

# 単軸圧縮を受ける立方体フォームの長波長座屈

## LONG WAVE-LENGTH BUCKLING OF CUBIC FOAMS SUBJECTED TO UNIAXIAL COMPRESSION

奥村 大<sup>1)</sup>, 岡田 篤志<sup>2)</sup>, 大野 信忠<sup>3)</sup>

Dai OKUMURA, Atsushi OKADA, and Nobutada OHNO

- 1) 名古屋大学大学院工学研究科 (〒464-8603 名古屋市千種区不老町, E-mail: okumura@mech.nagoya-u.ac.jp)  
 2) 名古屋大学大学院工学研究科 (〒464-8603 名古屋市千種区不老町, E-mail: okada@mml.mech.nagoya-u.ac.jp)  
 3) 名古屋大学大学院工学研究科 (〒464-8603 名古屋市千種区不老町, E-mail: ohno@mech.nagoya-u.ac.jp)

In this study, we investigate the buckling strength of elastic cubic foams subjected to uniaxial compression. For this purpose, microscopic bifurcation and macroscopic instability of cubic foams are numerically analyzed using a homogenization theory of the updated Lagrangian type. It is shown that long wave-length buckling occurs at lower stress than that of short wave-length buckling, and that very long wave-length buckling occurs at the onset of macroscopic instability. Furthermore, an analytical solution to evaluate the very long wave-length buckling stress is derived from the macroscopic instability condition. The validity of this formula is shown by comparison with the results of the numerical simulation.

**Key Words:** Cellular solids, Micro buckling, Finite element method, Homogenization theory

### 1. 緒 言

金属固体を発泡化して作られる金属フォーム<sup>(1)</sup>は、軽量であり比強度も高いため、工学的にさまざまな分野での利用が期待されている<sup>(1)(2)</sup>。しかしながら、圧縮負荷を加えると微視構造に座屈が生じ、固体材料と大きく異なった降伏挙動を示す<sup>(2)</sup>。したがって、フォームの圧縮強度を調べるためには、微視的座屈の発生メカニズムを十分に理解する必要がある。

上述の問題に対して、Gibson-Ashby<sup>(2)</sup>は、立方体セルモデルがオイラー座屈する場合を考え、解析解

$$\Sigma = CE\rho^2 \quad (1)$$

を導いた。すなわち、フォームの座屈応力 $\Sigma$ は、フォームを構成している材料の Young 率 $E$ に比例し、相対密度 $\rho$ の2乗と線形関係を有する。また、 $C$ は座屈モードに依存した係数である。さらに彼らは、実験結果との比較によって係数 $C$ の値を定め、

$$\Sigma = 0.05E\rho^2 \quad (2)$$

とする場合に、この解析解の妥当性を示した。ただし、係数 $C$ の値 0.05 と実際に生じる座屈モードとの相関関係については言及していない。

一方、著者らは、更新 Lagrange 形式の均質化理論<sup>(3)(4)</sup>を構築し、六角形ハニカムや正方形ハニカムの微視的分岐と巨視的不安定の解析を行うことによって、これらのハニカムに生じる複雑な座屈モードの発生メカニズムを調べた<sup>(3)-(8)</sup>。これらの研究の中でも、正方形ハニカムの解析<sup>(6)-(8)</sup>では、周期単

位数に依存した長波長座屈が単位セル座屈より優先的に発生することを示すとともに、長波長の座屈モードが生じる場合の座屈応力の解析解を導出した。したがって、立方体フォームに対しても、著者らの理論を用いて解析を行えば、正方形ハニカムの場合と同様にして、実際に生じる座屈モードに対応した解析解の導出が期待でき、この解析解と式(2)を比較することはたいへん興味深い。

そこで本研究では、著者らの更新 Lagrange 形式の均質化理論<sup>(3)(4)</sup>を用いて、立方体フォームの微視的座屈解析を行う。このためまず、理論の概略について述べる。次に、立方体フォームは弾性体であるとして、単位セル座屈や長波長座屈が生じる場合の座屈応力を解析する。また、巨視的不安定条件についても調べ、この条件から長波長座屈が生じる場合の座屈応力の解析解を導出する。最後に、この解析解の妥当性を示すとともに、式(2)との比較を行う。

なお、フォームにはオープンセルとクローズドセルが存在し<sup>(1)(2)</sup>、本論文はオープンセルに関する研究である。

### 2. 理 論

この章では、更新 Lagrange 形式の均質化理論<sup>(3)(4)</sup>の概略について述べる。

#### 2. 1. 基礎式

周期内部構造を有する無限体 $B$ とその単位セル $Y$ を考える。 $B$ に巨視的に一様な変形を加えると、微視的な変形は $Y$ 周期的に生じる。しかしながら、変形が大きくなると、微視的分岐が生じるため、微視的変形の周期単位は一般に大きくなる。

