

# 演算子積分法を用いた三次元波動問題に対する 時間領域境界要素法の開発と超音波非破壊評価への応用

## DEVELOPMENT OF OPERATIONAL QUADRATURE BOUNDARY ELEMENT METHOD FOR A 3-D WAVE PROPAGATION PROBLEM AND ITS APPLICATION TO ULTRASONIC TESTING

齋藤 隆泰<sup>1)</sup>, 廣瀬 壮一<sup>2)</sup>, 福井 卓雄<sup>3)</sup>

Takahiro SAITOH, Sohichi HIROSE and Takuo FUKUI

- 1) 福井大学大学院工学研究科 (〒 910-0017 福井県福井市文京 3-9-1, E-mail:tsaito@taku.anc-d.fukui-u.ac.jp)  
2) 東京工業大学大学院情報理工学研究科教授 (〒 152-8552 東京都目黒区大岡山 2-12-1, E-mail:shirose@cv.titech.ac.jp)  
3) 福井大学大学院工学研究科教授 (〒 910-0017 福井県福井市文京 3-9-1, E-mail:tak@taku.anc-d.fukui-u.ac.jp)

This paper presents a time domain boundary element method using the operational quadrature method for the 3-D scalar wave analysis. In this formulation, the convolution integral is numerically approximated by a quadrature formula, whose weights are computed by using the Laplace transform of the fundamental solution and a linear multi-step method. As numerical examples, 3-D phased array simulations are implemented by the proposed method and transient wave behaviors around a scatterer are demonstrated to validate the proposed method.

**Key Words:** Boundary element method, Operational quadrature method, Phased array simulation

### 1. はじめに

スカラー波動場や弾性波動場を解析する波動解析技術は超音波非破壊評価や物理探査に関する数値シミュレーションを行う上で非常に重要であることから、これまで多くの手法が開発され、種々の問題に適用されてきた<sup>(1)</sup>。波動解析シミュレーション手法の一つである境界要素法は、無限遠における放射条件を基本解が自動的に満たすため、直接的に波動場を求めることが可能であるという利点を持つ。そのため、境界要素法は波動解析に有効な一手法としてこれまで発展してきた。その境界要素法の時間領域解法は、通常、時・空間について離散化を行い、各時刻の解をそれ以前の境界データから求める時間ステップ境界要素法<sup>(2)</sup>が用いられている。しかしながら、逐次解法であるため、解の安定性の問題を扱う必要が生じ、場合によっては数値解が発散することから適切な解を得られない場合もありうる。

このような中、近年、Lubich は時間に関する繰込み積分を、ある重み関数を用いた離散化繰込み積で置き換える手法である演算子積分法 (Operational Quadrature Method) を提案した<sup>(3)(4)</sup>。Lubich が、演算子積分法の積分方程式法に対する有効性を示した後<sup>(5)</sup>、近年、その演算子積分法を時

間領域境界要素法へ適用する研究が行われている。二次元波動問題に対して Abreu<sup>(6)</sup> らが、粘弾性波動問題に対して Schanz ら<sup>(7)</sup> がその適用例を示している。演算子積分法を時間領域境界要素法へ適用する利点は主に二つ存在する。一つは、数値繰込み積分を精度よく安定に計算できるということ、二つ目は、時間領域粘弾性波動問題のような基本解を直接求めるのが難しいような問題に対しても、演算子積分法を用いることで解を見出せるという点である。

本論文では、その演算子積分法を三次元波動問題に対する時間領域境界要素法へ適用する。まず、演算子積分法の基本的な考え方について述べた後、演算子積分法を用いた三次元波動問題に対する時間領域境界要素法の定式化について述べる。最後に、数値解析例として、超音波非破壊評価に関するシミュレーションを行い、本手法の有効性を検討し、今後の課題について言及することとする。

### 2. 演算子積分法 (Operational Quadrature Method)

はじめに、演算子積分法 (Operational Quadrature Method) について述べる。Lubich は、繰込み積分  $f * g(t)$  を、時間依存の関数である  $f(t-\tau)$  のラプラス変換を用いた離散化繰込

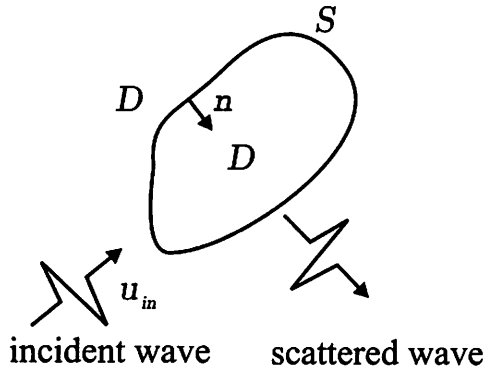


Fig. 1 Scattering of scalar waves.

