ は以下ようになる

$$f(x, z_t) = \begin{cases} (1 - \frac{r_m}{a})^5 \{8(\frac{r_m}{a})^2 + 5\frac{r_m}{a} + 1\} & r_m \leq a \\ 0 & r_m > a \end{cases} \quad (17)$$

一方、べき乗関数を用いる場合の $f(x, z_t)$ は次式で定義される。

$$f(x, z_t) = 1 + r^n \quad (18)$$

$t = 0.04$ における各近似関数による x_2 に沿った温度分布と厳密解との相対誤差を図3に示す。結果より高次のべき乗関数ほど厳密解との誤差が小さいことが分かる。しかし、 $1+r^{11}$ においては結果を求めることができなかつた。次に境界において1面辺り144点、計864点をかど点を避ける形で均等、内部について各軸方向に12点、計1728点を均等に配置したものと平均相対誤差を表1に示した。CSRBF C^4 級につい

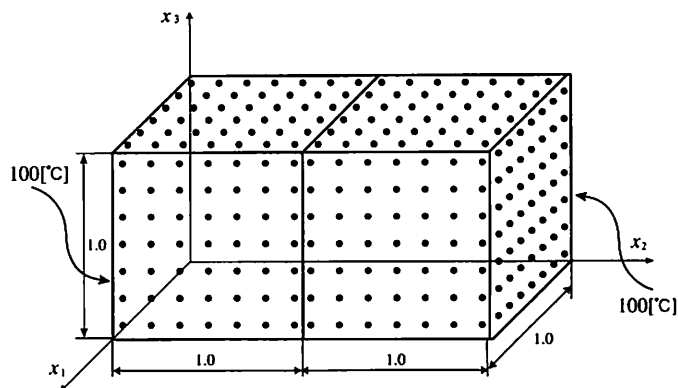


Fig.2 Analysis model

ては、節点数を増やすことで精度が向上しているが、べき乗関数では逆に低下している。これは、 $1+r^7$ 、 $1+r^9$ や $1+r^{11}$ における行列の条件数が大きく解の安定性が低い為と考えられる。そのため、解析条件が変わった際の精度の保証がなされない。CSRBF の C^4 級は解の精度について $1+r^n$ のべき乗関数に劣るものの、解の信頼性においては、節点数を増やすことで精度向上がなされるので厳密解を得られない解析例題において有効であると考えられる。

3.2. 解析例2

図2に示す2つの領域(領域1: $x_2 = 0.0[\text{m}]$ から $x_2 = 1.0[\text{m}]$ 、領域2: $x_2 = 1.0[\text{m}]$ から $x_2 = 2.0[\text{m}]$) から成る直方体モデルを用いて数値解析を行う。それぞれの領域に対して境界に1面辺り49点、計294点をかど点を避ける形で均等に配置し、内部に各軸方向に7点、計343点を均等に配置する。境界条件は、 x_1 軸に垂直で $x_2 = 0.0[\text{m}]$ と $x_2 = 2.0[\text{m}]$ で温度 $u=100[^\circ\text{C}]$ を与え、その他の面では断熱境界条件 ($q = 0[\text{W}/\text{m}^2]$) を与えるものとする。また初期温度は、それぞれの領域において一様に $10[^\circ\text{C}]$ として与える。材料定数は、密度 $\rho = 1[\text{kg}/\text{m}^3]$ 、比熱 $c = 900[\text{J}/\text{kgK}]$ とする。またタイムステップ幅は $\Delta t = 0.1[\text{s}]$ 。用いた近似関数は CSRBF の C^4 で影響半径 $a = 1.4[\text{m}]$ とした。領域1及び、領域2における熱伝導率 $\lambda = 200[\text{W}/\text{mK}]$ とした時の x_2 方向に沿った温度分布を FEM と比較した結果を図4に示す。また、領域1においては、 $\lambda = 200[\text{W}/\text{mK}]$ 、領域2においては $\lambda = 20[\text{W}/\text{mK}]$ とした時の $t = 0.5[\text{s}]$ における x_2 方向に沿った温度分布を FEM と比較した結果を図5に示す。図4についてタイムステップが初期の $0.1[\text{s}]$ においては温度変化の大きな境界付近で FEM との著しい差が見られるものの、ステップが進むと FEM とほぼ一致した解析解を得られている。図5においては、全体の温度分布として、領域1における熱伝導率に基づく、高い熱伝導と、対して領域2における低い熱伝導の挙動が示されている。しかし、選点法が領域全体に渡って連続的な曲線であるのに対して、FEM は界面である $x_2 = 1$ において不連続となっている。これは、

