

解空間の尖鋭度を用いた RUS 法による弾性定数の同定

IDENTIFICATION OF ELASTIC MODULI BY RESONANT ULTRASOUND SPECTROSCOPY USING SHARPNESS OF THE SOLUTION SPACE

荒井 政大¹⁾, 大鋸 学²⁾
Masahiro ARAI, Manabu OOGA

- 1) 信州大学工学部機械システム工学科 (〒380-8553 長野市若里 4-17-1, E-mail: arai@shinshu-u.ac.jp)
2) 信州大学大学院工学系研究科院生 (〒380-8553 長野市若里 4-17-1, E-mail: manabu@str1.shinshu-u.ac.jp)

Elastic moduli of the solid body were identified with the resonant frequencies obtained by resonant ultrasound spectroscopy (RUS). In the calculation to identify the elastic moduli, iterative analysis is applied to minimize the evaluation function varying the elastic moduli. In the present paper, an evaluation function based on determinant of matrix is proposed, which does not require the order of the resonant frequencies in the numerical identification process. Furthermore, sharpness of the solution space was employed additionally for the search algorithm in order to overcome the problems owing to multimodal distribution of the evaluation function. Boundary element analysis was applied to compute the 3-dimensional steady state vibration of the solid body. Numerical demonstration for the Si single crystal are conducted to illustrate the effectiveness of the present method.

Key Words: Boundary Element Method, Inverse Analysis, Anisotropy, Resonant Frequency, Eigenvalue analysis, Elastic Moduli

1. 緒 論

弾性定数は材料や固体構造物の変形挙動を評価する上で最も基本的かつ重要なパラメータである。一般に、固体材料の弾性定数は JIS や ASTM 等の規格に従って標準試験片を作成し、材料試験機を用いて測定される。しかしながら、もともとの固体試料が小さく、標準試験を行うことが現実的に不可能であったり、結晶異方性によって求める弾性定数そのものが多く、多結晶金属に代表される等方性材料の試験法が容易に適用できない場合も多い。

そのような状況の中、近年は超音波⁽¹⁾や X 線⁽²⁾などを用いた弾性定数の測定法も広く試みられるようになってきた。超音波スペクトロスコーピー法 (Resonant Ultrasound Spectroscopy: RUS)⁽³⁾⁽⁴⁾ は、超音波を用いる材料試験法の一種であり、圧電ピックアップを用いて直方体形状ないしは球状の固体試料を振動させ、その共振周波数から材料の弾性定数を逆解析的に求める一連の手法である。この計測方法は測定装置および測定回路が比較的単純であり、固体単結晶などのような結晶構造に依存する異方性を持つ小さな固体試料の測定にも適用できるなどの利点を有している。

しかしながら、弾性定数と共振周波数の関係は非線形であり、共振周波数から弾性定数を求める逆問題は一般に悪条件となる。従って、共振周波数の測定や解析における誤差によって解の精度は極めて大きく左右されるだけでなく、場合によっては解を求めることそのものが困難になる場合も少なくない。また別種の問題として、実験により計測された共振周波数が何次の振動モードに対応するのかを正確に見積もらなければ、正しい同定結果が得られない。この問題に対して、Ogi ら⁽⁵⁾⁽⁶⁾

のグループは、試料の加振に電磁力を用いることで試料の共振モードをコントロールし、SiC/Ti 複合材料の弾性定数を同定することに成功している。また、著者らのグループでは、弾性定数の同定に際して、固有値問題における行列式を評価関数とした同定法を提案し、共振モードの特定が難しい場合でも、精度の高い弾性定数の同定が可能となることを明らかにしている⁽⁷⁾。