み積分によって近似する手法を提案した。一般的に、繰込み積分は次のように表される。

$$f * g(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau, \quad t \geq 0 \quad (1)$$

式(1)で\*は時間に関する繰込み積を表す。Lubichの演算子積分法によれば、式(1)で表される繰込み積分は、時間 $t$ を時間間隔 $\Delta t$ を用いて $n$ ステップに分割すれば、次のように近似される。

$$f * g(n\Delta t) \simeq \sum_j \omega_{n-j}(\Delta t)g(j\Delta t). \quad (2)$$

ただし、 $\omega_j(\Delta t)$ は重み関数であり、複素変数 $z$ に関する次の級数展開によって決定される。すなわち、

$$F\left(\frac{\delta(z)}{\Delta t}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n(\Delta t)z^n \quad (3)$$

であり、式(3)において $F$ は時間依存関数 $f$ のラプラス変換

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt \quad (4)$$

によって与えられる。式(3)で定義された級数展開に、極座標変換を考えたコーシーの積分公式を用いれば、式(2)の重みは次のように表される。

$$\begin{aligned} \omega_n(\Delta t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\rho} F\left(\frac{\delta(z)}{\Delta t}\right) z^{-n-1} dz \\ &\simeq \frac{\rho^{-n}}{L} \sum_{i=0}^{L-1} F\left(\frac{\delta(z_i)}{\Delta t}\right) e^{-\frac{2\pi i n i}{L}}. \end{aligned} \quad (5)$$

ただし、式(5)を導く過程で、分割数 $L$ 、ステップ幅 $2\pi/L$ を考慮した台形則を用いている。また、式(5)の $\delta(z_i)$ は線形マルチステップ法(差分法)における生成多項式の商であり、 $z_i = \rho e^{2\pi i i/L}$ によって表される。 $\rho$ は目標とする精度によって決定されるパラメータである。

### 3. 時間領域境界要素法の定式化

さて、図1で表されるような外部領域 $D$ における散乱体 $\bar{D}$ によるスカラー波動の散乱問題を考える。入射波 $u_{in}$ が存在し、散乱体 $\bar{D}$ の境界表面 $S$ により反射・散乱されるとする。このとき、入射波が散乱体 $\bar{D}$ に到達するまで静かな過去を持つとする。すなわち、初期条件 $u(\mathbf{x}, t=0) = 0$ 及び $\partial u(\mathbf{x}, t=0)/\partial t = 0$ を考慮すれば、変位 $u$ が満たす支配方程式及び境界条件は次のように表される。

$$\nabla^2 u = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \text{in } D \quad (6)$$

$$u = \hat{u} \quad \text{on } S_1, \quad q = \frac{\partial u}{\partial n} = \hat{q} \quad \text{on } S_2, \quad S_2 = S \setminus S_1 \quad (7)$$

ただし $c$ は波速を表し、 $\partial/\partial n$ は境界表面 $S$ の外向き法線方向微分を表す。また、 $\hat{u}$ 及び $\hat{q}$ は与えられた境界条件である。式(6)、(7)により定義された問題の解は、次の時間領域境界積分方程式を解くことにより求まる。

$$\begin{aligned} C(\mathbf{x})u(\mathbf{x}, t) &= u_{in}(\mathbf{x}, t) + \int_S G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) * q(\mathbf{y}, t) dS_y \\ &\quad - \int_S H(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) * u(\mathbf{y}, t) dS_y \end{aligned} \quad (8)$$

ただし式(8)において、 $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ 及び $H(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ は三次元時間領域スカラー波動問題における基本解及び対応する二重層核であり

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \frac{1}{4\pi r} \delta\left(t - \frac{r}{c}\right) \quad (9)$$

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \frac{\partial}{\partial n} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \quad (10)$$