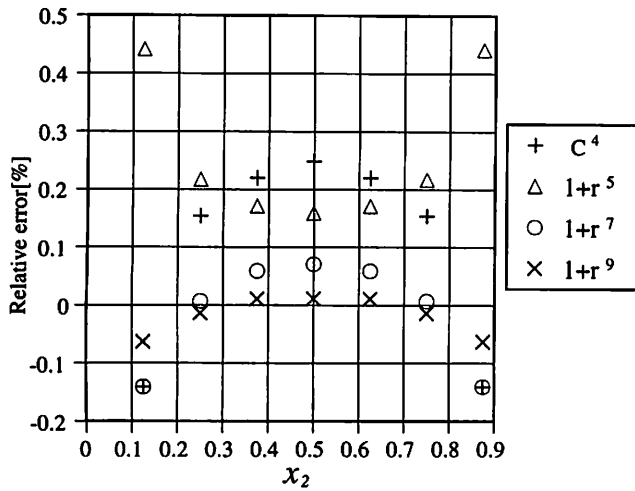


Fig.3 Temperature distribution along axis x_2

Table 1 Average relative error

Approximate function	Average relative error[%]	
	N+L=637	N+L=2592
CSRBF C^4 級	0.094258	0.0555478
$1+r^5$	0.107867	0.0832684
$1+r^7$	0.028544	0.0362081
$1+r^9$	0.009489	0.0235394

選点法において界面で連続条件を適用しているの、界面を介した領域1と領域2において温度傾斜が等しくなり図5のような滑らかな曲線になると考えられる。また、FEMについては界面において連続条件が適用されていないことから図5のように折れ曲がると考えられる。

4. おわりに

RBFを用いた選点法による均質非定常熱伝導問題について検討した。用いるRBFが精度に与える影響について検討した。また、2領域問題における数値解析を行い、FEMによる解析解と比較した。

参考文献

- (1) 田中正隆, Jianming ZHANG, 白坂英雄: 非均質媒体の定常熱伝導問題へのハイブリット境界節点法の応用, 境界要素法論文集, 06-063006 (2006), pp.23-26.
- (2) 松本敏郎, 田中正隆, 石川真之, 小川洋平: 選点法による3次元圧電材料の調和振動解析法, 計算数理工学論文集, 2-070320 (2002), pp. 63-66.

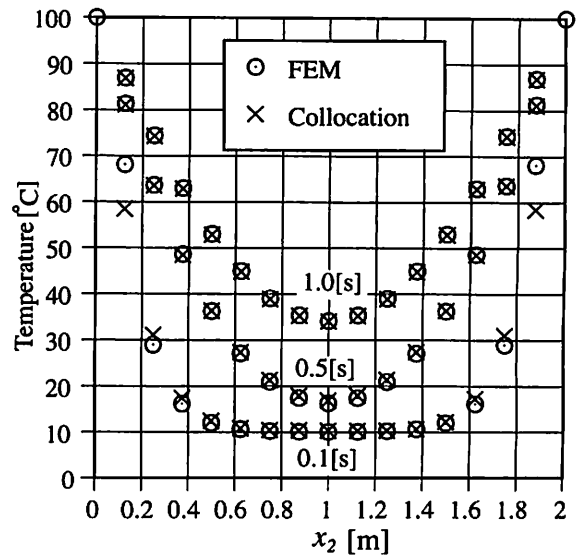


Fig.4 Temperature distribution along axis x_2

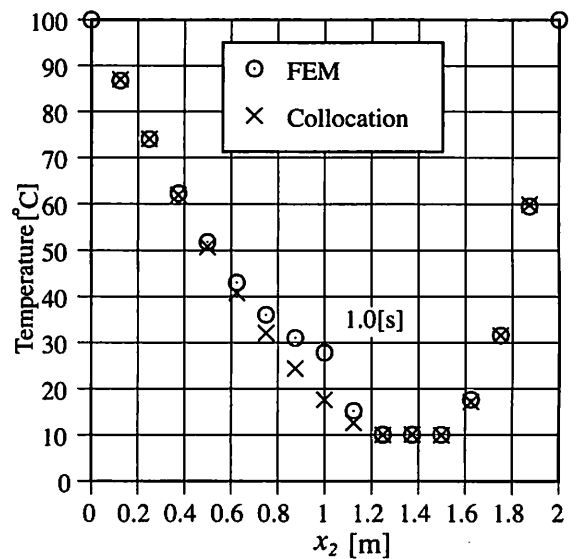


Fig.5 Temperature distribution along axis x_2

- (3) 田中正隆, 松本敏郎, 中村正行, 境界要素法, 培風館, (1991),
- (4) C.S. Chen, C.A. Brebbia, H. Power: Dual reciprocity method using compactly supported radial basis functions, *Commun. Numer. Meths. Engng.* 15 (1999), pp. 137-150.
- (5) M.A.Golberg, C.A.Chen, H.Bowman: Some Recent Results and Proposals for the use of Radial Basis Function, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 23 (1999), pp.285-296.
- (6) Carslaw, H.S.and jaeger, J.C: *Conduction of Heat In Solids* 2nd Ed, Clarendon Press, Oxford. (1959),