

## 境界要素法による音場の新しい感度解析法

## (3次元音場に関する検討)

A NEW SENSITIVITY ANALYSIS BASED ON BEM IN ACOUSTIC FIELDS

(STUDY ON 3-D ACOUSTIC FIELDS)

荒井 雄理<sup>1)</sup>, 田中 正隆<sup>2)</sup>, 松本 敏郎<sup>3)</sup>

Youri ARAI, Masataka TANAKA, Toshiro MATSUMOTO

- 1) 信州大学大学院工学系研究科 (〒 380-8553 長野市若里 4-17-1, E-mail: youri@artist.shinshu-u.ac.jp)  
 2) 信州大学工学部機械システム工学科 (〒 380-8553 長野市若里 4-17-1, E-mail: dtanaka@gipwc.shinshu-u.ac.jp)  
 3) 名古屋大学大学院工学研究科 (〒 464-8603 名古屋市千種区不老町, E-mail: t.matsumoto@nuem.nagoya-u.ac.jp)

This paper presents a new sensitivity analysis based on BEM avoiding the fictitious eigenfrequency issues for the three - dimensional external acoustic field. If the external acoustic field problem governed by the Helmholtz equation is solved by means of a boundary integral equation without any care, the accuracy of the numerical solution is degraded at eigenfrequencies of the interior problem. The present approach uses two boundary integral equations differentiated with respect to design parameters. One equation is the combined boundary integral equation proposed by Burton and Miller and the other is the normal derivative boundary integral equation multiplied by the same coupling parameter as in the Burton and Miller expression. The effectiveness and validity of the proposed approach is demonstrated through a numerical example in three - dimensional problems.

**Key Words:** Computational Mechanics, Boundary Element Method, Sensitivity Analysis, Acoustics, Helmholtz Equation, Fictitious Eigenfrequency Problem

## 1. はじめに

最適設計や逆問題の解析においては、設計変数に対する感度係数を精度よく効率的に計算することが必要となる。感度係数は設計変数に対する系の応答の変化率であり、最も簡便な方法は、設計変数を実際に少しだけ変化させたときの系の応答の変化量を計算し、その差を設計変数の変化量で割って計算する方法である。このような差分による計算法では、感度係数を求めるために1つの設計変数に対して少なくとも2回、系の応答を求めなくてはならず、効率的ではない。そこで本研究では境界積分方程式を設計変数で微分した方程式から感度係数を計算する直接微分法により感度係数を計算するものとする<sup>(1)</sup>。

Helmholtz 方程式に支配される、無限の広がりを持つ領域を扱う外部音響問題または領域内に有限な補領域を含む内部音響問題を境界積分方程式を用いて解く際に、数値解の精度が低下する見かけの固有振動数問題が生じる<sup>(2, 3)</sup>。境界要素法に基づいた直接微分法により感度係数を求める場合、境界積分方程式を解くことで得られる境界上の音圧、粒子速

度を用いるため、これらの諸量の数値精度が感度係数の精度に影響を及ぼす<sup>(4)</sup>。従って、見かけの固有振動数問題を回避した境界積分方程式を用いることが高精度の感度係数を求めるのに必要とされる。

本報は、著者らが提案した見かけの固有振動数問題を回避する方法において用いられる2つの境界積分方程式をそれぞれ設計変数で微分した式を併用することで設計変数に対する感度係数を計算する方法を提案する。提案手法の有効性を、無限の広がりを有する領域内に表面が一様に振動する楕円体が存在すると仮定し、その問題を開発した数値解析コードにより解析することで確認する。

## 2. 理論

境界積分方程式を設計変数に関して微分した方程式より感度係数を導出する場合、あらかじめ境界要素法の手順に従い境界上の音圧、粒子速度を計算し、それらの値を感度係数に関する境界積分方程式に代入して感度係数を計算することとなる<sup>(4)</sup>。従って、境界上の諸量の精度が感度係数の精度

に影響するため、境界上の諸量を精度よく求めることが非常に重要となる。しかしながら、Helmholtz 方程式に支配される音場の境界値問題を境界積分方程式を用いて解く場合に、対応する補領域の固有振動数に等しい周波数において方程式系が不定となり、物理的に意味の無い解が得られてしまう見かけの固有振動数問題が生じる。この問題を回避する手段として著者らは Burton - Miller 型の結合境界積分方程式と、法線方向導関数境界積分方程式にその結合係数を乗じた式の2式をソース点の位置により使い分ける方法を提案し、その有効性を確認した<sup>(5, 6)</sup>。

本研究では、それら2つの境界積分方程式を設計変数で微分した方程式を併用することで見かけの固有振動数問題が生じる周波数においても高精度の感度係数を計算することができることを示すものとする。

