

有限体積格子ボルツマン法による 2次元流れ解析における2次多項式スキームの精度に関する研究

ACCURACY OF THE QUADRATIC POLYNOMIAL SCHEME IN TWO-DIMENSIONAL FLOW CALCULATION BY THE FINITE VOLUME LATTICE BOLTZMANN METHOD

望月 一正¹⁾, 蔦原 道久²⁾, 近藤 崇匡³⁾

Kazumasa MOCHIZUKI, Michihisa TSUTAHARA, Takamasa KONDO

- 1) 株式会社アメリオ (〒431-3125 浜松市半田山 2-24-3, E-mail: kmochi@amelio.co.jp)
 2) 神戸大学大学院自然科学研究科 (〒657-8501 神戸市灘区六甲台町 1-1, E-mail: tutahara@mech.kobe-u.ac.jp)
 3) 神戸大学大学院自然科学研究科 (〒657-8501 神戸市灘区六甲台町 1-1, E-mail: t.kondo@mh-1.scitec.kobe-u.ac.jp)

In this paper, a computational formulation of the finite volume lattice Boltzmann method (FVLBM) is described for two-dimensional flow simulations with unstructured grid. Cell-centered FVM is applied to the lattice BGK equation, and a new third-order upwind scheme is proposed for evaluating fluxes using quadratic polynomials interpolating two distribution functions and a first differential coefficient of distribution function. The scheme is applied to numerical simulations of the two-dimensional incompressible and compressible flow, and its numerical accuracy is examined in two-dimensional flow simulations.

Key Words: Computational Fluid Dynamics, Lattice Boltzmann Method,
Finite Volume Method, Accuracy, Quadratic Polynomial

1. はじめに

格子ボルツマン法(LBM: Lattice Boltzmann Method)⁽¹⁾は、数値流体解析の新しい手法として近年注目を集め、様々な研究が行われている。LBMにはアルゴリズムが単純である等の長所があるが、規則的に配置された格子を用いる必要があるため、複雑な境界形状をもつ流れ場の解析等に用いるには不向きである。そのような場合、LBMに有限体積法を適用することで非構造格子での計算を可能にした有限体積格子ボルツマン法(FVLBM: Finite Volume Lattice Boltzmann Method)⁽²⁾⁽³⁾が有効である。しかしFVLBMによる計算はまだ十分に行われておらず、計算精度についても検証が必要と思われる。そこで本研究では、FVLBMによる計算をより高精度に行うために、LBMにおける粒子の分布関数とその1階微分係数を補間する2次多項式を用いたスキームを提案し、2次元の非圧縮性及び圧縮性流体の計算を通してその精度を検証する。特に圧縮性の計算例として、LBMの有効性が示されている音波の直接計算を行い、スキームの適用性を確認する。

使用する。基礎方程式は式(1)で表される。

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \mathbf{c}_i \cdot \nabla f_i - a \mathbf{c}_i \cdot \nabla \frac{f_i - f_i^{(0)}}{\phi} = -\frac{1}{\phi} (f_i - f_i^{(0)}) \quad (1)$$

ここで*i*は離散化された粒子速度の方向を表す。 \mathbf{c}_i と f_i はそれぞれ*i*方向の速度とその分布関数である。 ϕ は単一時間緩和係数、 $f_i^{(0)}$ は局所平衡分布関数であり、右辺は衝突により粒子分布が平衡状態に向かうことを表している。修正項である左辺第3項はN-S方程式導出の際に負の粘性項として現れ、この項を加えることにより高レイノルズ数流れにおいても計算を安定的に行うことができる。係数*a*には任意の正の値を与えることができる。この修正項と式(1)の左辺第2項をまとめて式(2)、(3)のように書き、以下 f_i^* を修正分布関数と呼ぶことにする。

$$\frac{\partial f_i^*}{\partial t} + \mathbf{c}_i \cdot \nabla f_i^* = -\frac{1}{\phi} (f_i^* - f_i^{(0)}) \quad (2)$$

2. 有限体積格子ボルツマン法

2-1. 基礎方程式

本研究では格子BGKモデルに修正項を付加したモデル⁽⁴⁾を

$$f_i^* = f_i - \frac{a}{\phi} (f_i - f_i^{(0)}) \quad (3)$$

2-2. 離散的粒子速度

本研究では、非圧縮性（非熱流体）及び圧縮性（熱流体）の計算を行う。それぞれに対して離散的粒子速度のタイプとして Fig.1 に示す 2D9V モデルと 2D21V モデルを用いる。各モデルにおける粒子速度の定義を Table 1, 2 に示す。

