

# RBF 近似を用いたオプションの価格評価について

## EVALUATION OF OPTION PRICE USING RBF APPROXIMATION

後藤 裕美<sup>1)</sup>, Zhai Fei<sup>1)</sup>, Shen Kan<sup>1)</sup>, 北 栄輔<sup>2)</sup>

Yumi Goto, Zhai Fei, Shen Kan and Eisuke Kita

1) 名古屋大学情報科学研究科 (〒 464-8601 名古屋市千種区不老町 1)

2) 名古屋大学情報科学研究科 (〒 464-8601 名古屋市千種区不老町 1, E-mail: kita@is.nagoya-u.ac.jp)

This paper deals with the numerical simulation to predict the option price using approximation by a radial basis function. Black-Scholes equation is discretized with Crank-Nicolson scheme, and the radial bases function is employed to approximate the stock price. At first, the present formulation was applied to European option price, then it was extended to the American option and the two and three asset options.

**Key Words:** Inverse Analysis, Identification, Boundary Element Method

### 1. はじめに

近年、金融市場における取引は拡大しており、金融市場は激しい価格変動にさらされるようになってきたが、その中で派生証券(デリバティブ)取引の発展は、経済の自由化やグローバル化にともなう金融リスクの増大、多様化、複雑化に対して、社会全体として最適ナリスクシェアリングを実現すると期待されている。派生証券取引の中でも特にオプション取引は、Black と Scholes<sup>(1)</sup> によってオプション価格の評価式が考案されて以来、重要なリスク回避の手段として広まっている。

オプションとは、株式や為替などの商品について、将来の一定期日または一定期間内に約束した金額で売ったり買ったりする権利のことである。オプションの権利のうち、「買う権利」のことをコール・オプション(call option), 「売る権利」のことをプット・オプション(put option)という。そして、オプションの権利行使には、ヨーロッパンオプション、アメリカンオプション、エキゾチックオプション等がある。本論文では、もっとも基本的なオプションであるヨーロッパン・オプションとアメリカン・オプションを扱う。ヨーロッパン・オプションでは、満期日だけで権利行使されるのに対して、アメリカン・オプションでは満期までの任意の時点で権利行使可能である。

ヨーロッパン・オプションの価格は Black-Scholes 方程式の解として解析的に与えられるのに対して、アメリカン・オプションを含む他のオプション価格は解析的に求めることが出来ない。そこで、様々な種類のオプション価格評価のための数値解法が研究されている<sup>(2)~(6)</sup>。これまでに提案された解析法には、有限差分法、ツリー法、モンテカルロ法等がある。これに対して、本研究では、オプションの価格評価に対

する数値解法として、Radial Basis Function(以下 RBF と表す)を用いた手法を提案する<sup>(7)~(9)</sup>。RBF はメッシュレス法における近似関数の作成方法の一種である。Black-Scholes 方程式では、求めるオプション価格を、オプションの対象となる株などの金融商品の価格と時間の 2 つの独立変数で表される関数として扱っており、方程式を数値計算で解く場合、これらの変数の微分項を離散化する必要がある。Black-Scholes 方程式の代表的な数値解法である有限差分法では、解析領域を格子メッシュ分割する。求められる数値は格子点での値だけである。RBF を用いた数値解法では格子メッシュを必要とせず、評価点の周りの近傍領域だけを定義し、その内部にあるランダムな点を用いて解を近似することができるので、差分法よりも自由度が高い解析ができる<sup>(10)~(13)</sup>。

本論文では、最初に 1 資産の場合におけるヨーロッパン・オプションの価格決定に RBF 近似を適用し、つづいて 1 資産の場合におけるアメリカン・オプションの価格決定方法を示す。つづいて、複数資産の場合のヨーロッパン・オプションの価格決定についての定式化を示す。

### 2. ヨーロッパン・オプションの評価法

#### 2.1. 支配方程式と境界条件

配当支払いのない原資産の価格  $S$ (以下、原資産  $S$ ) と時刻  $t$  に関するオプション価格  $V = V(S, t)$  は、ボラティリティ(標準偏差) $\sigma$  が時間に関して一定とすれば、次式の Black-Scholes 方程式で与えられる<sup>(5)</sup>。

$$\frac{\partial V}{\partial t} + FV = 0 \quad (1)$$

ここで、微分演算子は次式で定義される。

$$F = \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2}{\partial S^2} + rS \frac{\partial}{\partial S} - r \quad (2)$$

