

# 見かけの固有振動数問題を回避する音響境界要素解析 (半無限 2 次元場での検討)

## ACOUSTIC BOUNDARY ELEMENT ANALYSIS AVOIDING THE FICTITIOUS EIGENFREQUENCY PROBLEM (STUDY ON 2D HALF-SPACE PROBLEMS)

荒井 雄理<sup>1)</sup>, 田中 正隆<sup>2)</sup>, 松本 敏郎<sup>3)</sup>

Youri ARAI, Masataka TANAKA, Toshiro MATSUMOTO

- 1) 信州大学大学院工学系研究科 (〒 380-8553 長野市若里 4-17-1, E-mail: youri@artist.shinshu-u.ac.jp)  
 2) 信州大学工学部機械システム工学科 (〒 380-8553 長野市若里 4-17-1, E-mail: dtanaka@gipwc.shinshu-u.ac.jp)  
 3) 名古屋大学大学院工学研究科 (〒 464-8603 名古屋市千種区, E-mail: t.matsumoto@nuem.nagoya-u.ac.jp)

This paper presents a new boundary element analysis to avoid the fictitious eigenfrequency problem for the 2-D half-space acoustic field. In solving without any care the external acoustic field problem governed by the Helmholtz equation by means of a boundary integral equation, accuracy of the numerical solution is disturbed at eigenfrequencies of the interior problem. The present paper proposes a new approach to circumvent the fictitious eigenfrequency problem by using a dual boundary integral equation formulation. Through numerical computations it is demonstrated that the proposed BEM is effective to avoid the fictitious eigenfrequency problem.

**Key Words** : Computational Mechanics, Boundary Element Method, Acoustics, Helmholtz Equation, Fictitious Eigenfrequency Problem

### 1. はじめに

Helmholtz 方程式に支配される音場の問題において、境界積分方程式を用いて外部境界値問題を解く際に重要となるのは見かけの固有振動数問題の影響をいかに回避して精度の良い解を得るかである。見かけの固有振動数問題は、境界積分方程式を用いて無限領域  $\Omega$  を含む外部境界値問題を解く際に、解析する振動数が別の内部問題の固有振動数に一致する場合、本来補領域  $\bar{\Omega}$  で音圧が 0 でなければならないのが 0 とならず考察領域  $\Omega$  に影響を及ぼし解の精度を著しく乱す問題である<sup>(2)</sup>。

見かけの固有振動数問題を回避する簡便な手法として知られているのは、補領域  $\bar{\Omega}$  に点 (外点) を配置して最終的な方程式系を最小二乗法で解く方法である。この手法は外点を配置する場所やその個数などの考察を必要とし、点の配置の仕方によっては見かけの固有振動数問題を回避できないという欠点を有している。この方法の他にも見かけの固有振動数問題の対策として様々な手法が提案されているが、超特異積分方程式の取り扱いが進歩した最近では Burton - Miller により提案された手法、即ち通常の境界積分方程式 (OBIE)

とその法線方向導関数境界積分方程式 (NDBIE) を適切な結合係数  $\alpha$  により線形結合した式 (OBIE +  $\alpha$  NDBIE) を境界積分方程式として解く手法が幅広い周波数域に対して有効であると知られている<sup>(7)</sup>。

本報では、適切な係数により結合した境界積分方程式を境界要素端点に適用し、要素の中間節点では法線方向導関数境界積分方程式にこの結合係数と同じ係数を乗じたものだけを適用して、見かけの固有振動数問題を回避する新たな手法を提案する。見かけの固有振動数問題対策に有効であると知られる Burton-Miller による手法を高次要素に適用して得られる結果と比較して、提案手法の有効性を示す。同時に、以前著者らが提案した手法<sup>(6)</sup>、即ち境界要素の節点ごとに通常の境界積分方程式とその法線方向導関数の境界積分方程式を使い分ける手法が、適用範囲が狭いことを数値例により明らかにする。

