

近特異積分の変数変換による評価法と薄肉構造物の BEM 解析への適用

SOME TRANSFORMATION METHODS FOR EVALUATION OF NEARLY SINGULAR INTEGRALS
AND THEIR APPLICATIONS TO BEM ANALYSES OF THIN-SHELL STRUCTURES

松本 敏郎¹⁾, Artur GUZIK²⁾, 田中 正隆³⁾

Toshiro MATSUMOTO, Artur GUZIK and Masataka TANAKA

1) 名古屋大学工学研究科機械理工学専攻 (〒 464-8603 名古屋市千種区不老町, E-mail: t.matsu@nuem.nagoya-u.ac.jp)

2) Cracow University of Technology (Warszawska 24, 31-155 Cracow, Poland, E-mail: guzik@wis.pk.edu.pl)

3) 信州大学工学部機械システム工学科 (〒 380-8553 長野市若里 4-17-1, E-mail: dtanaka@gipwc.shinshu-u.ac.jp)

In this paper, some novel transformations based on arcsinh and arctan functions are presented in order to evaluate the nearly singular integrals accurately for boundary element analyses of thin, shell-like structures. These transformations are shown that they improve dramatically the accuracy of the nearly singular integrals with comparatively small number of Gauss points through some bench-mark examples. The effectiveness of the proposed transformations in the actual 3D model of thin-shell structures is also demonstrated.

Key Words: Boundary Element Method, Nearly Singular Integral, Numerical Integration, Thin-Shell Structure

1. はじめに

境界要素法において、計算に用いられる Green の公式や Somigliana の公式、およびそれらから導出される境界積分方程式は、基本解とその導関数を被積分関数に含んでいる。したがって、それらを離散化して境界積分を計算する場合を考えると、基本解のソース点が積分する要素に近い時は、被積分関数がソース点に近いところで急激に変化するために（近特異性^{(1),(2),(3)}），数値積分による高精度な評価するために工夫を要する。たとえば Fig.1 に示すような、内部に減肉部分を有する配管の熱応力解析を行う場合を考える。減肉部分の熱応力を精度良く評価するためには、3 次元モデルによる解析を必要とし、その境界要素法による解析では、内壁上のソース点と外壁上の要素の距離が要素寸法よりもはるかに小さくなる場合がある⁽⁴⁾。これに対して、これまで以下の様な方法が提案されている。

よいため簡便であり、自動積分法⁽³⁾にも応用できる。

著者らは、これまで 2 次元問題の境界積分において近特異性を有する被積分関数を、通常の Gauss-Legendre の数値積分公式を用いて、より高精度に数値積分するための変数変換を提案している⁽⁷⁾。この変数変換を用いれば、 $1/r$ の近特異性の完全な消去が可能となることを示した。本論文では、3 次元問題に適用できる新たな変数変換法を提案し、従来 Hayami⁽¹⁾により提案されている変数変換法と比較する。さらに薄肉構造物の 3 次元境界要素法弹性解析へ適用し、その有効性を示す。

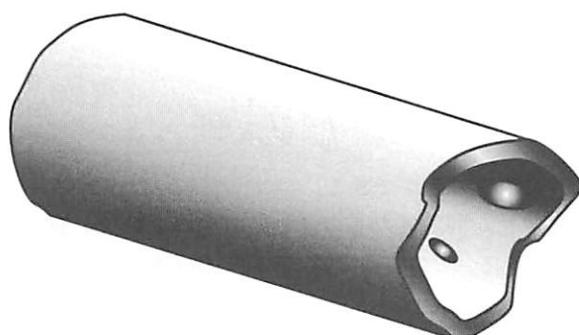


Fig. 1 Defects found in the inner surface of a thin-walled tube.