以下に本研究で用いる境界積分方程式およびそれらの設計変数に関して微分した方程式の導出について記述する。

### 2.1. 境界積分方程式

微小振幅の振動を考慮のものとし、角振動数  $\omega$  で定常振動している場合には、音場の支配微分方程式は次の非同次 Helmholtz 方程式となる<sup>(7, 8, 9, 10)</sup>。

$$\nabla^2 p(x) + k^2 p(x) + f(x) = 0 \quad (1)$$

ただし、 $p(x)$  は音圧、 $f(x)$  は内部音場の集中音源等を表すソース項である。また、 $k$  は波数であり  $C_0$  を音速とすれば次式で表される。

$$k = \frac{\omega}{C_0} \quad (2)$$

支配方程式 (1) に対して本研究では以下に示す結合境界積分方程式 (3) と、その結合係数を法線方向導関数境界積分方程式に乗じた方程式 (4) の2つの境界積分方程式を準備する。導出の詳細については文献 (5) を参照していただきたい。

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} \left\{ (q^*(x, y) - Q^*(x, y)) + \alpha (\tilde{q}^*(x, y) - \tilde{Q}^*(x, y)) \right\} \\ & \times p(x) d\Gamma(x) + \int_{\Gamma} \left\{ (Q^*(x, y) + \alpha \tilde{Q}^*(x, y)) \right. \\ & \times (p(x) - p(y)) - \alpha \tilde{Q}^*(x, y) r_m(x, y) p_m(y) \left. \right\} d\Gamma(x) \\ & = -i\omega\rho \left[ \int_{\Gamma} \{ p^*(x, y) + \alpha (\tilde{p}^*(x, y) - \tilde{u}^*(x, y)) \} \right. \\ & \times v(x) d\Gamma(x) + \alpha \int_{\Gamma} \tilde{u}^*(x, y) (v(x) - n_m(x) p_m(y)) \\ & \times d\Gamma(x) \left. \right] + I (p^*(x^s, y) + \alpha \tilde{p}^*(x^s, y)) \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \alpha \int_{\Gamma} (\tilde{q}^*(x, y) - \tilde{Q}^*(x, y)) p(x) d\Gamma(x) \\ & + \alpha \int_{\Gamma} \tilde{Q}^*(x, y) (p(x) - p(y) - r_m(x, y) p_m(y)) d\Gamma(x) \\ & = -i\omega\rho\alpha \left[ \int_{\Gamma} (\tilde{p}^*(x, y) - \tilde{u}^*(x, y)) v(x) d\Gamma(x) \right. \\ & \left. + \int_{\Gamma} \tilde{u}^*(x, y) (v(x) - n_m(x) p_m(y)) d\Gamma(x) \right] \\ & + \alpha I \tilde{p}^*(x^s, y) \quad (4) \end{aligned}$$

ここで  $x$  は観測点、 $y$  はソース点、 $\rho$  は媒質密度、 $v(x)$  は境界節点の粒子速度、 $I$  は集中音源の強さであり、 $\tilde{()}$  =  $\partial()/\partial n(y)$ 、 $p_{,m}$  は音圧の勾配、 $r_m = x_m - y_m$ 、 $\alpha$  は複素数の結合係数、 $n_m$  は外向き単位法線ベクトルの成分である。また、基本解の各成分は以下ようになる。

$$p^*(x, y) = \frac{1}{4\pi r} \exp(-ikr) \quad (5)$$

$$q^*(x, y) = -\frac{1}{4\pi r^2} (1 + ikr) \exp(-ikr) \frac{\partial r}{\partial n}(x) \quad (6)$$

$$Q^*(x, y) = -\frac{1}{4\pi r^2} \frac{\partial r}{\partial n}(x) \quad (7)$$

$$\tilde{u}^*(x, y) = -\frac{1}{4\pi r^2} \frac{\partial r}{\partial n}(y) \quad (8)$$

$$\tilde{Q}^*(x, y) = \frac{1}{4\pi r^3} \left\{ 3 \frac{\partial r}{\partial n}(x) \frac{\partial r}{\partial n}(y) + n_j(x) n_j(y) \right\} \quad (9)$$

$$\tilde{p}^*(x, y) = -\frac{1}{4\pi r^2} (1 + ikr) \exp(-ikr) \frac{\partial r}{\partial n}(y) \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \tilde{q}^*(x, y) = \frac{1}{4\pi r^3} \left[ \left\{ 3(1 + ikr) - k^2 r^2 \right\} \frac{\partial r}{\partial n}(x) \frac{\partial r}{\partial n}(y) \right. \\ \left. + (1 + ikr) n_j(x) n_j(y) \right] \exp(-ikr) \quad (11) \end{aligned}$$

本研究では、導出された2つの境界積分方程式 (3), (4) を高次の境界要素においてソース点  $y$  の位置により使い分けて音場の問題を解くものとする。

### 2.2. 感度係数に関する境界積分方程式

本研究では、感度係数の計算法として境界積分方程式を設計変数で微分して感度係数に関する境界積分方程式を導出し、それを境界要素で離散化して解く手法を採用する。そこで2つの境界積分方程式 (3), (4) を設計変数で微分することを考える。

音響問題の場合、設計変数として物体の形状を規定するパラメータ、周波数、媒質密度、境界上の音圧、粒子速度、集中音源の強さなどが考えられる。このような設計変数を想定して境界積分方程式 (3), (4) を微分することでそれぞれ次式を得る。ただし、 $\dot{()}$  は設計変数に関する微分を表す。

