

境界要素法を用いるときに見かけの固有値問題が生じる 音場の高精度固有値解析

ACCURATE EIGENVALUE ANALYSIS OF ACOUSTIC PROBLEMS WITH THE FICTITIOUS EIGENVALUE ISSUE IN USING BOUNDARY ELEMENT METHOD

田中 正隆¹⁾, 荒井 雄理²⁾, 志水 克大³⁾

Masataka TANAKA, Youri ARAI and Yoshihiro SHIMIZU

- 1) 信州大学工学部 (〒380-8553 長野市若里 4-17-1, E-mail: dtanaka@gipwc.shinshu-u.ac.jp)
 2) 信州大学大学院工学系研究科 (〒380-8553 長野市若里 4-17-1, E-mail: youri@artist.shinshu-u.ac.jp)
 3) 信州大学大学院工学系研究科 (〒380-8553 長野市若里 4-17-1, E-mail: y-shimizu@artist.shinshu-u.ac.jp)

This paper is concerned with an accurate eigenvalue analysis of acoustic problems governed by Helmholtz equation, avoiding the fictitious eigenvalue problem in using the boundary element method. It is well known that, without any care, the solution of such an external acoustic problem is violated at the eigenfrequencies of the internal problem, when the boundary integral equation method is applied. As a method to avoid the fictitious eigenvalue problem, Tanaka et al. recently proposed the new method in which the Burton-Miller integral equation is used at the some nodes of element, while the normal derivative boundary integral equation multiplied by some parameter is applied to the other nodes of element. This method successfully avoids the fictitious eigenvalue issue. The present paper demonstrates that the fictitious eigenvalue issue also occurs when the external domain is finite, but includes in it internal domains without vibration. The paper also reports how to recognize explicitly the eigenfrequencies of the acoustic problem under consideration and calculate these accurate values.

Key Words: Computational Mechanics, Boundary Element Method, Acoustics, Sound, Helmholtz Equation, Boundary Integral Equation, Eigenvalue, Eigenfrequency, Fictitious Eigenfrequency

1. 緒言

Helmholtz 方程式により支配される音響問題において、境界積分方程式を用いて無限領域を含む外部境界値問題を解く際に、見かけの固有値問題の影響により解の精度が著しく低下することが知られている⁽¹⁾⁽²⁾。この見かけの固有値問題が生じる原因は、振動しない部分を内部に含む外部問題を解く場合に、外部問題の境界積分方程式が内部領域で音圧が0となることを保証しないことにある。Helmholtz 方程式に支配される外部境界値問題を取り扱う場合、この見かけの固有値問題を回避して精度の良い解を求めなければならない。

田中ら⁽³⁾は最近、見かけの固有値問題を回避する手法として、Burton-Miller 法⁽⁴⁾⁽⁵⁾より計算効率が良い方法を提案した。Burton-Miller 法とは、通常の境界積分方程式(OBIE)とそれを微分した法線方向導関数境界積分方程式(NDBIE)

を線形結合した式を境界積分方程式として用いる方法である。田中らの方法は、この結合境界積分方程式と法線方向導関数境界積分方程式(NDBIE)に同じ結合係数を掛けた境界積分方程式とを、境界上でのソース点の位置によって使い分けるものである。本論文では、見かけの固有値問題が無限領域を含む外部境界値問題だけでなく、有限領域であっても内部に密閉された領域を含む音場の問題を解く際にも生じることを示し、このような問題において田中らの方法により見かけの固有値問題が回避できることを示す。

一方、音響問題では固有振動数を求めることは実用上極めて重要である。境界要素解析では、最終的に得られる連立方程式の未知境界量の係数マトリックスの行列式の値が0となる振動数を探索し、固有振動数を求める方法が一般的である。しかし、行列式の値が明確には0に近づかず、固有振動

数を判別するのが困難な場合が多い。そこで本研究では、神谷ら⁽⁶⁾が音響問題にMRMを適用したときに用いた手法により、考察中の音場の固有値（振動数）を探索する。この探索方法と田中らの上記の提案手法⁽³⁾を用いて、見かけの固有値問題を回避し、高精度に音場の固有振動数を求める方法を提示する。その有効性を数値解析例より実証する。