- (i) ソース点近くの要素をサブ要素に分割する方法⁽⁵⁾
- (ii) Stokes の定理を用いて、ソース点近くの要素積分を周回積分に変換する方法⁽⁶⁾
- (iii) ソース点の鏡像点に適用した積分公式を重ね合わせて、近特異性をキャンセルする方法⁽⁴⁾
- (iv) 変数変換により近特異性を緩和する方法^{(1),(2),(7)}

このうち、(iv) の方法は、変数変換の部分を追加するだけで

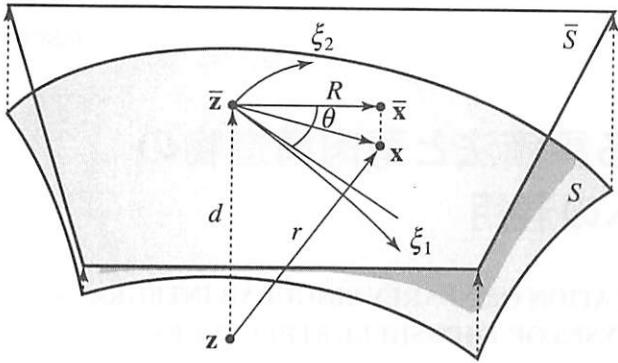


Fig.2 A source point in the vicinity of the element.

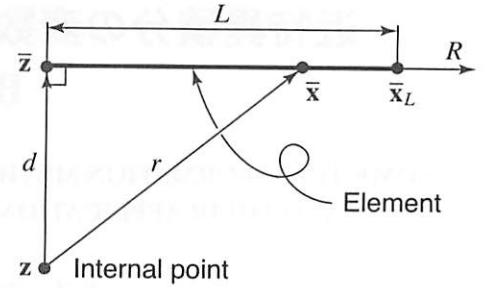


Fig.3 Radial direction of the element.

2. 変数変換

近特異性が問題となる積分は、一般に次の形をしている。

$$I = \int_S \frac{f}{r^\alpha} dS \quad (1)$$

ただし、 S はソース点に近い近特異性が問題となる要素、 r はソース点と S 内の任意の点との距離、 f は正則な関数、 α は基本解の種類に応じて決まる正の整数である。

Fig.2 に示す様に、要素 S の近くのソース点 z に対して、 z からの最短距離にある S 上の点を \bar{z} とする。このとき、 S に対する積分は、三次元問題の場合 S の \bar{x} における接平面上の積分で評価することができ、さらに点 \bar{x} からの動径方向の座標 R と円周方向の座標 θ を用いて、次のように表すことができる。

$$I = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_0^{L(\theta)} f J \frac{R}{r^\alpha} dR d\theta \quad (2)$$

式(2)で、 $1/r^\alpha$ は近特異性を表す部分であり、 R が 0 に近づくにしたがって、急激に変化する。

この急激な変化を緩和する様な変数変換 $R = R(s)$ を考えると、これらの積分は以下の様に書くことができる。

$$I = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{s_0}^{s_L} f J \frac{R}{r^\alpha} \frac{dR}{ds} ds d\theta \quad (3)$$

同様に、二次元問題に対しては

$$I = \int_0^L f J \ln r dR \quad (4)$$

および

$$I = \int_0^L f J \frac{1}{r^\alpha} dR \quad (5)$$

のようによく表すことができる。

近特異性が問題となるのは動系方向の変数 R に関する積分のみである。この方向の要素断面の様子を図示すると Fig.3 のようになる。

Fig.3において、点 \bar{z} は、 z から最短距離にある S 上の点である。

いま、変数変換 $R = R(s)$ として以下のものを考える。式(3), (4), (5)で、 $1/r^\alpha$ と $\ln r$ は近特異性を表す部分であり、 R が 0 に近づくにしたがって、急激に変化する。Fig.3 に示すようにある直線境界上の要素を考え、この要素上にない別の点を z とする。このとき、点 z からこの要素に下ろした垂線の足を \bar{z} 、垂線の長さを d 、要素上の別の点を \bar{x} 、要素の端点を \bar{x}_L 、点 \bar{z} と \bar{x}_L の間の距離を L とする。いま、2点 z と \bar{x} 間の距離 r に関する次の積分を考える。

$$I = \int_0^L \frac{1}{r} dR = \int_0^L \frac{1}{\sqrt{R^2 + d^2}} dR \quad (6)$$