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} \left\{ (q^*(x, y) - Q^*(x, y)) + \alpha (\tilde{q}^*(x, y) - \tilde{Q}^*(x, y)) \right\} \\ & \times \dot{p}(x) d\Gamma(x) + \int_{\Gamma} \left\{ (\dot{q}^*(x, y) - \dot{Q}^*(x, y)) \right. \\ & + \alpha (\dot{\tilde{q}}^*(x, y) - \dot{\tilde{Q}}^*(x, y)) \left. \right\} p(x) d\Gamma(x) \\ & + \int_{\Gamma} \left\{ (q^*(x, y) - Q^*(x, y)) \right. \\ & + \alpha (\tilde{q}^*(x, y) - \tilde{Q}^*(x, y)) \left. \right\} p(x) d\dot{\Gamma}(x) \\ & + \int_{\Gamma} \left\{ (Q^*(x, y) + \alpha \tilde{Q}^*(x, y)) (\dot{p}(x) - \dot{p}(y)) \right. \\ & \left. - \alpha \tilde{Q}^*(x, y) (r_m(x, y) p_m(y) + r_m(x, y) \dot{p}_m(y)) \right\} \\ & \times d\Gamma(x) + \int_{\Gamma} \left\{ (\dot{Q}^*(x, y) + \alpha \dot{\tilde{Q}}^*(x, y)) (p(x) - p(y)) \right. \\ & \left. - \alpha \dot{\tilde{Q}}^*(x, y) r_m(x, y) p_m(y) \right\} d\Gamma(x) \\ & + \int_{\Gamma} \left\{ (Q^*(x, y) + \alpha \tilde{Q}^*(x, y)) (p(x) - p(y)) \right. \\ & \left. - \alpha \tilde{Q}^*(x, y) r_m(x, y) p_m(y) \right\} d\dot{\Gamma}(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -i\omega\rho \left[ \int_{\Gamma} \{p^*(x, y) + \alpha(\tilde{p}^*(x, y) - \tilde{u}^*(x, y))\} \dot{v}(x) \right. \\
&\quad \times d\Gamma(x) + \int_{\Gamma} \{\dot{p}^*(x, y) + \alpha(\dot{\tilde{p}}^*(x, y) - \dot{\tilde{u}}^*(x, y))\} \\
&\quad \times v(x) d\Gamma(x) + \int_{\Gamma} \{p^*(x, y) \\
&\quad + \alpha(\tilde{p}^*(x, y) - \tilde{u}^*(x, y))\} v(x) d\Gamma(x) \\
&+ \alpha \int_{\Gamma} \tilde{u}^*(x, y) \{v(x) - (\dot{n}_m(x) p_{,m}(y) + n_m(x) \dot{p}_{,m})\} \\
&\quad \times d\Gamma(x) + \alpha \int_{\Gamma} \dot{\tilde{u}}^*(x, y) (v(x) - n_m(x) p_{,m}(y)) d\Gamma(x) \\
&\quad + \alpha \int_{\Gamma} \tilde{u}^*(x, y) (v(x) - n_m(x) p_{,m}(y)) d\Gamma(x) \Big] \\
&- i(\dot{\omega}\rho + \omega\dot{\rho}) \left[ \int_{\Gamma} \{p^*(x, y) + \alpha(\tilde{p}^*(x, y) - \tilde{u}^*(x, y))\} \right. \\
&\quad \times v(x) d\Gamma(x) + \alpha \int_{\Gamma} \tilde{u}^*(x, y) (v(x) - n_m(x) p_{,m}(y)) \\
&\quad \times d\Gamma(x) \Big] + I(p^*(x^s, y) + \alpha\tilde{p}^*(x^s, y)) \\
&+ I(\dot{p}^*(x^s, y) + \alpha\dot{\tilde{p}}^*(x^s, y)) \tag{12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\alpha \int_{\Gamma} (\dot{q}^*(x, y) - \dot{Q}^*(x, y)) \dot{p}(x) d\Gamma(x) \\
&+ \alpha \int_{\Gamma} (\dot{q}^*(x, y) - \dot{Q}^*(x, y)) p(x) d\Gamma(x) \\
&+ \alpha \int_{\Gamma} (\dot{q}^*(x, y) - \dot{Q}^*(x, y)) p(x) d\Gamma(x) \\
&+ \alpha \int_{\Gamma} \dot{Q}^*(x, y) \{\dot{p}(x) - \dot{p}(y) - (\dot{r}_m(x, y) p_{,m}(y) \\
&\quad + r_m(x, y) \dot{p}_{,m})\} d\Gamma(x) \\
&+ \alpha \int_{\Gamma} \dot{Q}^*(x, y) (p(x) - p(y) - r_m(x, y) p_{,m}(y)) d\Gamma(x) \\
&+ \alpha \int_{\Gamma} \dot{Q}^*(x, y) (p(x) - p(y) - r_m(x, y) p_{,m}(y)) d\Gamma(x) \\
&= -i\omega\rho\alpha \left[ \int_{\Gamma} (\tilde{p}^*(x, y) - \tilde{u}^*(x, y)) \dot{v}(x) d\Gamma(x) \right. \\
&\quad + \int_{\Gamma} (\dot{\tilde{p}}^*(x, y) - \dot{\tilde{u}}^*(x, y)) v(x) d\Gamma(x) \\
&\quad + \int_{\Gamma} (\tilde{p}^*(x, y) - \tilde{u}^*(x, y)) v(x) d\Gamma(x) \\
&\quad + \int_{\Gamma} \tilde{u}^*(x, y) \{v(x) - (\dot{n}_m(x) p_{,m}(y) \\
&\quad + n_m(x) \dot{p}_{,m}(y))\} d\Gamma(x) \\
&\quad + \int_{\Gamma} \dot{\tilde{u}}^*(x, y) (v(x) - n_m(x) p_{,m}(y)) d\Gamma(x) \\
&\quad + \int_{\Gamma} \tilde{u}^*(x, y) (v(x) - n_m(x) p_{,m}(y)) d\Gamma(x) \Big] \\
&- i(\dot{\omega}\rho + \omega\dot{\rho}) \alpha \left[ \int_{\Gamma} (\tilde{p}^*(x, y) - \tilde{u}^*(x, y)) v(x) d\Gamma(x) \right. \\
&\quad + \int_{\Gamma} \tilde{u}^*(x, y) (v(x) - n_m(x) p_{,m}(y)) d\Gamma(x) \Big] \\
&+ \alpha (I\dot{\tilde{p}}^*(x^s, y) + I\dot{\tilde{p}}^*(x^s, y)) \tag{13}
\end{aligned}$$