ここで、 $r$  はリスクフリーレートを示す。ヨーロピアン・コール・オプションの場合、満期時に設定された行使価格  $E$  を上回る場合に権利行使し、下回る場合には権利行使しない方が有利となる。従って、境界条件は次式となる。

$$V(S, T) = \max(S(T) - E, 0) \quad (3)$$

また、ヨーロピアン・プット・オプションの場合はコールオプションと反対となるので、境界条件は次式で与えられる。

$$V(S, T) = \max(E - S(T), 0) \quad (4)$$

ここで、 $E$  はオプションの行使価格であり、 $\max(S - E, 0)$  は両者の大きい方の値をとる。

## 2.2. RBF 近似を用いた数値解法

式 (1) を克蘭ク・ニコルソン法によって離散化すると次式を得る<sup>(9)</sup>。

$$\frac{V(t + \Delta t) - V(t)}{\Delta t} + (1 - \theta)FV(t + \Delta t) + \theta FV(t) = 0 \quad (5)$$

ここで、 $0 < \theta \leq 1$  とられる。

$V(t)$  と  $V(t + \Delta t)$  について整理すると次式を得る。

$$[1 + (1 - \theta)\Delta t F]V(t + \Delta t) = [1 - \theta\Delta t F]V(t) \quad (6)$$

上式において  $V(t) = V^{(t)}$ ,  $V(t + \Delta t) = V^{(t+\Delta t)}$  において整理すると次式を得る。

$$HV^{(t+\Delta t)} = GV^{(t)} \quad (7)$$

$H, G$  は次式で定義される微分演算子である。

$$H = 1 + (1 - \theta)\Delta t F, \quad G = 1 - \theta\Delta t F$$

式 (1) のオプション価格  $V$  を RBF を用いて次式で近似する。

$$V^{(t)} \simeq \sum_{j=1}^N \lambda_j^{(t)} \phi_j \quad (8)$$

ここで、 $j$  は  $V$  を近似するために時間  $t$  のときにとられた節点番号、 $N$  は時刻  $t$  における近似データ点の個数、 $\lambda_j^{(t)}$  は未知係数を示す。本研究では、解析に次の RBF を用いることにする。

$$\phi(S, S_j) = \sqrt{c^2 + \|S - S_j\|^2} \quad (9)$$

ここで、 $S_j$  は評価点  $S$  に対する  $V$  を近似するためのデータ点である。 $c$  は RBF のパラメータである。

式 (7) に式 (8) を代入すると次式を得る。

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j^{(t+\Delta t)} H \phi_j = \sum_{j=1}^N \lambda_j^{(t)} G \phi_j \quad (10)$$

式 (10) の  $H, G, \lambda_j^{(t+\Delta t)}, \phi_j$  を計算で求め、式 (10) を  $\lambda_j^{(t)}$  について解く。そして、満期  $t = T$  から現時点  $t = 0$  に向かって時間をさかのぼるように  $\lambda_j^{(t)}$  を求めていき、最終的に  $t = 0$  時点の  $\lambda_j^{(0)}$  を求める。 $\lambda_j^{(0)}$  を式 (8) に代入して、現時点  $t = 0$  におけるオプション価格  $V$  を求める。

## 2.3. アルゴリズム

RBF を用いた数値解法のアルゴリズムは次のようになる。

Table 1 Parameters for numerical result

Expiration date	$T = 0.5$ [year]
Exercise price	$E = 10.0$
Risk free interest rate	$r = 0.05$
Volatility	$\sigma = 0.2$
Crank-Nicholson method	$\theta = 0.5$
Maximum stock value	$S_{max} = 30$

Table 2 The condition number and the error for  $c$

$c$	Condition number	$\epsilon$
0.5	$1.81 \times 10^6$	$2.91533 \times 10^{-4}$
0.8	$6.01 \times 10^7$	$2.90701 \times 10^{-4}$
1.0	$6.45 \times 10^8$	$2.89184 \times 10^{-4}$
1.2	$7.05 \times 10^9$	$2.87901 \times 10^{-4}$
1.5	$2.61 \times 10^{11}$	$2.86333 \times 10^{-4}$
1.8	$9.81 \times 10^{12}$	$2.84856 \times 10^{-4}$