で表される。式(9)において、 $\delta$ はディラックのデルタ関数であり、 $r$ は $r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ により定義される。また、 $C$ は自由項である。通常、境界積分方程式(8)は境界上に適切な近似関数を導入し、時間・空間に関して離散化することで、境界未知量に関する代数方程式に帰着される。しかしながら、従来の時間領域境界要素法では、時間ステップの増加とともに解が不安定になること、式(9)、(10)のように、解析的な時間領域の基本解が求まらなければ計算が容易でないという欠点がある。

### 4. 演算子積分法を用いた時間領域境界要素法

前節で述べたような欠点を改善するため、時間領域境界要素法に演算子積分法を適用することを考える。式(8)の境界積分方程式を数値的に解くために、境界上の未知量 $u$ と $q$ を近似関数 $\phi_i$ を用いて次のように表す。

$$u(\mathbf{x}, t) = \sum_i \phi_i(\mathbf{x})u_i(t), \quad q(\mathbf{x}, t) = \sum_i \phi_i(\mathbf{x})q_i(t) \quad (11)$$

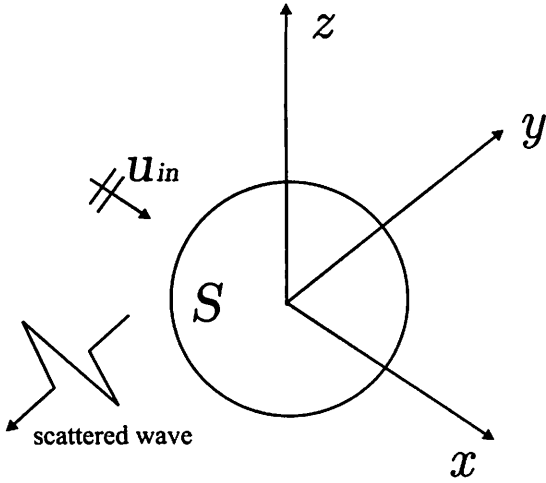


Fig. 2 Scattering model for a spherical scatterer.

ただし、 $u_i$  及び  $q_i$  はそれぞれ  $i$  番目の基底における時間依存の境界値である。式 (11) を境界積分方程式 (8) に代入し、 $\mathbf{x} \in D \rightarrow \mathbf{x} \in S$  なる極限移行を考慮すれば、時間増分  $\Delta t$  に対して、次の第  $n$  ステップにおける離散化された時間領域境界積分方程式を得ることが出来る。

$$\frac{1}{2} \sum_i \phi_i(\mathbf{x}) u_i(n\Delta t) = u_{in}(\mathbf{x}, n\Delta t) + \sum_i \sum_{k=1}^n \left[ A_i^{n-k}(\mathbf{x}) q_i(k\Delta t) - B_i^{n-k}(\mathbf{x}) u_i(k\Delta t) \right]. \quad (12)$$

ただし、式 (12) において、 $A_i^m$ 、 $B_i^m$  は影響関数である。影響関数  $A_i^m$ 、 $B_i^m$  は式 (2) の離散化繰込み積とその重み表現式 (5) を用いた演算子積分法により、それぞれ次のように得ることができる。

$$A_i^m(\mathbf{x}) = \frac{\rho^{-m}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \int_S \hat{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s_l) \phi_i(\mathbf{y}) e^{-\frac{2\pi i m l}{L}} dS_y \quad (13)$$

$$B_i^m(\mathbf{x}) = \frac{\rho^{-m}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \int_S \hat{H}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s_l) \phi_i(\mathbf{y}) e^{-\frac{2\pi i m l}{L}} dS_y \quad (14)$$

ただし、 $s_l$  は  $s_l = \delta(z_l)/(c\Delta t)$  で定義される。また、パラメータ  $\rho$  は  $\rho < 1$  の条件で与えられ、 $\rho^L = \sqrt{\epsilon}$  として決定される。ここで  $\epsilon$  は式 (13)、(14) の計算で想定される誤差である。 $\delta(z_l)$  を決定するために、本研究では Lubich<sup>(3)</sup> に倣い次の差分式

$$\delta(z) = (1-z) + \frac{(1-z^2)}{2} \quad (15)$$

を用いた。式 (13)、(14) は離散フーリエ変換の形で表され

ていることから、それらの和には高速フーリエ変換を利用することが出来る。また、ラプラス変換 (4) を時間領域基本解 (9)、(10) に用いれば、ラプラス変換域における基本解  $\hat{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s)$  及び  $\hat{H}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s)$  は次のように求めることが出来る。

$$\hat{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s) = \frac{1}{4\pi r} e^{-\frac{s}{c} r} \quad (16)$$

$$\hat{H}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s) = \frac{1}{4\pi} e^{-\frac{sr}{c}} \left( -\frac{s}{cr} - \frac{1}{r^2} \right) \frac{\partial r}{\partial n_y}. \quad (17)$$

