

静弾性内部問題の多重極境界積分方程式法における Galerkin 法と 区分一定選点法について

ON GALERKIN'S METHOD AND COLLOCATION WITH PIECEWISE CONSTANT ELEMENTS FOR FMBIEMS IN INTERIOR PROBLEMS OF ELASTOSTATICS

松村 知樹¹⁾, 大谷 佳広²⁾, 西村 直志²⁾

Tomoki MATSUMURA, Yoshihiro Otani and Naoshi NISHIMURA

1) 国土交通省 (〒 100-8918 東京都千代田区霞ヶ関 2-1-3, E-mail: tomokim@wd6.so-net.ne.jp)

2) 京都大学情報学研究科 (〒 606-8501 京都市左京区吉田本町, E-mail: {otani@mbox.kudpc[nchml@i].kyoto-u.ac.jp})

This paper considers two approaches for dealing with interior problems of elastostatics. Namely, we consider Galerkin's method with piecewise linear (constant) basis functions for displacements (tractions) and the collocation with piecewise constant basis functions. The Galerkin approach is concluded to be very accurate, while the collocation is found to be impractically slow to converge.

Key Words: Elastostatics, Piecewise Constant Elements, FMM, Galerkin's Method

1. 始めに

従来、境界積分方程式法は、考える領域の境界のみに着目して解析を実行できるため、未知数の数を減らし得る利点を有している一方、最終的に帰着される線形連立一次方程式の係数行列が密となるために大規模な問題を解く事が困難であった。しかし、高速多重極法の出現により、境界積分方程式法の大規模問題への適用性は大幅に改善した⁽¹⁾。

一方、境界積分方程式法の研究が始まった当初から、静弾性内部問題における境界積分方程式法では、大きな回転の発生する曲げなどの問題において、数値解の精度が著しく劣化する事が知られていた⁽²⁾。これは、2重層ポテンシャルに区分一定要素を使用した事が原因であって、高次要素の使用により改善する事が経験的に知られており、従来型の境界積分方程式法においては既に克服された問題であると言う事ができる。しかし、高次要素を用いた場合、境界における形状特異点や、混合境界値問題においては境界条件の種類が変わる位置において、適切な処理を行なう事が必要である。特に3次元問題では角や稜などの形状のバリエーションが多く、更に、そこで境界条件の種類が変わる事も少なくないので、一般性のある取り扱いが複雑である。以下では、こう言った特殊な点を総称して角点と呼ぶ事にする。

扱う形状が単純な場合、角点処理を行う事はさほど難しくはないが、多重極法で大規模な実問題を解く場合は、例えば CAD の data から mesh を作成して利用するなどのプロセスが想定される。その際、mesh data だけから、どこにどのよ

うな角点があるかを把握して、適切な処理を施す事は大変複雑であるので、我々のグループでは、これまで多重極法の解析に、主として区分一定要素と選点法を用いてきた。これは、大きい剛体回転を伴う事が少ない外部問題では、このような方法でも概して精度良好であった事と、多重極法では非常に細かい要素分割が可能であるので、区分一定要素でも十分な精度が出るものとの予想に基づいていた。しかし、具体的な問題において、区分一定近似がどの程度の精度を与えるのか、必ずしも十分に検証は行なわれてこなかった。

そこで本論文では、解析領域の角の処理からくる計算の複雑さを避けつつ、かつ一定要素で離散化した場合よりも高い精度の数値解を求めるため、線形要素と一定要素の両方を用いた Galerkin 法高速多重極法を導入し、精度の向上を試みる。それと同時に、区分一定近似でどの程度の精度が期待できるのか検証する。その結果、曲げの支配的な問題においては、Galerkin 多重極法では良好な精度で解析が可能であるが、区分一定選点法多重極法では相当細かい分割を用いたとしても、十分な精度を得る事は難しい事を示す。また、このことは剛体回転という区分線形補間でないと表現できないゼロエネルギー解を持つ静弾性学の内部問題に固有の現象であって、Laplace 方程式の場合には同じような現象は現れない事を示す。

2. 3次元静弾性問題における多重極法

2.1. 境界積分方程式法

3次元静弾性問題における混合境界値内部問題は、次のように表される⁽³⁾: 支配方程式

$$C_{ijkl} \frac{\partial^2 u_k(\mathbf{x})}{\partial x_j \partial x_l} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (1)$$