式(12), (13)は一見すると複雑であるが, 設計変数の選択によっては省略可能な項が多く含まれている. 例えば設計変数として物体の形状を規定するようなパラメータを選択した場合, 形状に依存しない量  $\omega$ ,  $\rho$  による微分は全て考える必要がない. 設計変数としてそのようなパラメータを選択した場

合の基本解の設計変数による微分はそれぞれ以下のようになる.

$$\dot{p}^*(x, y) = -\frac{1}{4\pi r^2} (1 + ikr) \exp(-ikr) \frac{\partial r}{\partial x_i} (\dot{x}_i - \dot{y}_i) \tag{14}$$

$$\begin{aligned}
\dot{q}^*(x, y) &= \frac{1}{4\pi r^3} \left[ \{3(1 + ikr) - k^2 r^2\} \frac{\partial r}{\partial n}(x) \frac{\partial r}{\partial x_j} \right. \\
&\quad \left. - (1 + ikr) n_j(x) \right] \exp(-ikr) (\dot{x}_j - \dot{y}_j) \\
&\quad - \frac{1}{4\pi r^2} (1 + ikr) \exp(-ikr) \frac{\partial r}{\partial x_i} \dot{n}_i(x) \tag{15}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{Q}^*(x, y) &= \frac{1}{4\pi r^3} \left\{ 3 \frac{\partial r}{\partial n}(x) \frac{\partial r}{\partial x_j} - n_j(x) \right\} (\dot{x}_j - \dot{y}_j) \\
&\quad - \frac{1}{4\pi r^2} \frac{\partial r}{\partial x_i} \dot{n}_i(x) \tag{16}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{p}^*(x, y) &= \frac{1}{4\pi r^3} \left[ \{3(1 + ikr) - k^2 r^2\} \frac{\partial r}{\partial n}(y) \frac{\partial r}{\partial x_j} \right. \\
&\quad \left. + (1 + ikr) n_j(y) \right] \exp(-ikr) (\dot{x}_j - \dot{y}_j) \\
&\quad - \frac{1}{4\pi r^2} (1 + ikr) \exp(-ikr) \frac{\partial r}{\partial y_i} \dot{n}_i(y) \tag{17}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{q}^*(x, y) &= -\frac{1}{4\pi r^4} \left[ \{15(1 + ikr) - 6k^2 r^2 - ik^3 r^3\} \right. \\
&\quad \times \frac{\partial r}{\partial n}(x) \frac{\partial r}{\partial n}(y) \frac{\partial r}{\partial x_k} - \{3(1 + ikr) - k^2 r^2\} \\
&\quad \times \left( n_k(x) \frac{\partial r}{\partial n}(y) - n_k(y) \frac{\partial r}{\partial n}(x) \right. \\
&\quad \left. \left. - n_j(x) n_j(y) \frac{\partial r}{\partial x_k} \right) \right] \exp(-ikr) (\dot{x}_k - \dot{y}_k) \\
&+ \frac{1}{4\pi r^3} \left[ \{3(1 + ikr) - k^2 r^2\} \left( \frac{\partial r}{\partial n}(y) \frac{\partial r}{\partial x_i} \dot{n}_i(x) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{\partial r}{\partial n}(x) \frac{\partial r}{\partial y_j} \dot{n}_j(y) \right) + (1 + ikr) (\dot{n}_j(x) n_j(y) \right. \\
&\quad \left. + n_j(x) \dot{n}_j(y)) \right] \exp(-ikr) \tag{18}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{u}^*(x, y) &= \frac{1}{4\pi r^3} \left( 3 \frac{\partial r}{\partial n}(y) \frac{\partial r}{\partial x_j} + n_j(x) \right) \\
&\quad - \frac{1}{4\pi r^2} \frac{\partial r}{\partial y_i} \dot{n}_i(y) \tag{19}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{Q}^*(x, y) &= -\frac{1}{4\pi r^4} \left\{ \left( 15 \frac{\partial r}{\partial n}(x) \frac{\partial r}{\partial n}(y) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 3n_j(x) n_j(y) \right) \frac{\partial r}{\partial x_k} - \left( 3n_k(x) \frac{\partial r}{\partial n}(y) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - n_k(y) \frac{\partial r}{\partial n}(x) \right) \right\} (\dot{x}_k - \dot{y}_k) \\
&+ \frac{1}{4\pi r^3} \left\{ 3 \left( \frac{\partial r}{\partial n}(y) \frac{\partial r}{\partial x_i} \dot{n}_i(x) + \frac{\partial r}{\partial n}(x) \frac{\partial r}{\partial y_j} \dot{n}_j(y) \right) \right. \\
&\quad \left. + \dot{n}_j(x) n_j(y) + n_j(x) \dot{n}_j(y) \right\} \tag{20}
\end{aligned}$$