各境界上の節点に関して離散化した境界積分方程式 (12) を行列表示すれば、

$$\frac{1}{2} \mathbf{u}^n = \mathbf{u}_{in}^n + \sum_{k=1}^n \mathbf{A}^{n-k} \mathbf{q}^k - \sum_{k=1}^n \mathbf{B}^{n-k} \mathbf{u}^k \quad (18)$$

となる。ただし式 (18) において  $n$ 、 $k$  はそれぞれ時間増分  $\Delta t$  に対するステップ数  $t_n = n\Delta t$ 、 $t_k = k\Delta t$  に対応する正の整数である。また  $\mathbf{A}$  と  $\mathbf{B}$  は離散化された各境界要素に関する影響関数  $A_i^m$ 、 $B_i^m$  に対応した係数行列である。 $\mathbf{u}$  と  $\mathbf{q}$  はそれぞれ変位  $u$  と対応する  $q$  に関するベクトルである。式 (18) は、式 (7) の境界条件を考慮し、既知量を右辺、未知量を左辺に並び替え、境界未知量に関する代数方程式を解くことにより、解を求めることが出来る。

境界要素法では解の精度を保障するために影響関数の積分における特異性の処理が重要である。例えば、式 (16) において、積分核  $\hat{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s)$  は次のように非正則項  $\hat{G}^S(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s)$  と正則な項  $\hat{G}^R(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s)$  に分離することができる。

$$\hat{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s) = \hat{G}^S(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s) + \hat{G}^R(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s) = \frac{1}{4\pi r} + \frac{1}{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left( -\frac{s}{c} \right)^n \frac{r^{n-1}}{n!} \quad (19)$$

式 (19) における特異性を持つ非正則  $\hat{G}^S(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s)$  は解析的に処理することが可能である<sup>(8)(9)</sup>。また、正則項  $\hat{G}^R(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s)$  の計算はガウス数値積分により計算される。

## 5. 数値解析例

数値解析例を示す。以下の全ての計算において散乱体として半径  $a$  の球形散乱体を考え、一定要素により離散化して解析を行った。散乱体の境界表面  $S$  における境界条件を  $\partial u / \partial n = 0$  で与え、散乱体の要素数は 384 とした。また、時間増分は  $c\Delta t/a = 0.25$  とし、 $L = 128$ 、 $\rho = 0.94746353$  ( $\epsilon = 10^{-6}$  を想定) とした。なお、式 (16)、(17) で与えられたように三次元時間領域スカラー波動問題に対する解析的な基本解は求まるものの、解の安定性の問題や、従来法よりプログラミングが容易であるという点から演算子積分法による本手法を用いた。

### 5.1. 球形散乱体による散乱解析

図 2 で表されるような球形散乱体による散乱問題を考える。入射波として時刻  $t$  において次のような波形を持つ平面

波を用いた。

$$u_{in}(\mathbf{x}, t) = 1 - \cos^* \left[ 10\pi \left( t - \frac{x+a}{c} \right) \right],$$

$$\begin{cases} \cos^* \alpha = \cos \alpha & \text{for } 0 \leq \alpha \leq 2\pi \\ \cos^* \alpha = 1 & \text{for } \alpha < 0, \alpha > 2\pi. \end{cases} \quad (20)$$

図3中の(a)-(c)はそれぞれ  $ct/a = 0.0, 2.0, 3.0$  での球形散乱体周辺の波動場を表しており、入射波がちょうど散乱体に到達した時間  $ct/a = 0.0$  から、入射波が散乱体を通り過ぎる時刻までの波動場が再現されている。図中の(b), (c)と球形散乱体により生じる散乱波を確認することが出来る。