を、次の境界条件の下に解く。

$$u_i(\mathbf{x}) = \bar{u}_i \quad \text{on } \Gamma_1 \quad (2)$$

$$t_i(\mathbf{x}) = C_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} n_j = \bar{t}_i \quad \text{on } \Gamma_2 \quad (3)$$

ここに、 \mathbf{u} は変位、 \mathbf{t} は表面力であり、 \bar{u}_i, \bar{t}_i は与えられた境界データ、 C_{ijkl} は3次元の弾性テンソルで、

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (4)$$

である。また、 λ, μ は Lamé 定数である。この問題の解表現を境界に極限移行する事により、次の積分方程式を得る。

$$\frac{1}{2} u_p(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} \Gamma_i^{(p)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) t_i dS_y - \int_{\Gamma} \frac{\partial \Gamma_i^{(p)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{\partial y_j} C_{ijkl} u_k n_l dS_y \quad \text{on } \Gamma \quad (5)$$

ここに、 $\Gamma_i^{(p)}$ は3次元静弾性方程式の基本解であり、

$$\Gamma_i^{(p)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{8\pi\mu} \left(\delta_{ip} \frac{\partial^2 r}{\partial x_s \partial x_s} - \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial^2 r}{\partial x_i \partial x_p} \right) \quad (6)$$

である。また、 $r = |\mathbf{x}|$ である。式(5)に現れる2重層ポテンシャルは主値の意味で評価する。

2.2. Galerkin 法

角点を意識する事なく積分方程式を離散化する最も容易な方法は Galerkin 法の使用である。この際、角点において変位は連続であるが、表面力は一般に不連続である事を考慮すると、未知数の増加や、拘束条件などの手間が発生しないようにするためには、変位 \mathbf{u} は線形要素、表面力 \mathbf{t} は一定要素で離散化するのが合理的である。

Galerkin 法では、test 関数 ψ_i として基底関数を用い

$$\int \frac{1}{2} \psi_p(\mathbf{x}) u_p(\mathbf{x}) dS_x = \int \psi_p(\mathbf{x}) \left(\int \Gamma_i^{(p)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) t_i'(\mathbf{y}) dS_y - \int \frac{\partial \Gamma_i^{(p)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{\partial y_j} C_{ijkl} u_k(\mathbf{y}) n_l dS_y \right) dS_x \quad (7)$$

を離散化する。この場合、未知数の数と式の数自動的に等しくなるので、変位と表面力に異なった基底を用いる事に関わる特別な考慮は必要ない。具体的には、境界を三角形要素で分割し、(7)の内側の \mathbf{y} に関する積分を直接計算する場合は解析的に、外側の \mathbf{x} に関する積分は Gauss 積分(積分点が要素境界に現れないように選ぶ)で評価した。

なお、著者らとは異なった多重極法の定式化において同様な形状関数を用いた例が Ofら⁽⁴⁾によって報告されている。

2.3. 高速多重極境界積分方程式法

ここで用いた3次元静弾性問題の高速多重極法は、基本解の展開

$$\Gamma_i^{(j)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \frac{1}{8\pi\mu} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left\{ \overline{F_{ij,n,m}^S(\overrightarrow{Ox})} R_{n,m}(\overrightarrow{Oy}) + \overline{G_{i,n,m}^S(\overrightarrow{Ox})} (\overrightarrow{Oy})_j R_{n,m}(\overrightarrow{Oy}) \right\} \quad (8)$$

に基づいている。ここに、

$$F_{ij,n,m}^S(\overrightarrow{Ox}) = \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + 2\mu} \delta_{ij} S_{n,m}(\overrightarrow{Ox}) - \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} (\overrightarrow{Ox})_j \frac{\partial S_{n,m}}{\partial x_i}(\overrightarrow{Ox}) \quad (9)$$

$$G_{i,n,m}^S(\overrightarrow{Ox}) = \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial S_{n,m}}{\partial x_i}(\overrightarrow{Ox}) \quad (10)$$

であり、 $R_{n,m}$ 及び $S_{n,m}$ は体球関数で次のように定義される。

$$R_{n,m}(\overrightarrow{Ox}) = \frac{1}{(n+m)!} P_n^m(\cos\theta) e^{im\phi} r^n \quad (11)$$

$$S_{n,m}(\overrightarrow{Ox}) = (n-m)! P_n^m(\cos\theta) e^{im\phi} \frac{1}{r^{n+1}} \quad (12)$$

(r, θ, ϕ) は \mathbf{x} の極座標であり、 P_n^m は Legendre 陪関数である。計算法の詳細は Takahashi 他⁽⁵⁾を参照されたい。

