

非線形異方性材料の定常熱伝導問題に対する DRM 境界要素法 (2次元問題での検討)

A DRBEM FOR THE SOLUTION OF NONLINEAR STEADY-STATE HEAT CONDUCTION PROBLEMS IN ANISOTROPIC SOLIDS (STUDY ON 2-D CASES)

田中 正隆¹⁾, 松本 敏郎²⁾, Krishna M. SINGH³⁾, 黒川 浩太郎⁴⁾

Masataka TANAKA, Toshiro MATSUMOTO, Krishna M. SINGH and Kotaro KUROKAWA

- 1) 信州大学工学部機械システム工学科 (〒 380-8553 長野市若里 4-17-1, E-mail: dtanaka@gipwc.shinshu-u.ac.jp)
 2) 名古屋大学大学院工学研究科 (〒 464-8603 名古屋市千種区不老町, E-mail: t.matsumoto@nuem.nagoya-u.ac.jp)
 3) 信州大学工学部機械システム工学科 (〒 380-8553 長野市若里 4-17-1, E-mail: krishna@homer.shinshu-u.ac.jp)
 4) 信州大学大学院工学系研究科 (〒 380-8553 長野市若里 4-17-1, E-mail: k-kurokawa@artist.shinshu-u.ac.jp)

This paper is concerned with a dual reciprocity boundary element method (DRBEM) applied to the nonlinear heat conduction problem of anisotropic materials. The integral equation formulation employs the fundamental solution of Laplace equation for linear isotropic materials, and hence from the nonlinear and also anisotropic part of the governing differential equation domain integrals arise in the boundary integral equation. This domain integrals are transformed into boundary integrals by using new radial basis functions. The details of the proposed DRBEM are presented. Because of domain integral arising from material nonlinearity the solution is inevitably an iterative one. The usefulness of the present iterative method is demonstrated through comparison of the results obtained by the developed computer code with those by another method.

Key Words: Computational Mechanics, Boundary Integral Equation, Boundary Element Method, Dual Reciprocity Method, Nonlinear Heat Conduction, Anisotropic Solid, Temperature-Dependent Material

1. はじめに

熱伝導問題では一般的に、熱伝導率を一定と仮定し解析するが、高温状態では熱伝導率は温度に依存するので、温度依存性材料としてより正確なモデル化をしなければならない。この場合には非線形熱伝導問題となり、熱伝導率が一定の線形問題と比較して解析は容易ではない。このような温度依存性材料では、熱伝導率が温度に依存して連続的に変化すると仮定してモデル化することができる^(1,2)。非線形で異方性材料の定常熱伝導問題に対する境界要素法の定式化では、非線形異方性材料に対する基本解が必要であるが、非線形異方性を考慮した基本解を求めることは困難であり、均質媒体に対する基本解を用いて定式化を行わなければならないそのため、異方性と温度依存性に由来する領域積分項が積分方程式に現れる^(3,4)。この領域積分を評価するためには、領域内部を要素またはセルに分割しなければならないが、領域内部の要素分割にはたいへん手間がかかり境界要素法の特長が半減してしまう⁽⁵⁾。

本研究では、基本的に Laplace 方程式で支配される定常

熱伝導問題であるために、Laplace 作用素の解法を援用する Analog Equation Method (=AEM)^(6,7) を適用する。AEM により由来する領域積分項を、二重相反法 (DRM)⁽⁸⁾ を用いることにより境界積分に変換して評価する。DRM を用いると、境界積分方程式の中に現れる領域積分項を比較的簡単な近似関数と未知係数により境界積分に変換することができる。従って、DRM を適用することにより最終的に境界のみの離散化と、領域内部に評価点を配置することだけで解析が可能となり効率的となる。また、熱伝導率の温度依存性による非線形性は繰り返し計算により計算する。

本報では、2次元問題について定式化の詳細を示し、それに基づく解析プログラムを用いていくつかの例題を計算し、本手法の有効性について検討を行う。

2. 理論

2.1. 支配微分方程式

異方性材料で熱伝導率が温度に依存して連続的に変化する 2次元定常熱伝導問題に対する支配微分方程式は、次式で

与えられる。ただし、 $u(x)$ は温度、 $\lambda_{ij}(u)$ は 2 階対称の熱伝導率テンソルの成分である。

$$\begin{aligned} & \lambda_{11}(u) \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1^2} + \frac{\lambda_{11}(u)}{\partial u} \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_1} \right)^2 \\ & + \lambda_{22}(u) \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_2^2} + \frac{\lambda_{22}(u)}{\partial u} \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_2} \right)^2 \\ & + 2\lambda_{12}(u) \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1 \partial x_2} + 2 \frac{\lambda_{12}(u)}{\partial u} \frac{\partial u(x)}{\partial x_1} \frac{\partial u(x)}{\partial x_2} = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