このような変形挙動を解析するため、 $k$  個の  $Y$  からなる周期単位  $kY$  を考え、 $kY$  を周期とする空間的变化を  $kY$  周期的変化と呼ぶことにする。さらに、時間  $t$  での  $B$  の周期単位  $kY$  に対して直交座標  $x_i (i=1,2,3)$  を設け、 $(\cdot)_i$  は座標  $x_i$  に関する微分、 $(\dot{\cdot})$  は時間  $t$  に関する物質導関数とする。

$B$  の内部変形が  $kY$  周期性を満足するとき、変位速度  $\dot{u}_i$  は、巨視的成分  $\dot{u}_i^0$  と  $kY$  周期的な擾乱成分  $\dot{u}_i^*$  を用いて、

$$\dot{u}_i = \dot{u}_i^0 + \dot{u}_i^* \quad (3)$$

と分離できる。このとき、 $\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i})$  として定義されるひずみ速度  $\dot{\epsilon}_{ij}$  は、次式のように表される。

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^0 + \dot{\epsilon}_{ij}^* \quad (4)$$

ここで、 $\dot{\epsilon}_{ij}^0 = \frac{1}{2}(\dot{u}_{i,j}^0 + \dot{u}_{j,i}^0)$ 、 $\dot{\epsilon}_{ij}^* = \frac{1}{2}(\dot{u}_{i,j}^* + \dot{u}_{j,i}^*)$  である。巨視的に一様な変形が与えられる  $B$  内では  $\dot{\epsilon}_{ij}^0$  と  $\dot{u}_{i,j}^0$  は一定である。また、 $\dot{\epsilon}_{ij}^*$  の分布は、 $\dot{u}_i^*$  が  $kY$  周期的であることから、 $kY$  周期性を満足する。

$B$  の構成相はそれぞれ歪弾性材料からなり、その構成式は微視的に

$$\dot{\pi}_{ji} = l_{ijk} \dot{u}_{k,i} \quad (5)$$

と表されるとする。ここで、 $\dot{\pi}_{ji}$  は更新 Lagrange 形式の公称応力速度であり、 $l_{ijk}$  は  $l_{ijk} = l_{kij}$  を満足する微視的な剛性テンソルである。このとき、Truesdell の応力速度  $\dot{s}_{ij}$  は、

$$\dot{s}_{ij} = c_{ijk} \dot{\epsilon}_{k,i} \quad (6)$$

と表される。上式における  $c_{ijk}$  は、 $c_{ijk} = c_{jik} = c_{yjk} = c_{kij}$  を満足し、 $l_{ijk}$  との間に次の関係が成り立つ。

$$l_{ijk} = c_{yjk} + \delta_{ik} \sigma_{ji} \quad (7)$$

ここで、 $\sigma_{ji}$  は Cauchy 応力、 $\delta_{ik}$  は Kronecker のデルタを表す。また、応力速度  $\dot{\pi}_{ji}$ 、 $\dot{s}_{ij}$ 、 $\dot{\sigma}_{ij}$  の間には、

$$\dot{\pi}_{ji} = \dot{s}_{ij} + \dot{u}_{i,k} \sigma_{jk} = \dot{\sigma}_{ij} + \sigma_{ij} \dot{u}_{k,k} - \sigma_{ik} \dot{u}_{j,k} \quad (8)$$

が成り立つ。

Hill<sup>9)</sup> が不均質材料に対して示唆した仮想仕事の式は、周期材料に対しては有限変形の場合にも速度形で厳密に成り立つ。このとき、擾乱変位速度  $\dot{u}_i^*$  を求めるための境界値問題

$$\langle l_{ipq} \dot{u}_{p,q}^* \delta \dot{u}_{i,j}^* \rangle = -\dot{\epsilon}_{ik}^0 \langle c_{yjk} \delta \dot{u}_{i,j}^* \rangle \quad (9)$$

が導かれる。ここで、 $\langle \cdot \rangle$  は  $B$  の現配置におけるセル集合  $kY$  に関する体積平均を表し、 $\delta \dot{u}_i^*$  は  $kY$  周期性を満足する任意の速度場である。また、巨視的な構成式が次式のように導かれる。

$$\dot{H}_{ji} = \langle l_{ijk} (\dot{u}_{k,i}^0 + \dot{u}_{k,i}^*) \rangle \quad (10)$$

$$\dot{S}_{ij} = \langle c_{yjk} (\dot{\epsilon}_{k,i}^0 + \dot{\epsilon}_{k,i}^*) \rangle \quad (11)$$

ここで、 $\dot{H}_{ji}$ 、 $\dot{S}_{ij}$  は  $\dot{\pi}_{ji}$ 、 $\dot{s}_{ij}$  に関する巨視的な応力速度を表す。さらに、 $\Sigma_{ij} = \langle \sigma_{ij} \rangle$  と定義される巨視的な Cauchy 応力の