また, 微小面積要素  $d\Gamma$  および外向き単位法線ベクトル  $n_i$  の設計変数による微分はそれぞれ次式のようになる.

$$d\Gamma = \{(\dot{x}_i)_{,i} - (\dot{x}_i)_{,j} n_j n_i\} \tag{21}$$

$$\dot{n}_i = \{(\dot{x}_j)_{,k} n_j n_k n_i - (\dot{x}_j)_{,i} n_j\} \tag{22}$$

式(21), (22)には座標感度の勾配が含まれている。本研究ではこれらの微分量を次のように評価する。

いま, 式(12), (13)を離散化したときの要素内の局所座標を $(\xi, \eta)$ とすると $d\Gamma$ は次のように表される。

$$d\Gamma = \left| e_{ijk} \frac{\partial x_j}{\partial \xi} \frac{\partial x_k}{\partial \eta} \right| d\xi d\eta = J(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (23)$$

ただし,  $e_{ijk}$ は交代記号であり,  $J(\xi, \eta)$ は以下のように置いた。

$$\begin{aligned} J(\xi, \eta) &= \left| e_{ijk} \frac{\partial x_j}{\partial \xi} \frac{\partial x_k}{\partial \eta} \right| \\ &= \left( \frac{\partial x_i}{\partial \xi} \frac{\partial x_i}{\partial \xi} \frac{\partial x_j}{\partial \eta} \frac{\partial x_j}{\partial \eta} - \frac{\partial x_i}{\partial \xi} \frac{\partial x_i}{\partial \eta} \frac{\partial x_j}{\partial \xi} \frac{\partial x_j}{\partial \eta} \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (24)$$

従って $d\Gamma$ は以下のようになる。

$$d\Gamma = J(\xi, \eta) d\xi d\eta = \frac{J(\xi, \eta)}{J(\xi, \eta)} d\Gamma \quad (25)$$

ただし,  $J$ は以下のようである。

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{J} \left( \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \xi} \frac{\partial x_i}{\partial \xi} \frac{\partial x_j}{\partial \eta} \frac{\partial x_j}{\partial \eta} + \frac{\partial x_i}{\partial \xi} \frac{\partial x_i}{\partial \xi} \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \eta} \frac{\partial x_j}{\partial \eta} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \xi} \frac{\partial x_i}{\partial \eta} \frac{\partial x_j}{\partial \xi} \frac{\partial x_j}{\partial \eta} - \frac{\partial x_i}{\partial \xi} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \eta} \frac{\partial x_j}{\partial \xi} \frac{\partial x_j}{\partial \eta} \right) \end{aligned} \quad (26)$$

よって式(12), (13)を離散化した式においては式(21)の代わりに式(25)を用いれば, 座標感度の情報のみで $d\Gamma$ を計算することが可能となる。同様に $\dot{n}_i$ に関しても以下のように表すことができるため, 座標感度の情報のみで評価可能となる。

$$\dot{n}_i = \frac{1}{J} e_{ijk} \left( \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \xi} \frac{\partial x_k}{\partial \eta} + \frac{\partial x_j}{\partial \xi} \frac{\partial \dot{x}_k}{\partial \eta} \right) + \left( \frac{\dot{1}}{J} \right) e_{ijk} \frac{\partial x_j}{\partial \xi} \frac{\partial x_k}{\partial \eta} \quad (27)$$