現状、精度の高い弾性定数の同定を行うための様々な知見が蓄積されつつあるが、本質的な課題は残されたままである。すなわち、解空間が多峰性を有している場合に、解の探索が困難となる問題である。これらの問題に対し、著者らは非線形問題の探索に有利な遺伝的アルゴリズムを適用し、多峰性の問題に対処してきた。しかしながら、解空間そのものが傾いているような悪条件下においては、探索範囲の端部において評価関数が最小となるため、弾性定数の同定が不可能となる場合が多くみられた。また、この問題は立方晶や六方晶材料など、異方性体の探索において顕著となることがわかった。

そこで本論文では、非線形性の強い解空間の探索、および異方性体のように未知パラメーターの多い場合の解の探索を行うことを目的とし、解空間における尖鋭度を目的関数として用いる評価法について基礎的な検討を行った。尖鋭度はすなわち、共振周波数の極小値における解空間の‘尖り具合’を数値化するものであり、本論文は尖鋭度が高い解を最適解として判定する新たな探索法の提案を行った

結晶異方性を有する Si 単結晶を供試材として RUS 試験を行い、得られた共振周波数データを用いて提案された新しい評価関数により弾性定数の同定を行い、本解析手法の有効性について検証を行った。

2. RUS 測定装置

RUS 測定装置を Fig.1 に示す。測定系は固体試料を挟む 2 つの圧電素子 (チタン酸ジルコン酸鉛: PZT) と、スペクトラムアナライザ (R3131A, ADVANTEST) から構成される。スペクトラムアナライザより正弦波のスweep信号を発生させ、それを圧電素子に入力することにより超音波領域 ($f > 20\text{kHz}$) で固体試料を励振する。試験片の振動は、もう一つの圧電素子により電圧に変換され、再びスペクトラムアナライザに戻される。測定された電気信号のピーク値より、固体試料の共振周波数を求めることができる。

RUS 試験を用いた弾性定数の同定法では、弾性定数を仮定して固体試料の共振周波数を数値計算により求め、実験により得られた共振周波数との誤差関数 (評価関数) を最小化するように弾性定数を変化させることによって最適解、すなわち測定対象の弾性定数を同定する。共振周波数の解析法には、Ritz 法や有限要素法などが一般に用いられるが、本論文では計算精度面で優位性のある境界要素法 (Boundary Element Method: BEM) を用いて解析を行った。

3. 境界要素法による固有振動数解析

ここでは、境界要素法を導入して 3 次元弾性体の固有値問題を解析するための定式化⁽⁷⁾について述べる。均質な線形弾性体におけるつり合い方程式の一般形は次式で与えられる。

$$\sigma_{ij,j} = \rho \ddot{u}_i \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (1)$$

ここで、 σ_{ij} は連続体の任意における点の応力成分、 ρ は単位体積あたりの質量、 u_i は変位ベクトルであり、 $\ddot{\quad}$ は時間に関する 2 階微分を表す。また、添字の繰り返しについては Einstein の総和規約に従うものとする。なお、体積力項は無視した。

物体の占める領域 Ω 内の点 p において、静的な単位集中荷重 f_i が作用する場合の点 Q における j 方向変位の解を $U_{ij}(p, Q)$ とする。 U_{ij} を上式の両辺に乘じ、Gauss の発散定理を適用すると次式となる。

$$\begin{aligned} u_i(p) + \int_{\Gamma} \{T_{ij}(p, Q)u_j(Q) - U_{ij}(p, Q)t_j(Q)\} d\Gamma \\ = -\rho \int_{\Omega} U_{ij}(p, Q)\ddot{u}_j(Q)d\Omega \end{aligned} \quad (2)$$

ただし、 Γ は領域 Ω の境界を表し、 t_j は変位 u_j に対応する表面力、 T_{ij} は U_{ij} を表面力の定義に従って微分することにより得られる積分核である。ここで、定常振動状態にある変位 u_j を次式のようにおく。

$$u_j = \bar{u}_j e^{i\omega t} \quad (3)$$

ただし、 i は虚数単位、 ω は角周波数、 t は時間である。式 (3) を積分方程式 (2) に代入し、境界 Γ 上にて $t_j = 0$ なる境界条件を与えれば次式を得る。

$$\begin{aligned} \bar{u}_i(p) + \int_{\Gamma} T_{ij}(p, Q)\bar{u}_j(Q)d\Gamma \\ = \rho\omega^2 \int_{\Omega} U_{ij}(p, Q)\bar{u}_j(Q)d\Omega \end{aligned} \quad (4)$$