- (1) 初期データとして  $S_{max}, T, E, r, \sigma, \theta$  を入力する。
- (2) 資産  $S = 0$  から  $S = S_{max}$  の間に  $N$  個のデータを取り、 $t = 0$  から  $t = T$  の期間を  $M$  分割する。
- (3) 境界条件より、各  $S$  の値に対して満期  $t = T$  における  $V^{(T)}$  を求める。
- (4) 式 (8) で  $V^{(T)}$  を近似し、満期時点の  $\lambda$  の値  $\lambda_j^{(T)}$  を求める。
- (5)  $t \leftarrow T - \Delta t$  とする。
- (6) 式 (10) を解いて  $\lambda_j^{(t)}$  を求める。
- (7)  $t \leftarrow t - \Delta t$  として、 $t \neq 0$  の時は (5) へ戻り、 $t = 0$  の時に次に進む。
- (8)  $t = 0$  の時点の  $\lambda_j^{(0)}$  が求まり、式 (8) に代入して  $V^{(0)}$  が求まる。

## 3. ヨーロピアン・オプションの解析例

Table 3 The condition number and the error for  $N$

$N$	Condition number	$\epsilon$
61	$4.64 \times 10^5$	$2.10884 \times 10^{-2}$
121	$6.45 \times 10^8$	$2.89184 \times 10^{-4}$
151	$1.99 \times 10^{10}$	$5.05691 \times 10^{-4}$

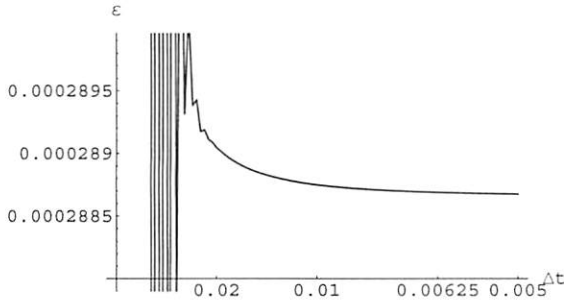


Fig. 1 Variation of the relative error with  $\Delta t$

Table 4 Parameters for numerical result

Expiration date	$T = 0.5$ [year]
Exercise price	$E = 10.0$
Risk free interest rate	$r = 0.05$
Volatility	$\sigma = 0.2$
Crank-Nicholson method	$\theta = 0.5$
Maximum stock value	$S_{max} = 30$
Number of timestep	$M = 100$
Ttime Step Size	$\Delta t = 0.005$
Number of stock data points	$N = 121$
RBF parameter	$c = 1.0$

Table 5 Results of European put option

Stock $S$	$V_{RBF}$	$V_{Analytical}$
0.0	9.7531	9.7531
2.0	7.7531	7.7531
4.0	5.7531	5.7531
6.0	3.75318	3.75318
8.0	1.79823	1.79871
10.0	0.44055	0.44197
12.0	0.04780	0.04834
14.0	0.00271	0.00277
16.0	0.00010	0.00010
18.0	0.00008	0.00000

$\varepsilon = 0.000288675$

式 (9) に示した RBF における  $c$  の値を決定するために、Table 1 のようにパラメータを設定し、タイムステップ数  $M = 100$  ( $\Delta t = 0.005$ )、データ点の個数  $N = 121$  として、 $c$  の値を変化させながら解析を行う。各  $c$  の値に対して数値解と理論解の誤差  $\varepsilon$  を比較したものを Table 2 に示す。Table 2 には、式 (10) の係数行列  $H\phi_j$  の条件数も示す。条件数は係数行列の最大固有値と非零の最小固有値の比として定義される。本研究における数値解析は Mathematica5.0 で行う。固有値も Mathematica で評価する。

数値解と理論解の誤差  $\varepsilon$  は次式より求める。

$$\varepsilon = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N |V(S_j, t)_{RBF} - V(S_j, t)_{Analytical}| \quad (11)$$