また、上式に対する境界条件は次式で与えられるものとする。

$$\begin{aligned} u(x) &= \bar{u}, & x \in \Gamma_u \\ q(x) &= \frac{\partial u(x)}{\partial n} = \bar{q}, & x \in \Gamma_q \end{aligned} \quad (2)$$

ただし、 n は境界 Γ 上の単位外向き法線ベクトルであり、 $\partial u(x)/\partial n$ は $u(x)$ の法線方向勾配を表すものとする。また、 Γ_u 、 Γ_q はそれぞれ温度既知境界、熱流束既知境界である。さらに、 \bar{u} 、 \bar{q} は既知の境界値である。式 (1) に対し等方性問題の基本解を用いた BEM 解法を確立するために、AEM の考え方を適用する。AEM の基本的な考え方は、基本解を求めるのが困難か不可能な問題を BEM で解くときに、上記のように周知の微分作用素で表される方程式に変換して問題を解くというものである。すなわち、非線形異方性問題の支配微分方程式を等方性問題と同様の形にするために熱伝導率テンソルを等方性の部分とその他の部分に分ける。上付 A で異方性を、上付 I で等方性を示すとして次式とおく。

$$\lambda_{ij}^A(u) = \lambda_{ij}^I(u) + \lambda_{ij}^{A-I}(u) \quad (3)$$

$$\lambda_{ij}^A(u) = \begin{bmatrix} \lambda_{11}(u) & \lambda_{12}(u) \\ \lambda_{12}(u) & \lambda_{22}(u) \end{bmatrix}, \quad \lambda_{ij}^I = \begin{bmatrix} M(u) & 0 \\ 0 & M(u) \end{bmatrix}$$

$$\lambda_{ij}^{A-I} = \begin{bmatrix} m_1(u) & \lambda_{12}(u) \\ \lambda_{12}(u) & m_2(u) \end{bmatrix}$$

ただし、 $M(u)$ には任意の材料定数を用いてもよいが、ここでは $\lambda_{11}(u)$ 、 $\lambda_{22}(u)$ の平均値を用いる。式 (1) は次式となる。

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) u(x) = - \frac{m_1(u)}{M(u)} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1^2} - \frac{m_2(u)}{M(u)} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_2^2} \\ & - \frac{1}{M(u)} \frac{\partial \lambda_{11}(u)}{\partial u} \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_1} \right)^2 - \frac{1}{M(u)} \frac{\partial \lambda_{22}(u)}{\partial u} \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_2} \right)^2 \\ & - \frac{2\lambda_{12}(u)}{M(u)} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{2}{M(u)} \frac{\partial \lambda_{12}(u)}{\partial u} \frac{\partial u(x)}{\partial x_1} \frac{\partial u(x)}{\partial x_2} \end{aligned} \quad (4)$$

式 (4) の右辺をソース項と見なせばこの式は Poisson 方程式であり、Laplace 方程式の基本解を用いて定式化を行うことができる。

2.2. DRM の適用

境界積分方程式の導出において、本研究では Laplace 方程式の基本解を使用する。2 次元 Laplace 方程式の基本解は次式で与えられる。

$$u^*(x, y) = \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{1}{r} \right) \quad (5)$$

ただし、 r はソース点の座標 y と観測点の座標 x との距離を表す。式 (4) の両辺に上式の基本解 $u^*(x, y)$ をかけ、考察領域 Ω 全体で積分し、部分積分すると次式を得る。

$$\begin{aligned} & c(y)u(y) + \int_{\Gamma} q^*(x, y)u(x)d\Gamma - \int_{\Gamma} u^*(x, y)q(x)d\Gamma \\ & = \int_{\Omega} u^*(x, y) \left\{ - \frac{m_1(u)}{M(u)} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1^2} - \frac{m_2(u)}{M(u)} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_2^2} \right. \\ & - \frac{1}{M(u)} \frac{\partial \lambda_{11}(u)}{\partial u} \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_1} \right)^2 - \frac{1}{M(u)} \frac{\partial \lambda_{22}(u)}{\partial u} \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_2} \right)^2 \\ & \left. - \frac{2\lambda_{12}(u)}{M(u)} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{2}{M(u)} \frac{\partial \lambda_{12}(u)}{\partial u} \frac{\partial u(x)}{\partial x_1} \frac{\partial u(x)}{\partial x_2} \right\} d\Omega \end{aligned} \quad (6)$$

ただし、 $c(y)$ はソース点のある境界形状で決まる定数であり、 $y \in \Omega$ のときには $c(y) = 1$ となる。また、 $q^*(x, y)$ は基本解 $u^*(x, y)$ の法線方向勾配を表し、具体形は次式となる。

$$q^*(x, y) = - \frac{1}{2\pi r} \frac{\partial r}{\partial n} \quad (7)$$

式 (6) の左辺は境界積分となっているが、右辺は領域積分のまま残る。この領域積分を評価する際、領域内部を要素またはセルに区切ることにより領域積分を評価する手法が提案されているが、この作業には非常に手間がかかり、境界要素法の特長が半減してしまう⁽⁵⁾。そこで、この領域積分項を境界積分に変換するために DRM を適用する。