ただし、 R は要素上に取った座標軸であり、

$$R = |\bar{x} - \bar{z}| \quad (7)$$

である。

これらに対し、Hayami は Gauss-Legendre 数値積分公式を用いるものとして、 $\log L_2$ 変換、 $L_2^{-\frac{1}{m}}$ 変換、 $\log L_1$ 変換、 $L_1^{-\frac{1}{3}}$ 変換などと称するいくつかの変換を提案している^{(2),(8)}。その中で $\log L_2$ 変換と $\log L_1$ 変換について示すと以下のようになる。

log L_2 変換

- 変数変換

$$R = d\sqrt{e^{2s} - 1} \quad (8)$$

- 逆変換

$$s = \ln \sqrt{R^2 + d^2} - \ln d \quad (9)$$

- ヤコビアン

$$\frac{dR}{ds} = \frac{de^{2s}}{\sqrt{e^{2s} - 1}} \quad (10)$$

log L_1 変換

- 変数変換

$$R = e^s - d \quad (11)$$

- 逆変換

$$s = \ln(R + d) \quad (12)$$

- ヤコビアン

$$\frac{dR}{ds} = e^s \quad (13)$$

これらの変換は、被積分関数の違いにより有効でない場合があり、使用に際しては適切な変換の選択が重要である⁽⁸⁾。

上記の式は、被積分関数が単純な関数になるように $R(s)$ を決めて得られる。3次元問題で $\alpha = 2$ の場合は、次のように考えればよい。

$$\frac{R}{R^2 + d^2} \frac{dR}{ds} = 1 \quad (14)$$

これより、

$$\frac{R}{\sqrt{R^2 + d^2}} dR = ds \quad (15)$$

よって、

$$s = \int \frac{R}{R^2 + d^2} dR = \ln \sqrt{R^2 + d^2} + C \quad (16)$$

ただし、 C は定数である。 $R = 0$ のとき、 $s = 0$ となるように C を決めると、 s と R の関係が次のように得られる。

$$s = \ln(\sqrt{R^2 + d^2}) - \ln d \quad (17)$$

これを、 R について解くと、log- L_2 変換が得られる。以上のように、上記の変数変換を用いれば式(3)の被積分関数を通常の Gauss の数値積分公式で精度よく計算できる形に変換できることがわかる。

この考え方を利用すれば、2次元問題の場合の変換⁽⁷⁾も簡単に求めることができる。2次元の場合、 $R(s)$ は以下の関係を満足するように求められる。

$$\frac{1}{\sqrt{R^2 + d^2}} \frac{dR}{ds} = 1 \quad (18)$$

これより、

$$\frac{1}{\sqrt{R^2 + d^2}} dR = ds \quad (19)$$

よって、

$$\begin{aligned} s &= \int \frac{1}{\sqrt{R^2 + d^2}} dR = \sinh^{-1} \left(\frac{R}{d} \right) \\ &= \ln(R + \sqrt{R^2 + d^2}) - \ln d \end{aligned} \quad (20)$$

これを、 R について解くと、次式が得られる。

$$R = d \sinh(s) \quad (21)$$

これは、Johnston⁽⁹⁾ により用いられているものと本質的に同一のものである。以上の方法には、様々なバリエーションを考えることができる。

3次元問題の場合を考える。被積分関数の中で、 s が 0 に近づくとき R も 0 に近づくように変換 $R(s)$ を求めるることになると、次の形の微分方程式を解くことにより、上記とは別の変換を求めることができる。

$$\frac{R^\beta}{(\sqrt{R^2 + d^2})^\alpha} \frac{dR}{ds} = f(s) \quad (22)$$

ただし、 $f(s)$ は数値積分によって精度よく計算できるような関数である。たとえば、 $\alpha = 2$ 、 $\beta = 0$ 、 $f(s) = 1$ のときは、次のようになる。