2. 理論的側面

外部境界値問題を境界積分方程式を用いて解く場合に、対応する内部問題の固有振動数に等しい周波数において方程式系が不定となり、物理的に意味の無い解が得られてしまう。これを見かけの固有値問題と呼んでいる⁽²⁾。田中ら⁽³⁾は、この見かけの固有値問題を回避するために新しい手法を提案している。この手法は、境界上の全節点に対してBurton-Miller型の結合境界積分方程式を適用するのではなく、要素を構成する節点で結合境界積分方程式とその結合係数を乗じた導関数境界積分方程式の2式を使い分けることで見かけの固有値問題を回避する手法である。2次元問題に2次境界要素を用いる境界要素解析では次のようになる。すなわち、要素端点で結合係数を乗じた導関数境界積分方程式を適用し、中間節点で結合境界積分方程式を適用する、あるいは要素端点で結合境界積分方程式を適用し、中間節点で結合係数を乗じた導関数境界積分方程式を適用するという2つの可能性がある。どちらの適用方法でも見かけの固有振動数の影響を回避した解が得られることを確認している⁽³⁾が、本論文では前者の適用方法による数値結果を示す。

2.1. 境界積分方程式 (OBIE)

ここでは、本研究で用いる境界積分方程式とその法線方向導関数境界積分方程式の定式化について簡単に記述する。

微小振幅の振動を考慮のものとし、角振動数 ω で定常振動している場合には、音場の支配微分方程式は次の非同次Helmholtz方程式となる^(7, 8)。

$$\nabla^2 p(x) + k^2 p(x) + f(x) = 0 \quad (1)$$

ただし、 $p(x)$ は音圧、 $f(x)$ は内部音場の集中音源等を表すソース項であり、 k は波数である。

式(1)において、境界条件は以下のように与えられる。

$$p(x) = \bar{p}(x) \quad (2)$$

$$q(x) = \frac{\partial p}{\partial n}(x) = \bar{q}(x) \quad (3)$$

ただし、 $q(x)$ は境界の外向き法線方向の粒子速度 $v(x)$ と媒質密度 ρ を用いて以下のように表すことができる。

$$q(x) = -i\omega\rho v(x) \quad (4)$$

Helmholtz方程式(1)に対して、関数 $f(x)$ に集中音源を想定し境界要素積分方程式の定式化を行い、最終的に以下の正則化された境界積分方程式を得る⁽¹⁾⁽⁹⁾。

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} \{q^*(x, y) - \bar{Q}^*(x, y)\} p(x) d\Gamma(x) \\ & + \int_{\Gamma} \bar{Q}^*(x, y) \{p(x) - p(y)\} d\Gamma(x) \\ & = -i\omega\rho \int_{\Gamma} p^*(x, y) v(x) d\Gamma(x) + I p^*(x^s, y) \end{aligned} \quad (5)$$

ただし I は集中音源の強さであり、 x^s は音源の座標である。また、基本解の成分はそれぞれ次のようである。

$$p^*(x, y) = -\frac{i}{4} H_0^{(2)}(kr) \quad (6)$$

$$q^*(x, y) = \frac{i}{4} k H_1^{(2)}(kr) \frac{\partial r}{\partial n}(x) \quad (7)$$

$$\bar{Q}^*(x, y) = -\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial r}{\partial n}(x) \quad (8)$$

ここで r はソース点 y と観測点 x との距離であり、 $H_0^{(2)}$ 、 $H_1^{(2)}$ はそれぞれ0次と1次の第2種Hankel関数である。

通常の音響問題では、境界積分方程式(5)を境界要素で離散化して音圧 p と粒子速度 v に関する代数方程式を求め、この方程式系に境界条件を適用して解けばよい⁽¹⁾。しかし、本研究で取り扱う問題では見かけの固有値問題の影響により、ある周波数では物理的に意味のない解が得られる。そこで以下に示す法線方向導関数境界積分方程式を準備する。

2.2. 法線方向導関数境界積分方程式 (NDBIE)

本研究で用いる法線方向導関数境界積分方程式は、境界積分方程式(5)をソース点 y で微分した関係を、音圧の勾配が一樣である場を考慮して正則化⁽¹⁰⁾⁽¹¹⁾した次の式である。

