

# 差分格子ボルツマン法に対する流出境界条件の研究

## STUDY OF OUTFLOW BOUNDARY CONDITION FOR FINITE DIFFERENCE LATTICE BOLTZMANN METHOD

葛原 道久<sup>1)</sup>, 平石 雅之<sup>2)</sup>

Michihisa TSUTAHARA, Masayuki HIRAISHI

- 1) 神戸大学大学院自然科学研究科 (〒 657-8501 神戸市灘区六甲台町 1-1, E-mail: tutahara@mech.kobe-u.ac.jp)  
2) 神戸大学大学院自然科学研究科 (〒 657-8501 神戸市灘区六甲台町 1-1, E-mail: hiraishi@mh-1.scitec.kobe-u.ac.jp)

In numerical simulation of fluid dynamics, the computational domain has to be truncated from the physical domain. This truncation gives rise to non-physical artificial boundaries. We present numerical tests of outflow boundary conditions for Finite Difference Lattice Boltzmann Method(FDLBM). A comparison and analysis of various outflow boundary conditions are carried out for some cases. It is shown that convective outflow condition gives good results.

**Key Words:** Finite Difference Method, Outflow Boundary Condition, Computational Fluid Dynamics, Lattice Boltzmann Method

### 1. 緒言

空間発達流を扱った数値シミュレーションにおいては、周期境界条件を用いることができず、現在の計算機の性能では現実の空間に比べ十分に広い計算領域がとれないことも多い。したがって流入出を伴う流れを数値的に取り扱う場合、打ち切られた計算空間の境界上で物理的には存在しない流入出境界を人為的に設定する必要がある。この際、適切な境界条件を与えなければ現実的な解を得ることはできない。

本研究では、差分格子ボルツマン法(以下 FDLBM)に適した新たな流出境界条件を提案し、その有効性について検証する。

### 2. 差分格子ボルツマン法

差分格子ボルツマン法は、格子ボルツマン法(以下 LBM)<sup>(1)</sup>に安定な差分スキームを導入し、格子と離散的粒子速度を独立に扱えるようにした手法である。

#### 2.1. 基礎方程式

一連の粒子運動は速度  $c_i$  を持つ粒子数密度を表す分布関数  $f_i$  を用いて表される。本研究では、格子 BGK モデルに修正項を付加したモデルを使用し、基礎方程式は次式で表される。

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + c_{i\alpha} \frac{\partial f_i}{\partial x_\alpha} - ac_{i\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \frac{f_i - f_i^{(0)}}{\phi} = -\frac{1}{\phi} (f_i - f_i^{(0)}) \quad (1)$$

ここで  $i$  は粒子の方向を表しており、 $i$  について総和を取ら

ないこととし以降も同様である。 $\phi$  は 1 タイムステップにおける時間間隔を基準にとったときの粒子分布が平衡状態に達するまでにかかる時間に相当し、一般に単一時間緩和係数と呼ばれる。 $f_i^{(0)}$  は平衡分布関数である。また添え字  $\alpha$  は直角座標を表し、 $c_{i\alpha}$  は粒子の速度ベクトルの  $\alpha$  成分である。式 (1) の左辺第 3 項は巨視的な式としてのナビエ・ストークス方程式に現れる粘性係数と、単一時間緩和係数との関係を調整する項であり、この項を加えることにより計算を安定に高速化できる<sup>(2)</sup>。右辺は衝突により粒子分布が平衡状態に向かうことを意味する。

FDLBM では LBM の定義同様、格子点における流体のマクロ量は、全粒子の状態を粒子速度のモーメントをかけて足し合わせたものに等しい。したがって格子点上での流体の密度、運動量は分布関数を用いて次のように定義される。

$$\rho = \sum_i f_i \quad (2)$$

$$\rho u_\alpha = \sum_i f_i c_{i\alpha} \quad (3)$$

ここで  $u_\alpha$  は流速ベクトルを表す。ただし本研究では、非熱流体モデルのみでの解析を行っているため、数値計算において流体の内部エネルギーを定義する必要はない。