まず、式 (4) の右辺を次式で近似する。

$$\begin{aligned} & - \frac{m_1(u)}{M(u)} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1^2} - \frac{m_2(u)}{M(u)} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_2^2} - \frac{1}{M(u)} \frac{\partial \lambda_{11}(u)}{\partial u} \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_1} \right)^2 \\ & - \frac{1}{M(u)} \frac{\partial \lambda_{22}(u)}{\partial u} \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_2} \right)^2 - \frac{2\lambda_{12}(u)}{M(u)} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1 \partial x_2} \\ & - \frac{2}{M(u)} \frac{\partial \lambda_{12}(u)}{\partial u} \frac{\partial u(x)}{\partial x_1} \frac{\partial u(x)}{\partial x_2} = \sum_{\ell=1}^{N+L} \alpha^{\ell} f(x, z^{\ell}) \end{aligned} \quad (8)$$

ただし、 N は境界節点数、 L は内部選点数、 α^{ℓ} は未知係数、 $f(x, z^{\ell})$ は近似関数、 z^{ℓ} は DRM 選点を表すものとする。DRM で用いられる近似関数^(9, 10) に対しては多くの研究がなされており、観測点 x と DRM 選点 z^{ℓ} との距離の関数を使用することが一般的である。本研究では近似関数として次式を使用する。

$$f(x, z^{\ell}) = \begin{cases} (1 - r^{\ell}/a)^3(3r^{\ell}/a + 1), & 0 \leq r^{\ell} \leq a \\ 0, & r^{\ell} > a \end{cases} \quad (9)$$

ただし、 $r^{\ell} = |x - z^{\ell}|$ である。

上式は、Compactly Supported Radial Basis Function⁽⁹⁾ と呼ばれる近似関数であり、 a は近似関数が影響する半径である。

ここで、次式を満たす特解を $\hat{u}(x, z^{\ell})$ とする。

$$\nabla^2 \hat{u}(x, z^{\ell}) = f(x, z^{\ell}) \quad (10)$$

この特解 $\hat{u}(x, z^{\ell})$ を用いると、式 (4) の展開された支配微分方程式は未知係数 α^{ℓ} と特解 $\hat{u}(x, z^{\ell})$ により次式のように書き表すことができる。

$$\nabla^2 u(x) = \sum_{\ell=1}^{N+L} \alpha^{\ell} \nabla^2 \hat{u}(x, z^{\ell}) \quad (11)$$

上式の両辺に基本解 $u^*(x, y)$ をかけ、考察領域全体で積分し部分積分することにより、次の境界積分方程式を得る。

$$\begin{aligned} & c(y)u(y) + \int_{\Gamma} q^*(x, y)u(x)d\Gamma \\ & - \int_{\Gamma} u^*(x, y)q(x)d\Gamma = \sum_{\ell=1}^{N+L} \alpha^{\ell} \left\{ c(y)\hat{u}(y, z^{\ell}) \right. \\ & \left. + \int_{\Gamma} q^*(x, y)\hat{u}(x, z^{\ell})d\Gamma - \int_{\Gamma} u^*(x, y)\hat{q}(x, z^{\ell})d\Gamma \right\} \quad (12) \end{aligned}$$

ただし、 $\hat{q}(x, z^{\ell})$ は特解 $\hat{u}(x, z^{\ell})$ の法線方向勾配を表す。

$$\hat{q}(x, z^{\ell}) = \frac{\partial \hat{u}(x, z^{\ell})}{\partial n} \quad (13)$$

2.3. 異方性問題の熱流束の導入

異方性問題に対する熱流束は次式で定義される。

$$\begin{aligned} q^A(x) &= -\lambda_{ij}^A(u) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} n_j \\ &= -\lambda_{ij}^I(u) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} n_j - \lambda_{ij}^{A-I}(u) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} n_j \\ &= -M(u) \frac{\partial u(x)}{\partial n} - \lambda_{ij}^{A-I}(u) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} n_j \quad (14) \end{aligned}$$

ただし、 $q^A(x)$ は熱流束の法線方向成分を表す。よって温度の法線方向勾配は次式で表すことができる。

$$\frac{\partial u(x)}{\partial n} = -\frac{q^A(x)}{M(u)} - \frac{\lambda_{ij}^{A-I}(u)}{M(u)} \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} n_j \quad (15)$$