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} \{\bar{q}^*(x, y) - \bar{Q}^*(x, y)\} p(x) d\Gamma(x) \\ & + \int_{\Gamma} \bar{Q}^*(x, y) \{p(x) - p(y) - r_m(x, y) p_{,m}(y)\} d\Gamma(x) \\ & = -i\omega\rho \int_{\Gamma} \{\bar{p}^*(x, y) - \bar{u}^*(x, y)\} v(x) d\Gamma(x) \\ & - i\omega\rho \int_{\Gamma} \bar{u}^*(x, y) \{v(x) - n_m(x) p_{,m}(y)\} d\Gamma(x) \\ & + I \bar{p}^*(x^s, y) \end{aligned} \quad (9)$$

ただし $r_m = x_m - y_m$ であり、 n_m は外向き単位法線ベクトルの成分である。また $\bar{()}\equiv\partial()/\partial n(y)$ であり、基本解の各成分は以下ようになる。

$$\bar{u}^*(x, y) = -\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial r}{\partial n}(y) \quad (10)$$

$$\bar{Q}^*(x, y) = \frac{1}{2\pi r^2} \left\{ 2 \frac{\partial r}{\partial n}(x) \frac{\partial r}{\partial n}(y) + n_j(x) n_j(y) \right\} \quad (11)$$

$$\bar{p}^*(x, y) = \frac{i}{4} k H_1^{(2)}(kr) \frac{\partial r}{\partial n}(y) \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \bar{q}^*(x, y) &= \frac{i}{4} k \left[k H_0^{(2)}(kr) \frac{\partial r}{\partial n}(x) \frac{\partial r}{\partial n}(y) \right. \\ & \left. - H_1^{(2)}(kr) \frac{1}{r} \left\{ n_j(x) n_j(y) + 2 \frac{\partial r}{\partial n}(x) \frac{\partial r}{\partial n}(y) \right\} \right] \end{aligned} \quad (13)$$

本研究では、式 (9) に結合係数を乗じたものを式 (5) に加えた Burton-Miller の境界積分方程式⁽⁵⁾ を 2 次境界要素の要素中点で用い、要素端点では式 (9) に同じ結合係数を乗じた境界積分方程式を用いる。

3. 固有振動数の探索方法

本研究では、神谷ら⁽⁶⁾ が音響問題の固有値を MRM で求める際に用いた方法に従って固有振動数を探索する。その固有振動数の探索方法について簡単に説明する。

境界要素法による定式化の後、離散化を行うことで次の連立方程式を得る。

$$H(k)p = G(k)v \quad (14)$$

ただし、 p は境界上での音圧、 v は粒子速度を表す。

ここで、音圧規定境界 Γ_p 、粒子速度規定境界 Γ_v において次のような同次境界条件を与える。

$$\left. \begin{array}{l} p = 0 \\ v = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{on } \Gamma_p \\ \text{on } \Gamma_v \end{array} \quad (15)$$

このとき、式 (15) は次のようになる。

$$[H_p \ H_v] \begin{Bmatrix} 0 \\ p_v \end{Bmatrix} = [G_p \ G_v] \begin{Bmatrix} v_p \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (16)$$

ただし、添字 p, v は、音圧規定境界 Γ_p 、粒子速度規定境界 Γ_v に関する成分を示す。式 (16) を移項して次式を得る。

$$[-G_p \ H_v] \begin{Bmatrix} v_p \\ p_v \end{Bmatrix} = [-H_p \ G_v] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (17)$$

式 (17) を書き換えて次のように表す。

$$A(k)x = B(k)0 \quad (18)$$

波数 k が固有振動数 k_e に等しいとき、連立方程式 (18) は非自明解 x_e (固有ベクトル) をもつ。固有ベクトル x_e は、連立方程式 (18) を満たす非自明解 x の各成分の比である。そこで、 x の t 番目の成分を $x_t = 1$ とおき、右辺の零ベクトル 0 の t 番目の成分を η と置き換えた次の式を考える。

$$A(k) \begin{Bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{t-1} \\ 1 \\ x_{t+1} \\ \vdots \\ x_N \end{Bmatrix} = B(k) \begin{Bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \eta \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (19)$$

ただし、 N は節点数、 $1 \leq t \leq N$ である。

式 (19) を移項し変形することにより次式を得る。

$$[a_1 \ \cdots \ -b_t \ \cdots \ a_N] \begin{Bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \eta \\ \vdots \\ x_N \end{Bmatrix} = -a_t \quad (20)$$