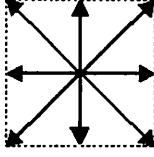


Fig. 1 Distribution of particles in 2D9V model

## 2.2. モデルの詳細

離散化 BGK モデルとして Fig.1 に示す 2次元非熱流体モデル (2D9V モデル) を採用する. 式 (1) における局所平衡分布関数は

$$f_i^{(0)} = t_p \left[ 1 + \frac{c_{i\alpha} u_\alpha}{c_s^2} + \frac{u_\alpha u_\beta}{2c_s^2} \left( \frac{c_{i\alpha} c_{i\beta}}{c_s^2} - \delta_{\alpha\beta} \right) \right] \quad (4)$$

$$c_s = \frac{|c_{i\alpha}|}{\sqrt{3}} \quad (5)$$

$$t_0 = \frac{4}{9}, t_1 = \frac{1}{9}, t_2 = \frac{1}{36} \quad (6)$$

また,  $c_s$  は音速,  $t_0, t_1, t_2$  はそれぞれ静止流体中に占める速度 0, 1,  $\sqrt{2}$  の粒子の割合を表すパラメーターである. 非熱流体モデル場合,  $f_i^{(0)}$  は巨視的な流体の変数である密度と流速によって表され, 流速の 2 次の項まで含む. 流体運動の巨視的な支配方程式であるナビエ・ストークス方程式系は式 (1), 式 (2) および式 (3) から, チャップマン・エンスコグ展開をもちいて導かれる.

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial t} + u_\beta \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left[ \nu \left( \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} \right) \right] \quad (8)$$

また圧力  $p$ , 動粘性係数  $\nu$  は次式で与えられる.

$$p = \frac{1}{3} \rho \quad (9)$$

$$\nu = \frac{1}{3} (\phi - a) \quad (10)$$

## 3. 流出境界条件

FDLBM における流出境界について考察するために, 2D9V モデルを用いて流出境界条件として一様流出条件 (OBC1) を与えた場合と, 境界での主流方向の分布関数の勾配を 0 とする条件 (OBC2) 及び以下に提案する対流流出条件 (OBC3)<sup>(3)(4)</sup> を与えた場合について比較した. ここで対流流出条件は流出

境界において

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u_c \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \quad (11)$$

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial t} + u_c \frac{\partial u_\alpha}{\partial x} = \nu \left( \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial y^2} \right) \quad (12)$$

より  $\rho, u, v$  を与え, これらのマクロ量よりもとめた局所平衡分布関数を境界での分布関数とするものである. 本研究では以下に示すように対流項を 2 次精度の片側差分, 拡散項を  $x$  方向に 1 次精度の片側差分,  $y$  方向に 2 次精度の中心差分を用いて離散化した. 式 (11) 及び (12) を Euler 陽解法を用いて陽的に離散化すると以下ようになる.

$$\frac{\rho_{IN,j}^{n+1} - \rho_{IN,j}^n}{\Delta t} + u_c \frac{2\rho_{IN-3,j}^n - 5\rho_{IN-2,j}^n + 2\rho_{IN-1,j}^n + \rho_{IN,j}^n}{2\Delta x} = 0 \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{u_{IN,j}^{n+1} - u_{IN,j}^n}{\Delta t} + u_c \frac{2u_{IN-3,j}^n - 5u_{IN-2,j}^n + 2u_{IN-1,j}^n + u_{IN,j}^n}{2\Delta x} \\ = \nu \left( \frac{u_{IN-2,j}^n - 2u_{IN-1,j}^n + u_{IN,j}^n}{\Delta x^2} + \frac{u_{IN,j-1}^n - 2u_{IN,j}^n + u_{IN,j+1}^n}{\Delta y^2} \right) \end{aligned} \quad (14)$$