上式を DRM を適用した積分方程式 (12) に代入する。

$$\begin{aligned} & c(y)u(y) + \int_{\Gamma} q^*(x, y)u(x)d\Gamma \\ & - \int_{\Gamma} u^*(x, y) \left\{ -\frac{q^A(x)}{M(u)} - \frac{\lambda_{ij}^{A-I}(u)}{M(u)} \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} n_j \right\} d\Gamma \\ & = \sum_{\ell=1}^{N+L} \alpha^{\ell} \left\{ c(y)\hat{u}(y, z^{\ell}) + \int_{\Gamma} q^*(x, y)\hat{u}(x, z^{\ell})d\Gamma \right. \\ & \left. - \int_{\Gamma} u^*(x, y)\hat{q}(x, z^{\ell})d\Gamma \right\} \quad (16) \end{aligned}$$

よって異方性問題の熱流束を導入した境界積分方程式は次式となる。

$$\begin{aligned} & c(y)u(y) + \int_{\Gamma} q^*(x, y)u(x)d\Gamma + \int_{\Gamma} \frac{u^*(x, y)}{M(u)} q^A(x)d\Gamma \\ & + \int_{\Gamma} \frac{u^*(x, y)}{M(u)} \lambda_{ij}^{A-I}(u) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} n_j d\Gamma = \sum_{\ell=1}^{N+L} \alpha^{\ell} \left\{ c(y)\hat{u}(y, z^{\ell}) \right. \\ & \left. + \int_{\Gamma} q^*(x, y)\hat{u}(x, z^{\ell})d\Gamma - \int_{\Gamma} u^*(x, y)\hat{q}(x, z^{\ell})d\Gamma \right\} \quad (17) \end{aligned}$$

式(17)より、すべて境界積分に変換された境界積分方程式が得られていることが分かる。式(17)の境界積分方程式を、 N 個の境界節点にソース点を置くことにより、 N 個の式が得られる。また、同様に L 個の内部選点にソース点を置くことにより、 L 個の式が得られる。これらの $N+L$ 個の式は、マトリックス形式で次式のように一つにまとめることができる。

$$Hu + \frac{1}{M(u)} Gq + \frac{\lambda_{ij}^{A-I}(u)}{M(u)} Gn_i u_{x_j} = [H\hat{U} - G\hat{Q}]\alpha \quad (18)$$

ここで温度 $u(x)$ の座標微分は、DRM の未知係数を求める際と同様に、近似関数を用いて評価する方法を適用する。よって温度 $u(x)$ の座標微分は次式のように表すことができる。

$$u_{x_j} = F_{x_j} F^{-1} u \quad (19)$$

ただし、 F^{-1} は F の逆行列を表し、

$$F = \begin{bmatrix} f(x^1, z^1) & \dots & f(x^1, z^{N+L}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f(x^{N+L}, z^1) & \dots & f(x^{N+L}, z^{N+L}) \end{bmatrix} \quad (20)$$

である。したがって、式(18)は次式となる。

$$Hu + \frac{1}{M(u)} Gq + \frac{1}{M(u)} GK u = [H\hat{U} - G\hat{Q}]\alpha \quad (21)$$

ただし、 K は次式で表される $(N+L)$ の正方マトリックスである。

$$K = \lambda_{ij}^{A-I}(u) n_j F_{x_i} F^{-1} \quad (22)$$

2.4. 未知係数

DRM を適用し領域積分項を境界積分に変換する際、未知係数と近似関数を用いて定式化を進めてきた。ここでは、未知係数を決定するための手法を示す。

式(8)を再記する。

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^{N+L} \alpha^{\ell} f(x, z^{\ell}) &= -\frac{m_1(u)}{M(u)} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1^2} - \frac{m_2(u)}{M(u)} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_2^2} \\ &- \frac{1}{M(u)} \frac{\partial \lambda_{11}(u)}{\partial u} \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_1} \right)^2 - \frac{1}{M(u)} \frac{\partial \lambda_{22}(u)}{\partial u} \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_2} \right)^2 \\ &- \frac{2\lambda_{12}(u)}{M(u)} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{2}{M(u)} \frac{\partial \lambda_{12}(u)}{\partial u} \frac{\partial u(x)}{\partial x_1} \frac{\partial u(x)}{\partial x_2} \quad (23) \end{aligned}$$

ここで、近似関数 $f(x, z^{\ell})$ は 2 点 x と z^{ℓ} を決定することにより既知関数となる。この関係式が全ての境界節点と内部選点に対して成り立つと仮定すると、未知係数 α^{ℓ} を求めることができ、マトリックス形式で書き表すと次式となる。

$$\begin{aligned} \alpha &= F^{-1} \left[K_{1u} u_{x_1 x_1} + K_{12u} u_{x_1 x_2} + K_{2u} u_{x_2 x_2} \right. \\ &\left. + K_{11u} u_{x_1} u_{x_1} + K_{12u} u_{x_1} u_{x_2} + K_{22u} u_{x_2} u_{x_2} \right] \quad (24) \end{aligned}$$