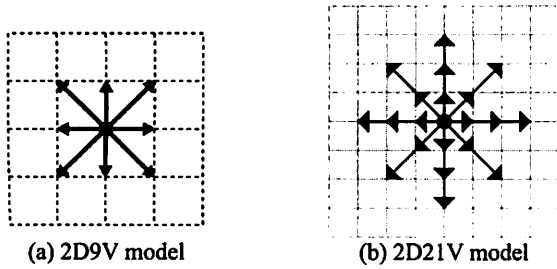


Fig.1 Distribution of particles

Table 1 Velocity set in 2D9V model

i	Velocity vector	$ c $
1	(0,0)	0
2-5	(1, 0), (0, 1), (-1, 0), (0, -1)	1
6-9	(1, 1), (-1, 1), (-1, -1), (1, -1)	$\sqrt{2}$

Table 2 Velocity set in 2D21V model

i	Velocity vector	$ c $
1	(0,0)	0
2-5	(1, 0), (0, 1), (-1, 0), (0, -1)	1
6-9	(2, 0), (0, 2), (-2, 0), (0, -2)	2
10-13	(3, 0), (0, 3), (-3, 0), (0, -3)	3
14-17	(1, 1), (-1, 1), (-1, -1), (1, -1)	$\sqrt{2}$
18-21	(2, 2), (-2, 2), (-2, -2), (2, -2)	$2\sqrt{2}$

2-3. マクロ量

流体のマクロ量は式(4a)～式(4c)のように表される。 e は単位質量あたりの内部エネルギーを表す。本研究では熱流体モデルに内部自由度を有するモデル⁽⁵⁾を適用するため、式(4c)にはそのための分布関数 G_i が含まれる。

密度：

$$\rho = \sum_i f_i = \sum_i f_i^{(0)} \quad (4a)$$

運動量：

$$\rho \mathbf{u} = \sum_i f_i \mathbf{c}_i = \sum_i f_i^{(0)} \mathbf{c}_i \quad (4b)$$

エネルギー（熱流体モデルの場合のみ）：

$$\frac{1}{2} \rho u^2 + \rho e = \sum_i \left(\frac{1}{2} f_i c_i^2 + G_i \right) = \sum_i \left(\frac{1}{2} f_i^{(0)} c_i^2 + G_i^{(0)} \right) \quad (4c)$$

2-4. 局所平衡分布

局所平衡分布関数は巨視的な流れの変数である密度、流速、内部エネルギーにより一意に決まり、2D9V、2D21Vそれぞれのモデルに対して式(5a)、(5b)の形で与えられる⁽⁴⁾⁽⁶⁾。

$$f_i^{(0)} = t_p \rho \left[1 + \frac{c_{i\alpha} u_\alpha}{c_s^2} + \frac{u_\alpha u_\beta}{2c_s^2} \left(\frac{c_{i\alpha} c_{i\beta}}{c_s^2} - \delta_{\alpha\beta} \right) \right] \quad (5a)$$

$$f_i^{(0)} = F_i \rho \left[1 - 2B(\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u}) + 2B^2(\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u})^2 + B(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) - 4/3B^3(\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u})^3 - 2B^2(\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u})(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) \right] \quad (5b)$$

2-5. 有限体積法による離散化

2次元の有限体積法では、各検査面積（セル）への流束の出入りを評価することによって空間の離散化を行う。ここでは、プログラムへの実装が比較的容易なセル中心型有限体積法を用いる。セル中心型有限体積法では、分布関数や流速、密度等の変数は全てセルの中心に与える。本研究では式(2)を次のように離散化して計算に用いる。

$$A \frac{\partial f_i}{\partial t} + \sum_s f_{is}^* l_s \mathbf{c}_i \cdot \mathbf{n}_s = -\frac{A}{\phi} (f_i - f_i^{(0)}) \quad (6)$$