物質導関数  $\dot{\Sigma}_{ij}$  を用いると、これらの巨視的な応力速度は微視的な応力速度関係式(8)と同様の関係

$$\dot{H}_{ji} = \dot{S}_{ij} + \dot{u}_{i,k}^0 \Sigma_{jk} = \dot{\Sigma}_{ij} + \Sigma_{ij} \dot{u}_{k,k}^0 - \Sigma_{ik} \dot{u}_{j,k}^0 \quad (12)$$

を満足することが示される。

式(9)を解くことにより、 $\dot{u}_i^*$  が一意的に求められる場合を考える。このとき、 $\dot{u}_i^*$  は  $\dot{\epsilon}_{ik}^0$  と線形関係にあるから、

$$\dot{u}_i^* = \chi_i^k \dot{\epsilon}_{k,i}^0 \quad (13)$$

と書くことができる。ここで、 $\chi_i^k$  は  $kY$  周期性を満足し、境界値問題

$$\langle l_{ipq} \chi_p^k \delta \dot{u}_{i,j}^* \rangle = -\langle c_{yjk} \delta \dot{u}_{i,j}^* \rangle \quad (14)$$

の解である。式(13)を用いると、式(10)と(11)は、

$$\dot{H}_{ji} = L_{ijk}^H \dot{u}_{k,i}^0, \quad L_{ijk}^H = \langle l_{ijk} + l_{ipq} \chi_p^k \rangle \quad (15)$$

$$\dot{S}_{ij} = C_{yjk}^H \dot{\epsilon}_{k,i}^0, \quad C_{yjk}^H = \langle c_{yjk} + c_{yipq} \chi_p^k \rangle \quad (16)$$

と書ける。また、 $\chi_i^k$  は  $\chi_i^k = \chi_i^k$  を満足することから、 $L_{ijk}^H$  は  $L_{ijk}^H = L_{kij}^H$ 、 $C_{yjk}^H$  は  $C_{yjk}^H = C_{yjk}^H = C_{yjk}^H = C_{yjk}^H$  といった対称性を有し、次の関係式が成り立つ。

$$L_{yjk}^H = C_{yjk}^H + \delta_{ik} \Sigma_{ji} \quad (17)$$

## 2. 2. 微視的分岐

式(9)の境界値問題の解に分岐が生じる場合を考える。このとき、基本解は式(13)から求められる。また基本解と分岐解の差は、次の境界値問題の固有解として求められる。

$$\langle l_{ipq} \phi_{p,q}^{(r)} \delta \dot{u}_{i,j}^* \rangle = 0, \quad r=1,2,\dots,m \quad (18)$$

ここで、 $m$  は分岐の多重度を表す。したがって、式(9)の分岐解は、定数  $\kappa^{(r)}$  を用いて、

$$\dot{u}_i^* = \chi_i^k \dot{\epsilon}_{k,i}^0 + \sum_{r=1}^m \kappa^{(r)} \phi_i^{(r)} \quad (19)$$

と表される。さらに  $\phi_i^{(r)}$  は、直交条件

$$\langle l_{yjk} \phi_{i,j}^{(r)} \rangle = \langle c_{yjk} \phi_{i,j}^{(r)} \rangle = 0, \quad r=1,2,\dots,m \quad (20)$$

を満足することが示される。

式(18)~(20)の関係は次のように説明できる。まず、 $\dot{u}_i^*$  に関する境界値問題(9)の解に分岐が生じるためには、式(18)が  $kY$  周期固有解  $\phi_i^{(r)}$  を有し、固有解  $\phi_i^{(r)}$  は  $l_{yjk}$  や  $c_{yjk}$  との直交条件(20)を満足する必要がある。この条件が成り立つとき、 $\dot{u}_i^*$  には式(19)のように自発的成分  $\phi_i^{(r)}$  が現れるが、 $\phi_i^{(r)}$  は  $kY$  周期性と直交条件(20)を満たすから、巨視的ひずみおよび巨視的応力の変化に影響することなく生じる。この結果、微視的分岐点での巨視的な構成式は、基本解  $\chi_i^k$  を用いて式(15)、(16)のように表され、固有解  $\phi_i^{(r)}$  には依存しない。

## 2. 3. 巨視的不安定

式(15)によって求められる巨視的な接線係数  $L_{ijk}^H$  が楕円性を失うとき、巨視的不安定が生じる。この開始条件は、アコースティックテンソル

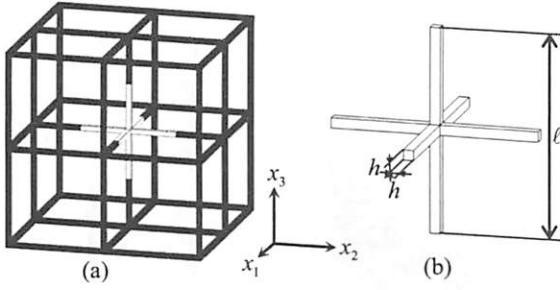


Fig. 1. Cubic foams; (a) Cubic cells, and (b) its unit cell  $Y$ .