ただし、 a_i, b_i は $A(k), B(k)$ の i 番目の列ベクトルである。

連立方程式 (20) を満たす $\eta = 0$ である解が存在するとき、連立方程式 (18) は固有ベクトル x_e をもつ。よって、連立方程式 (20) を解いて得られる η の値を調べたとき、 $\eta = 0$ となる k の値が固有振動数 k_e である。

4. 数値解析結果と考察

4.1. 例題 1

解析モデル 1 として図 1 に示すような二重円筒を考え、内側の円筒と外側の円筒に囲まれた領域を考察領域とする。内側の円筒は、境界表面が一樣な粒子速度 v で振動する呼吸円筒とし、外側の円筒は剛体とする。媒質密度 $\rho = 1.2[\text{kg}/\text{m}^3]$ 、伝播速度 $c = 340.0[\text{m}/\text{s}]$ とする。内側の円筒の半径 $a = 0.15[\text{m}]$ とし、外側の円筒の半径 $b = 0.20[\text{m}]$ とする。内側の円筒の表面は $v = 1.0[\text{m}/\text{s}]$ の境界条件を与え、外側の円筒の表面は $v = 0[\text{m}/\text{s}]$ の境界条件を与える。評価点は、内側の円筒上に 4 点均等に配置した。内側と外側の円筒それぞれについて 2 次アイソパラメトリック要素を用いて一樣に境界要素分割するとし、それぞれの円筒の全要素数は 384 とする。周波数は、 $1[\text{Hz}] \sim 4[\text{kHz}]$ を $1[\text{Hz}]$ 刻みで解析を行なった。

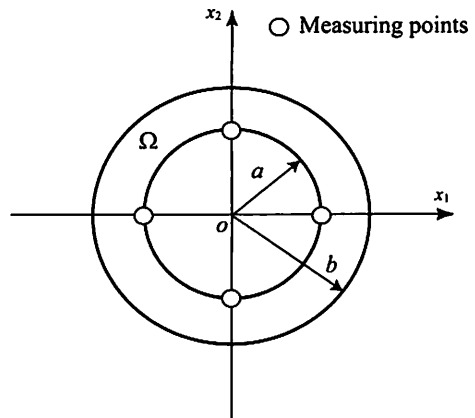


Fig. 1 Analysis model 1

解析を行った結果、内側の円筒の内部 Dirichlet 問題の固有振動数付近で通常の境界積分方程式 (OBIE) による数値解析解が乱れた。1[Hz] から解析を行った際に、初めに数値解析解が乱れる振動数付近と、その次に数値解析解が乱れる振動数付近の通常の境界積分方程式 (OBIE) および提案手法による数値解析結果を図 2、図 3 に示す。図 2、図 3 には比較のために Burton-Miller の方法による数値解析結果も示してある。この数値解析結果は、評価点 4 点での音圧の平均値の音圧レベル (SPL) を示しており、 ka は波数 k に解析モデル 1 の内側

の円筒の半径 a を乗じて無次元化した波数である。提案手法および Burton-Miller 法において法線方向導関数境界積分方程式 (NDBIE) に乗じる係数は Cunefare-Koopmann⁽⁵⁾ に従い i/k とした。解析モデル 1 の本来の固有振動数は内側の円筒の内部 Dirichlet 問題の固有振動数とは異なる。そのため、図 2、図 3 に示されるような通常の境界積分方程式 (OBIE) による数値解析解の乱れは、見かけの固有値問題による解の乱れであると考えられる。一方、図 2、図 3 に示すように提案手法による数値解析解は乱れず、Burton-Miller 法に一致する結果が得られることを確認した。

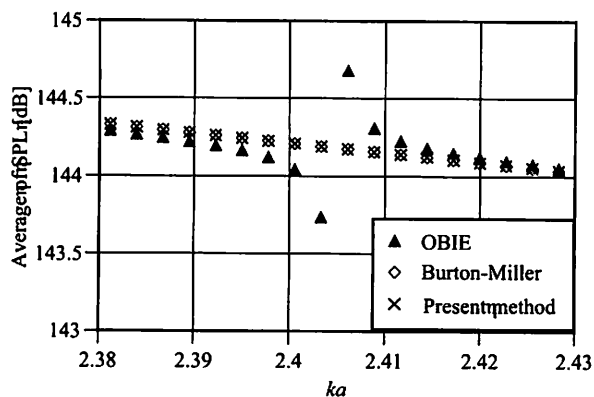


Fig. 2 SPL for analysis model 1 obtained by OBIE, Burton-miller and present method between $ka=2.38$ and 2.43