3. 数値計算

3次元静弾性学の内部混合境界値問題における境界積分方程式の高速多重極法を用いた解において、変位 \mathbf{u} は線形要素、表面力 \mathbf{t} は一定要素で離散化し、Galerkin 法を用いて解く手法(本手法)と、区分一定要素のみで離散化し、選点法を用いて解く手法(旧手法)の比較を行なった。

解析例としては弾性体の曲げ問題を取り上げる。この問題では、区分一定要素の精度が著しく劣化する事が知られている。適当な無次元化の後、断面が 1×1 、長さが5の直方体について、その一端を(近似的に)固定し、もう一方の端には大きさ M の曲げモーメントと等価な表面力を作用させ、側面は表面力ゼロとした。より具体的には、Fig.1 ような座標軸を取ったとき(2軸は紙面に垂直)、以下のように与えられる変位場

$$u_1(\mathbf{x}) = \frac{M}{EI} x_1 x_2, \quad u_2(\mathbf{x}) = -\frac{M}{EI} \nu x_2 x_3, \quad u_3(\mathbf{x}) = \frac{M}{2EI} (\nu(x_2^2 - x_3^2) - x_1^2) \quad (13)$$

を考える⁽⁶⁾。ここに M は曲げモーメントの大きさ、 E, ν, I はそれぞれ Young 率、Poisson 比、断面2次モーメントである。境界条件としては、端面 $x_1 = 0$ では(13)で与えられる変位を Dirichlet 条件として与え、その他の面では(13)に対応する応力

$$\sigma_{11} = \frac{M}{I} x_3, \quad \text{他は } 0 \quad (14)$$

から計算される表面力を与える。

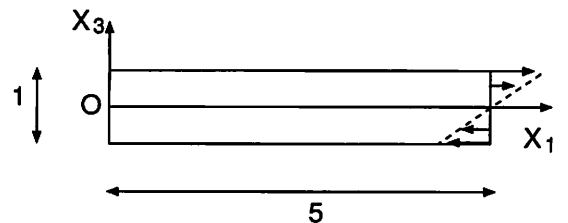


Fig. 1 Beam bending problem

数値計算では、要素数が 2156、17600、70400 のときについて、 $\lambda = \mu = 0.5$ として、本手法及び旧手法で問題を解い

た。また、Gauss 積分における積分点の数は7とした。連立方程式のソルバはいずれの場合も GMRES を使い、本手法については点 Jacobi 法、旧手法については block diagonal による右前処理を用いた。それぞれの場合の未知数の数、数値解の誤差(右端位置)、GMRES の反復回数を記す。Table 1、2、

Table 1 Comparison of the proposed and conventional methods (2156 elements)

	未知数の数	誤差	反復回数
本手法	3342	1.67%	55 回
旧手法	6468	74.7%	44 回

Table 2 Comparison of the proposed and conventional methods (17600 elements)

	未知数の数	誤差	反復回数
本手法	27483	0.197%	80 回
旧手法	52800	58.3%	51 回

Table 3 Comparison of the proposed and conventional methods (70400 elements)

	未知数の数	誤差	反復回数
本手法	110163	0.148%	91 回
旧手法	211200	20.8%	79 回

3より、線形要素と Galerkin 法を用いた本手法では旧手法に比べて精度は大幅に良くなっていることが分かる。また、本手法では変位 u の未知数が節点に存在するため、未知数が旧手法よりも少なくなっている。

Fig.2、3においては、横軸に x_1 軸(長手方向)を取って、縦軸に弾性体の下面の端($x_2 = x_3 = -1/2$)の x_3 軸方向の変位を示した。それぞれ、要素数が2156、17600、70400のときの本手法、及び旧手法によって求めた数値解、及び解析解をプロットしてある。これらの結果からも、旧手法では要素数を大きくとっても依然としてかなりの誤差があるのに対して、本手法では比較的小さな要素数でも非常に良く解析解と合っていることが読み取れる。

なお、旧手法のコードは一定のチューニングを行なっているのに対して、本手法のコードでは高速化を図っていないため、正確な速度比較はできないが、例えば2156要素の場合、現状では従来法が222秒であるのに対して、Galerkin 法では727秒であった(京大メディアセンターのHPC2500使用)。