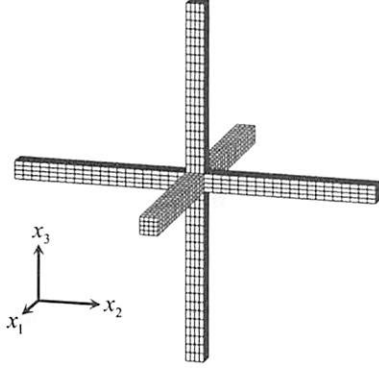


Fig. 2. Finite element mesh of  $Y$  for  $h/\ell=0.05$ .

$$A_k = L_{ijk}^H n_j^0 n_i^0 \quad (21)$$

を導入することによって調べることができる。ここで、 $n_i^0$  は巨視的な面を表す単位法線であり、巨視的に不安定な変形速度勾配  $g_i^0 n_i^0$  が生じるとき、変形方向  $g_i^0$  は次式を満足する。

$$A_k g_k^0 = 0 \quad (22)$$

したがって、巨視的不安定条件は次式で表される。

$$\det \mathbf{A} = 0 \quad (23)$$

Triantafyllidis-Maker<sup>(10)</sup>や Geymonat<sup>(11)</sup>は、Bloch の定理を用いて、無限に大きな周期単位の微視的分岐の発生条件が巨視的不安定開始条件と等価の関係にあることを示した。この関係は著者らの正方形ハニカムの面内座屈解析<sup>(6)-(8)</sup>でも確認されており、周期単位を大きくしてゆくと、微視的分岐点は、早期に現れるようになり、巨視的不安定開始点に漸近してゆく。すなわち、巨視的不安定開始点は長波長座屈による圧縮強度の下限值を与える。ただし、六角形ハニカムの面内座屈解析<sup>(3)-(5)</sup>では、必ずしも長波長座屈が最初に生じるわけではない。したがって、圧縮強度を調べるためには、巨視的不安定条件(23)だけでなく微視的分岐条件(18)も調べなければならないことに注意が必要である。

### 3. 有限要素解析

この章では、前章の理論を用いて、単軸圧縮を受ける立方体フォームの有限要素解析を行う。解析手順は文献<sup>(3),(4)</sup>に詳しく述べられているので、本論文では省略する。

### 3. 1. 解析条件・方法

Fig.1(a)に示される立方体フォームが単軸圧縮

$$\dot{\varepsilon}_{33}^0 < 0, \quad \dot{\Sigma}_{11} = \dot{\Sigma}_{22} = \dot{\Sigma}_{12} = \dot{\Sigma}_{23} = \dot{\Sigma}_{31} = 0 \quad (24)$$

を受ける問題を考える。このとき、Fig.1(b)のように立方体フォームの最小周期単位  $Y$  を選ぶことができる。図中の  $\ell$  はセルピッチ、 $h$  は正方形断面の一边の長さを表し、この章では寸法比  $h/\ell=0.05$  の場合の解析結果を示す。

フォームを構成している材料は、等方弾性体であるとして、次式に従うとする。

$$\dot{\tau}_{ij} = c_{ijkl}^e \dot{\varepsilon}_{kl} \quad (25)$$

ここで、 $\dot{\tau}_{ij}$  は相対 Kirchhoff 応力の Jaumann 速度であり、 $c_{ijkl}^e$  は、Young 率を  $E$ 、Poisson 比を  $\nu$  とするとき、

$$c_{ijkl}^e = \frac{E}{2(1+\nu)} \left( \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk} + \frac{2\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \delta_{kl} \right) \quad (26)$$

である。また  $\dot{\tau}_{ij}$  は、スピン  $\omega_{ij} = (\dot{u}_{i,j} - \dot{u}_{j,i})/2$  を用いて、

$$\dot{\tau}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} + \sigma_{ij} \dot{\omega}_{k,k} - \omega_{ik} \sigma_{kj} + \sigma_{ik} \omega_{kj} \quad (27)$$

と表される。したがって、式(6), (8), (25), (27)の関係より、

$$c_{ijkl} = c_{ijkl}^e - \frac{1}{2} (\sigma_{ik} \delta_{jl} + \sigma_{il} \delta_{jk} + \delta_{ik} \sigma_{jl} + \delta_{il} \sigma_{jk}) \quad (28)$$

となる。本研究では、Young 率  $E$  を応力の無次元化のために用い、Poisson 比  $\nu$  は 0.3 とする。

微視的分岐の周期単位依存性を調べるために、負荷軸方向に最小周期単位  $Y$  を  $N$  個並べた周期単位  $Y_{UN}$  ( $N=2,4,8,16$ ) と各軸方向に最小周期単位  $Y$  を  $M$  個並べた周期単位  $Y_{TM}$  ( $M=2,4$ ) をそれぞれ考える。本研究では、これらの周期単位の解析を効率的に行うために、最小周期単位  $Y$  をサブストラクチャとして、サブストラクチャ法<sup>(12)</sup>に基づく有限要素解析を行う。このとき用いる最小周期単位  $Y$  の有限要素分割を Fig.2 に示す。なお、要素分割には 8 節点 1 次の非適合要素を用い、周期境界条件は消去法によって与える。