以上導出された2つの感度係数に関する境界積分方程式(12), (13)をソース点 $y$ の位置により使い分けて感度係数を求めるものとする。

### 2.3. 感度係数の導出手順

境界積分方程式を設計変数で直接微分した方程式より境界値の感度係数を導出する手順について考察する。

式(3), (4)をソース点の位置で使い分けることを考慮し, 境界要素で離散化することで以下の代数方程式に帰着する。

$$[H] \{p\} = [G] \{v\} + \{f\} \quad (28)$$

ただし,  $[H]$ ,  $[G]$ はそれぞれ音圧 $p$ と粒子速度 $v$ に関する係数行列であり, これらの行列の成分は2つの境界積分方程式(3)および(4)を評価することで得られるものであり,  $\{f\}$ は集中音源に関する項となる。得られた代数方程式にあらかじめ規定されている境界条件を適用し, 境界既知量と未知量に分けることで次式を得る。

$$[A] \{X\} = [B] \{Y\} + \{f\} \quad (29)$$

ただし,  $[A]$ は未知の境界節点値に関する行列,  $\{X\}$ は未知境界量を集めたベクトル,  $[B]$ は既知境界量に関する行列,

$\{Y\}$ は既知境界量に関するベクトルである。式(29)を解くことで境界上の全ての音圧, 粒子速度が求められる。

式(12), (13)の2つの境界積分方程式をソース点の位置により使い分けることに注意し, 同様に境界要素で離散化することで以下の感度係数に関する代数方程式を得る。

$$[H'] \{\dot{p}\} = [G'] \{\dot{v}\} + [h'] \{p\} + [g'] \{v\} + \{f'\} \quad (30)$$

ここで,  $[H']$ および $[G']$ はそれぞれ音圧の感度係数 $\{\dot{p}\}$ , 粒子速度の感度係数 $\{\dot{v}\}$ に関する係数行列であり,  $[h']$ ,  $[g']$ はそれぞれ境界上の音圧 $p$ と粒子速度 $v$ に関する係数行列である。音圧および粒子速度の感度係数に関する係数は, 式(12), (13)の使い分けを式(28)を導出する際の使い分けと同じにすることで $[H'] = [H]$ ,  $[G'] = [G]$ となることがわかる。音圧 $p$ または粒子速度 $v$ が境界条件で与えられている境界節点では $\dot{p}$ ,  $\dot{v}$ もまた既知となることに注意すれば最終的に以下の方程式に帰着する。

$$[A] \{\dot{X}\} = [B] \{\dot{Y}\} + [h'] \{p\} + [g'] \{v\} + \{f'\} \quad (31)$$

ただし,  $\{\dot{X}\}$ は未知の境界値の感度に関するベクトル,  $\{\dot{Y}\}$ は既知の境界値の感度のベクトルである。

境界値の感度係数を計算するためには, 式(29)と(31)を解かなければならないため計算時間の増加が懸念される。しかしながら前述のように, 未知の境界値にかかる行列と未知の境界値の感度係数に関する行列が等しいことより, 式(29)を解く際に行列 $[A]$ をLU分解しておけば式(31)を解く際の計算時間を短縮することができる。

### 3. 数値解析

以下に無限領域内に表面が一様な粒子速度で振動する楕円体が存在する問題についてそれぞれ通常の境界積分方程式とその方程式を設計変数に関して微分した式(式(3), (12)のそれぞれの式で $\alpha = 0$ とした式)を用いて解析を行った場合(以下OBIE)と, ソース点の位置により2つの境界積分方程式を使い分ける手法(以下Hybrid method)を適用して得られた結果についてそれぞれ示す。Hybrid methodを適用する際の境界積分方程式は図1に示すように, 要素の辺の中点にソース点がある場合は式(3), (12)を, 一方ソース点が要素の頂点にある場合は式(4), (13)を適用するものとした。結合係数に関してはCunefare - Koopmann<sup>(13)</sup>らに従って $i/k$ とした。

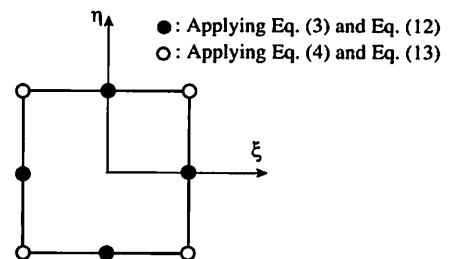


Fig. 1 Quadratic boundary element

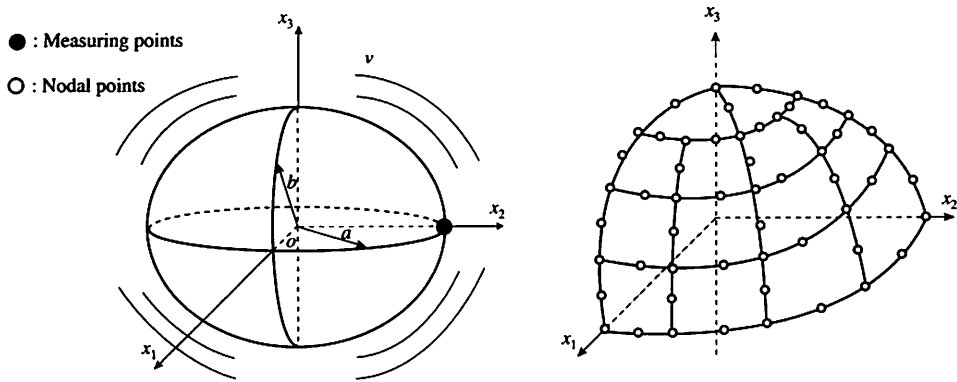


Fig. 3 Analysis model and its boundary element discretization

なお、特異積分はサブ要素分割<sup>(14)</sup>を行い評価している。サブ要素への分割は図2に示すように、ソース点が四角形2次要素の頂点に配置された場合はType Aに示すように2つのサブ要素に分割し、その他の点に配置されている場合はType Bに示すように3つのサブ要素に分割した。