さらに、より現実に近い大規模問題として自動車のホイールを想定した問題を設定し、本手法により解いた。境界条件はホイールの中央の軸の部分を固定し、ホイールの一部に、図において上向きに表面力を作用させた。直方体の曲げの問題と同様、Gauss 積分における積分点の数は7とし、ソルバーは GMRES、前処理は点 Jacobi 法(右)である。要素数

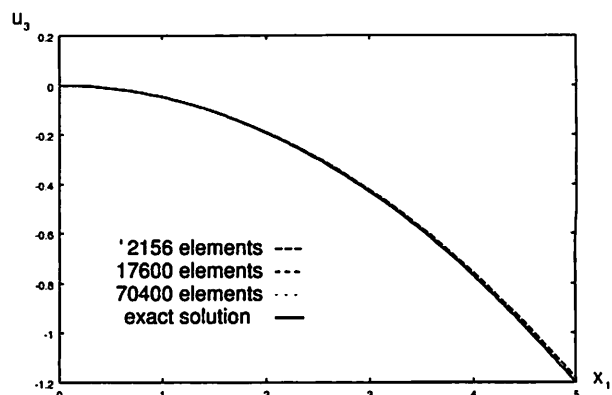


Fig. 2 Vertical displacements on the bottom face obtained with the proposed method

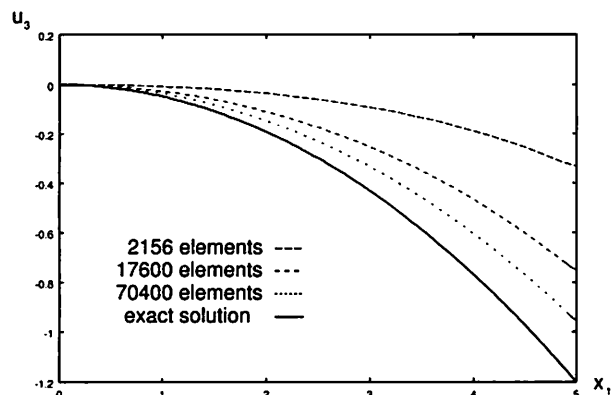


Fig. 3 Vertical displacements on the bottom face obtained with the conventional method

は42890、未知数の数は85840である。

得られたホイールの形状を Fig.4 に示す。なお、図中のグレースケールは表面における J_2 の大きさを表している。

4. 考察

Fig.3 の曲げ問題における区分一定要素の場合、要素数を増やすと正解に近付いてはいるが、収束が非常に悪く、たとえ多重極法を用いて多数の要素を用いるとしても現実的な要素数で十分な精度に到達するのは難しい。一方、Fig.2 の Galerkin 法を用いた計算では、ごく少ない要素数でも十分に高い精度に到達している。

このようなことが起こる理由は、次のように説明できる。すなわち、剛体変位を引き起こすのに必要なエネルギーは0であるのに対して、これを区分一定の変位で近似したものは変位の不連続点で大きなエネルギーを消費し、結局実際よりはるかに硬くなるものと考えられる。

なお、Laplace 方程式ではこのようなことが起こらないことを指摘する。例えば、Fig.5 に示す 2×8 の2次元長方形領域において Laplace 方程式の混合境界値問題を考える。正解は上で考えた静弾性問題の u_3 に類似した $x_1^2 - x_2^2$ とし、 $x_1 = 0$ では正解から計算される Dirichlet data を、それ以外では Neumann data を境界条件として与える。この問題を区