微視的分岐と巨視的不安定の探索は増分計算ごとに行う。微視的分岐点については、Sylvester の慣性法則に従い、微視的分岐条件式(18)の有限要素方程式を調べる<sup>(3)</sup>。また、巨視的不安定については、角度  $\varphi$  ( $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ ) と  $\theta$  ( $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ) を用いて法線  $n_j^0 = (\sin \varphi \cos \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \varphi)$  を表し、式(23)の  $\det \mathbf{A}$  の値を計算することによって調べる。

### 3. 2. 解析結果

Fig.3 の巨視的応力-ひずみ線図上に、微視的分岐点と巨視的不安定開始点をそれぞれ示す。この図からわかるように、周期単位を大きくするほど、微視的分岐点は、早期に現れ、巨視的不安定開始点に漸近してゆく。また、周期単位  $Y_{UN}$  と  $Y_{TN}$  の微視的分岐点は同じであった。この結果は、著者らの正方形ハニカムの面内座屈解析<sup>(6)-(8)</sup>の結果と同様であり、単軸圧縮を受ける立方体フォームには長波長の座屈が生じることが推察される。なお、周期単位  $Y_{UN}$  と  $Y_{TN}$  の微視的分岐点は同じであることから、単軸圧縮を受ける立方体フォームの微視的分岐は負荷軸方向にのみ周期単位依存性を有す

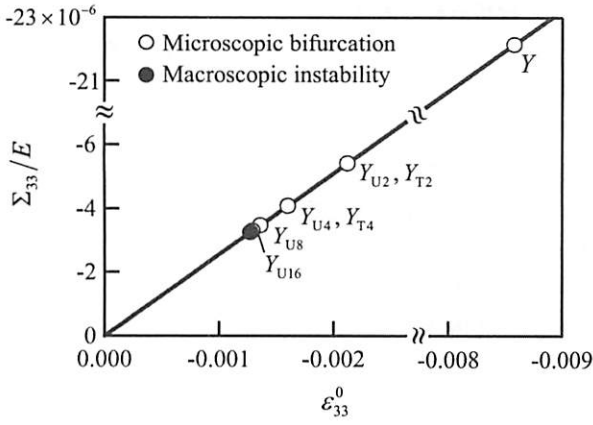


Fig. 3. Macroscopic stress-strain relation for  $h/l=0.05$ .

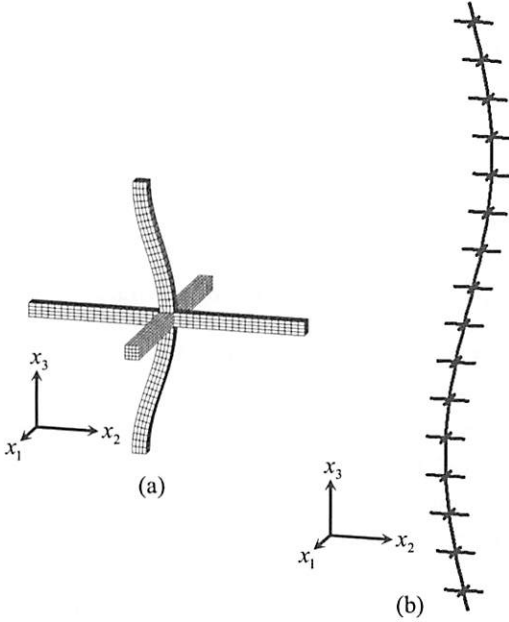


Fig. 4. Buckling mode for  $h/l=0.05$ ; (a)  $Y$ , (b)  $Y_{U16}$ .

ることがわかる。したがって、以後の検討は周期単位  $Y_{UN}$  を用いて行う。

周期単位  $Y$  と  $Y_{U16}$  の微視的分岐点での座屈モードを Fig.4 に示す。微視的分岐点はいずれも多重分岐であったが、 $x_1$  方向と  $x_2$  方向への対称性と、長波長座屈の波動性を考慮<sup>(4),(6)-(8)</sup> することによって、Fig.4 に示される座屈モードが得られた。

Fig.3 の巨視的応力-ひずみ関係から、Fig.4(a) に示される周期単位  $Y$  の単位セル座屈よりも Fig.4(b) に示される周期単位  $Y_{U16}$  の長波長座屈のほうが早期に発生することがわかる。すなわち、単軸圧縮を受ける立方体フォームには、単位セル座屈ではなく、著者らの正方形ハニカムの面内座屈解析<sup>(6)-(8)</sup> の結果と同様にして、長波長座屈が優先的に生じる。なお、このような長波長の座屈モードは3次元ケルビンセルの有限要素解析でも発生することが知られている<sup>(13),(14)</sup>。