### 2. 理論

本研究で取り扱う外部境界値問題を境界積分方程式を用いて解く場合に、対応する内部問題の固有振動数に等しい周

波数において系方程式が不定となり物理的に意味の無い解が得られてしまう。そこで本研究では、この問題を回避するのに有効であると知られている Burton - Miller の手法を高次要素に適用する。この手法に関する詳細は文献 (7) に記されているため参照していただきたい。本論文で提案する要素端点において Burton - Miller の境界積分方程式を適用して、中間節点において結合係数を乗じた法線方向導関数境界積分方程式を適用して見かけの固有振動数問題を回避する手法に関しては解の一意性の証明などまだ不明瞭な点があるため、その理論などについては判明次第報告する。

以下に本研究で用いる境界積分方程式とその法線方向導関数境界積分方程式の定式化について簡単に記述する。

### 2.1. 境界積分方程式 (OBIE)

微小振幅の振動を考えるものとし、角振動数  $\omega$  で定常振動している場合には、音場の支配微分方程式は次の非同次 Helmholtz 方程式となる (9, 10, 11, 12)。

$$\nabla^2 p(x) + k^2 p(x) + f(x) = 0 \quad (1)$$

ただし、 $p(x)$  は音圧、 $f(x)$  は内部音場の集中音源等を表すソース項である。また、 $k$  は波数であり  $C_0$  を音速とすれば次式で表される。

$$k = \frac{\omega}{C_0} \quad (2)$$

式 (1) において、境界条件は以下のように与えられる。

$$p(x) = \bar{p}(x) \quad (3)$$

$$q(x) = \frac{\partial p}{\partial n}(x) = \bar{q}(x) \quad (4)$$

ただし、 $q(x)$  は境界の外向き法線方向の粒子速度  $v(x)$  と媒質密度  $\rho$  を用いて以下のように表すことができる。

$$q(x) = -i\omega\rho v(x) \quad (5)$$

Helmholtz 方程式 (1) に対して境界要素法に従った定式化を行い関数  $f(x)$  として集中音源を想定することで、以下の正則化された境界積分方程式を得る (3, 6)。

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} \{q^*(x, y) - Q^*(x, y)\} p(x) d\Gamma(x) \\ & + \int_{\Gamma} Q^*(x, y) \{p(x) - p(y)\} d\Gamma(x) \\ & = -i\omega\rho \int_{\Gamma} p^*(x, y) v(x) d\Gamma(x) + I p^*(x^*, y) \end{aligned} \quad (6)$$

ただし  $I$  は集中音源の強さであり、 $x^*$  は音源の座標である。また、基本解の成分はそれぞれ次のようである。

$$p^*(x, y) = -\frac{i}{4} H_0^{(2)}(kr) \quad (7)$$

$$q^*(x, y) = \frac{i}{4} k H_1^{(2)}(kr) \frac{\partial r}{\partial n}(x) \quad (8)$$

$$Q^*(x, y) = -\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial r}{\partial n}(x) \quad (9)$$

通常の音響問題では、境界積分方程式 (6) を境界要素で離散化して音圧  $p$  と粒子速度  $v$  に関する代数方程式を求め、こ

の方程式系に境界条件を適用して解けばよい (1)。しかしながら、本研究で取り扱う外部問題を解く場合には、対応する内部問題の固有振動数に等しい周波数で系方程式が不定となり、物理的に意味の無い解が得られてしまう。そこで以下に示す境界積分方程式の法線方向導関数の境界積分方程式を準備する。

### 2.2. 法線方向導関数境界積分方程式 (NDBIE)

本研究で用いる法線方向導関数境界積分方程式は、境界積分方程式 (6) をソース点  $y$  で微分した関係を正則化した表示式を用いる。以下にはその導出手順を示すが、説明を簡潔にするために、正則化に関わりが無い集中音源に関する項は途中の表示式では省略してあることに注意されたい。式 (6) をソース点  $y$  で微分した次式を考える。