ここで、理論解は文献 [4] の式を用いる。

Table 2 から、 $c$  の値が大きくなるにつれて理論解との誤差は小さくなるが、条件数は大きくなっていくことがわかる。経験的に、条件数が  $6.7 \times 10^8$  よりも大きくなると解の精度が低下するので、条件数が  $6.7 \times 10^8$  よりも小さく、誤差が最も小さい値として、 $c = 1.0$  をとる。

次に、 $c = 1.0$ 、タイムステップ数  $M = 100$  として、資産のデータ点の個数  $N$  を変化させた場合の解析結果を示す。各  $N$  における条件数と、誤差  $\varepsilon$  の比較を Table 3 に示す。先の議論と同様に、精度の点から条件数の目安を  $6.7 \times 10^8$  とすると、Table 3 の中ではデータ点の個数を  $N = 121$  とするのが適切と考えられる。

また、データ点の個数を  $N = 121$  として、同様の条件でタイムステップ幅  $\Delta t$  を変化させ、誤差を計算した結果を Fig. 1 に示す。 $\Delta t > 0.02$  の場合誤差が縦軸の範囲を超えるほど大きくなっているが、 $\Delta t < 0.02$  では十分小さくなっている。そこで十分小さい値として  $\Delta t = 0.005$  をとることとする。

以上より、RBF のパラメータ  $c$ 、タイムステップ数  $M$ 、資産のデータ点の個数  $N$  の値を決定し、パラメータを Table 4 のように設定して解析を行った。Table 4 の設定におけるヨーロッパン・プット・オプションの解析結果を Table 5 に示す。この結果から、RBF を用いた解析結果と理論解は、ほぼ一致していることがわかる。

#### 4. アメリカン・オプションの評価法

##### 4.1. 支配方程式と境界条件

アメリカン・プット・オプション価格は次式を満足する。

$$\frac{\partial V}{\partial t} + FV \leq 0, \quad V \geq X$$

$$\left( \frac{\partial V}{\partial t} + FV \right) (X - V) = 0$$

(12)

ここで、 $X = \max(E - S, 0)$  である。

ヨーロッパンオプションの場合と同様に考えると、アメリカン・プット・オプション価格の満期における境界条件は次式で与えられる。

$$V(S, T) = \max(E - S(T), 0) \quad (13)$$

また、自由境界  $S = S_f(t)$  における境界条件は、

$$V(S_f(t), t) = \max(E - S_f(t), 0) \quad (14)$$

となる。

#### 4.2. RBF を用いた数値解法

式 (12) の等式に対してヨーロッパンオプションと同様の定式化を行うと次式を得る。

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j^{(t+\Delta t)} H \phi_j = \sum_{j=1}^N \lambda_j^{(t)} G \phi_j \quad (15)$$

式 (15) は連立方程式であり、 $H$ ,  $G$ ,  $\lambda_j^{(t+\Delta t)}$ ,  $\phi_j$  を計算で求め、式 (15) を  $\lambda_j^{(t)}$  について解く。

#### 4.3. アルゴリズム

数値解法のアルゴリズムは次のようになる。

- (1) 資産  $S = 0$  から  $S = S_{max}$  の間に  $N$  個のデータを取り、 $t = 0$  から  $t = T$  までの期間を  $M$  個に分割する。
- (2) 境界条件より各  $S$  の値に対して満期  $t = T$  における  $V^{(T)}$  を求める。
- (3) 式 (8) で  $V^{(T)}$  を近似し、満期時点の  $\lambda$  の値  $\lambda_j^{(T)}$  を求める。
- (4)  $t \leftarrow T - \Delta t$  とする。
- (5) 式 (15) を解いて  $\lambda_j^{(t)}$  を求める。
- (6)  $\lambda_j^{(t)}$  を式 (8) に代入し、その時点におけるオプション価格  $V^{(t)}$  を求める。
- (7)  $V^{(t)}$  と  $X$  を比較し、 $V^{(t)} < X$  ならば  $V^{(t)} = X$  とし、それ以外は  $V^{(t)}$  とする。
- (8)  $t \leftarrow t - \Delta t$  として、 $t \neq 0$  の時は (5) へ戻り、 $t = 0$  の時に次に進む。
- (9)  $t = 0$  の時点の  $\lambda_j^{(0)}$  が求まり、式 (8) に代入して  $V^{(0)}$  が求まる。