Fig.5 は巨視的不安定の開始点直前での  $\det A$  の値である。 $\varphi = 0$  で最小値を取ることから、巨視的不安定は負荷軸と並

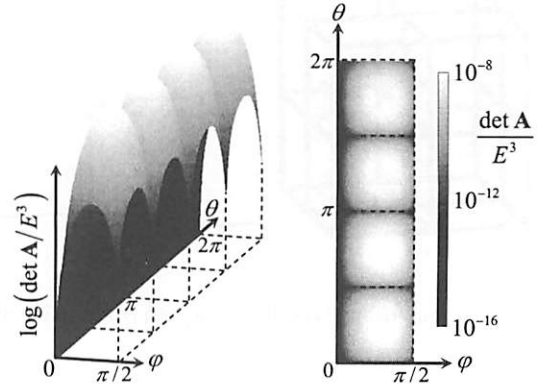


Fig. 5. Distribution of  $\det A$  for  $h/l=0.05$  just before onset of macroscopic instability.

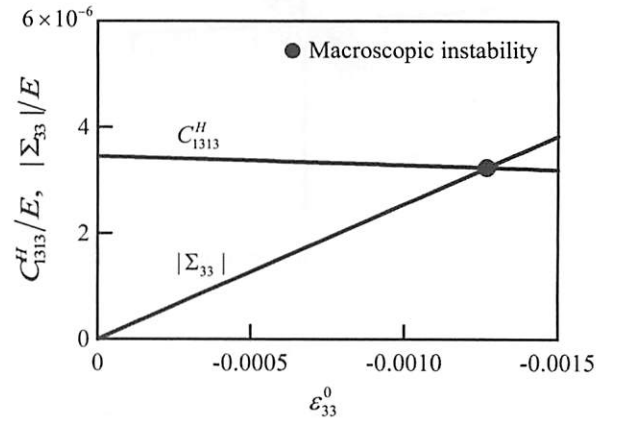


Fig. 6. Onset condition of macroscopic instability illustrated in terms of variations in  $C_{1313}^H$  and  $|\Sigma_{33}|$ .

行な法線  $n_j^0 = (0, 0, 1)$  によって定められる面で生じることがわかった。このとき、固有値解析によって式(22)を満足する方向  $g_k^0$  を求めたところ、アコースティックテンソル  $A_k$  の零固有値は重解となり、2つの方向  $g_k^0 = (0.6964, -0.7175, 0.0000)$ ,  $(0.7175, 0.6964, 0.0000)$  が得られた。2つの方向はいずれも法線を  $n_j^0 = (0, 0, 1)$  とする面内に属しており、2つの方向の任意の線形和も式(22)を満足する方向となる。したがって、単軸圧縮を受ける立方体フォームの巨視的不安定は、負荷軸と垂直な面に発生し、方向はその面内で任意となる。

#### 4. 解析解

この章では、3. 2節の巨視的不安定の解析結果に基づき、式(22)を直接展開することによって、巨視的不安定が生じるときの巨視的応力の解析解を導く。この解析解は、これまでの議論から、無限に長い長波長座屈が生じる場合の座屈応力  $\Sigma_{VLW}$  とみなすことができる。

不安定面の法線  $n_j^0$  が  $x_3$  軸と平行で、変形方向  $g_k^0$  が  $x_1$ - $x_2$  平面内で任意であるとき、式(22)は、式(17)と(21)を用いることによって、次式のように展開できる。

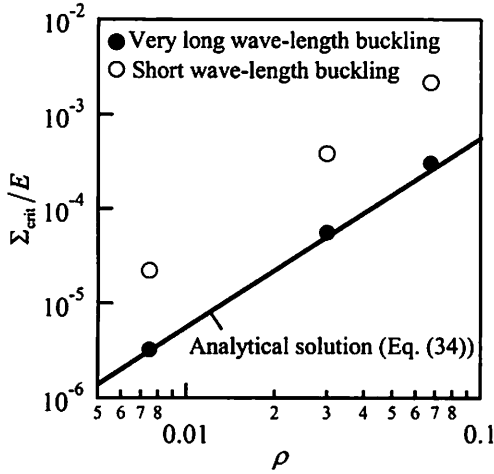


Fig. 7. Compressive strength of cubic foams as a function of relative density  $\rho$ .

$$\begin{cases} A_{11} = C_{1313}^H + \Sigma_{33} = 0 \\ A_{22} = C_{2323}^H + \Sigma_{33} = 0 \\ A_{12} = C_{1323}^H = 0 \\ A_{21} = C_{2313}^H = 0 \end{cases} \quad (29)$$

さらに、単軸圧縮を受ける立方体フォームは幾何学的・力学的に直交異方性の対称条件を満足するため、 $C_{1323}^H = C_{2313}^H = 0$  かつ  $C_{1313}^H = C_{2323}^H$  である<sup>(4),(5)</sup>。したがって、式(29)は次に示す一つの式に帰着する。

$$C_{1313}^H + \Sigma_{33} = 0 \quad (30)$$

上式は巨視的応力の大きさ  $|\Sigma_{33}|$  が巨視的接線係数  $C_{1313}^H$  に達したときに巨視的不安定が生じるということを意味する。