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} \{q_{,j}^*(x, y) - Q_{,j}^*(x, y)\} p(x) d\Gamma(x) \\ & + \int_{\Gamma} Q_{,j}^*(x, y) \{p(x) - p(y)\} d\Gamma(x) \\ & - \left\{ \int_{\Gamma} Q^*(x, y) d\Gamma(x) \right\} p_{,j}(y) \\ & = -i\omega\rho \int_{\Gamma} p_{,j}^*(x, y) v(x) d\Gamma(x) \end{aligned} \quad (10)$$

ここで、基本解の微分  $p_{,j}^*(x, y)$  は正則な部分と特異な部分に分けることができること (3)、式 (10) の左辺第 3 項はソース点  $y$  の位置により決まる定数  $c(y)$  との関係があり、それらを考慮することで式 (10) は以下ようになる。

$$\begin{aligned} c_{ij}(y) p_{,i}(y) & + \int_{\Gamma} \{q_{,j}^*(x, y) - Q_{,j}^*(x, y)\} p(x) d\Gamma(x) \\ & + \int_{\Gamma} Q_{,j}^*(x, y) \{p(x) - p(y)\} d\Gamma(x) \\ & = -i\omega\rho \int_{\Gamma} \{p_{,j}^*(x, y) - u_{,j}^*(x, y)\} v(x) d\Gamma(x) \\ & - i\omega\rho \int_{\Gamma} u_{,j}^*(x, y) v(x) d\Gamma(x) \end{aligned} \quad (11)$$

式 (11) において基本解  $u_{,j}^*(x, y)$  および  $Q_{,j}^*(x, y)$  は 2次元問題の場合、それぞれ強い特異性  $O(1/r)$  と超特異性  $O(1/r^2)$  を有している。そこで、積分を直接数値的に評価可能にするために、音圧の勾配が一様である場を考慮して正則化を行う (4)。一様な音圧勾配の場において  $p(x)$  および  $q(x)$  はそれぞれ以下ようになる。

$$p(x) = p(y) + r_m(x, y) p_{,m}(y) \quad (12)$$

$$q(x) = n_m(x) p_{,m}(y) \quad (13)$$

式 (12), (13) を Laplace 方程式の正則化された境界積分方程式を微分した関係式 (5) に代入すれば、次の積分方程式を得る。

$$\begin{aligned} c_{ij}(y) p_{,i}(y) & + \int_{\Gamma} Q_{,j}^*(x, y) r_m(x, y) p_{,m}(y) d\Gamma(x) \\ & = \int_{\Gamma} u_{,j}^*(x, y) n_m(x) p_{,m}(y) d\Gamma(x) \end{aligned} \quad (14)$$

式 (11) から式 (14) を差し引き、両辺に  $n_j(y)$  を乗じ、これまで省略していた集中音源に関する項を追加すれば、以下の

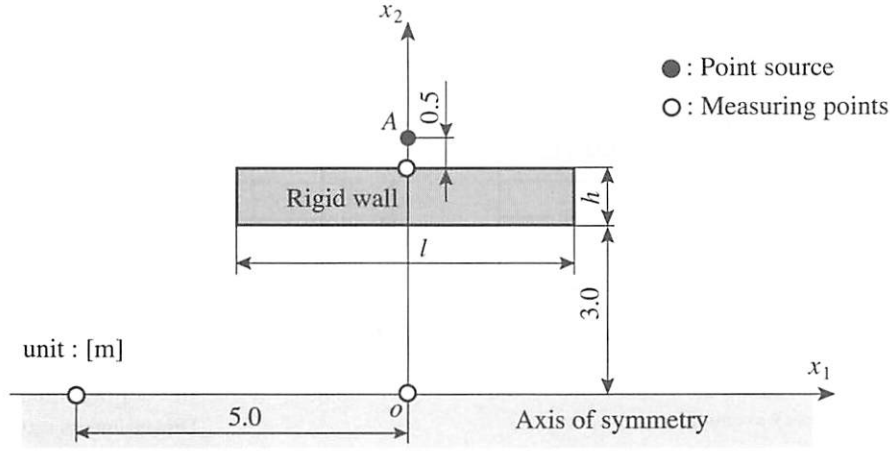


Fig. 1 Analysis model

正則化された法線方向導関数積分方程式を得る.