ここで、 A はセルの面積、 l_s 、 \mathbf{n}_s はそれぞれセルを構成する各辺の長さとお外向き法線ベクトルであり、 s はセル内の辺のインデックスを表す。 f_{is}^* は各辺上の修正分布関数の代表値であるが、次節で説明するスキームにより、セル中心に与えられた修正分布関数 f_i^* から求める。時間発展は2段階Runge-Kutta法により次式で計算する。

$$\left. \begin{aligned} f_i^{n+1/2} &= f_i^n - \frac{\Delta t}{2A} \left(\sum_s f_{is}^{*n} l_s \mathbf{c}_i \cdot \mathbf{n}_s + \frac{A}{\phi} (f_i^n - f_i^{(0)n}) \right) \\ f_i^{n+1} &= f_i^n - \frac{\Delta t}{A} \left(\sum_s f_{is}^{*n+1/2} l_s \mathbf{c}_i \cdot \mathbf{n}_s + \frac{A}{\phi} (f_i^{n+1/2} - f_i^{(0)n+1/2}) \right) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

3. セル辺上の分布関数の計算方法

3-1. 2次多項式スキーム

有限体積法における空間の離散化精度は流束評価の方法に大きく依存する。本研究では、補間関数の局所性を維持しつつ空間の離散化精度を高める方法として、隣接する2つのセルに与えられた修正分布関数と、そのうち離散化粒子の運動方向に対して風上側に存在するセルにおける1階微分係数を補間する2次多項式を決定し、これを2つのセルの共有辺における流束評価に用いるスキームを提案する。いまFig.2において、2つのセルA、Bは辺Eを共有している。MはセルA、Bの中心を結ぶ線分と辺Eとの交点である。以下に説明する方法により、Mの位置での修正分布関数として辺上の修正分布関数 f_{si}^* を得る。なお、ここでは離散化粒子速度 c_i の方向に対してセルAが風上側にあるものとして話を進める。

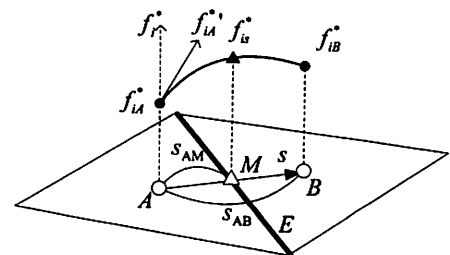


Fig.2 Quadratic polynomial scheme

まず、セルAの中心を基点として、Bの中心に向かう線分に沿った距離をsとし、その線上の修正分布関数 f_i^* が式(8)に示すsの2次多項式で表されるものとする。このとき $f_i^*(s)$ の1階導関数は式(9)のようになる。

$$f_i^*(s) = \alpha_0 + \alpha_1 s + \alpha_2 s^2 \quad (8)$$

$$\frac{\partial f_i^*(s)}{\partial s} = \alpha_1 + 2\alpha_2 s \quad (9)$$

ここでセルA、Bの中心における修正分布関数をそれぞれ f_{iA}^* 、 f_{iB}^* 、風上側のセルAにおける修正分布関数の1階微分係数を $f_{iA}^{*'}$ とすると、これらと2次多項式(8)の係数 α_0 、 α_1 、 α_2 との間には式(10)に示す関係がある。 s_{AB} はセルA、Bの中心点間の距離である。

$$\left. \begin{aligned} f_{iA}^* &= f_i^*(0) = \alpha_0 \\ f_{iB}^* &= f_i^*(s_{AB}) = \alpha_0 + \alpha_1 s_{AB} + \alpha_2 s_{AB}^2 \\ f_{iA}^{*'} &= \frac{\partial f_i^*(0)}{\partial s} = \alpha_1 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

式(10)を連立方程式として解くことで、式(11)のように α_0 、 α_1 、 α_2 が決定され、これらを用いて共有辺E上の修正分布関数を式(12)で評価し、これを式(6)の f_{iE}^* として用いる。ここで s_{AM} はセルAの中心からMまでの距離である。

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 &= f_{iA}^* \\ \alpha_1 &= f_{iA}^{*'} \\ \alpha_2 &= (f_{iB}^* - f_{iA}^* - f_{iA}^{*'} s_{AB}) / s_{AB}^2 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$$f_i^*(s_{AM}) = f_{iA}^* + f_{iA}^{*'} s_{AM} + \left(\frac{f_{iB}^* - f_{iA}^* - f_{iA}^{*'} s_{AB}}{s_{AB}^2} \right) s_{AM}^2 \quad (12)$$