ここで  $IN$  は流出境界上の格子点を表す添え字である. また対流速度  $u_c$  の与え方には一様流の流速を与える場合や境界での断面平均流速を与える場合などがあり任意性があるが (5)(6), 本研究においては以下に示すように境界における主流方向の流速の最大値と最小値の算術平均値を用いて流出境界での渦領域の断面平均流速を近似する方法を用いる.

$$u_c(t) = \frac{\max(u_{IN,j}^n) + \min(u_{IN,j}^n)}{2} \quad (15)$$

この方法では計算領域の大きさに無関係に唯一の対流速度を

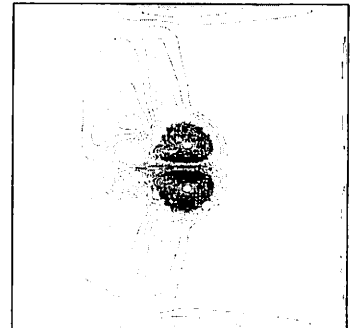


Fig. 2 Iso-vorticity contours at  $t = 5$

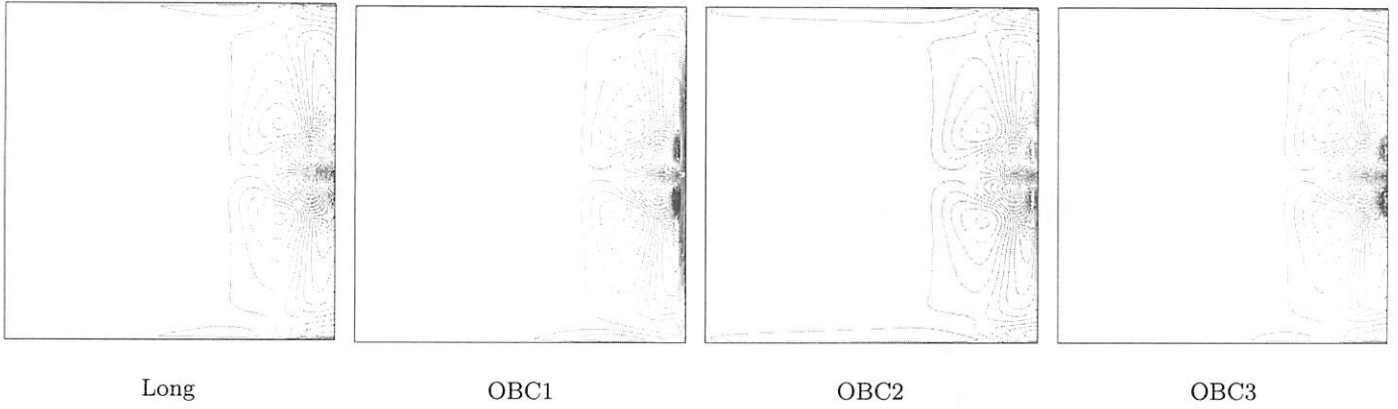


Fig. 3 Iso-vorticity countours at  $t = 10$

求められるため計算上のあいまいさがなく、 $u_c$  は  $y$  によらない定数となるので流れ場全体の流量保存を自動的に満足する (7)。

#### 4. 渦の流出

##### 4.1. 計算条件

まずテストケースとして一様流中に渦を対流させ (Fig.2), 流出境界条件として OBC1, OBC2 及び OBC3 を用いた場合を比較し, 各境界条件が数値解に及ぼす影響を調べる. 計算領域は主流方向の長さ  $L_x$  が異なる二種類を用いた. 一つは  $L_x = 10$  の短領域, もう一つは  $L_x = 30$  の長領域である. また主流に垂直方向の計算領域はどちらも  $L_y = 10$  である. 格子は等間隔であり, 格子数は短領域が  $101(x) \times 101(y)$ , 長領域が  $301(x) \times 101(y)$  である. 基礎方程式の離散化には時間項を 2 次精度の Runge-Kutta 法, 空間には 3 次精度の風上差分を用い, 上下の境界条件は一様流条件とした. 長領域による解析において, 渦の中心が  $L_x = 10$  にあるときの解は流出境界条件によらず良く一致することを確認した. よって, 長領域の解を正しいとみなし, 短領域の解を比較することにより境界条件による影響を確認する.