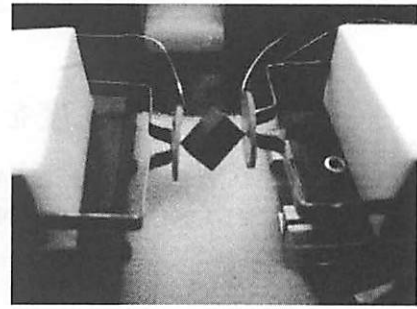


Fig.1 A picture of RUS equipment.

さらに領域 Ω 内の点 p を境界 Γ 上の点 P へと移行する極限操作を行うと以下の境界積分方程式に帰着する。

$$\begin{aligned} K_{ij}(P)\bar{u}_i(P) + \int_{\Gamma} T_{ij}(P, Q)\bar{u}_j(Q)d\Gamma \\ = \rho\omega^2 \int_{\Omega} U_{ij}(P, q)\bar{u}_j(q)d\Omega \end{aligned} \quad (5)$$

ただし K_{ij} は境界の性状により決まる位置定数であり、通常は剛体変位条件により自動的に決定される。

式 (4) および式 (5) を適当な要素を用いて離散化すると、以下のようなマトリクス方程式に帰着する。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & 0 \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^{\Gamma} \\ \mathbf{u}^{\Omega} \end{bmatrix} = \rho\omega^2 [\mathbf{B}] \begin{bmatrix} \mathbf{u}^{\Gamma} \\ \mathbf{u}^{\Omega} \end{bmatrix} \quad (6)$$

ここで \mathbf{u}^{Γ} は境界上の変位を、 \mathbf{u}^{Ω} は領域内部の変位を表す。最終的に式 (6) は以下のような一般固有値問題の形に帰着できるから、固有値 λ を求めることによって共振周波数が算出できることがわかる。

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{B}\mathbf{x}, \quad (\lambda = \rho\omega^2, \mathbf{x} = [\mathbf{u}^{\Gamma} \ \mathbf{u}^{\Omega}]^T) \quad (7)$$

4. 弾性定数の同定法

一般に RUS 法による弾性定数の同定では、ある範囲において弾性定数を変化させ、前節で述べた共振周波数に関する繰り返し計算を実行する。実験により得られた共振周波数と解析により得られた共振周波数の差を用いて誤差関数を定義すれば、その最小値を探索することによって弾性定数を決定することができる。しかしながら、各モードに対応する共振周波数の誤差関数を用いる同定法では、実験により計測された共振周波数が何次のモードに対応するかを予め知らねばならない。さもなければ、本来の解とは全く異なる逆解析結果が同定されるからである。

そこで著者らのグループは、係数マトリクスの行列式を用いた評価関数を提案した⁽⁷⁾。この評価関数は実験により得られた共振周波数のモードを特定することなしに探索計算が行えるなどの利点を有している。まず、実験より得られた共振周波数 $\bar{\omega}_i$ (i はモードの次数) を式 (7) に代入し、さらに以下のように変形する。

$$(\mathbf{A} - \rho\bar{\omega}_i^2\mathbf{B})\mathbf{x} = 0 \quad (8)$$

ここで $\mathbf{D}_i = \mathbf{A} - \rho\bar{\omega}_i^2\mathbf{B}$ とおけば、次式となる。

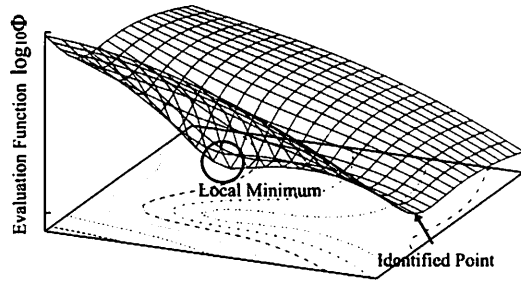


Fig.2 Solution space for the two dimensional search.