次に、Fig.3 の巨視的応力ひずみ関係からわかるように、巨視的不安定の開始点は十分に微小変形の範囲内にある。また、Fig.6 にも示されるように、巨視的不安定開始点までの巨視的接線係数  $C_{1313}^H$  の変化は、巨視的応力  $|\Sigma_{33}|$  の変化と比較して、十分に小さい。このとき、巨視的接線係数  $C_{1313}^H$  は未変形状態での立方体フォームの巨視的なせん断剛性  $G_{13}$  を用いて置き換えることが可能であり、はりの理論<sup>(15)</sup>を用いて  $G_{13}$  は、

$$G_{13} = \frac{E}{2} \left( \frac{h}{\ell} \right)^4 \quad (31)$$

と求められる (付録参照)。したがって、式(30)と(31)より、座屈応力  $\Sigma_{VLW}$  の解析解

$$\Sigma_{VLW} = \frac{E}{2} \left( \frac{h}{\ell} \right)^4 \quad (32)$$

が得られる。また、寸法比  $h/\ell$  を用いて相対密度  $\rho$  は、

$$\rho = 3 \left( \frac{h}{\ell} \right)^2 \quad (33)$$

と表される (付録参照)。このとき、式(32)は相対密度  $\rho$  を用いて次のように書くことができる。

$$\Sigma_{VLW} = \frac{1}{18} E \rho^2 \quad (34)$$

## 5. 考 察

式(34)を検証するため、3章で行った解析を、 $h/\ell=0.05$  だけでなく、 $h/\ell=0.1, 0.15$  の場合についても行った。これらの値は、式(33)を用いて相対密度に換算すると  $\rho=0.0075, 0.03, 0.0675$  であり、一般的なフォーム<sup>(2)</sup>の相対密度に相当する。

Fig.7 は座屈応力と相対密度の関係である。図中には、本研究で導いた式(34)が実線で描かれており、有限要素解析の結果が印で示されている。ここで、●印は巨視的不安定の開始応力、すなわち長波長座屈が生じる場合の座屈応力であり、○印は  $Y$  の微視的座屈応力、すなわち単位セル座屈が生じる場合の座屈応力である。この図から、本研究で導いた式(34)の解析解が長波長座屈の座屈応力を正しく予測することがわかる。

本研究で導いた式(34)と Gibson-Ashby の式(1), (2)を比較することはたいへん興味深い。なぜなら、Gibson-Ashby が立方体セルモデルの座屈を考えることによって導いた式(1)と、本研究によって立方体フォームの長波長座屈を考慮して導出した式(34)は、係数の部分を除いて完全に同形であるからである。さらに、Gibson-Ashby は、実験結果との比較から係数  $C$  を 0.05 と定め、式(2)を得たのに対して、式(34)の係数は  $1/18=0.056$  であった。したがって、両者が予測する座屈応力はほとんど等しく、どちらも立方体フォームが長波長座屈する場合の座屈応力を精度よく予測するといえる。また、この結果は、実際のフォームの実験においても単位セル座屈ではなく長波長座屈が発生している可能性を示唆する。

## 6. 結 言

本研究では、均質化理論を用いて、単軸圧縮を受ける立方体フォームの微視的座屈と巨視的不安定の解析を行った。また、巨視的不安定条件から長波長座屈が生じる場合の座屈応力の解析解を導き、その検証を行った。得られた知見は次のようにまとめられる。

単軸圧縮を受ける立方体フォームには、負荷軸方向に周期単位依存性を有する微視的座屈が生じた。この微視的座屈点は、大きな周期単位ほど、早期に出現し、巨視的不安定の開始点に漸近した。この結果は Bloch の定理に基づく理論や正方形ハニカムの面内座屈解析の結果と一致することから、巨視的不安定の開始点は無限に大きな周期単位に長波長座屈が生じる場合の座屈応力とみなすことができる。

巨視的不安定の開始条件から、長波長座屈が発生する場合の座屈応力の解析解を導出した。また、数値解析の結果と比較することによって、解析解の妥当性を確認した。この解析解は、相対密度の 2 乗と比例関係を有しており、Gibson-Ashby の解析解と同形であった。さらに、本研究では解析的に係数の値が得られ、この値は Gibson-Ashby が実験結果との比較によって定めた値とほとんど等しかった。