##### 4.2. 計算結果

Fig.3 に  $t = 10$  における各場合の等渦度線図を示す. Long は長領域における結果である. 流出境界条件として OBC1 及び OBC2 を用いた結果では境界において渦が不自然な変形をしている. 一方, OBC3 を用いた結果は長領域での解析結果と良く一致しており, 不自然な逆流をすることなく渦が流出していることが確認できる.

次に長領域における結果と各条件の結果の相関係数を比較する. ここで相関係数は物理量  $f$  に対して以下のように定義するものとする (8).

$$R_f = \frac{\langle f_1 \cdot f_2 \rangle}{\langle f_1^2 \rangle^{1/2} \langle f_2^2 \rangle^{1/2}} \quad (16)$$

ただし  $\langle f \rangle$  は物理量  $f$  の空間平均を表す.

Fig.4 に渦度  $\omega$  の全計算空間での相関係数  $R_\omega$  の時間変化を示す. OBC1 及び OBC2 の相関係数は時間とともに急速に

低下するのに対して, OBC3 では渦が境界に達した際にも高い相関を示していることが分かる.

#### 5. 2次元角柱周りの流れ

##### 5.1. 計算条件

2次元角柱周りの流れに対して次の3つの場合において計算を行った. まず Case1 では角柱後方に十分広い計算領域を設け (Fig.5), 流出境界に OBC1 を与えた. Case2 では Case1

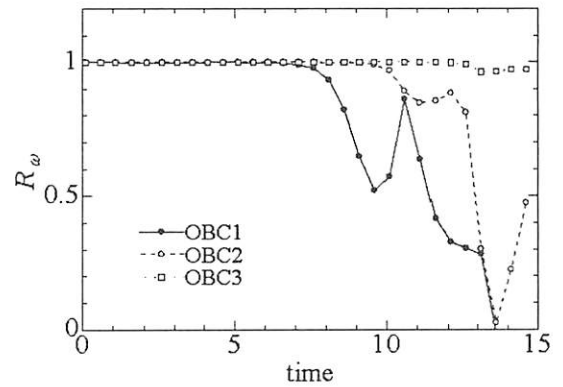


Fig. 4 Time variation of correlation factors about vorticity

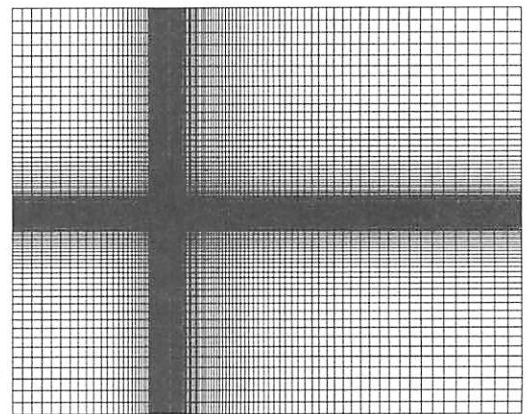


Fig. 5 Calculation mesh (Case1)

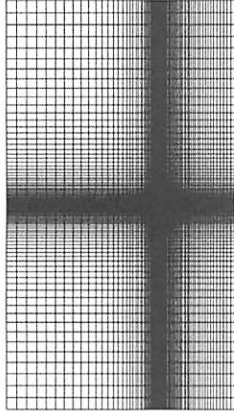


Fig. 6 Calculation mesh (Case2 and Case3)