## 5.2. フェイズドアレイ探傷シミュレーション

通常、超音波非破壊評価では、探触子と呼ばれる超音波センサを用いて、超音波を送受信し欠陥の有無等を決定する。しかしながら、検査領域が広い場合には通常用いる一つまたは二つの探触子素子を複数個組み合わせ、超音波探傷を行うフェイズドアレイ探傷法が有効である。フェイズドアレイ探傷法は、これまで、人体に対する検査技術として発展してきた。近年は、原子力機器や土木材料のような検査領域が広範囲に及ぶ試験に対しても、実用化を目指して研究・開発が進んでいる。フェイズドアレイ探傷法では、複数の探触子素子を独立に駆動させることが出来ることから、各素子ごとに適当な超音波の入射方向、時間差を考慮することにより様々な入射ビームを形成することが可能となる。そのため、どのような入射ビームに対して、どのような散乱波形が得られるかなど、その決定法は数値シミュレーションにより実行される。しかしながら、フェイズドアレイ探傷法の三次元数値シミュレーション例は数少ない。そのため、現在、数値シミュレーションによりアレイの素子間隔やアレイ各素子の駆動時間などのアレイ探触子の設計変数を決定する研究などが行われている<sup>(10)</sup>。本研究では、簡単のため、スカラー波による次の二つのフェイズドアレイ探傷シミュレーションを行った。

### 5.2.1 Beam focusing

図4で表されるようなフェイズドアレイ探傷モデルを考える。各探触子素子は間隔  $a$  で配置されている。ここで、図4において、各探触子素子①、②、③について、素子  $j(j=1, 2, 3)$  から放射される波動場  $u_{in}^j$  を次のような球面波であると仮定する。

$$u_{in}^j(r_a, t) = \frac{1 - \cos^* \left[ 10\pi \left( t - \frac{r_a}{c} - \Delta\tau_j \right) \right]}{r_a},$$

$$\begin{cases} \cos^* \alpha = \cos \alpha & \text{for } 0 \leq \alpha \leq 2\pi \\ \cos^* \alpha = 1 & \text{for } \alpha < 0, \alpha > 2\pi. \end{cases} \quad (21)$$

ただし、式(21)において  $r_a$  は各素子から観測点  $\mathbf{x}$  までの距離を表す。また  $\Delta\tau_j$  は各探触子素子における超音波送信の遅