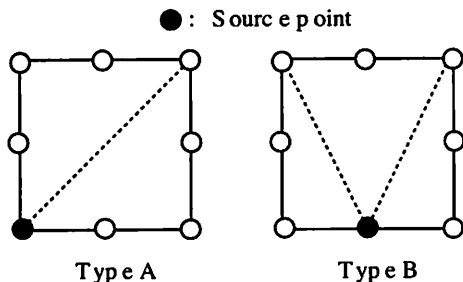


Fig. 2 Type of dividing for sub - element

解析対象は図3の左図に示すように、無限空間内に境界表面が一樣な粒子速度  $v$  で振動する楕円体を考える。媒質密度  $\rho = 1.2$  [kg/m<sup>3</sup>]、伝播速度  $c = 340$  [m/s]、楕円体の長軸  $2a = 0.4$  [m]、短軸  $2b = 0.2$  [m] とした。楕円体の表面は  $v = 1.0$  [m/s] の境界条件を与えた。要素分割は図3の右図に示すように1/8の面に対して四角形境界2次要素を用いて要素数14で離散化を行った。総節点数は434、要素数は132である。評価点は図3に示すように境界表面上に1点配置し、設計変数は楕円体の長軸  $2a$  とした。周波数は1 [Hz] ~ 1 [kHz] を1 [Hz] 刻みで解析を行った。

図4にOBIEを適用して得られた評価点での音圧の感度係数の絶対値およびHybrid methodを適用して得られた評価点での音圧の感度係数の絶対値を解析した全周波数域において比較した図を示す。得られた数値解析結果よりOBIEを適用した場合、波数  $ka = 4.4$  および  $ka = 7$  付近で見かけの固有振動数問題の影響より境界上の音圧が精度よく求められていないものと思われる。一方、Hybrid methodを適用した場合は見かけの固有振動数問題を回避できているため音圧の感度係数も精度よく求められていると思われる。

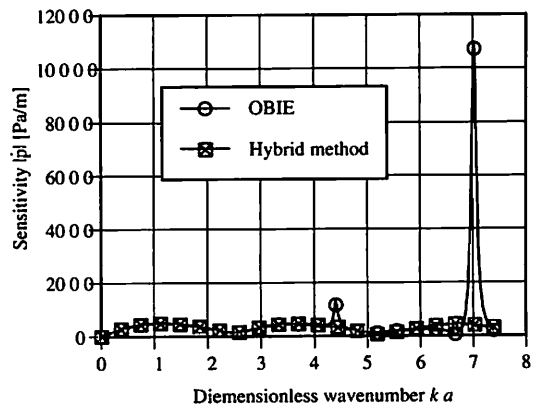


Fig. 4 Comparison of numerical results obtained by applying OBIE and Hybrid method

図5に  $ka = 4.2 \sim 4.7$  におけるそれぞれの手法を適用した場合における評価点での音圧レベル (図中 SPL : Sound Pressure Level) の推移を比較して示し、図6にはその波数域におけるそれぞれの手法を適用して得られる評価点での音圧の感度係数の絶対値を比較して示す。数値解析結果よりOBIEを適用した場合は見かけの固有振動数問題の影響で境界上の音圧の精度が低下することで音圧の感度係数の精度も低下していることがわかるが、Hybrid methodを適用した場合、見かけの固有振動数問題を回避した数値解が得られていることがわかる。

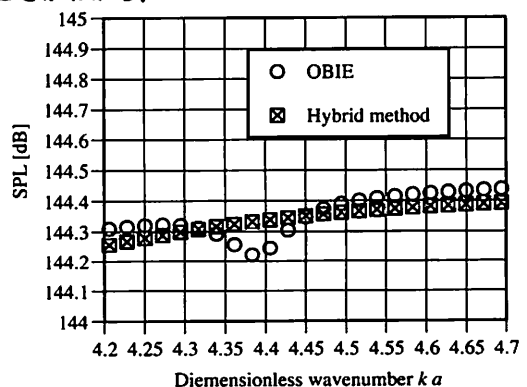


Fig. 5 Comparison of SPL obtained by applying OBIE and Hybrid method ( $ka = 4.2 \sim 4.7$ )

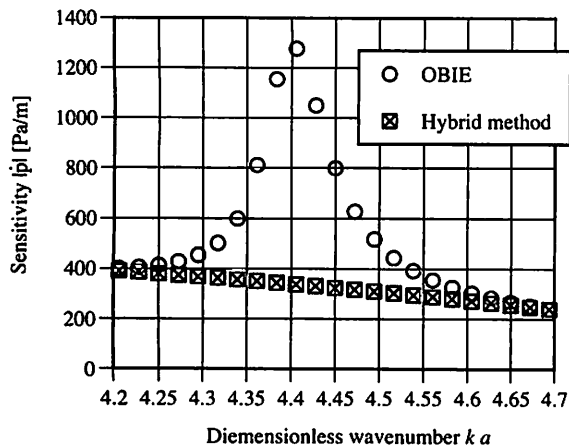


Fig. 6 Comparison of sensitivity obtained by applying OBIE and Hybrid method ( $ka = 4.2 \sim 4.7$ )