立方体フォームに長波長座屈が発生することを示し、長波長の座屈モードが生じる場合の座屈応力の解析解を導いたことは、本研究の大きな成果である。

付 録

せん断応力  $\tau$  を受ける立方体フォーム (Fig.8) を考えることによつて, 立方体フォームのせん断剛性  $G_{13}$  を求めることができる。まず, Fig.8 に示すように, せん断応力  $\tau$  を受ける立方体フォームのはりの端面 a~d には力  $F$  が作用する。ここで,

$$F = \tau \ell^2 \quad (35)$$

である。このとき, 変位  $\delta$  は, はりの理論<sup>(15)</sup>を用いて,

$$\delta = \frac{F}{3EI} \left( \frac{\ell}{2} \right)^3 \quad (36)$$

と求められ, 立方体フォームに生じるせん断ひずみ  $\gamma$  は,

$$\gamma = \frac{4\delta}{\ell} \quad (37)$$

と書ける。また, 立方体フォームの断面二次モーメント  $I$  は, 一辺が  $h$  の正方形であることから,  $I = h^4/12$  である。したがつて, 式(35)~(37)を用いることによつて, 立方体フォームの巨視的なせん断剛性は,

$$G_{13} = \frac{\tau}{\gamma} = \frac{E}{2} \left( \frac{h}{\ell} \right)^4 \quad (38)$$

と導かれる。なお, Fig.8 の立方体中に含まれる材料の体積は, 寸法比  $h/\ell$  が 1 より十分小さい場合には,  $3h^2\ell$  と求められる。したがつて, 立方体フォームの相対密度  $\rho$  は式(33)と与えられる。

参考文献

(1) M.F. Ashby, A. Evans, N.A. Fleck, L.J. Gibson, J.W. Hutchinson, H.N.G. Wadley: Metal foams; A design guide, (2000), Butterworth-Heinemann.  
 (2) L.J. Gibson, M.F. Ashby: Cellular solids; Structure and properties, (1997), Cambridge university press.  
 (3) N. Ohno, D. Okumura, H. Noguchi: Microscopic symmetric bifurcation condition of cellular solids based on a homogenization theory of finite deformation, J. Mech. Phys. Solids, **50**(2002), pp.1125-1153.  
 (4) D. Okumura, N. Ohno, H. Noguchi: Elastoplastic microscopic bifurcation and post-bifurcation behavior of periodic cellular solids, J. Mech. Phys. Solids, **52**(2004), pp.641-666.  
 (5) D. Okumura, N. Ohno, H. Noguchi: Post-buckling analysis of elastic honeycombs subject to in-plane biaxial compression, Int. J. Solids Struct., **39**(2002), pp.3487-3503.  
 (6) N. Ohno, T. Niikawa, D. Okumura: Long-wave buckling of elastic square honeycombs subject to in-plane biaxial

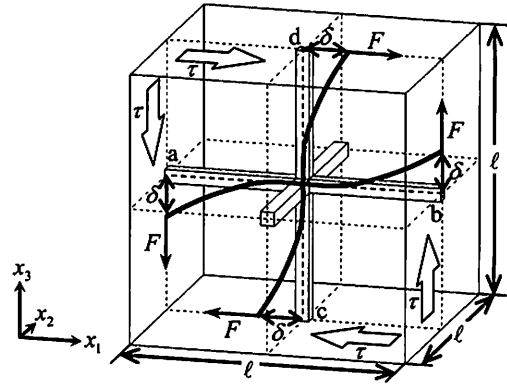


Fig. 8. Deformation of cubic cell subject to shear stress.

compression, Int. J. Mech. Sci., **46**(2004), pp.1697-1713.  
 (7) D. Okumura, T. Niikawa, N. Ohno: Long-wave in-plane buckling of elastic square honeycombs, Mech. Adv. Mater. Struct., **12**(2005), pp.175-183.  
 (8) K. Erami, N. Ohno, D. Okumura: Long-wave in-plane buckling of elastoplastic square honeycombs, Int. J. Plasticity, **22**(2006), pp.1569-1585.  
 (9) R. Hill: Elastic properties of reinforced solids: some theoretical principles, J. Mech. Phys. Solids, **11**(1963), pp.357-372.  
 (10) N. Triantafyllidis, B.N. Maker: On the comparison between microscopic and macroscopic instability mechanisms in a class of fiber-reinforced composites, ASME J. Appl. Mech., **52**(1985), pp.794-800.  
 (11) G. Geymonat, S. Müller, N. Triantafyllidis: Homogenization of nonlinearly elastic materials, microscopic bifurcation and macroscopic loss of rank-one convexity, Arch. Ration. Mech. Anal., **122**(1993), pp.231-290.  
 (12) 松田哲也, 奥村 大, 大野信忠, 徳田正孝: 均質化理論を用いたクロスプライ積層板の層間およびその近傍における微視的3次元解析, 計算数理工学論文集, **4**(2004), pp.69-74.  
 (13) M. Laroussi, K. Sab, A. Alaoui: Foam mechanics: nonlinear response of an elastic 3D-periodic microstructure, Int. J. Solids Struct., **39**(2002), pp.3599-3623.  
 (14) L. Gong, S. Kyriakides, N. Triantafyllidis: On the stability of Kelvin cell foams under compressive loads, J. Mech. Phys. Solids, **53**(2005), pp.771-794.  
 (15) S.P. Timoshenko, J.M. Gere: Theory of elastic stability-Second edition, (1961), McGraw-Hill.