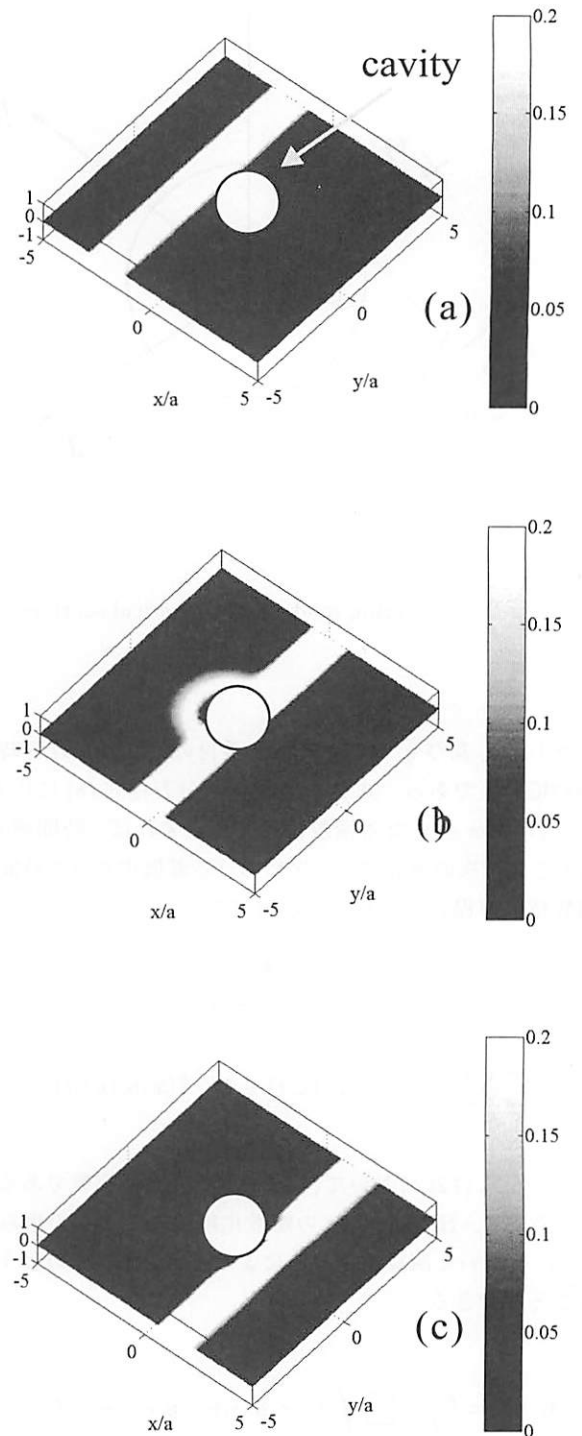


Fig. 3 Transient behaviors of total wave fields around a spherical scatterer on  $z = 0$  (a): $ct/a=0.0$  (b): $ct/a=2.0$  (c): $ct/a=3.0$ .

延時間を表しており、

$$\Delta\tau_1 = \frac{\sqrt{17}a - 4a}{c}, \quad \Delta\tau_2 = \tau_3 = 0.0 \quad (22)$$

である。このように、各素子からの入射時刻を制御することで、図4のように、散乱体付近で集束させる入射波を送信す

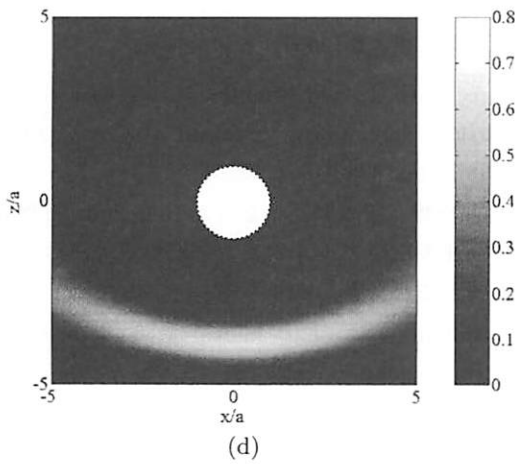
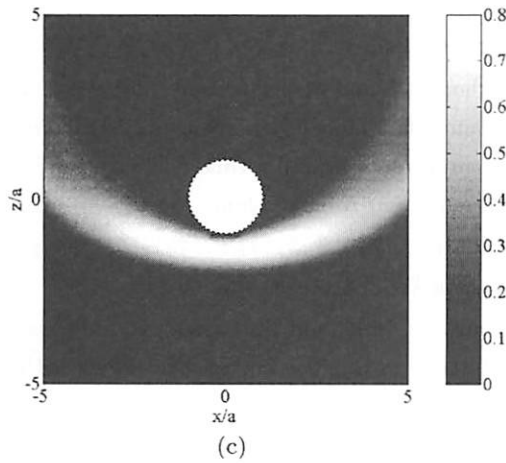
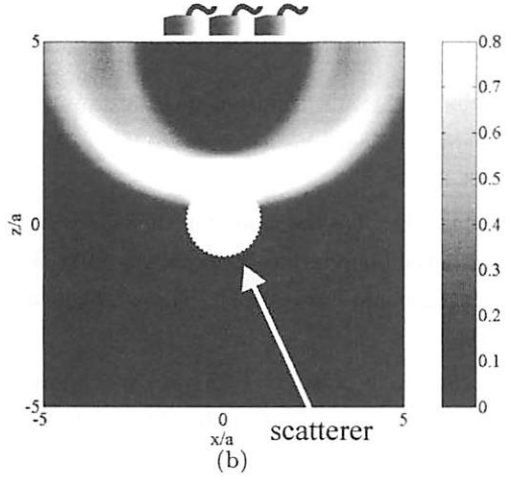
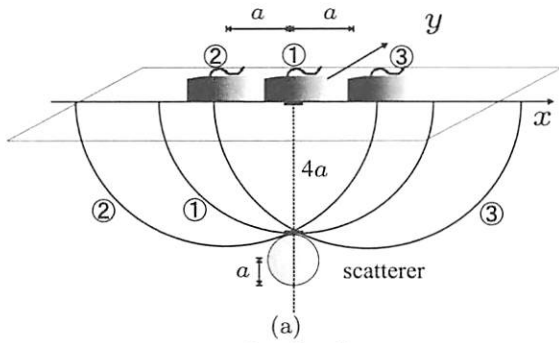


Fig. 4 (a):Beam focusing model and transient behaviors of total wave fields around a spherical scatterer by beam focusing on  $y = 0$ , (b):  $ct/a = 5.0$  (c): $ct/a = 7.5$  (d): $ct/a = 10.0$ .