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Gamma} \{ \tilde{q}^*(x, y) - \tilde{Q}^*(x, y) \} p(x) d\Gamma(x) \\
 & + \int_{\Gamma} \tilde{Q}^*(x, y) \{ p(x) - p(y) - r_m(x, y) p_m(y) \} d\Gamma(x) \\
 & = -i\omega\rho \int_{\Gamma} \{ \tilde{p}^*(x, y) - \tilde{u}^*(x, y) \} v(x) d\Gamma(x) \\
 & - i\omega\rho \int_{\Gamma} \tilde{u}^*(x, y) \{ v(x) - n_m(x) p_m(y) \} d\Gamma(x) \\
 & + I\tilde{p}^*(x^s, y)
 \end{aligned} \quad (15)$$

ただし  $\tilde{() } = \partial()/\partial n(y)$  であり, 基本解の各成分は以下のようになる.

$$\tilde{u}^*(x, y) = -\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial r}{\partial n}(y) \quad (16)$$

$$\tilde{Q}^*(x, y) = \frac{1}{2\pi r^2} \left\{ 2 \frac{\partial r}{\partial n}(x) \frac{\partial r}{\partial n}(y) + n_j(x) n_j(y) \right\} \quad (17)$$

$$\tilde{p}^*(x, y) = \frac{i}{4} k H_1^{(2)}(kr) \frac{\partial r}{\partial n}(y) \quad (18)$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{q}^*(x, y) = & \frac{i}{4} k \left[ k H_0^{(2)}(kr) \frac{\partial r}{\partial n}(x) \frac{\partial r}{\partial n}(y) \right. \\
 & \left. - H_1^{(2)}(kr) \frac{1}{r} \left\{ n_j(x) n_j(y) + 2 \frac{\partial r}{\partial n}(x) \frac{\partial r}{\partial n}(y) \right\} \right] \quad (19)
 \end{aligned}$$

### 3. 数値解析

解析対象として図1に示すように, 半無限空間内に境界形状が矩形である剛体が1つ存在する場合を考える. 剛体の寸法は  $l = 5.0[\text{m}]$ ,  $h = 1.0[\text{m}]$  とし, 媒質密度  $\rho = 1.2[\text{kg}/\text{m}^3]$ , 伝播速度  $c = 340[\text{m}/\text{s}]$ , 点音源 A の強さを  $(2.0, 0.0)[\text{Pa}]$  として与えた. 周波数は  $1[\text{Hz}]$  から  $2[\text{kHz}]$  を  $1[\text{Hz}]$  刻みにとって解析を行う. 評価点は境界上に1点, 地表面に2点設置し, これらの点で得られる音圧の絶対値の平均値を音圧レベルに変換したものを結果としてプロットする. 数値解析するにあたって剛体表面を境界2次要素を用い, 全要素数600で離散化し, 剛体表面の境界条件は完全反射の条件を与えた.

図2に境界積分方程式(6)を適用して得られた結果を示す. 数値解析結果より, 特定の波数域において見かけの固有振動数の影響より解の精度が極端に低下していることが確認できる.

図3に以前著者らが提案した手法を適用して得られた結果を示す. 境界積分方程式の併用方法は, 要素端点において式(6)を適用し, 中間節点では式(15)を適用した. 数値解析結果より, 低次の波数域では式(6)を適用した場合に見かけの固有振動数の影響で解の精度が低下する場所とは別の波数域で解の精度が低下しており, 高次の波数域においては解の精度が極端に低下しており, 以前に我々が提案した手法ではこの問題に関して見かけの固有振動数問題を回避できないことがわかる.