に比べて角柱後方の計算領域を狭くし (Fig.6), 流出境界には Case1 同様に OBC1 を与えた. Case3 では Case2 と同じ計算領域において計算をおこない, 流出境界には OBC3 を与えた. Case1 における計算領域は角柱の一边の長さ  $d$  に対して主流方向 ( $x/d$  方向) に  $37.0D$  (角柱風下側に  $25.5d$ ), 主流に対して垂直方向 ( $y/d$  方向) に  $30.0d$  とし, 格子数は  $121(x/d) \times 101(y/d)$  とした. また Case2 及び Case3 における計算領域は主流方向 ( $x/d$  方向) に  $16.5d$  (角柱風下側に  $5.0d$ ), 主流に対して垂直方向 ( $y/d$  方向) に  $30.0d$  とし, 格子数は  $88(x/d) \times 101(y/d)$  とした. どちらの場合においても計算格子は不等間隔格子であり, 物体表面付近で格子を密にしている. 最小格子幅は  $\Delta x_{min} = 0.05d$ , また流出境界以外の境界条件として物体上では粘着条件を適用し, 計算空間の上下および左側では一様流を与えた. 基礎方程式の離散化には時間項を 2 次精度の Runge-Kutta 法, 空間には 3 次精度の風上差分法を用いた. 初期条件は流れ場全体を一様流とし, 一様流の流入速度  $U_0$  と角柱一边の長さ  $d$  を用いたレイノルズ数を 100, 時間刻み

を  $\Delta t = 0.025$  とした. またここでも Case1 の結果が正しいとして各境界条件の比較を行った.

## 5.2. 計算結果

Fig.7 に Case1 及び, Case2, Case3 における角柱の揚力係数  $C_L$  の時間変化を, Table 1 に抗力係数  $C_D$  の平均値及び, 揚力係数のストローハル数  $S_L$  を示す. ここで抗力係数は

$$C_D = \frac{D}{1/2\rho_0 U_0^2 d} \quad (17)$$

揚力係数は

$$C_L = \frac{L}{1/2\rho_0 U_0^2 d} \quad (18)$$

と定義する. ここで  $D, L$  は圧力から求めた抗力, 揚力であり, 密度  $\rho_0$  は無限遠方での値を意味している. 角柱後方に十分な計算領域を設けずに一様流出条件を与えた Case2 では揚力係数については変化の周期が Case1 に比べて短くなっており, 振幅も小さい値をとっている. また抗力係数についても周期だけでなくその値もずれている. 一方, 対流流出条件を用いた Case3 では計算領域が狭くなっているにもかかわらず Case1 とほぼ一致している.

次に Fig.8 及び Fig.9 に Case1 及び, Case2, Case3 における等圧力線図及び等渦度線図を示す. 境界付近の圧力の分布は Case2, Case3 とともに Case1 に比べて歪な分布となっているが, Case3 の分布は Case1 の結果に近く, 計算空間前方への影響の伝播も小さくなっている. また Case2 では境界付近の渦度の分布が異なっており, 流出境界で渦が反射している. 一方 Case3 の結果は Case1 と良く一致しており角柱後方に