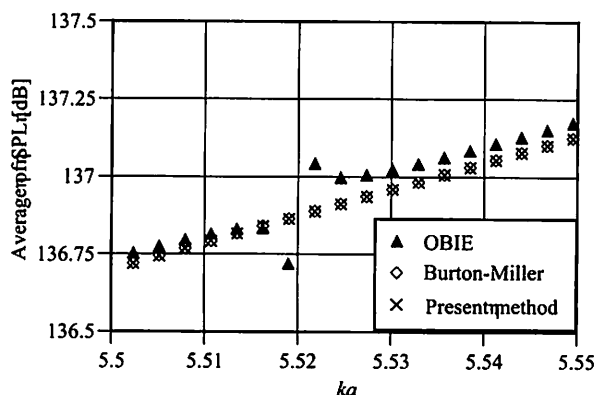


Fig. 3 SPL for analysis model 1 obtained by OBIE, Burton-miller and present method between $ka=5.5$ and 5.55

次に、解析モデル 1 の固有振動数を求めることを考える。上で示したように、この解析モデルにおいては見かけの固有値問題が生じる。この見かけの固有値問題を回避するため、提案手法に 3 章で示した方法を導入し固有振動数を求める。

提案手法で解析モデル 1 を、周波数範囲 1 [Hz]~4 [kHz] において 1 [Hz] 刻みで解析した際の未知境界量の係数行列の行列式の絶対値を図 4 に示す。そして、提案手法に 3 章で示した方法を導入し解析した際の η の絶対値を図 5 に示す。

図 4 に示すように、行列式の絶対値が 0 となる、数値解析的には 0 に近づく波数を確認することができず、行列式の値からこの問題の固有振動数を求めることは困難であることが分かる。Burton-Miller 法においても同様に、行列式の値から固有振動数を求めることが困難であることを確認してい

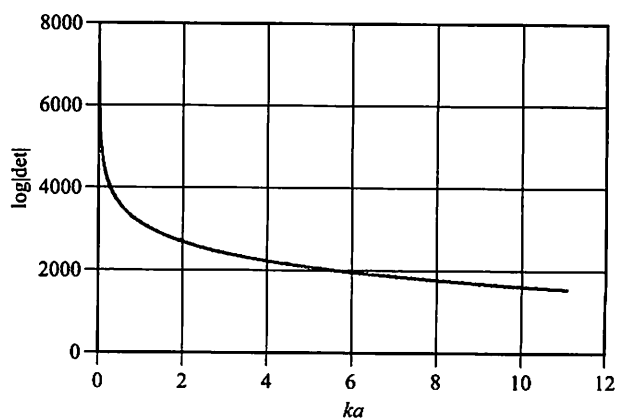


Fig. 4 Absolute determinant value of coefficient matrix for analysis model 1 in present method

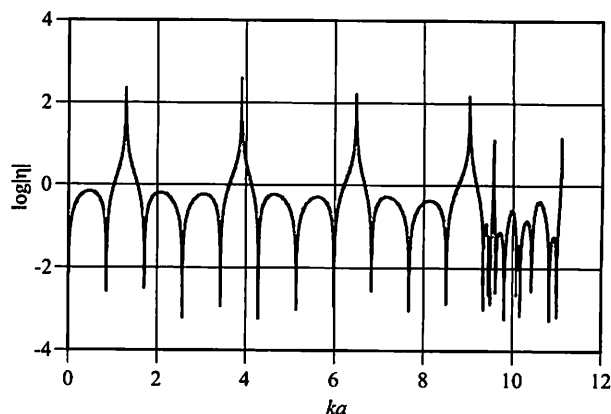


Fig. 5 Absolute value of η for analysis model 1 in present method

る。一方、図 5 に示すように η の値では $|\eta|$ の値が 0 に近づく波数を確認することができる。 $|\eta|$ の値が 0 に近づく波数は、この問題の固有振動数であると考えられる。

ここで、この問題の固有振動数の厳密解は次式で表される固有方程式を満たす波数 k である⁽⁸⁾。

$$J'_n(ka)Y'_n(kb) - J'_n(kb)Y'_n(ka) = 0 \quad n = 1, 2, \dots \quad (21)$$

ただし、 J_n , Y_n はそれぞれ n 次の第 1 種 Bessel 関数、第 2 種 Bessel 関数、 a , b はそれぞれ解析モデル 1 の内側と外側の円筒の半径である。