同様に図 7 に  $ka = 6.5 \sim 7.4$  におけるそれぞれの手法を適用して得られた評価点での音圧レベルを示し、図 8 にその波数域での音圧の感度係数の絶対値を比較して示す。数値解析結果より Hybrid method は見かけの固有振動数問題の影響を回避した解が得られることがわかる。

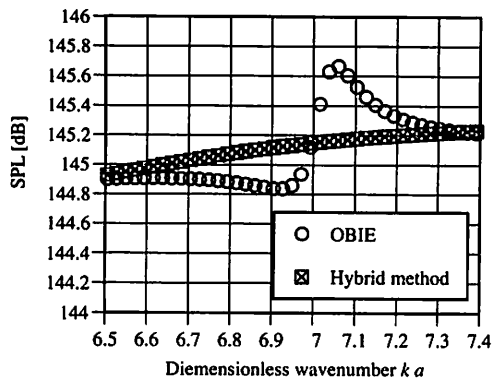


Fig. 7 Comparison of SPL obtained by applying OBIE and Hybrid method ( $ka = 6.5 \sim 7.4$ )

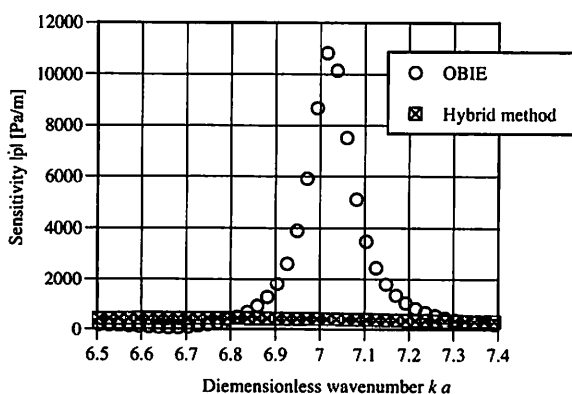


Fig. 8 Comparison of sensitivity obtained by applying OBIE and Hybrid method ( $ka = 6.5 \sim 7.4$ )

#### 4. 結論

Helmholtz 方程式に支配される 3 次元定常音響問題に対して、新しい設計感度解析法の提案した。この方法では、見かけの固有振動数問題を回避した境界積分方程式を設計変数に関して直接微分する。無限領域内に表面が一様に振動する楕円体の問題を、開発した解析プログラムを用いて計算することで、提案手法の有効性を確認した。

今後、音場の形状最適化問題や音響逆問題等に対して本設計感度解析法を適用する予定である。

#### 参考文献

- (1) M. R. Barone, and R. J. Yang: Boundary Integral Equations for Recovery of Design Sensitivities in Shape Optimization, *AIAA J.*, **26** (1988), pp.589-594.
- (2) 田中正隆, 松本敏郎, 中村正行: 境界要素法, (1991), 培風館.
- (3) 小林昭一 (編): 波動解析と境界要素法, (2000), 京都大学学術出版会.
- (4) 松本敏郎, 田中正隆, 山田泰永: 境界要素法による音響問題の設計感度解析法, 日本機械学会論文集, **59-558**, C(1993) pp. 122-127.
- (5) 田中正隆, 松本敏郎, 荒井雄理: 音場の見かけの固有振動数問題を回避するための境界要素解析法 (第 2 報, 改訂版), 日本機械学会論文集, **72-719**, C(2006) pp. 84-89.
- (6) A. J. Burton, and G. F. Miller: The application of integral equation methods to the numerical solution of some exterior boundary-value problems, *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A*, **323** (1971), pp.201-210.
- (7) 一宮亮一: 機械系の音響工学, コロナ社, (1992).
- (8) 日本音響学会 (編): 騒音・振動, コロナ社, (1982).
- (9) 早坂寿雄: 技術者のための音響工学, 丸善株式会社, (1986).
- (10) 日本音響学会 (編): 基礎音響工学, コロナ社, (1990).
- (11) 荒井政大, 足立忠晴, 松本浩之: 一様勾配条件に基づく境界要素解析の高精度化 (ポテンシャル問題に対する定式化への適用), 日本機械学会論文集, **61-581**, A(1995) pp. 161-168.
- (12) 松本敏郎, 田中正隆, 岡山瞬: 二次元ポテンシャル問題における超特異積分方程式と正則化された境界積分方程式による境界のポテンシャル勾配の評価法, 日本機械学会論文集, **64-619**, A(1998) pp. 743-750.
- (13) K. A. Cunefare, and Gary Koopman: A Boundary element method for acoustic radiation valid for all wavenumbers, *J. Acoust. Soc. Am.*, **85** (1989), pp.39-48.
- (14) 結城良治, 木須博行: 境界要素法による弾性解析, (1987), 培風館.