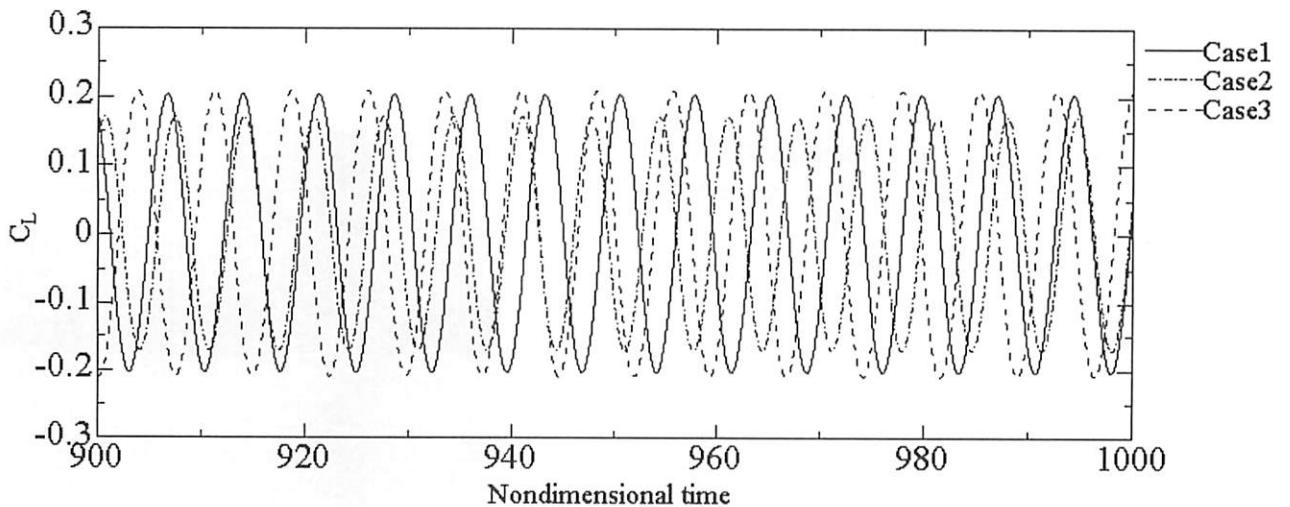
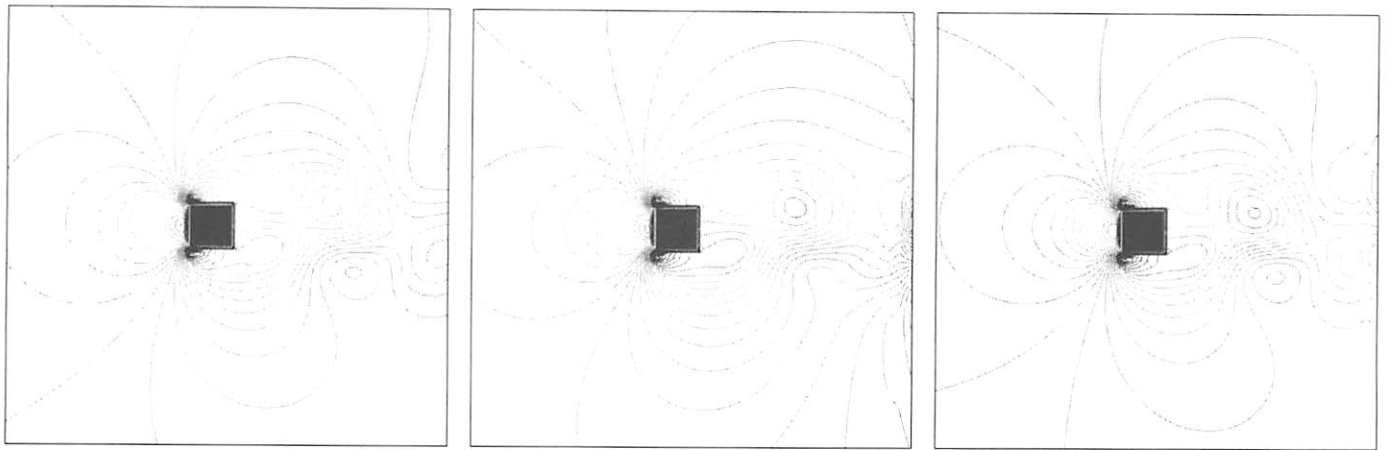