図4に Burton - Miller の手法を適用して得られた結果を示す. 2つの境界積分方程式を結合する際の係数は Cunefare - Koopman<sup>(8)</sup> に従い  $i/k$  とした. 数値解析結果より, 見かけの固有振動数問題を回避した解が得られていると考えられる.

図5には, 本報で提案する境界2次要素の要素端点において Burton - Miller の境界積分方程式を適用し, 要素の中間節点で2つの境界積分方程式を結合する際の係数  $i/k$  を式(15)に乗じた境界積分方程式を適用して見かけの固有振動数問題を回避する手法 (Hybrid method) による結果を示す. 数値解析結果より, Burton - Miller の手法同様見かけの固有振動数の影響を回避した解が得られていると考えられる.

### 4. 結論

本論文で示した Hybrid method は Burton - Miller の手法同様, 境界要素法を用いて Helmholtz 方程式に支配される2次元定常音響問題を解析する際に重要となる見かけの固有振動数の影響を回避した解を得ることが可能であることがわかった. 本手法は, 結合した境界積分方程式を全節点に適用するのではなく要素端点にのみ適用するため, Burton - Miller の手法より係数行列を早く計算できる. そのため, より細かな要素分割を必要とする高次の波数域の解析に対して有効であると考えられる. また, 以前に著者らが提案した手

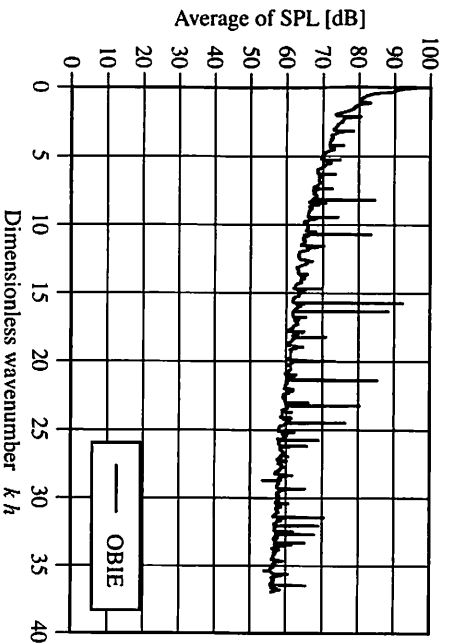


Fig. 2 Applying OBIE to whole nodal points.

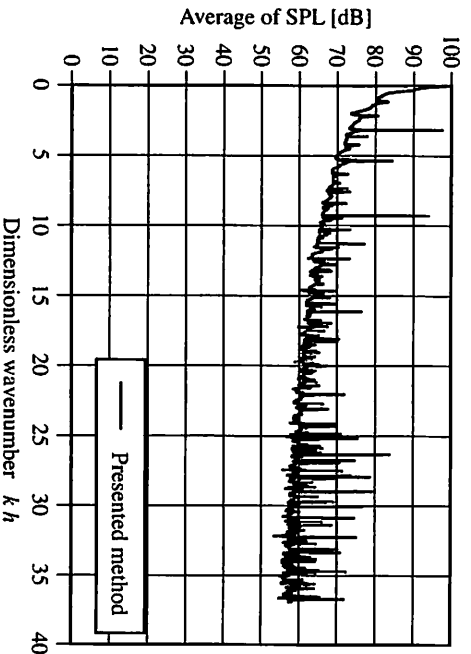


Fig. 3 Applying OBIE to the extreme points of boundary element, and NDBIE to the middle point of the element.