なお、セルAにおける修正分布関数のsに対する微分係数は次式から求める。

$$f_{iA}^{*'} \equiv \frac{\partial f_{iA}^*}{\partial s} = \frac{\partial f_{iA}^*}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial f_{iA}^*}{\partial y} \frac{dy}{ds} \quad (13)$$

ここで $\left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds} \right)$ はセルAの中心からBの中心に向かう単位

ベクトルである。Gaussの積分定理から式(14)の関係が成り立つので、修正分布関数の勾配は式(15)により得られる。 $f_{iB_s}^*$ はセルAの各隣接セルにおける修正分布関数を表す。

$$\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial f_i^*}{\partial x}, \frac{\partial f_i^*}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\Gamma} f_i^* \mathbf{n} dl \quad (14)$$

$$\nabla f_i^* \equiv \left(\frac{\partial f_i^*}{\partial x}, \frac{\partial f_i^*}{\partial y} \right) = \frac{1}{A} \sum_s \left(\frac{f_{iA}^* + f_{iB_s}^*}{2} \right) \mathbf{n}_s l_s \quad (15)$$

4. 流束計算の精度

4-1. セル辺上の分布関数の計算精度

2次多項式スキームによる辺上の修正分布関数の計算精度について確認する。簡単のために、隣接するセルの形状やサイズに大きな差が無いような状況を仮定して $s = s_{AM} = s_{AB}/2$ とすると、式(12)は次のように簡略化される。

$$f_i^*(s) = \frac{3}{4} f_{iA}^* + \frac{1}{4} f_{iB}^* + \frac{1}{2} f_{iA}^{*'} s \quad (16)$$

また、 f_{iB}^* と $f_{iB}^{*'}$ をそれぞれ f_{iA}^* 周りにTaylor展開すると、次のようになる。

$$f_{iB}^* = f_{iA}^* + f_{iA}^{*'} (2s) + \frac{1}{2!} f_{iA}^{*''} (2s)^2 + \frac{1}{3!} f_{iA}^{*'''} (2s)^3 + \dots \quad (17)$$

$$f_{iB}^{*'} = f_{iA}^{*'} + f_{iA}^{*''} s + \frac{1}{2!} f_{iA}^{*'''} s^2 + \frac{1}{3!} f_{iA}^{*''''} s^3 + \dots \quad (18)$$

ここで式(17)を式(16)に代入し、式(18)との差をとると、式(19)が得られ、2次多項式スキームによる辺上の修正分布関数 f_{iE}^* が、セル中心間距離sに対して3次精度で計算されることがわかる。

$$f_i^*(s) - f_{iE}^* = \frac{1}{3!} f_{iA}^{*''''} s^3 + \frac{3}{4!} f_{iA}^{*'''''} s^4 + \dots = O(s^3) \quad (19)$$

4-2. 有限体積法による離散化における積分の計算精度

式(6)の左辺第2項は、本来セルの辺に沿った線積分の値として式(20)で与えられる。しかし式(6)ではこれを辺上の修正分布関数が一定であるものとして計算するため、この部分にも誤差が存在する。これについて確認する。

$$\oint f_i^*(l) \mathbf{c}_i \cdot \mathbf{n} dl \quad (20)$$

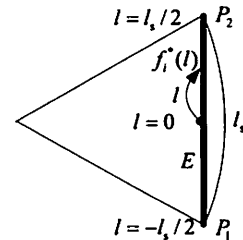


Fig.3 Distribution function along a cell side

いまFig.3に示すセルにおいて積分範囲を一辺E (P_1 から P_2)に限定してその誤差を調べる。まず辺E上の修正分布関数が、それに沿った線長lの関数 $f_i^*(l)$ で表されるものとする。ただしlはEの中点を原点とし P_2 の方向(セル中心から見て左回り)

を正とする。このときこの区間の真の積分値Sは式(21)、式(6)の離散化による積分計算値S'は式(22)のようになる。

$$S = \int_{l_1}^{l_2} f_i^*(l) \mathbf{c}_i \cdot \mathbf{n}_s dl = \int_{l_1/2}^{l_2/2} f_i^*(l) \mathbf{c}_i \cdot \mathbf{n}_s dl \quad (21)$$

$$S' = \mathbf{c}_i \cdot \mathbf{n}_s f_{is}^* l_s \quad (22)$$

ここで $f_i^*(l)$ を $l=0$ 周りにTaylor展開した式(23)を式(21)に代入して整理すれば式(24)が得られ、これと式(22)との差をとると積分値の誤差として式(25)が得られる。