#### 5. アメリカン・オプションの解析例

Table 4 に示すようにパラメータをヨーロッパン・オプションと同じにとり、アメリカン・プット・オプションについて解析を行った。RBF を用いた数値解と、ツリー法を用いた数値解、有限差分法を用いた数値解を Table 6 に示す。ただし、 $V_{RBF}$  は RBF を用いた数値解であり、 $V_{Binomial}$  はツリー法を用いた数値解、 $V_{FDM}$  は有限差分法を用いた数値解を表している。 $V_{FDM}$  は、Table 4 の RBF のパラメータ  $c$  以外のパラメータを用いて、有限差分法の陽解法で解析を行い、 $V_{Binomial}$  は  $V_{FDM}$  と同様の設定で 2 項ツリー法を用いて解析を行った。

Table 6 から、 $V_{RBF}$ ,  $V_{Binomial}$ ,  $V_{FDM}$  は、ほぼ同様の値を示していることがわかる。

#### 6. 複数資産への拡張

派生証券市場の成長とともに、投資家のニーズの多様化により、原資産が複数個ある派生証券が登場するようになっ

Table 6 Results of American put option

Stock $S$	$V_{RBF}$	$V_{Binomial}$	$V_{FDM}$
0.0	10.0	10.0	10.0
2.0	8.0	8.0	8.0
4.0	6.0	6.0	6.0
6.0	4.0	4.0	4.0
8.0	2.0	2.0	2.0
10.0	0.464517	0.46492	0.475816
12.0	0.049407	0.050015	0.053838
14.0	0.002799	0.002724	0.003281
16.0	0.000107	0.000095	0.000127
18.0	0.000079	0.000002	0.000004

ている。これまでは原資産が 1 つの場合について述べてきたが、この章では原資産が 2 つの場合について述べる。

#### 6.1. 支配方程式と境界条件

2 つの資産  $S_1$  と  $S_2$  について、それぞれに対するボラティリティ  $\sigma_1, \sigma_2$  が時間によらず一定とするとその 2 つの上に書かれたオプションの価格  $V = V(S_1, S_2, t)$  の挙動を表す支配方程式は次式となる。

$$\frac{\partial V}{\partial t} - QV = 0 \quad (16)$$

ただし、

$$Q = \frac{1}{2} \sigma_1^2 S_1^2 \frac{\partial^2}{\partial S_1^2} + \frac{1}{2} \sigma_2^2 S_2^2 \frac{\partial^2}{\partial S_2^2} + r S_1 \frac{\partial}{\partial S_1} + r S_2 \frac{\partial}{\partial S_2} + \rho \sigma_1 \sigma_2 S_1 S_2 \frac{\partial^2}{\partial S_1 \partial S_2} - r$$

行使時点で価格のより高い方を選べるとすれば、この場合のコール・オプションの権利行使は、

$$V(S_1, S_2, T) = \max\{\max(S_1(T), S_2(T)) - E, 0\} \quad (17)$$

また、プット・オプションの権利行使は、

$$V(S_1, S_2, T) = \max\{E - \max(S_1(T), S_2(T)), 0\} \quad (18)$$

で与えられる<sup>(4)</sup>。これが境界条件となる。

#### 6.2. RBF を用いた数値解法

式 (16) をクラック・ニコルソン法によって離散化し、 $V(t) = V^{(t)}$ ,  $V(t + \Delta t) = V^{(t+\Delta t)}$  において整理すると次式を得る。

$$HV^{(t+\Delta t)} = GV^{(t)} \quad (19)$$

$H, G$  は次式で定義される。

$$H = 1 + (1 - \theta)\Delta t Q, \quad G = 1 - \theta\Delta t Q$$

ここでは、次のような RBF を用いることにする。

$$\phi(S_1, S_2, S_j) = \sqrt{c^2 + \|S_1 - S_{1j_1}\|^2 + \|S_2 - S_{2j_2}\|^2} \quad (20)$$

Table 7 Parameters for numerical result

Expiration date	$T = 0.5$ [year]
Exercise price	$E = 10.0$
risk free interest rate	$r = 0.05$
Volatility	$\sigma_1 = \sigma_2 = 0.2$
Crank-Nicholson method	$\theta = 0.5$
Maximum stock value	$S_{i \max} = 30 (i = 1, 2)$
Number of timestep	$M = 100$
Time step size	$\Delta t = 0.005$
Number of stock data points	$N = 61$
RBF parameter	$c = 1.0$