- arctan 変換 1

$$R = d \tan(sd) \quad (23)$$

$$s = \frac{1}{d} \tan^{-1} \left(\frac{R}{d} \right) \quad (24)$$

また、 $\alpha = 2$ 、 $\beta = 0$ とし、 $f(s)$ として、次のような場合を考える。

$$f(s) = \sqrt{s} \quad (25)$$

このときは、以下のような変数変換を得ることができる。

- arcsinh 変換

$$R = d \sinh \left(\frac{2}{3} s^{\frac{3}{2}} \right) \quad (26)$$

$$s = \frac{1}{4} \left[12 \sinh^{-1} \left(\frac{R}{d} \right) \right]^{\frac{2}{3}} \quad (27)$$

また、 $\alpha = 2$ 、 $f(s) = s$ の場合は次の変換が考えられる。

- arctan 変換 2

$$R = d \tan \left(\frac{d}{2} s^2 \right) \quad (28)$$

$$s = \sqrt{\frac{2 \tan^{-1} \left(\frac{R}{d} \right)}{d}} \quad (29)$$

実際の被積分関数には、これら以外に内挿関数や境界積分に関するヤコビアンが含まれており、変数変換の有効性を確かめるためには、実際の数値積分による精度を確かめてみる必要がある。本論文では、式(26)による近特異積分の有効性を次節で検討する。

3. 数値計算例

3.1. 矩形要素に対する計算例

まず、Fig.4 に示すような平面 9 節点 Lagrange 要素に対する近特異積分について、arcsinh 変換による結果を、解析解および他の変換法による結果と比較する。要素の形状と寸法は Hayami⁽¹⁾ を参照し、 $a = 0.5$ 、 $b = 0.5$ とした。

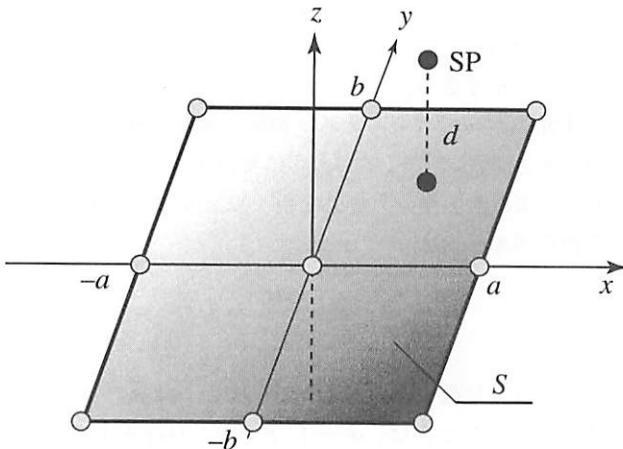


Fig. 4 Numerical test model of a rectangular element with nine nodes.

この矩形要素に対して、3次元問題のLaplace方程式の基本解の積分精度を調べた。ソース点の要素からの距離 d を変えてarcsinh変換を用いて積分した結果を、 $\log L_1$ 変換と $\log L_2$ 変換による結果と比較してTable 1に示す。表中の u^* は3次元Laplace方程式の基本解であり、 N_t と N_R は、それぞれ式(2)の θ 方向と R 方向の数値積分に用いるGaussの数値積分公式の積分点の数である。 N_t と N_R は、まず N_t と N_R を同数として、ある積分誤差 ε 以下になるまで積分点を徐々に増やし、次に、そのときの N_R を固定して、 N_t を少ない個数から積分誤差が ε 以下になるまで増やすことにより求めた。ここでは積分誤差 ε は、 $\varepsilon < 10^{-8}$ とした。arcsinh変換による結果は、従来の方法と同様、ソース点が境界にきわめて近くなても少ない積分点の数で精度よい計算が可能となっていることがわかる。