$$f_i^*(l) = f_i^*(0) + f_i^{*'}(0)l + \frac{1}{2!} f_i^{*''}(0)l^2 + \dots \quad (23)$$

$$S = \mathbf{c}_i \cdot \mathbf{n}_s \left\{ f_i^*(0)l + \frac{f_i^{*''}(0)l^3}{3!} + \frac{f_i^{*''''}(0)l^5}{5!} + \dots \right\} \quad (24)$$

$$S' - S = \mathbf{c}_i \cdot \mathbf{n}_s \left\{ (f_{is}^* - f_i^*(0))l + O(l^3) \right\} \quad (25)$$

式(25)において、右辺の { } 内の第1項は、辺の midpoint における修正分布関数 f_{is}^* の誤差に l を掛けた形になっている。式(19)で示したように、2次多項式スキームでは f_{is}^* はセルの中心点間距離 s に対して3次精度で計算されるが、式(25)の誤差のうち $O(l^3)$ の部分が支配的であり、全体としてはセルのサイズ l に対して3次オーダーとなる。仮に f_{is}^* の計算精度を4次精度、5次精度、... と上げてても、 $O(l^3)$ の誤差が残るので全体のオーダーを上げることはならないことに注意が必要である。全体のオーダーを上げるためには、 f_{is}^* の精度と同時に、積分計算の精度を上げることで、即ち辺上の修正分布関数の分布をより高次で考慮した離散化が必要となる。

5. 計算例

2次多項式スキームの精度を検証するため、2次元の非圧縮性及び圧縮性流れの計算を行った。各計算において、2次精度風上スキーム⁽⁷⁾による計算も行い、結果を比較した。

5-1. Sine 波形流れの計算

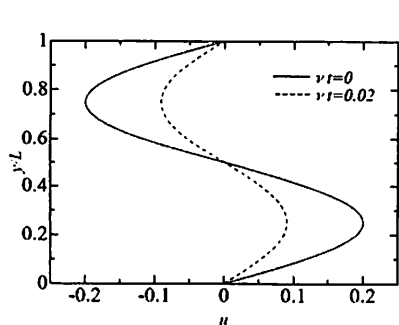


Fig.4 Sine-shaped flow

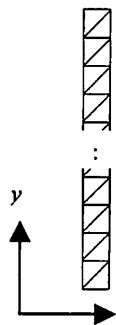


Fig.5 Computational grid

<計算内容>

非圧縮性流体の例として、一定距離 L だけ離れた2枚の平

板間にFig.4の実線及び式(26)で示されるsine波形の初期速度分布が、時間経過とともに減衰していく現象を計算した。この速度減衰の、位置 y 、時刻 t に対する理論解 $u_i(y,t)$ は式(27)で与えられる。

$$u_0(y,t) = u_0(y,0) = U \sin(ky) \quad (26)$$

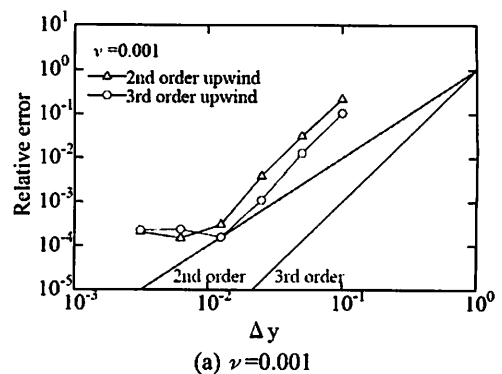
$$u_i(y,t) = U \exp(-k^2 \nu t) \sin(ky) \quad (27)$$

ここでは、速度分布が初期速度分布のほぼ半分となる νt 即ち時間刻みを Δt 、計算回数を nt とすると $\nu t = \nu \times \Delta t \times nt = 0.02$ となる時刻における速度分布の理論解を基準とし、誤差の評価には、式(28)に示す相対誤差 (Relative error) を用いる。相対誤差は各セルにおけるFVLBMによる解 u と理論解 u_i との差の絶対値の和から求める。