η の値から正確な固有振動数が求められることを確認するために、Newton 法により $|\eta|$ の値が最小となる波数を求めた。Newton 法における初期値は、 $|\eta|$ の値が 0 に近づく波数近傍の値としている。Newton 法により得られた $|\eta|$ の値が最小となる波数と厳密解、およびそれら 2 つの値の相対誤差を、いくつかのモードについて表 1 に示す。ただし、表 1 に示される波数は、解析モデル 1 の内側の円筒の半径 a で無次元化した波数 ka である。また、厳密解は式 (21) を満たす波数 k を Newton 法により求めている。

表 1 から、Newton 法を用いて求めた $|\eta|$ の値が最小となる波数と、厳密解との相対誤差は非常に小さいことが分かる。

このことから、 η の値から固有振動数を求めることができると分かる。

Table 1 Eigenfrequencies estimated by η and relative error of estimated and analytical eigenfrequencies.

Mode	Estimated	Analytical	Relative error [%]
(1,1)	0.859994769	0.859992337	0.0002828
(2,1)	1.719407269	1.719402539	0.0002751
(3,1)	2.577659027	2.577652022	0.0002718
(4,1)	3.434179476	3.434170004	0.0002758
(5,1)	4.288413195	4.288399107	0.0003285
(6,1)	5.139820474	5.139802828	0.0003433
(7,1)	5.987896552	5.987875156	0.0003573
(8,1)	6.832184324	6.832152317	0.0004685
(9,1)	7.672263317	7.672226122	0.0004848
(10,1)	8.507800281	8.507757945	0.0004976

4.2. 例題 2

解析モデル 2 として、図 6 に示すように円筒の外側を矩形で囲んだモデルを考える。内側の円筒と外側の矩形に囲まれた領域を考察領域とする。内側の円筒は、境界表面が一様な粒子速度 v で振動する呼吸円筒とし、外側の矩形は剛体とする。媒質密度 $\rho = 1.2[\text{kg}/\text{m}^3]$ 、伝播速度 $c = 340.0[\text{m}/\text{s}]$ とする。内側の円筒の半径 $a = 0.15[\text{m}]$ とし、外側の矩形の一辺の長さ $2l = 0.20[\text{m}]$ とする。内側の円筒の表面は $v = 1.0[\text{m}/\text{s}]$ の境界条件を与え、外側の矩形の表面は $v = 0[\text{m}/\text{s}]$ の境界条件を与える。評価点は、内側の円筒上に 4 点均等に配置した。内側の円筒と外側の矩形それぞれについて 2 次アイソパラメトリック要素を用いて一様に境界要素分割するとし、内側の円筒の全要素数は 384、外側の矩形の全要素数は 496 とする。周波数は、1[Hz]~4[kHz] を 1[Hz] 刻みで解析を行なった。

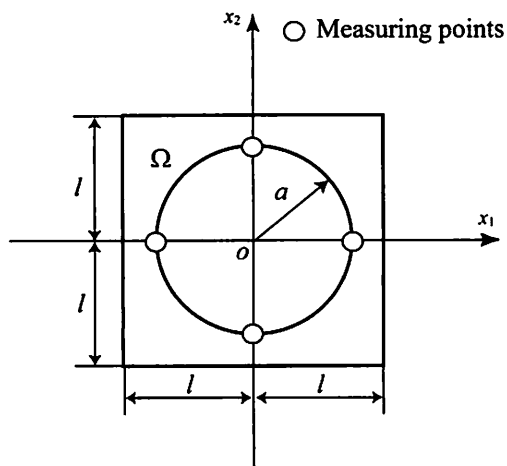


Fig. 6 Analysis model 2

解析を行った結果、解析モデル 1 と同様に内側の円筒の内部 Dirichlet 問題の固有振動数付近で通常の境界積分方程式 (OBIE) による数値解析解は乱れた。1[Hz] から解析を行った際に、初めに数値解析解が乱れる振動数付近と、その次に数値解析解が乱れる振動数付近の通常の境界積分方程式 (OBIE) および提案手法による数値解析結果を図 7、図 8 に示す。図 7、図 8 には比較のために Burton-Miller の方法による数値解析結果も示してある。この数値解析結果は、評価