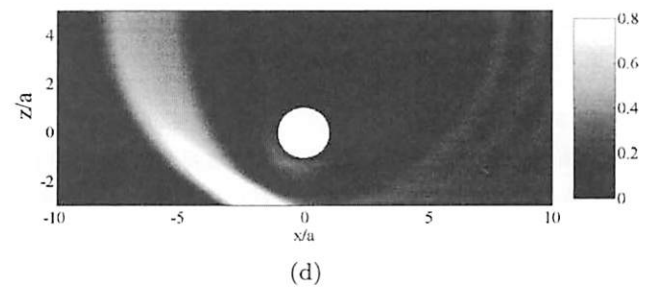
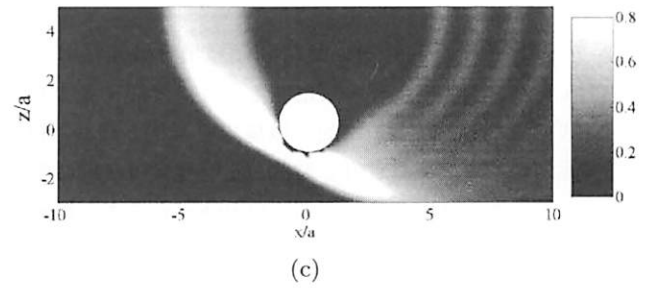
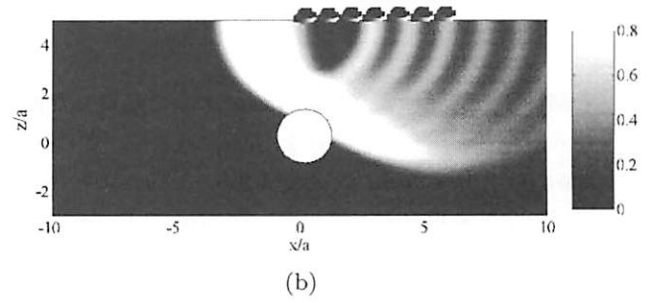
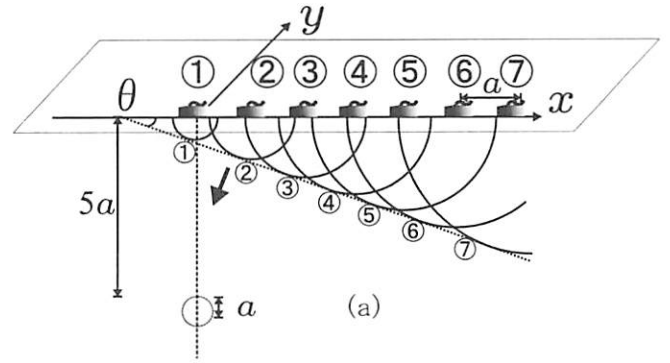


Fig. 5 (a):Beam steering model and transient behaviors of total wave fields around a spherical scatterer by beam steering on  $y = 0$ , (b):  $ct/a = 7.5$  (c): $ct/a = 10.0$  (d): $ct/a = 12.5$ .

ることが可能となる。このようなモデルを Beam focusing と呼ぶ。

図 4(b)-(d) は  $ct/a = 5.0, 7.5, 10.0$  における散乱体付近の騒場を表している。図 4(b) において散乱体に Beam focusing により形成された強めあった入射波が到達する。図 4(c) により、散乱体と Beam focusing による入射波の相互作用による散乱波が見てとれる。また図 4(c) では、入射波が散乱体を通過した後の後方散乱波を確認することができる。

## 5.2.2 Beam steering

最後に、図 5(a) で表されるような 7 つの素子からなるフェイズドアレイ探傷モデルを考える。この時、図 5(a) 中の間隔  $a$  で配置された素子  $j$  に対する遅延時間を

$$\Delta\tau_j = (j - 1) \frac{a \sin \theta}{c} \quad (23)$$

と制御することにより、図 5(a) のように傾斜した波面を持つ入射波を形成した。これを Beam steering モデルと呼ぶ。図 5(b)-(d) はそれぞれ、 $ct/a = 7.5, 10, 12.5$  における散乱体周辺の全波動場を表している。図 5(b) で Beam steering により形成された傾斜した波面を持つ入射波が散乱体に到達する。図 5(c) で散乱波が、図 5(d) で後方散乱波を確認できる。このように、各探触子素子を独立に駆動させることで、特徴のある入射場を形成し、超音波探傷試験を実施することが出来る。