Fig. 7 Time variation of lift coefficient

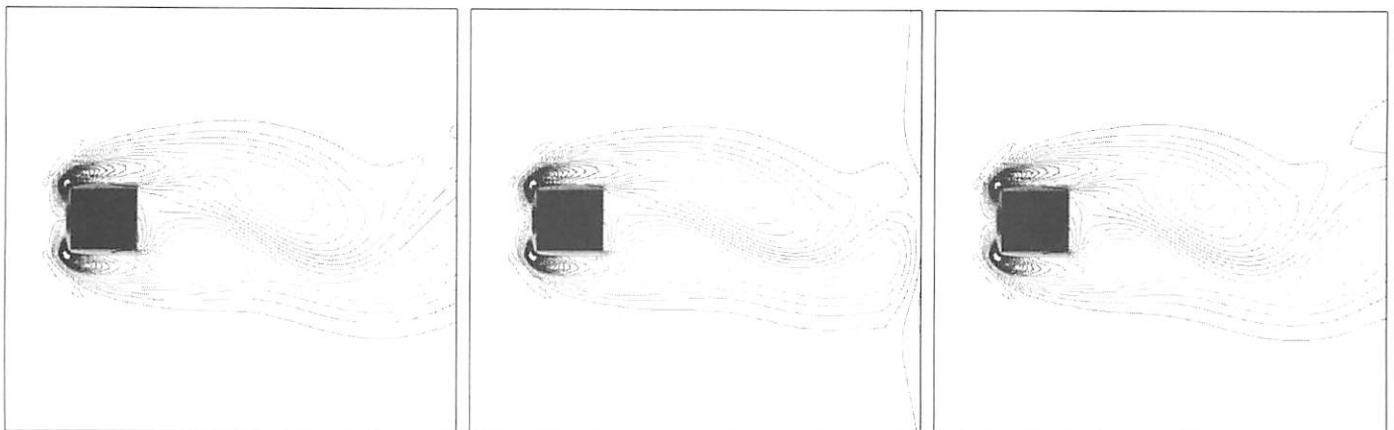


Case1

Case2

Case3

Fig. 8 Iso-pressure countours around the square cylinder



Case1

Case2

Case3

Fig. 9 Iso-vorticity countours around the square cylinder

Table 1 Mean value of drag coefficient and Strouhal number of lift coefficient

	Case1	Case2	Case3
$C_d$	1.759	1.842	1.761
$S_t$	0.137	0.148	0.135

形成されたカルマン渦列が不自然になることなく計算領域右側から流れていく様子が確認できる。

## 6. 結言

差分格子ボルツマン法に対する流出境界条件について比較した。その結果、従来用いられてきた一様流出条件、自由流出条件を用いた場合には渦が境界から流出する際、境界条件の影響を強く受け変形してしまった。一方、流体のマクロ量を用いた対流流出条件を用いた場合には境界で反射することなく渦が流出し、また角柱周りの流れにおいて後流の計算領域を極端に短くした場合にも抗力・揚力係数に与える影響

が小さく、カルマン渦列をとらえることができた。以上のことから、差分格子ボルツマン法に対流流出条件を用いることで流出境界による影響を軽減できることが確認できた。

## 参考文献

- (1) 蔦原道久, 高田尚樹, 片岡武: 格子ボルツマン法: 新しい数値流体力学の手法, (1999), コロナ社.
- (2) 蔦原道久, 栗田誠, 岩上武善: 差分格子ボルツマン法における新しいモデル, 日本機械学会論文集 (B 編), 68-665(2002) pp. 15-21.
- (3) Hasan, N., Anwar, S. F. and Sanghi, S.: On the outflow boundary condition for external incompressible flows: A new approach., Journal of Computational Physics, 206(2005) pp. 661-683.
- (4) A. Sohankar, C. Norberg, L. Davidson: Low-Reynolds-number flow around a square cylinder at incidence: study of blockage, onset of vortex shedding and outlet boundary condition., International Journal for Numerical Methods in Fluids, vol.26(1998) pp. 39-56.

- (5) 吉田尚史, 渡辺崇, 池田敏彦: ゾンマーフェルト放射条件の対流速度についての評価, Transactions of JSCEs, Paper No.20030017, (1995).
- (6) 数値流体力学編集委員会【編】: 数値流体力学シリーズ 3 乱流解析, (1995), 東京大学出版.
- (7) 吉田尚史, 渡辺崇, 中村育雄: 非定常非圧縮流れの流出境界条件に関する数値的研究, 日本機械学会論文集 (B 編), 61-588(1995) pp. 2887-2895.
- (8) 宮内敏雄, 平田徹, 店橋護: 高次精度差分法による二次元円柱周り流れの直接数値計算 (流出境界条件の検討), 日本機械学会論文集 (B 編), 62-600(1996) pp. 2942-2949.