また、各ベクトルの成分は次のようになる。

$$u_{x_m} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial u^1(x)}{\partial x_m} \\ \vdots \\ \frac{\partial u^{N+L}(x)}{\partial x_m} \end{array} \right\} \quad (25)$$

$$u_{x_m x_n} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial^2 u^1(x)}{\partial x_m \partial x_n} \\ \vdots \\ \frac{\partial^2 u^{N+L}(x)}{\partial x_m \partial x_n} \end{array} \right\} \quad (26)$$

$$K_n = \begin{Bmatrix} -\frac{m_n(u^1)}{M(u^1)} \\ \vdots \\ -\frac{m_n(u^{N+L})}{M(u^{N+L})} \end{Bmatrix} \quad (27)$$

$$K_{12} = \begin{Bmatrix} -2\frac{\lambda_{12}(u^1)}{M(u^1)} \\ \vdots \\ -2\frac{\lambda_{12}(u^{N+L})}{M(u^{N+L})} \end{Bmatrix} \quad (28)$$

$$K_{mmu} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{M(u^1)} \frac{\partial \lambda_{mm}(u^1)}{\partial u} \\ \vdots \\ -\frac{1}{M(u^{N+L})} \frac{\partial \lambda_{mm}(u^{N+L})}{\partial u} \end{Bmatrix} \quad (29)$$

$$K_{12u} = \begin{Bmatrix} -\frac{2}{M(u^1)} \frac{\partial \lambda_{12}(u^1)}{\partial u} \\ \vdots \\ -\frac{2}{M(u^{N+L})} \frac{\partial \lambda_{12}(u^{N+L})}{\partial u} \end{Bmatrix} \quad (30)$$

ただし、 x^i は全ての境界節点と内部選点の内、 i 番目の点を表す。

式(24)に表れる温度 $u(x)$ の2階座標微分を近似関数を用いて評価する方法について述べる。まず、温度 $u(x)$ を近似関数を用いて次式で近似する。

$$u(x) = \sum_{\ell=1}^{N+L} \beta^\ell f(x, z^\ell) \quad (31)$$

ただし、 β^ℓ は未知係数である。ここで使用される近似関数は DRM で使用する近似関数と必ずしも一致させる必要はない。さらに上式を x_m で一階微分すると次式を得る。

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_m} = \sum_{\ell=1}^{N+L} \beta^\ell \frac{\partial f(x, z^\ell)}{\partial x_m} \quad (32)$$

式(31)、(32)をすべての選点に対して適用することにより未知係数 β^ℓ が消去され、 u_{x_m} を次式のように評価することができる。

$$u_{x_m} = F_{x_m} F^{-1} u \quad (33)$$

さらに、温度の1階座標偏微分を次式で近似する

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_m} = \sum_{\ell=1}^{N+L} \gamma^\ell f(x, z^\ell) \quad (34)$$

γ^ℓ も未知係数である。ここで上式を偏微分すると次式を得る。

$$\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_m \partial x_n} = \sum_{\ell=1}^{N+L} \gamma^\ell \frac{\partial f(x, z^\ell)}{\partial x_n} \quad (35)$$

式(34)、(35)をすべての選点に対して適用することにより未知係数 γ^ℓ が消去され、 $u_{x_m x_n}$ を次式のように評価することができる。

$$u_{x_m x_n} = F_{x_n} F^{-1} u_{x_m} \quad (36)$$

上式と式(33)より、温度の2階座標偏微分は温度 $u(x)$ と近似関数 $f(x, z^\ell)$ の関数として近似することができ、次式となる。

$$u_{x_m x_n} = F_{x_n} F^{-1} F_{x_m} F^{-1} u \quad (37)$$

ただし、

$$F_{x_m} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x^1, z^1)}{\partial x_m} & \cdots & \frac{\partial f(x^1, z^{N+L})}{\partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f(x^{N+L}, z^1)}{\partial x_m} & \cdots & \frac{\partial f(x^{N+L}, z^{N+L})}{\partial x_m} \end{bmatrix} \quad (38)$$

上式の各成分は、次式から計算することができる。

$$\frac{\partial f(x, z^\ell)}{\partial x_m} = \frac{\partial f(x, z^\ell)}{\partial r} \frac{r_m^\ell}{r^\ell} \quad (39)$$

ただし、 r_m^ℓ は r^ℓ の x_m 方向成分を表す。

したがって、未知係数 α^ℓ は次式のようにまとめて書き表すことができる。

$$\alpha = F^{-1} \left[K_1 F_{x_1} F^{-1} F_{x_1} + K_2 F_{x_2} F^{-1} F_{x_2} + K_{11u} F_{x_1} F^{-1} u F_{x_1} + K_{22u} F_{x_2} F^{-1} u F_{x_2} + K_{12} F_{x_1} F^{-1} F_{x_2} + K_{12u} F_{x_1} F^{-1} u F_{x_2} \right] F^{-1} u \quad (40)$$