$$\mathbf{D}_i \mathbf{x} = 0 \quad (9)$$

もし計算において仮定された弾性定数が正解に一致すれば、上式の係数マトリクス \mathbf{D}_i の行列式は 0 となることが期待される。そこで、行列式 $\det \mathbf{D}_i$ について総和をとることによって、以下のような評価関数を定義する。

$$\Phi = \sum_{i=1}^n \left\{ W_i \det(\mathbf{D}_i) \right\}^2 \quad (10)$$

ここで各周波数における行列式の値を正規化するため、以下の式で定義される重み係数 W_i を導入した。

$$W_i = \frac{1}{|\det(\mathbf{D}_i)|_{\max}} \quad (11)$$

さて、通常は式 (10) で与えられる評価関数が最小となる場合の弾性定数が、求めるべき弾性定数として判定される。しかしながら解空間の性質が悪く、Fig.2 に示されるように探索すべき解空間が傾いているような場合には、解空間における極小値が最小値とならず、探索空間の端部(周囲)の値が探索結果として判定されてしまう。

このように極小値が最小値に一致しない理由は、計算誤差や共振周波数の測定誤差など、種々の理由が考えられるが、いずれにしても、解空間内において現れる極小値のなかで、隣接する評価関数の値との差が相対的に大きなもの、すなわち落ち込みの度合いが大きな極小値が最も正解となる確率が高いと推察される。

そこで本論文では、解空間の極小値の探索と併せて、解空間における極小値の変化の割合を評価に用いることを考える。本論文で定義する変化の割合とは、極小値近傍において解空間が描く分布関数の曲率(2次導関数)である。

具体的には、未知となる各弾性定数により式 (10) の評価関数を数値的に偏微分し、それらを加え合わせることで、解空間における極の鋭さ、すなわち尖鋭度を定義する。

$$\Theta = \sum \Delta c_{ij}^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial c_{ij}^2} \quad (12)$$

なお、上式は対象材料において未知となるすべての弾性定数に関して総和をとるものと約束する。また、数値微分に際しては、計算点を中心として、局所的に2次近似を適用して尖鋭度の計算を行った。式中の Δc_{ij} は無次元化を行うための係数であり、次式で定義されるように各弾性定数毎の探索幅を表す。

$$\Delta c_{ij} = c_{ij}(\max) - c_{ij}(\min) \quad (13)$$

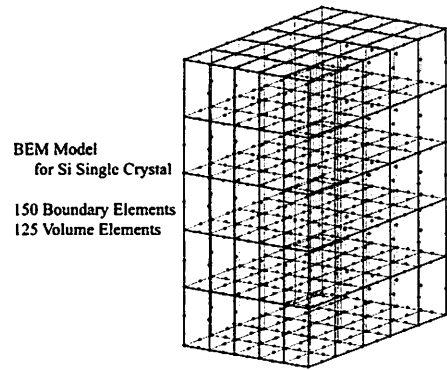


Fig.3 BEM model.

Table 1 Specification of Si single crystal.

Dimension[mm]	width :	4.995
	depth :	6.992
	height :	9.851
Mass[g]		0.8001
Elastic Moduli ⁽⁸⁾ [GPa]	c_{11} :	165.7
	c_{12} :	63.9
	c_{44} :	79.56

Table 2 Resonance frequency \bar{f} measured by RUS and reference value \hat{f} computed with the reference data⁽⁸⁾.