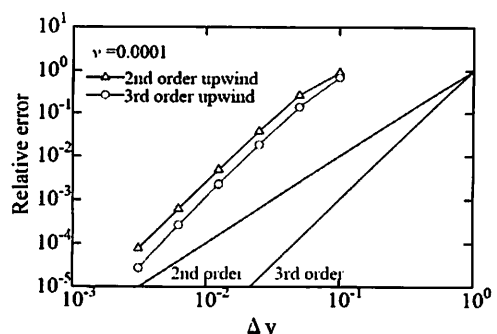
$$\text{Relative error} = \frac{\sum |u - u_i|}{\sum |u_i|} \quad (28)$$

<計算条件>

離散の粒子速度のタイプとして2D9Vモデルを使用し、計算格子にはFig.5に示す非構造格子を用いた。平板間距離は $L=1.0$ に固定し、セル数を20, 40, 80, 160, 320, 640とすることで、最小セル辺長 Δy を0.1, 0.05, 0.025, 0.0125, 0.00625, 0.003125と変化させ、それぞれに対して動粘性係数を $\nu = 0.001, 0.0001$ として計算を行った。なお x 方向には流体の変動はないものと仮定し、 y 方向は周期境界とした。また $U=0.2$, $k=2\pi/L$ 、時間刻み $\Delta t=0.0005$ 、式(1)の係数 $\alpha=0.0005$ とした。



(a) $\nu=0.001$



(b) $\nu=0.0001$

Fig.6 Δy vs. Relative Error

<計算結果>

Fig.6に最小セル辺長 Δy と相対誤差の関係を示す。(a)が $\nu=0.001$, (b)が $\nu=0.0001$ の場合であり, ともに2次多項式スキームによる結果を○, 2次精度風上スキームによる結果を△でプロットしてある。これにより, まず, セルを細かくしていくにつれて誤差が減少し, $\nu=0.001$ の場合に見られる Δy を小さくしても誤差が減少しなくなる範囲を除けば, $\nu=0.001, 0.0001$ とともに, 2次多項式スキームの方が2次精度風上スキームより誤差が小さく, 精度が良いことがわかる。また2次多項式スキームの方は, Δy の減少に対して3次オーダーの傾きで誤差が減少しており, このスキームが3次精度を有していることがわかる。一方2次精度風上スキームも, 3次オーダーに近い傾きをもつが, 比較的 Δy が大きいときには誤差の減少割合が小さくなり, $\nu=0.0001$ の場合, Δy が $0.1 \sim 0.05$ の範囲では2次オーダーに近いという結果を得た。

5-2. 微小圧力波の計算

<計算内容>

これまで, 計算に構造格子を用いる差分格子ボルツマン法 (FDLBM: Finite Difference Lattice Boltzmann Method) では微小圧力波の計算の詳細な検証が行なわれ, 10^{-10} オーダー程度の微小圧力波も精度良く計算できることが確認されている。本研究では, Fig.7に示す2次元空間にて, x 方向中央に設けた仕切りの左右に微小圧力差 (1.0×10^{-10}) を与え, 仕切りをはずした後にその左右それぞれに伝播する圧力波をFVLBMで計算した。

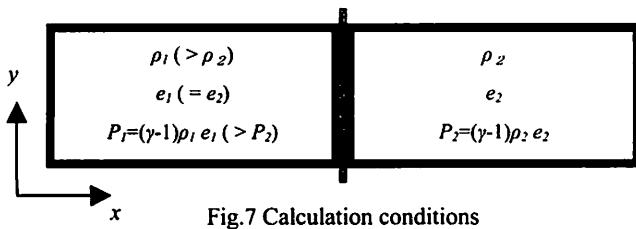


Fig.7 Calculation conditions

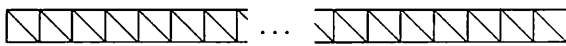


Fig.8 Computational grid

<計算条件>

離散的粒子速度のタイプとして2D21Vモデルを使用し, 比熱比 γ を可変とするために内部自由度を有するモデル⁽⁵⁾を適用した。計算格子にはFig.8に示す総セル数3000, セルの最小辺長 $\Delta s=0.002$ (計算領域を $-1.5 < x < 1.5$ とする) の非構造格子を用い, 動粘性係数 $\nu=0.0001$ として計算を行った。なお y 方向には流体の変動はないものと仮定し, 時間刻み $\Delta t=0.0002$, 式(1)の係数 $\alpha=0.0002$ とした。

<計算結果>

Fig.9に, 流体の比熱比 $\gamma=2.0$, 内部エネルギー $e=0.5$ とした時の, 計算回数 nt に対して $\Delta t \times nt = 1.0$ となる時刻における