この未知係数 α を離散化された式(21)へ代入し整理すると、次式を得る。

$$H u + \frac{1}{M(u)} G q + \frac{1}{M(u)} G K u = [H \hat{U} - G \hat{Q}] R u \quad (41)$$

ただし、

$$R = F^{-1} \left[K_1 F_{x_1} F^{-1} F_{x_1} + K_2 F_{x_2} F^{-1} F_{x_2} + K_{11u} F_{x_1} F^{-1} u F_{x_1} + K_{22u} F_{x_2} F^{-1} u F_{x_2} + K_{12} F_{x_1} F^{-1} F_{x_2} + K_{12u} F_{x_1} F^{-1} u F_{x_2} \right] F^{-1} \quad (42)$$

ここで、 R は未知温度を含む係数マトリックスとなるため式(41)を繰り返し計算により求める⁽⁸⁾。式(42)において $R=0$ と仮定し計算をする。その結果得られた温度により式(41)の R を計算し、式(41)において同様の計算を繰り返す。計算の収束は仮定した温度と得られた温度が十分近い値になるとき収束とする。

以上の理論により境界上の N 個の未知量と L 個の内部未知温度を求めることができる。

3. 数値解析例

本手法の有効性を示すために、2つの数値解析例を示す。

3.1. 解析例1

Fig.1に示す熱伝導率が異なる2つの領域(内側:Region1, 外側:Region2)からなる4分の1円筒モデルを用いて数値解析を行う。境界を2次要素を用いて64要素(境界節点数127点)に分割する。内点数は各領域ごとに217点均等に配置した。また近似関数には Compactly Supported Radial Basis Function の C^2 級を用い、影響半径は $a = 1.0$ [m] とした。また M には熱