Mode	\bar{f} [kHz]	\hat{f} [kHz]	Error[%]
1	250.10	252.56	-0.97
2	257.49	257.90	-0.16
3	296.03	296.19	-0.05
4	367.24	366.77	0.13
5	420.90	432.75	-2.74
6	433.01	433.01	0.00

尖鋭度 Θ を用いた弾性定数同定の流れを整理すると、以下のようなになる。

- (1) ある範囲において各弾性定数 c_{ij} を変化させ、評価関数 Φ を計算する。なお、計算はすべての弾性定数の組合せに関して行う(全探索)。
- (2) 評価関数 Φ による解空間における極小値を探索する。
- (3) 極小値において式 (12) で定義される尖鋭度 Θ を求め、 Θ が最も大きな極値を正解と判定する。

5. RUS 法による弾性定数の同定

以下、実際に Si 単結晶を供試材として RUS 試験を実施し、弾性定数の同定を行った結果を示す。Si 単結晶は立方晶構造を有する異方性体であり、 c_{11} 、 c_{12} 、 c_{44} の 3 つの独立な弾性定数を有する。用いた Si 単結晶試験片の寸法と質量を Table 1 に示す。また、弾性定数の文献値⁽⁸⁾ も併せて Table 1 に示した。境界要素解析に際しては、Fig.3 に示されるような解析対象領域を各座標方向に 5 等分したモデルを用いた。境界要素数は 150、領域要素数は 125 であり、領域積分には 8 節点 2 次適合要素を、慣性力項に関する体積積分には 20 節点立方体要素を用いた。

Table 3 Search condition for the Si single crystal.

	Search Range	Increment
c_{11} [GPa]	163.0~168.0	0.625
c_{12} [GPa]	61.0~66.0	0.625
c_{44} [GPa]	77.0~82.0	0.625

RUS 試験を実施し, Si 単結晶の共振周波数を測定した結果, および Table 1 に示される弾性定数を用いて, 境界要素法の順解析により共振周波数を計算した結果を Table 2 に示す. 実験値と計算値を比較すると, 共振モードによって誤差の大きいモードが認められた. そこで以下の同定計算では測定誤差が大きいと考えられる 1 次および 5 次のモードを除いた 2, 3, 4, 6 次の共振周波数を用いることとした.

測定された共振周波数データ (Table 2) をもとに Si 単結晶の弾性定数を同定した結果を以下に示す. 探索に際しては, Table 3 に示す探索範囲および刻み幅で探索計算を行った. Fig.4 は, 弾性定数 c_{11} を固定し, 残る c_{12} , c_{44} を変化させた場合の解空間を示している. 同様に, Fig.5 は弾性定数 c_{12} を固定し, 残る c_{11} , c_{44} を変化させた場合の解空間である. これらのグラフに示されているように, 解空間全体が傾いており, 最小値の探索では探索範囲の端部が選ばれることになる.

Table 4 には, 評価関数 Φ が最小となった場合の結果と, 評価関数 Φ の極小値のうち, 尖鋭度 Θ が最大となった場合の計算結果を併せて示している. なお, Table 4 中の '※' は, 評価関数の最小値が探索範囲の端部の値にて得られたことを示している. すなわち, 評価関数の最小値を探索した場合には, 解が収束せず, 弾性定数 c_{44} の探索範囲の端部が同定結果として判定されていることがわかる. 表に示されているように, 尖鋭度 Θ を用いることにより, 文献値にはほぼ一致した弾性定数が同定されていることが確かめられる.

6. 結 論

本論文では共鳴超音波スペクトロスコーピー法を用いた弾性定数の同定法について検討した. 解の探索において生じる諸問題の解決を図るため, 解空間における極の鋭さを判定する尖鋭度を新たな探索パラメータとして提案した. Si 単結晶の実験データを用い, 実際に弾性定数の同定計算を行うことにより, 本論文で提案した尖鋭度の導入によって, 精度の高い弾性定数の同定が可能となることを明らかにした.

謝 辞

本研究の実施に際して, 信州大学工学部機械システム工学科青木雅史君 (現 JR 東日本), 山崎雅博君 (現大気社) の多大なる協力を得た. ここに記して謝意を表する.