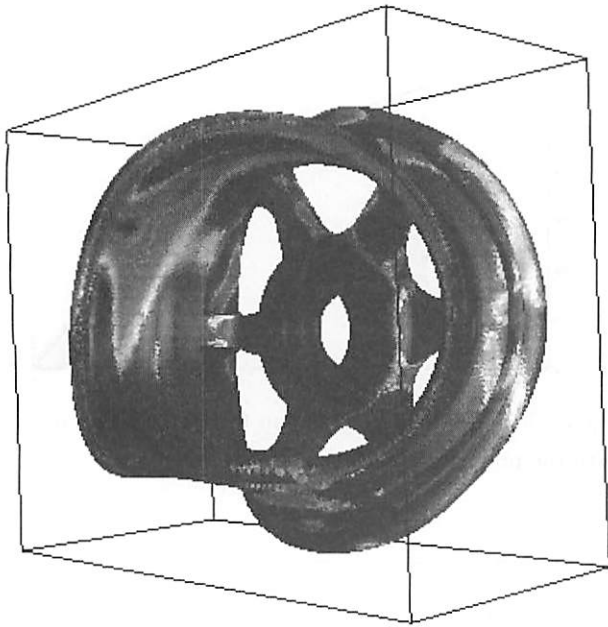


Fig. 4 Deformation of wheel

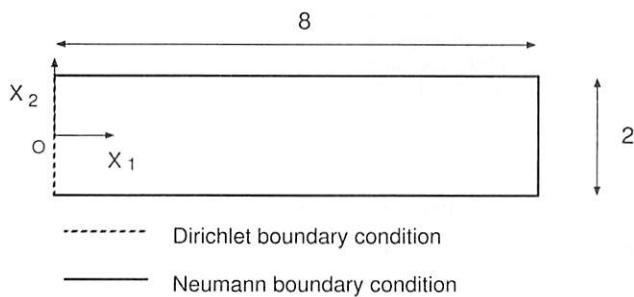


Fig. 5 Domain and boundary conditions

分一定要素と選点法を用いた多重極境界積分方程式法(1000自由度)で解いた結果は、正解と非常に良好な一致を示している(Fig.6)。これはLaplace方程式のゼロエネルギー解は定数だけであり、区分一定近似で正確に表現できるからである。

5. 終りに

高速多重極境界積分方程式法を用いて弾性学の内部問題を解く場合、変位に区分線形、表面力に区分一定要素を用いたGalerkin法が非常に有効であることを示した。特に、この方法は角点の存在を意識せずに解析を進めることができることが非常に大きな利点であって、実用上現れる複雑な形状の問題の解析においても有効であることを示した。一方、同じく角点を含む問題での適用性が期待されていた区分一定近似を用いた選点法は、正解への収束が非常に遅く、多重極法を用いたとしても現実的でない事が結論された。ただし、これは静弾性内部問題に固有の現象であり、Laplace方程式では同じような問題は起こらない。

Galerkin高速多重極法は精度の問題もなく、複雑な形状や境界条件への適用も容易であるので、非常に有用な方法であ

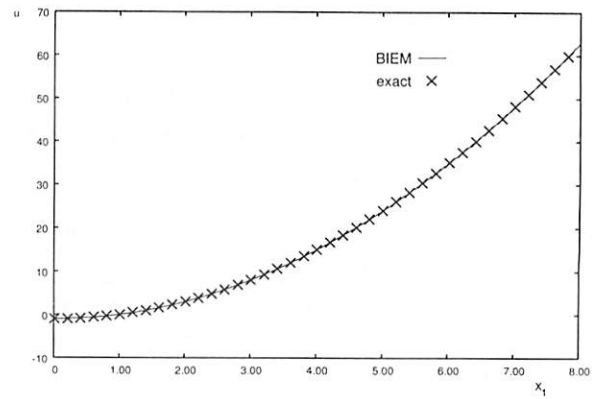


Fig. 6 Solution of Laplace's equation

ると考えられる。ただし、現時点では同じ自由度に対して、選点法よりはるかに遅い上、並列化や、前処理に対する検討も十分でないので、今後解析効率の改善を図る必要があると考えられる。

最後に Fig.4 において使用した model 作成のために、株式会社 アライドエンジニアリングより iges file を御提供いただいた。ここに謝意を表す。

参考文献

- (1) N. Nishimura. Fast multipole accelerated boundary integral equation methods, Applied Mechanics Reviews, 55, 299-324, 2002
- (2) T.A. Cruse. An improved boundary-integral equation method for three dimensional elastic stress analysis, Computers & Structures, 4, 741-754, 1974
- (3) Ken-ichi Yoshida, Naoshi Nishimura and Shoichi Kobayashi. Application of fast multipole Galerkin boundary integral equation method to elastostatic crack problems in 3D. Int. J. Num. Meth. Eng., 50, 525-547, 2001
- (4) G. Of, O. Steinbach, W.L. Wendland. Applications of a fast multipole Galerkin in boundary element method in linear elastostatics, Computing and Visualization in Science, 8, 201-209, 2005
- (5) T. Takahashi, S. Kobayashi and N. Nishimura. Fast multipole BEM simulation of overcoring in an improved conical-end borehole strain measurement method, In; Mechanics and Engineering — In Honor of Prof. Qinghua Du's 80th Anniversary, Z. Yao et al. (eds.), Tsinghua Univ. Press., 120-127, 1999
- (6) I.S. Sokolnikoff. Mathematical Theory of Elasticity, McGraw-Hill book company, inc., 1956