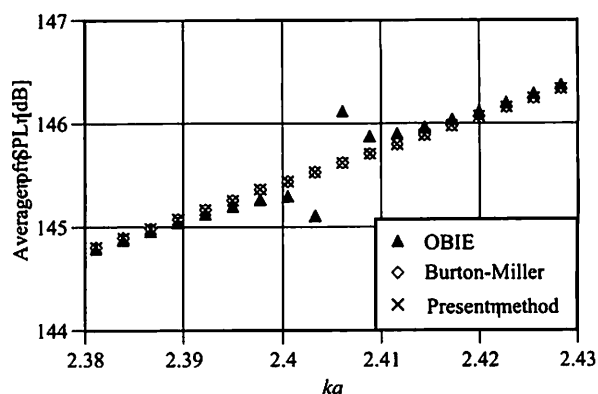


Fig. 7 SPL for analysis model 2 obtained by OBIE, Burton-miller and present method between $ka=2.38$ and 2.43

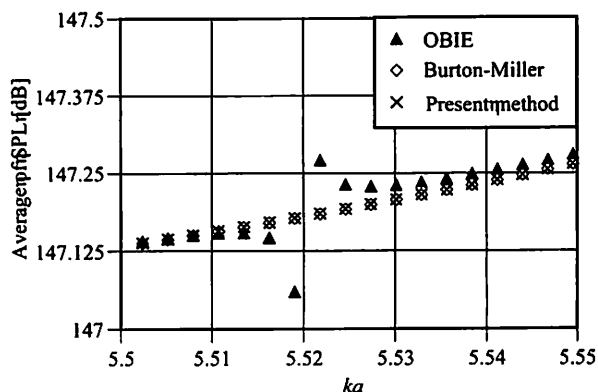


Fig. 8 SPL for analysis model 2 obtained by OBIE, Burton-miller and present method between $ka=5.5$ and 5.55

点 4 点での音圧の平均値の音圧レベル (SPL) を示しており、 ka は波数 k に解析モデル 2 の内側の円筒の半径 a を乗じて無次元化した波数である。提案手法および Burton-Miller 法において法線方向導関数境界積分方程式 (NDBIE) に乗じる係数は、例題 1 と同様に i/k とした。通常の境界積分方程式 (OBIE) による数値解析解は、解析モデル 1、解析モデル 2 とともに内側の円筒の内部 Dirichlet 問題の固有振動数において乱れた。そのため、これらの通常の境界積分方程式 (OBIE) による数値解析解の乱れは解析モデル 1、解析モデル 2 で内側の円筒を取り囲む外側の境界形状には依存しない。従って、解析モデル 2 における図 7、図 8 に示すような通常の境界積分方程式 (OBIE) による数値解析解の乱れは本来の固有振動数とは関係がなく、見かけの固有値問題による解の乱れである。一方、図 7、図 8 に示すように提案手法による数値解析解は乱れず、Burton-Miller 法に一致する結果が得られることを確認した。

次に、解析モデル 2 の固有振動数を求めることを考える。解析モデル 1 の場合と同様に提案手法に 3 章で示した方法を導入する。提案手法で解析モデル 2 を、周波数範囲 1[Hz]~4[kHz] において 1[Hz] 刻みで解析した際の未知境界量の係数行列の行列式の絶対値と η の絶対値を図 9、図 10 に示す。

図 9 に示すように、行列式の絶対値が 0 に近づく波数を確

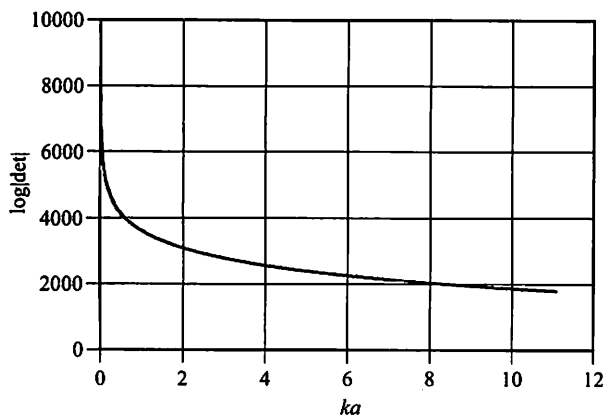


Fig. 9 Absolute determinant value of coefficient matrix for analysis model 2 in present method