Table 2には基本解の法線方向流束、すなわち

$$q^* = \frac{-1}{4\pi r} \frac{\partial r}{\partial n} \quad (30)$$

に対する同様の結果を示す。この場合も、arcsinh変換の有効性が確認された。

Table 3は、節点1に対応する2次の内挿関数を基本解に掛けたものに変数変換を適用した結果である。この場合、 $\log L_1$ 変換とarcsinh変換は同程度の有効性を示した。しかしながら、Table 4とTable 5に示すように、ソース点の位置を要素の角点の上($0.5, 0.5, d$)に置いたときには、 $\log L_1$ 変換はarcsinh変換よりも多くの積分点が必要であった。

また、Table 6からわかるように、要素のアスペクト比の違いによる大きな影響は観察されなかった。

3.2. 内圧が作用する薄肉円筒に対するBEM解析への適用結果

Fig.5に示すような一様な内圧 1.0×10^4 [Pa]が作用する、外径 $R_2 = 1.0$ [m]、 $L = 4.0$ [m]で肉厚が $t = 0.02 \sim 0.2$ [m]の薄肉円筒を、対称性を考慮してその4分の1の部分を、図のように8節点アイソパラメトリック要素で分割して解析した。

Table 1 Results for integral $4\pi \int_S u^* dS$ ($\alpha = 1$). Source point is at $x_s = (0.25, 0.25, d)$ with $a = b = 0.5$.

distance d	$\log L_1$	$\log L_2$	Present	Analytical
	$N_t \times N_R$	$N_t \times N_R$	$N_t \times N_R$	solution
1.0	8×8	8×8	8×8	0.88974470
0.01	8×16	12×14	8×8	3.10111233
0.001	8×14	6×8	6×10	3.15687043

Table 2 Results for integral $4\pi \int_S q^* dS$ ($\alpha = 2$). Source point is at $x_s = (0.25, 0.25, d)$ with $a = b = 0.5$.

distance d	$\log L_1$	$\log L_2$	Present	Analytical
	$N_t \times N_R$	$N_t \times N_R$	$N_t \times N_R$	solution
1.0	8×8	8×8	8×8	-0.71920527
0.01	14×16	10×10	12×14	-6.12351543
0.001	20×22	22×24	16×18	-6.26721018

Table 3 Results for integral $4\pi \int_S N_1^e u^* dS$ ($\alpha = 1$), where N_1^e denotes the quadratic interpolation function for node 1. Source point is at $x_s = (0.25, 0.25, d)$ with $a = b = 0.5$.

distance d	$\log L_1$	$\log L_2$	Present	$\log L_1^{(*)}$
	$N_t \times N_R$	$N_t \times N_R$	$N_t \times N_R$	
1.0	8×8	26×26	10×12	0.02852010
0.01	12×14	24×24	12×16	0.24436723
0.001	14×16	12×14	12×16	0.25221794

(*) Integrated using $N_t \times N_R = 128 \times 128$.

Table 4 Results for integral $4\pi \int_S u^* dS$ ($\alpha = 1$). Source point $x_s = (c, c, 0.1)$ with $a = b = 0.5$

position c	$\log L_1$	$\log L_2$	Present	Analytical
	$N_t \times N_R$	$N_t \times N_R$	$N_t \times N_R$	solution
0.00	8×10	8×8	8×8	2.95328090
0.30	10×12	8×8	8×8	2.46038937
0.50	10×12	4×6	8×8	1.61272394
0.55	10×12	8×8	8×8	1.42293122

Table 5 Results for integral $4\pi \int_S q^* dS$ ($\alpha = 2$). Source point is at $x_s = (c, c, 0.1)$ with $a = b = 0.5$

position	$\log L_1$	$\log L_2$	Present	Analytical	
	c	$N_t \times N_R$	$N_t \times N_R$	$N_t \times N_R$	solution
0.00		10×12	8×8	10×12	-5.17019802
0.30		12×14	10×10	10×12	-4.50632493
0.50		12×14	6×6	10×12	-1.42996045
0.55		12×14	10×10	10×12	-7.15180084