圧力差 $\Delta P = (P_1 - P_2) / P_2$ を示す。これは左方向に伝播する圧力波の上部を拡大したものであり, 2次多項式スキームによる結果を○, 2次精度風上スキームによる結果を△でプロットしてある。これによると, 2次精度風上スキームの結果に現れる理論解からのオーバーシュートが, 2次多項式スキームでは見られない。一般的に2次精度のスキームには分散誤差があり, この解の振動は分散誤差によるものと推測されるが, 2次多項式スキームには分散誤差を抑える効果があることが考えられる。なお, 右方向に進む圧力波にも同様の傾向が見られた。Fig.10は比熱比 γ と内部エネルギー e を様々に変化させた時の圧力波の伝播速度, 即ち音速をその理論値と比較したものであるが, 2次多項式スキームによる解は理論値と非常によく一致しており, 音波の伝播速度の観点からも高精度に計算できることが確認できた。

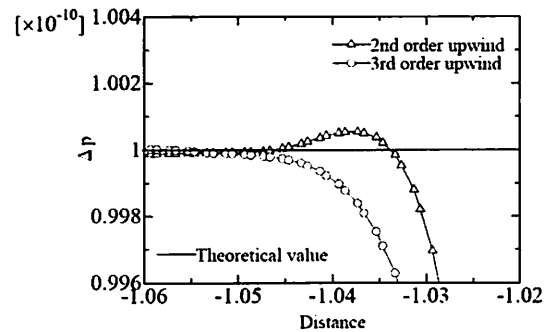


Fig.9 Top of expansion wave ($\gamma=2.0, e=0.5$)

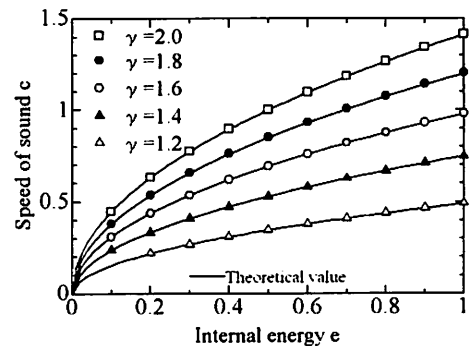


Fig.10 Speed of sound

5-3. 2次元円柱周りに発生する空力音の直接計算

<計算内容>

これまで, FDLBMによる計算⁽⁶⁾を通して, 空力音の直接計算におけるLBMの優位性が示されている。音圧変動は流体の圧力変動に比べて微小であるが, 前計算例では2次多項式スキームを用いたFVLBMによる 10^{-10} オーダーの微小圧力波の計算においてよい結果を得た。そこでここではFig.11に示す2次元空間にて, x 方向正の向きに流れる一様流 U_0 中に置かれた直径 d の円柱周りに発生する空力音 (エオルス音) の計算を行った。

<計算条件>

離散的粒子速度のタイプとして2D21Vモデルを使用し, 内部自由度を有するモデル⁽⁵⁾を適用した。計算格子にはFig.12

に示す総セル数 23688, セルの最小辺長 $\Delta s=0.0314$ の非構造格子を用いた. 計算領域は円柱の中心から半径 $r=150d$ の内側と十分広く取り, その外側 $r=250d$ の位置までを, 音波の減衰を目的としたバッファ領域とした. 格子は円柱近傍でより細かく分割し, 円柱の上下で対称になるように配置した. また流体の比熱比は空気と同じ $\gamma=1.4$ とし, 初期条件として流れ場全体に一樣流 $U_0=0.1$, 密度 $\rho_0=1.0$, 内部エネルギー $e_0=0.446$ を与えた. 一樣流 U_0 を代表速度, 円柱直径 $d=1.0$ を代表長さとし, レイノルズ数 $Re=150$, マッハ数 $Ma=0.2$ の流れを想定し, 時間刻み $\Delta t=0.02$, 式(1)の係数 $\alpha=0.02$ として計算を行った. 境界条件は, 円柱表面で粘着及び断熱条件, 計算領域外縁では初期状態を保った一樣流とした.