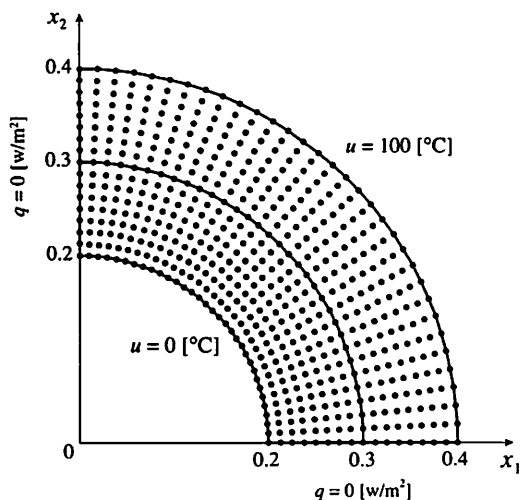


Fig. 1 Analysis model and discretization

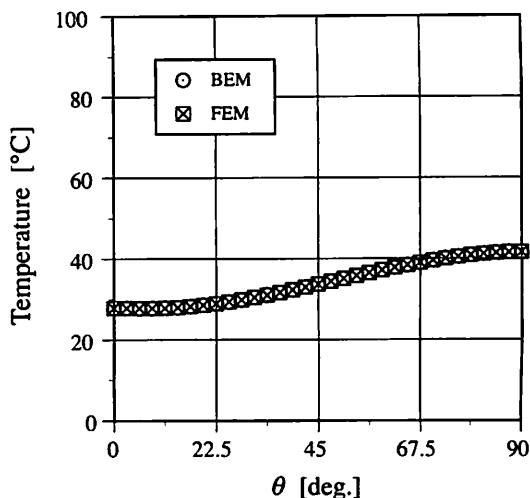


Fig. 3 Temperature distribution on $r = 0.25$

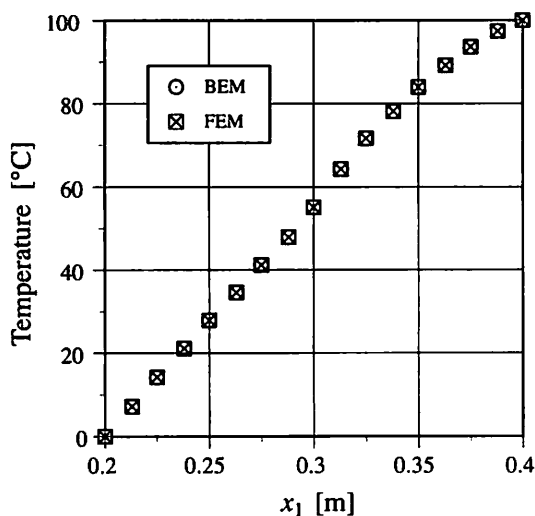


Fig. 2 Temperature distribution along axis x_1

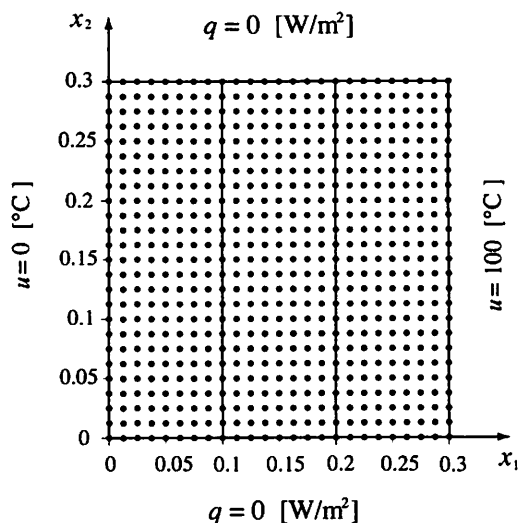


Fig. 4 Analysis model and discretization

伝導率テンソルの成分 $\lambda_{11}(u)$, $\lambda_{22}(u)$ の平均値を用いた。比較対象には汎用 FEM 解析プログラム MSC.Nastran を用いた数値解析結果を用いる⁽¹¹⁾。境界条件は内側で温度 $0[^\circ\text{C}]$ 、外側で温度 $100[^\circ\text{C}]$ としその他では断熱境界条件 ($q = 0 [\text{W}/\text{m}^2]$) として与える。熱伝導率 $\lambda [\text{W}/\text{mK}]$ は温度に依存するように以下のように仮定する。

$$\lambda_{11}(u) = 80.0 - 8.0 \times 10^{-2}u + 4.0 \times 10^{-5}u^2$$

$$\text{Region1: } \lambda_{12}(u) = 0.0$$

$$\lambda_{22}(u) = 40.0 - 4.0 \times 10^{-2}u + 2.0 \times 10^{-5}u^2$$

$$\lambda_{11}(u) = 60.0 - 6.0 \times 10^{-2}u + 3.0 \times 10^{-5}u^2$$

$$\text{Region2: } \lambda_{12}(u) = 20.0 - 2.0 \times 10^{-2}u + 1.0 \times 10^{-5}u^2$$

$$\lambda_{22}(u) = 60.0 - 6.0 \times 10^{-2}u + 3.0 \times 10^{-5}u^2$$

Fig.2 に x_1 軸上における温度分布を FEM と比較して示す。2 つの解法における結果は一致していることがわかる。Fig.3 に半径 $r = 0.25$ 軸上における温度分布を FEM と比較して示す。2 つの解法による結果は一致していることがわかる。な

おこの解析において繰り返し計算は 7 回行うことで収束した。

3.2. 解析例 2

Fig.4 に示す熱伝導率が異なる 3 つの領域 (左側:Region1, 真ん中:Region2, 右側:Region3) からなる一辺が $0.3 [\text{m}]$ の正方形モデルを用いて数値解析を行う。境界を 2 次要素を用いて 72 要素 (境界節点数は 42 点) に分割する。内点数は各領域ごとに 161 点均等に配置した。また近似関数には Compactly Supported Radial Basis Function の C^2 級を用い、影響半径は $a = 0.33 [\text{m}]$ とした。また $M(u)$ には熱伝導率テンソルの成分 $\lambda_{11}(u)$, $\lambda_{22}(u)$ の平均値を用いた。比較対象として MSC.Nastran を用いた⁽¹¹⁾。境界条件は $x_1 = 0$ において温度 $u = 0 [^\circ\text{C}]$, $x_1 = 0.3$ において温度 $u = 100 [^\circ\text{C}]$ とし、その他では断熱境界条件 ($q = 0 [\text{W}/\text{m}^2]$) として与える。熱伝導率 $\lambda [\text{W}/\text{mK}]$ は温度に依存するように以下のように仮定する。