Table 6 Results for integral $4\pi \int_S q^* dS$ ($\alpha = 2$) for various aspect ratios. Source point is at $x_s = (0, 0, 0.1)$.

aspect ratio	$\log L_1$	$\log L_2$	Present	Analytical
	$N_t \times N_R$	$N_t \times N_R$	$N_t \times N_R$	solution
1	10×12	8×8	10×12	-5.17019802
2	12×14	10×10	10×12	-5.39983349
5	16×16	16×18	16×16	-5.47777871
10	20×20	20×20	20×20	-5.48961421

内壁の半径方向の変位 $u(R_1)$ の解析解は、次のようになる。

$$u(R_1) = \frac{(1+\nu)pR_1 \left(R_2^2 + (1-2\nu)R_1^2 \right)}{E \left(R_2^2 - R_1^2 \right)} \quad (31)$$

ただし、 R_1 は円筒の内径、 R_2 は円筒の外径、 E 、 ν 、 p はそれぞれ Young 率、Poisson 比、内圧であり、 $E = 210 \text{ GPa}$ 、 $\nu = 0.3$ とした。

Table 7 には、円筒の肉厚が 0.2 , 0.1 , 0.05 , 0.02 m の場合について得られた内壁の半径方向変位の最大値を示す。半径方向変位は、本来、円周方向に対しては均一でなければならぬが、変数変換を用いないと誤差が大きく均一な値が得られないものので、その最大値を表には示してある。円筒の肉厚が $t = 0.02 \text{ [m]}$ のときに、変数変換を用いない場合と用いた場合に得られる変形の様子をそれぞれ Fig.6 と Fig.7 に示す。

4. 結 言

本論文では、3次元問題において、基本解のソース点が積分を実行する境界要素のごく近傍に位置している場合の近特異積分を、通常の Gauss の数値積分公式により高精度に計算するための新しい変数変換法を示した。この変換法を矩形要素の積分に対して、より提案されている変数変換法と比較・検討し、従来法と同等または少ない積分点数で高精度な要素積分を評価できることを示した。さらに実際の薄肉構造

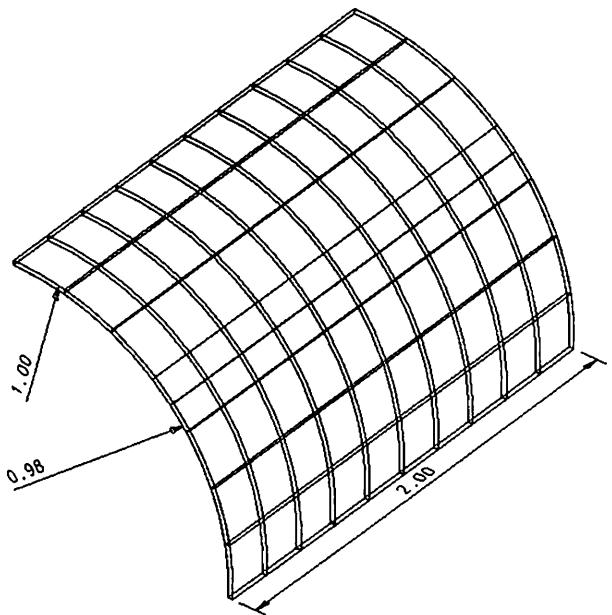


Fig.5 Boundary mesh of a quarter region of thin cylindrical shell subjected to internal uniform pressure.

Table 7 Results for maximum displacements $u(R_1) \times 10^{-7}$ obtained at the nodes of the internal wall.

t [m]	analytical	BEM	
		no transformation	arcsinh
0.20	1.72783	1.72804	1.72804
0.10	3.88241	3.88265	3.88265
0.05	8.20921	8.20656	8.20656
0.02	21.20514	21.13 ^(**)	21.20736

(**) Solution is non-uniform in circumferential direction, varying from 21.13×10^{-7} to 21.27×10^{-7} .