ここで  $S_{1j_1}, S_{2j_2}$  は評価点  $S_1, S_2$  に対する  $V$  を近似するためのデータ点の座標である。

式 (16) のオプション価格  $V$  を RBF を用いて次式で近似する。

$$V^{(t)} \simeq \sum_{j=1}^N \lambda_j^{(t)} \phi_j \quad (21)$$

ここで、 $N$  は時刻  $t$  における近似データ点の個数、 $\lambda_j^{(t)}$  は未知係数を示す。

式 (19) に式 (21) を代入して、次式を得る。

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j^{(t+\Delta t)} H \phi_j = \sum_{j=1}^N \lambda_j^{(t)} G \phi_j \quad (22)$$

式 (22) は連立方程式であり、 $H, G, \lambda_j^{(t+\Delta t)}, \phi_j$  を計算で求め、式 (22) を  $\lambda_j^{(t)}$  について解く。

### 6.3. アルゴリズム

数値解析アルゴリズムは次のようになる。

- (1) 資産  $S_1 = 0$  から  $S_1 = S_{1\max}$ 、資産  $S_2 = 0$  から  $S_2 = S_{2\max}$  の間にそれぞれ  $N$  個のデータを取り、 $t = 0$  から  $t = T$  の期間を  $M$  個に分割する。
- (2) 境界条件より各  $S$  の値に対して満期  $t = T$  における  $V^{(T)}$  を求める。
- (3) 式 (21) で  $V^{(T)}$  を近似し、満期時点の  $\lambda$  の値  $\lambda_j^{(T)}$  を求める。
- (4)  $t \leftarrow T - \Delta t$  とする。
- (5) 式 (22) を解いて  $\lambda_j^{(t)}$  を求める。
- (6)  $t \leftarrow t - \Delta t$  として、 $t \neq 0$  の時は (4) に戻り、 $t = 0$  の時に次に進む。
- (7)  $t = 0$  の時点の  $\lambda_j^{(0)}$  が求まり、式 (21) に代入して  $V^{(0)}$  が求まる。

## 7. 複数資産の場合の解析例

Table 8 Results of two-assets European put option ( $S_1 = S_2$ )

Stocks ( $S_1, S_2$ )	$V_{RBF}$
(0.0, 0.0)	9.7531
(2.0, 2.0)	7.66188
(4.0, 4.0)	5.54148
(6.0, 6.0)	3.42452
(8.0, 8.0)	1.38781
(10.0, 10.0)	0.21237
(12.0, 12.0)	0.010229
(14.0, 14.0)	0.000202
(16.0, 16.0)	0.000002
(18.0, 18.0)	0.000011

Table 9 Results of two assets European put option,  $S_2 = 0$ 

Stocks ( $S_1, S_2$ )	$V_{RBF}$
(0.0, 0.0)	9.7531
(2.0, 0.0)	7.75285
(4.0, 0.0)	5.7531
(6.0, 0.0)	3.75317
(8.0, 0.0)	1.7968
(10.0, 0.0)	0.43626
(12.0, 0.0)	0.046192
(14.0, 0.0)	0.002527
(16.0, 0.0)	0.000096
(18.0, 0.0)	0.00003

### 7.1. 2 資産の場合

パラメータを Table 7 のように設定して解析を行う。2 資産の場合は、データ点の個数が多いと計算量が膨大になり計算が困難になるため、資産のデータ点の個数を 1 資産の場合よりも少なくする。Table 8 は、資産  $S_1$  と  $S_2$  が同じ値をとる時のオプション価格  $V$ 、Table 9 は、資産  $S_2 = 0$  の場合のオプション価格  $V$  の数値解を示している。

### 7.2. 3 資産の場合

2 資産の定式化は 3 資産以上の場合に容易に拡張できる。ここでは、その解析結果だけを示す。パラメータは Table 10 のように設定する。 $S_1, S_2, S_3$  が同じ値をとるときの数値解を Table 11 に示す。