演算子積分法を用いた時間領域境界要素法は、プログラミングの容易さ、解の安定性という点で従来法より有効な手法であるが、従来の時間領域境界要素法と同様、特に、三次元問題に対しては、計算時間・記憶容量は一般に膨大となる。このような中、Greengard や Rokhlin により提案された大規模問題に対する数値解析手法である高速多重極法<sup>(11)</sup>が注目を集めている。現在では、福井ら<sup>(12)</sup>、西村<sup>(13)</sup>らにより、高速多重極法が境界要素法へ適用され、高速多重極境界要素法として大規模問題に対する新しい境界要素法として、様々な問題に利用されてきている<sup>(14)</sup>。より大規模問題な問題に本手法を適用するためにも、高速多重極法を本手法へ適用し計算効率を低減する必要があるだろう。

## 6. おわりに

演算子積分法を用いた三次元波動問題に対する時間領域境界要素法を開発した。また、球形散乱体による波動散乱解析、及び超音波非破壊評価における Beam focusing、Beam steering モデルに対する解析を行った。詳細な計算量、計算精度、本手法の適用範囲に関しては今後の課題である。また、三次元弾性問題への拡張、及び高速多重極法の導入による計算時間・記憶容量の低減を行い、より現実的な超音波非破壊評価の数値シミュレーションを実行する予定である。

## 7. 謝辞

本研究は、第一著者が日本学術振興会特別研究員・特別研

究員奨励費の支援を受けて行ったものです。ここに特記して感謝の意を表します。

## 参考文献

- (1) 小林昭一編著：波動解析と境界要素法、京都大学学術出版会 (2000).
- (2) 福井卓雄：境界要素法の研究-高速・高精度計算法の開発と応用- 京都大学学位論文 (1998).
- (3) Lubich, C. : Convolution quadrature and discretized operational calculus I *Numer. Math.*, **52** (1988), pp. 129-145.
- (4) Lubich, C. : Convolution quadrature and discretized operational calculus *Numer. Math.*, **52** (1988), pp. 413-425.
- (5) Lubich, C. : On the multistep time discretization of linear initial boundary value problems and their boundary integral equations, *Numer. Math.*, **67** (1994), pp. 365-389.
- (6) Abreu, A. I., Carrer, J. A. M. and Mansur, W. J. : Scalar wave propagation in 2D: a BEM formulation based on the operational quadrature method, *Engineering analysis with Boundary Elements*, **27** (2003), pp. 101-105.
- (7) Schanz, M. and Struckmeier, V. : Wave propagation in a simplified modelled poroelastic, continuum : Fundamental solutions and a time domain boundary element formulation, *Numer. Math.*, **64** (2005), pp. 1816-1839.
- (8) 廣瀬壯一：高次要素に対する特異積分の評価法、境界要素法論文集、**5** (1988), pp. 69-74.
- (9) Banerjee, P. K. and Butterfield, R. *Boundary Element Methods in Engineering Science*, McGrawHill, London (1981).
- (10) 藤原昌之、木本和志、廣瀬壯一：入射場の放射パターンを用いるリニアアレイ探触子の設計変数決定法、応用力学論文集、**6** (2003), pp.1089-1096.
- (11) Greengard, L. and Rokhlin, V. : A fast algorithm for particle simulations, *Journal of Comp. Physics*, **73** (1987), pp. 325-348.
- (12) 福井卓雄、勝本順三：2次元 Helmholtz 方程式のための高速多重極アルゴリズムと境界要素法への応用、境界要素法論文集、**14** (1997), pp. 81-86.
- (13) Nishimura, N. : Fast multipole accelerated boundary integral equation methods, *Applied Mechanics Rev*, **55**, (2002), pp. 299-324.
- (14) 斎藤隆泰、廣瀬壯一、福井卓雄：列車走行に伴う環境振動・騒音の三次元解析に関する研究、計算数理工学レビュー、**2**, (2002), pp. 17-32.