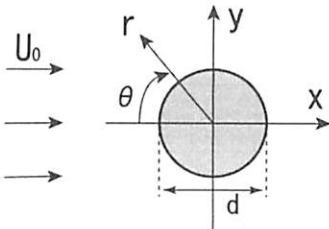


Fig.11 Schematic diagram

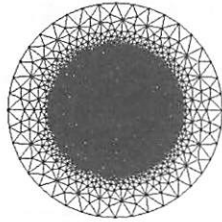
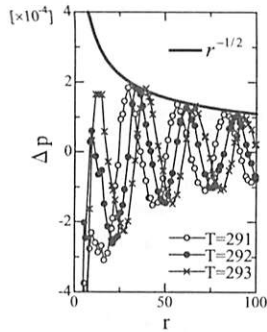
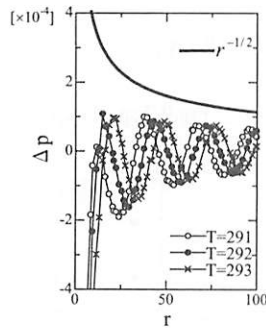


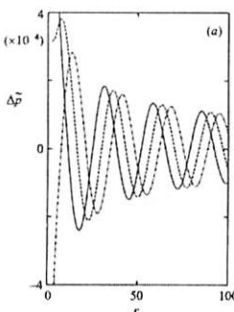
Fig.12 Computational grid



(a) FVLBM (3rd upwind)



(b) FVLBM (2nd upwind)



(c) N-S⁽⁸⁾

Fig.13 Propagation and decay of pressure waves ($\theta=90^\circ$)

<計算結果>

Fig.13 に, $\theta=90^\circ$ の方向における変動圧力 $\Delta p=(P-P_0)/P_0$ を示す. ただし基準圧力 $P_0=(\gamma-1)\rho_0 e_0$ とした. 横軸 r は円柱の中心からの距離である. (a), (b)はそれぞれ 2 次多項式スキーム, 2 次精度風上スキームによる計算結果であり, とともに音波の伝播と減衰の様子がみられるが, 2 次多項式スキームの方が, $r^{-1/2}$ に比例して減衰するという音波の理論への一致が良い. ただし T は代表速度 U_0 と代表長さ d による無次元化時間

($T=U_0 t/d$)である. また, (c)はN-S方程式による直接計算の例⁽⁸⁾(空間 6 次精度, 時間 4 次精度)であるが, これに対しても, 2 次多項式スキームの方は, (c)より低離散化精度であるにもかかわらず非常によく一致することが確認できた.

6. 結言

有限体積格子ボルツマン法に対して, 分布関数とその 1 階微分係数を補間する 2 次多項式を用いたスキームを考案し, 2 次元流れ解析におけるその精度を検証した. 非圧縮性及び音波を含む圧縮性流体の計算を通して, 2 次元問題において, 2 次多項式スキームが 3 次精度を有し, 従来の 2 次精度風上スキームよりも高精度な計算法である可能性を示した.

参考文献

- (1) M.Tsutahara, N.Takada and T.Kataoka, Lattice Gas and Lattice Boltzmann Methods, Corona Publishing Co., Ltd., (1999)
- (2) H.Xi, G.Peng and S.H.Chou, Finite-volume lattice Boltzmann method, Physical Review E, Vol.59 No.5 (1999), pp.6202-6250
- (3) S.Ubertini, G.Bella and S.Succi, Lattice Boltzmann method on unstructured grids: Further developments, Physical Review E, Vol.68 (2003), pp.016701-1-016701-10
- (4) M.Tsutahara, M.Kurita and T.Iwagami, A Study of New Finite Difference Lattice Boltzmann Method, Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, 68-665, Series B, (2002), pp.15-21
- (5) N.Takada, M.Tsutahara, Proposal of Lattice BGK Model with Internal Degrees of Freedom in Lattice Boltzmann Method, Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, 65-629, Series B, (1999), pp.92-99
- (6) M.Tsutahara, M.Kurita and T.Kataoka, Direct Simulation of Acoustic Waves by the Finite Difference Lattice Boltzmann Method, Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, 69-680, Series B, (2003), pp.89-95
- (7) T.Ozawa, H.Yonetsu and T.Tanahashi, Numerical Analysis of Fluid Dynamics by Finite Volume Lattice Boltzmann Method, Transactions of the Japan Society for Computational Engineering and Science, No.20040005
- (8) O.Inoue, M.Hatakeyama, Sound generation by a two-dimensional circular cylinder in a uniform flow, Journal of Fluid Mechanics, Vol.471 (2002), pp.285-314