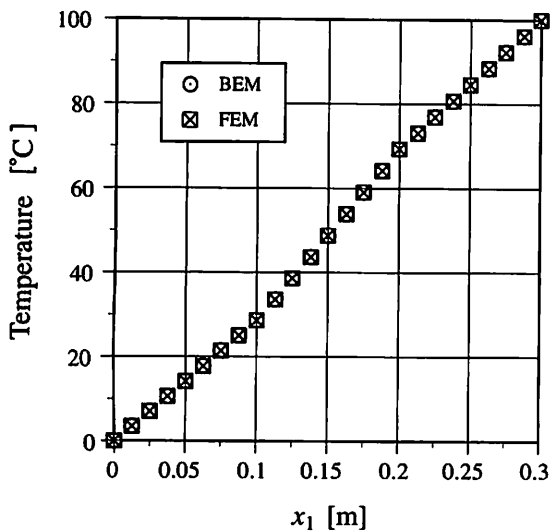


Fig.5 Temperature distribution along axis x_1

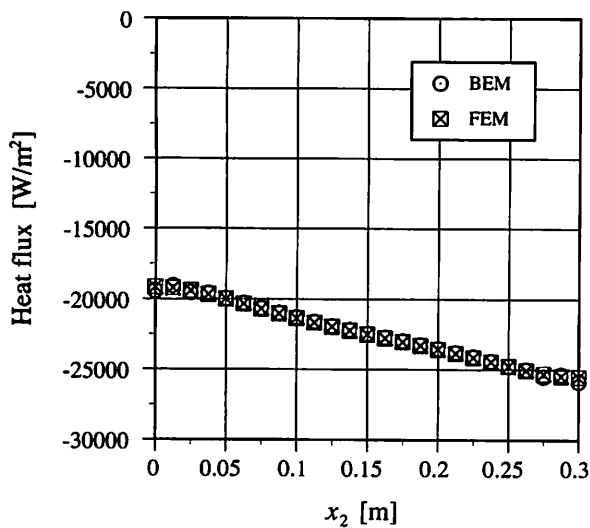


Fig.6 Heat flux variation on $x_1 = 0.3$

$$\begin{aligned} \text{Region1: } & \lambda_{11}(u) = 80.0 - 8.0 \times 10^{-2}u + 4.0 \times 10^{-5}u^2 \\ & \lambda_{12}(u) = 0.0 \\ & \lambda_{22}(u) = 40.0 - 4.0 \times 10^{-2}u + 2.0 \times 10^{-5}u^2 \\ \\ \text{Region2: } & \lambda_{11}(u) = 60.0 - 6.0 \times 10^{-2}u + 3.0 \times 10^{-5}u^2 \\ & \lambda_{12}(u) = 20.0 - 2.0 \times 10^{-2}u + 1.0 \times 10^{-5}u^2 \\ & \lambda_{22}(u) = 60.0 - 6.0 \times 10^{-2}u + 3.0 \times 10^{-5}u^2 \\ \\ \text{Region3: } & \lambda_{11}(u) = 80.0 - 8.0 \times 10^{-2}u + 4.0 \times 10^{-5}u^2 \\ & \lambda_{12}(u) = 0.0 \\ & \lambda_{22}(u) = 40.0 - 4.0 \times 10^{-2}u + 2.0 \times 10^{-5}u^2 \end{aligned}$$

Fig.5 に $x_2 = 0.15$ における x_1 での温度分布を FEM と比較して示す。また Fig.3 に $x_1 = 0.3$ における x_2 での熱流束を FEM と比較して示す。ともによく一致しているのがわかる。なお

この解析において繰り返し計算は 7 回行うことで収束した。

4. おわりに

非線形異方性材料の定常熱伝導問題に対する DRM を用いた境界要素法について、2 次元問題への適用について検討した。開発した解析プログラムにより 2 つの例題に対して数値解析を行い、本手法の有効性を確認した。二重相反法を非線形異方性材料の定常熱伝導問題へ適用することにより、境界要素法が有効利用できる範囲を広げることができたと言える。本研究では 2 次元定常熱伝導問題を考察したが、3 次元問題や非定常問題への拡張はさらに検討する予定である。

参考文献

- (1) 竹内洋一郎：熱応力，日新出版，(1989).
- (2) S. J. Liao, A. T. Chwang : General Boundary Element Method for Unsteady Nonlinear Heat Transfer Problems, *Numerical Heat Transfer, Part B*, **35** (1999), pp. 225–242.
- (3) 田中正隆, 松本敏郎, 原啓志, 異方性材料の非定常熱伝導問題に対する時間差分 DRM 境界要素法, **72-721**, (2006), pp.1326–1332.
- (4) 石黒周司, 田中正隆, 松本敏郎, 境界要素法による異方性体の 2 次元非定常熱伝導解析, 日本機械学会論文集 (A 編), **67-659**, (2001), pp.1–6.
- (5) 田中正隆, 松本敏郎, 中村正行, 境界要素法, 培風館, (1991).
- (6) 田中正隆, 荒井雄理 (共訳), J. T. Katsikadelis (著), 境界要素法—基本と応用—, 朝倉書店, (2004).
- (7) J. T. Katsikadelis and M. S. Nerantzaki, The boundary element method for nonlinear problems, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, **23**, (1992), pp. 365–373.
- (8) P. W. Partridge, C. A. Brebbia & L. C. Wrobel, *The Dual Reciprocity Boundary Element Method*, Computational Mechanics Publications, (1992).
- (9) M. A. Golberg, C. S. Chen & H. Bowman, Some Recent Results and Proposals for the use of Radial Basis Functions, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, **23**, (1999), pp. 285–296.
- (10) M. A. Golberg, C. S. Chen & S.R. Karur, Improved multi-quadratic approximation for partial differential equations, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, **18**, (1996), pp. 9–17.
- (11) 日本エムエスシー：MSC.Patran 2001 日本語オンラインドキュメント, (2001).