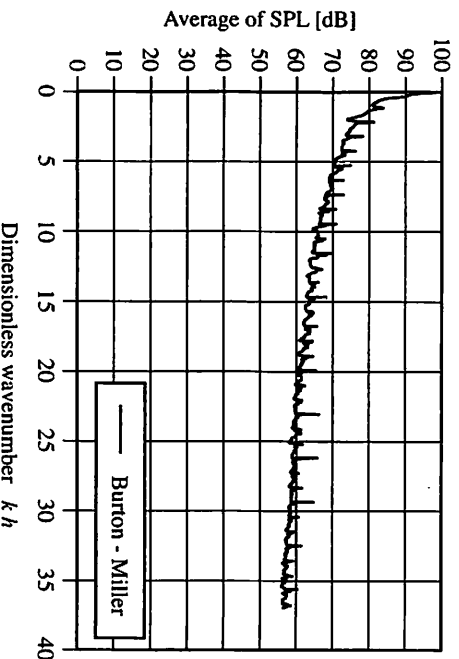


Fig. 4 Applying combined integral equation to whole nodal points.

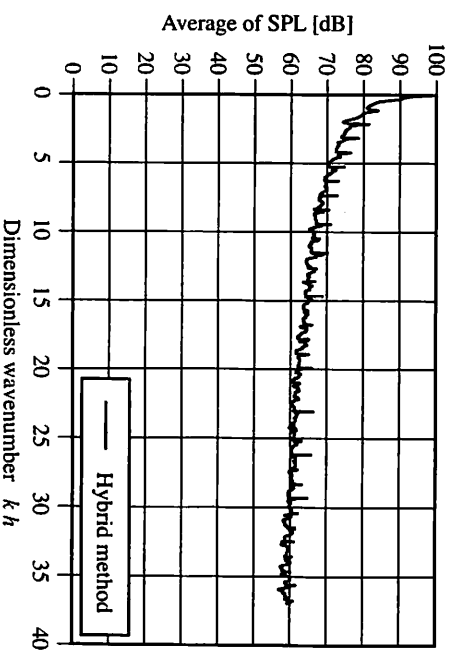


Fig. 5 Applying combined integral equation to the extreme points of boundary element, and NDBIE times  $i/k$  to the middle point of boundary element.

### 参考文献

- (1) 田中正隆, 松本敏郎, 中村正行: 境界要素法, (1991), 培風館.
- (2) 小林昭一: 波動解析と境界要素法, (2000), 京都大学学術出版会.
- (3) 松本敏郎, 田中正隆: 正則化された境界積分方程式の離散化手法, BEM・テクノロジー・コンファレンス論文集, 1(1991) pp. 7-12.
- (4) 荒井政大, 足立忠晴, 松本浩之: 一様勾配条件に基づく境界要素解析の高精度化 (ポテンシャル問題に対する定式化への適用), 日本機械学会論文集, 61-581, A(1995) pp. 161-168.
- (5) 松本敏郎, 田中正隆, 岡山瞬: 二次元ポテンシャル問題における超特異積分方程式と正則化された境界積分方程式による境界のポテンシャル勾配の評価法, 日本機械学会論文集, 64-619, A(1998) pp. 743-750.
- (6) 田中正隆, 松本敏郎, 荒井雅理: 音響問題の境界要素解析での見かけの固有振動数問題を回避するための新手法 (2次元問題に関する検討), 日本機械学会論文集, 71, C(2005) in print.
- (7) A. J. Burton, and G. F. Miller: The application of integral equation methods to the numerical solution of some exterior boundary-value problems, *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A*, 323 (1971), pp.201-210.
- (8) K. A. Cunefare, and Gary Koopman: A Boundary element method for acoustic radiation valid for all wavenumbers, *J. Acoust. Soc. Am.*, 85 (1989), pp.39-48.
- (9) 一宮亮一: 機械系の音響工学, コロナ社, (1992).
- (10) 日本音響学会 (編): 騒音・振動, コロナ社, (1982).
- (11) 早坂寿雄: 技術者のための音響工学, 丸善株式会社, (1986).
- (12) 日本音響学会 (編): 基礎音響工学, コロナ社, (1990).

法は問題によって見かけの固有振動数の影響が回避できないことを確認した。ただし、現在この手法でなぜ見かけの固有振動数問題が回避できるかの理論的背景が不確かなため、その確認を行いその適用範囲についての検討・考察を行う。