Table 10 Parameters for numerical result

Expiration date	$T = 0.5$ [year]
Exercise price	$E = 10.0$
Risk free interest rate	$r = 0.05$
Volatility	$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0.2$
Crank-Nicholson method	$\theta = 0.5$
Maximum stock value	$S_{i \max} = 30(i = 1, 2, 3)$
Number of timestep	$M = 100$
Time step size	$\Delta t = 0.005$
Number of stock data points	$N = 16$
RBF parameter	$c = 1.0$

Table 11 Values of three assets European put option,  $S_1 = S_2 = S_3$ 

Stocks ( $S_1, S_2, S_3$ )	$V_{RBF}$
(0.0, 0.0, 0.0)	9.7531
(2.0, 2.0, 2.0)	7.66157
(4.0, 4.0, 4.0)	5.45433
(6.0, 6.0, 6.0)	3.23564
(8.0, 8.0, 8.0)	1.06723
(10.0, 10.0, 10.0)	0.084046
(12.0, 12.0, 12.0)	0.000739
(14.0, 14.0, 14.0)	0.000000
(16.0, 16.0, 16.0)	0.000000
(18.0, 18.0, 18.0)	0.000000

## 8. まとめ

本研究では、ヨーロッパ・オプション、アメリカン・オプションに対して Radial Basis Function(RBF) を用いた解析法を示した。

第2章ではヨーロッパ・オプションの数値解法について述べ、第3章で解析結果を示した。ヨーロッパ・オプションは理論解が求められるため、理論解との比較を行い、ほぼ一致する解を得られた。

第4章では、アメリカン・オプションについての数値解法を述べ、第5章で解析結果を示した。アメリカン・オプションは理論解が求められないため、代表的な数値解法である有限差分法と2項ツリー法の解析結果と比較を行った。その結果、RBFを用いた場合も、他の手法とほぼ同様な解析結果

を得られた。

第6章では、原資産が2資産の場合について数値解法を述べ、第7章で解析結果を示した。

今後、エキゾチック・オプションのような複雑なオプション評価に対する定式化についても検討していく予定である。

## 参考文献

- (1) F. Black and M. Scholes. The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*, 81, pp. 637-659, 1973
- (2) P. Wilmott, S. Howison and J. Dewynne. (伊藤幹夫, 戸瀬信之訳) デリバティブの数学入門. 共立出版, 2002.
- (3) P. Wilmott, J. Dewynne and S. Howison. *Option Pricing: Mathematical Models and Computation*, Oxford Financial Press, Oxford, 1993.
- (4) 木島正明, 長山いずみ, 近江義行. ファイナンス工学入門 第一部: 数値計算法. 日科技連出版社, 1996.
- (5) 森平爽一郎, 小島裕. コンピュータシヨナル・ファイナンス. 朝倉書店, 1997.
- (6) M. A. H. Dempster and J. P. Hutton. Pricing American Stock Options by Linear Programming. *Mathematical Finance*, Vol.9, No. 3, pp. 229-254, 1999.
- (7) S. Choi, and M. Marozzi. A Numerical Approach to American Currency Option Valuation, *Journal of Derivatives*, pp. 19-29, 2001.
- (8) M. Marozzi, S. Choi, and C. S. Chen, On the use of boundary conditions for variational formulations arising in financial mathematics, *Journal of Applied Mathematics and Computation*, Vol. 124, pp. 197-214, 2001.
- (9) M. B. Koc, I. Boztosun and D. Boztosun. On the Numerical Solution of Black-Scholes Equation. *International Workshop on MeshFree Methods*, pp. 11-16, 2003.
- (10) Y. C. Hon, X. Z. Mao. A Multiquadric Interpolation Method for Solving Initial Value Problems. *Journal of Scientific Computing*, Vol.12, pp. 51-55, 1997.
- (11) C. S. Chen, A. S. Muleshkov, M. A. Golberg. The Numerical Evaluation of Particular Solutions for Poisson's Equation - a revisit. *Boundary Elements XXI*, Vol. 6, pp. 312-322, 1999.
- (12) C. S. Chen, M. D. Marozzi, S. Choi. The Method of Fundamental Solutions and Compactly Supported Radial Basis Functions: a meshless approach to 3D problems. *Boundary Elements XXI*, Vol. 6, pp.561-570, 1999.
- (13) W. Chen. Some Recent Advances on the RBF. *Boundary Elements XXIV, Incorporative Meshless Solutions*, Vol. 13, pp. 125-134, 2002.