物の3次元境界要素法弾性解析に本変数変換法を適用し、その有効性を示した。

参考文献

- (1) K. Hayami, A projection transformation method for nearly singular surface boundary element integrals, *Lecture Notes in Engineering*, C.A. Brebbia and S.A. Orszag (eds.), Vol.73, Springer-Verlag, 1992.
- (2) K. Hayami, H. Matsumoto, Quadrature for nearly singular boundary element integrals, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 13, pp. 143–154, 1994.
- (3) 國廣昇、速水謙、杉原正顯、境界要素法の変数変換型の自動数値積分法とその誤差解析、日本応用数理学会論文誌、5-1, pp. 101–119, 1995.

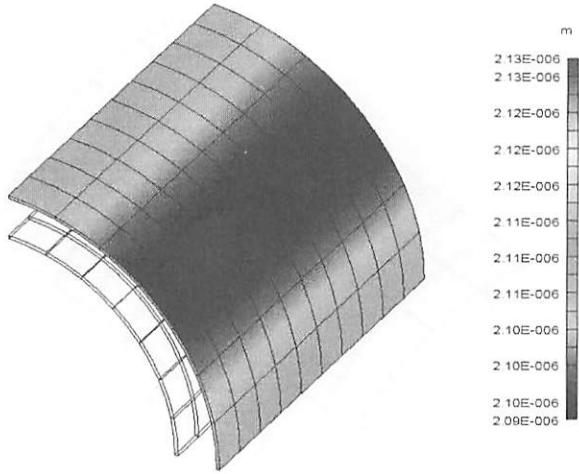


Fig. 6 Deformation of thin cylindrical shell - without transformation.

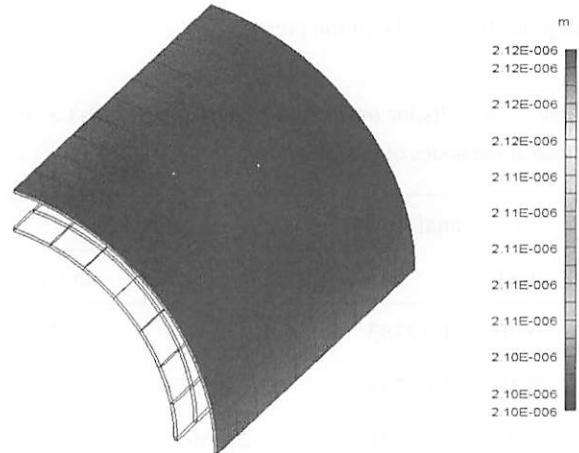


Fig. 7 Deformation of thin cylindrical shell - with transformation.

- (4) Y.J. Liu, Analysis of shell-like structures by the boundary element method based on 3-D elasticity: Formulation and verification, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **41**, pp. 541–558, 1998.
- (5) J.C. Lachat and J.O. Watson, Effective numerical treatment of boundary integral equations: A formulation for three-dimensional elastostatics, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **10**, pp. 991–1005, 1976.
- (6) Y.J. Liu, D.M. Zhang, F.J. Rizzo, Nearly singular and hypersingular integrals in the boundary element method, *Boundary Elements XV, Vol. I: Fluid Flow and Computational Aspects*, C.A. Brebbia and J.J. Rencis (eds.), Computational Mechanics Publications, Southampton, pp. 453–468, 1993.
- (7) 松本敏郎, 田中正隆, 3次元BEMにおける境界点近傍のソース点に対する境界積分の変数変換による評価法, 境界要素法論文集, **20**, pp. 87–92, 2003.

- (8) K. Hayami, Variable transformations for nearly singular integrals in the boundary element method, *NII Technical Reports*, National Institute of Informatics, Tokyo, NII-2005-010E, pp. 1–21, June, 2005. (<http://research.nii.ac.jp/TechReports/05-010E.html>)
- (9) P.R. Johnston, D. Elliot, A sinh transformation for evaluating nearly singular boundary element integrals, *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, **62**, pp. 564–578, 2005.