参 考 文 献

- (1) Ohno, I., : Free Vibration fo a Rectangular Paralelepiped Crystal and Its Application to Determination of Elastic Constants of Orthorhombic Crystals, *J.Phys. Earth*, **24**(1976), pp.355-379.
- (2) 田中啓介, 松井英次, 栗村隆之, 秋庭義明: 焼結アルミナの X 線の弾性定数, *材料*, **36**-407(1987), pp.792-798.

Table 4 Identified elastic moduli of Si single crystal.

	Identified by		Reference ⁽⁸⁾
	Φ	Θ	
c_{11} [GPa]	163.6	164.3	165.7
Error[%]	-1.3	-0.9	
c_{12} [GPa]	61.6	62.3	63.9
Error[%]	-3.6	-2.6	
c_{44} [GPa]	82	79.5	79.56
Error[%]	※	-0.1	

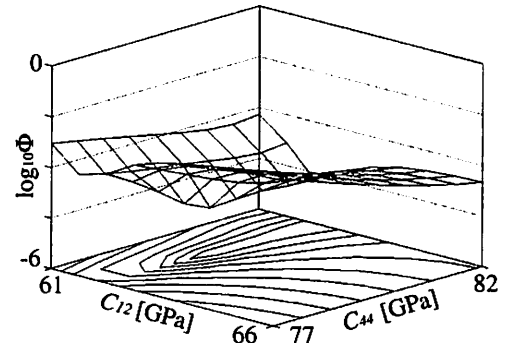


Fig.4 Solution Space ($c_{11}=164.3$ [GPa]).

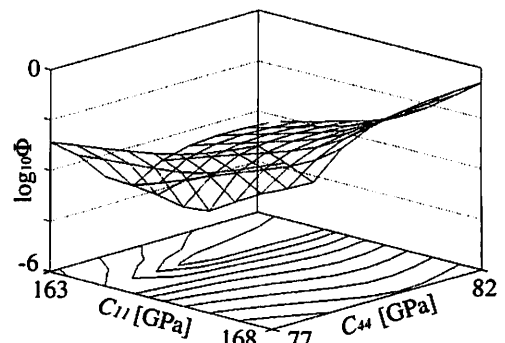


Fig.5 Solution Space ($c_{12}=62.3$ [GPa]).

- (3) Heyliger, P. and Ledbetter, H. : Detection pf Surface and Subsurface Flaw in Homogeneous and Composite Solids by Resonant Ultrasound, *J. Nondestructive Evaluation*, **17**-2(1998), pp.79-87.
- (4) Migliori, A., Sarrao, J.L., Visscher, W. M., Bell, T. M., Lei, M., Fisk, Z. and Leisure, R. G.: Resonant Ultrasound Spectroscopy Techniques for Measurement of the Elastic Moduli of solids, *Physica B*, **183**(1993), pp.1-24.
- (5) Ogi, H., Dunn, M. L., Takashima, K. and Ledbetter H.: Elastic properties fo unidirectional SiCf/Ti composite : Acoustic-resonance measurements and micromechanics predictions, *J. Appl. Phys.*, **87**-6(2000), pp.2769-2774.
- (6) 下地剛, 萩博次, 高島和希, 平尾雅彦: 高温における SiCf/Ti クロスプライ複合材料の弾性テンソルの測定, *日本金属学会誌*, **64**-7(2000), pp.495-501.
- (7) 荒井政大, 隅田尚寛, 鈴木春貴, 成田光裕: 共振周波数を用いた異方性弾性定数の同定に関する境界要素解析, *日本機械学会論文集 (A)*, **70**-692(2004), pp.532-539.
- (8) Kim, K.Y., Analytic relations between the elastic constants an the group velocity in an arbitrary direction of symmetry planes of media with orthorhombic or higher symmetry, *Physical Review B*, **49**-6(1994), pp.3713-3724.