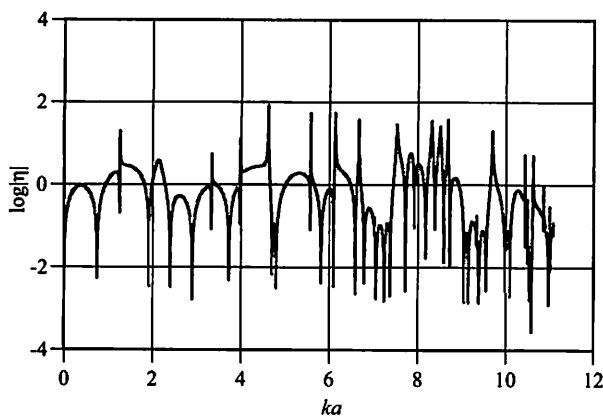


Fig. 10 Absolute value of η for analysis model 2 in present method

認することができず、行列式の値からこの問題の固有振動数を求めることは困難であることが分かる。一方、図 10 に示すように、 η の値では $|\eta|$ の値が 0 に近づく波数を確認することができ、固有振動数を求めることが正確かつ容易にできると言える。

5. 結論

見かけの固有値問題が無限領域を含む問題だけでなく、振動しない部分を内部に含む有限な外部領域の音場の問題を解く際にも生じることを示した。そして、そのような問題に対し著者らの提案手法では見かけの固有値問題を回避し、Burton-Miller 法に一致する結果が得られることを確認した。提案手法は、Burton-Miller 法に比べて係数行列の計算にかかる負担が少なくすむため、見かけの固有値問題の回避手法としてより効率的であると言える。

また、見かけの固有値問題が生じる密閉された内部補領域を含む有限領域の外部音場の問題について、提案手法を用いた場合の固有振動数の探索方法について考察した。この音場の問題に対し、見かけの固有値問題を回避するために提案手法を用いた場合、行列式の値からは固有振動数を正確に求めることが困難であることが分かった。行列式の零点を探索

する代わりに、固有値の新しい探索方法を導入し例題解析を行った。本手法での数値解析結果から、固有振動数を正確に精度良く得られることを示した。

参考文献

- (1) M. Tanaka, T. Matsumoto and M. Nakamura: *Boundary Element Method* (in Japanese), (1991), Baifukan.
- (2) S. Kobayashi(ed.): *Wave Analysis and Boundary Element Method* (in Japanese), (2000), Kyoto University Press Online.
- (3) M. Tanaka, T. Matsumoto and Y. Arai: A boundary element analysis for avoiding the fictitious eigenfrequency problem in acoustic field, *Transactions of the Japan Society of Computational Methods in Engineering*, Vol.5, No.2, (2005), pp.135-138.
- (4) A.J. Burton and G.F. Miller: The application of integral equation methods to the numerical solution of some exterior Boundary-value problems, *Journal of Proceedings of the Royal Society of London, Ser. A*, Vol.323, (1971), pp.201-210.
- (5) K.A. Cunefare and G. Koopmann: A boundary element method for acoustic radiation valid for all wavenumbers, *Journal of the Acoustical Society of America*, Vol.85, No.1, (1989), pp.39-48.
- (6) E. Andoh and N. Kamiya: Eigenvalue analysis of Helmholtz equation by boundary element method, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Ser. C*, Vol.57, No.543, (1991), pp.3457-3462.
- (7) R. Ichimiya: *Acoustical Engineering of Mechanics* (in Japanese), (1992), Corona Publishing Co.
- (8) Acoustical Society of Japan (ed.): *Basic Acoustical Engineering* (in Japanese), (1990), Corona Publishing Co.
- (9) T. Matsumoto and M. Tanaka: An alternative discretization technique for regularized boundary integral equation, *Transactions of the Japan Society of Computational Methods in Engineering*, Vol.1, (1991), pp.7-12.
- (10) T. Matsumoto, M. Tanaka and S. Okayama: Evaluation of the hypersingular and regularized boundary integral equations for the boundary potential gradients in 2D field, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Ser. A*, Vol.64, No.619, (1998), pp.743-750.
- (11) M. Arai, T. Adachi and H. Matsumoto: Highly accurate analysis by boundary element method based on uniform gradient condition (Application for formulation of classical potential problems), *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Ser. A*, Vol.61, No.581, (1995), pp.161-168.