

異方性材料の非定常熱伝導問題に対する DRMを用いた時間ステップ境界要素法 (3次元問題での検討)

A TIME-STEPPING DUAL RECIPROCITY BEM FOR TRANSIENT HEAT CONDUCTION IN ANISOTROPIC SOLIDS (STUDY ON TWO-DIMENSIONAL PROBLEMS)

田中 正隆¹⁾, 松本 敏郎²⁾, 原 啓志³⁾

Masataka TANAKA, Toshiro MATSUMOTO and Keiji HARA

- 1) 信州大学工学部機械システム工学科 (〒 380-8553 長野市若里 4-17-1, E-mail: dtanaka@gipwc.shinshu-u.ac.jp)
 2) 名古屋大学大学院工学研究科 (〒 464-8603 名古屋市千種区, E-mail: t.matsumoto@nuem.nagoya-u.ac.jp)
 3) 信州大学大学院工学系研究科 (〒 380-8553 長野市若里 4-17-1, E-mail: k-hara@artist.shinshu-u.ac.jp)

This paper is concerned with a dual reciprocity boundary element method (DRBEM) applied to the transient heat conduction problem of anisotropic materials. The integral equation formulation employs the fundamental solution of Laplace equation for isotropic materials, and hence from the anisotropic part of the governing differential equation a domain integral arises in the boundary integral equation. This domain integral is transformed into boundary integrals by using new radial basis functions. Furthermore, time derivative is approximated by the finite difference method, and the domain integral also appears from this approximation. Such a domain integral at each time step is also transformed into boundary integrals via the same dual reciprocity method. The details of the proposed DRBEM are presented, and a computer code is developed for two-dimensional problems. The usefulness of the present method is demonstrated through comparison of the results obtained by the computer code with those by another method.

Key Words: Computational Mechanics, Time-stepping Boundary Element Method, Dual Reciprocity Method, Transient Heat Conduction, Anisotropic Solid, Analog Equation Method

1. はじめに

異方性材料の非定常熱伝導問題に対する境界要素法の定式化では、異方性材料に対する基本解が必要であり、さらに導出される境界積分方程式の中に時間ステップごとに見かけの初期条件に由来する領域積分項が残る⁽¹⁾⁽²⁾。この領域積分を評価するためには、領域内部を要素またはセルに分割しなければならないが、領域内部の要素分割にはたいへん手間がかかり境界要素法の特長が半減してしまう⁽³⁾。また、定式化の際に必要な基本解に時間依存の厳密基本解を用いたとしても、係数マトリックスの計算がかなり複雑となり、計算時間もかかる⁽³⁾。

そこで本研究では、Analog Equation Method (=AEM)⁽⁴⁾⁽⁵⁾ の考え方を採用し、ラプラス方程式の基本解を用いる解法について考察する。さらに、時間差分に由来する領域積分項を含

めて、二重相反法 (DRM)⁽⁶⁾ を用いることにより境界積分に変換し境界のみの離散化と内部選点のみで解析する。

本報では、3次元問題について定式化の詳細を示し、それに基づく解析プログラムを用いていくつかの例題を計算し、本手法の有効性について検討を行う。

2. 理論

2.1. 支配微分方程式

異方性材料の3次元非定常熱伝導問題に対する支配微分方程式は、次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
 & k_{11} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x_1^2} + k_{22} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x_2^2} + k_{33} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x_3^2} \\
 & + 2k_{12} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x_1 \partial x_2} + 2k_{23} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x_2 \partial x_3} + 2k_{31} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x_3 \partial x_1} \\
 & = \rho c \dot{u}(x, t) \quad (1)
 \end{aligned}$$

ただし、 $u(x, t)$ は温度、 $k_{11}, k_{22}, k_{33}, k_{12}, k_{23}, k_{31}$ は熱伝導率テンソルの成分である。 ρ は密度、 c は比熱とし上付きのドット ($\dot{\cdot}$) は時間による微分を表す。また、上式に対する境界条件および初期条件は次式で与えられるものとする。

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \bar{u}, & x \in \Gamma_u \\ q(x, t) &= \frac{\partial u(x, t)}{\partial n} = \bar{q}, & x \in \Gamma_q \\ \lambda(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial n} + h\{u(x, t) - u_a\} &= 0, & x \in \Gamma_a \\ u(x, 0) &= u_0, & x \in \Omega \end{aligned} \quad (2)$$

ただし、 n は境界 Γ 上の単位外向き法線ベクトルであり、 $\partial u(x, t)/\partial n$ は $u(x, t)$ の法線方向勾配を表すものとする。また、 $\Gamma_u, \Gamma_q, \Gamma_a$ はそれぞれ温度既知境界、熱流束既知境界、熱伝達境界である。さらに、 \bar{u}, \bar{q}, u_0 は既知の境界値および初期温度であり、 h は熱伝達率、 u_a は外部雰囲気温度である。式 (1) に対し等方性問題の基本解を用いた BEM 解法を確立するために、AEM の考え方を適用する。AEM の基本的な考え方は、基本解を求めるのが困難か不可能な問題を BEM で解くときに、ラプラス微分作用素で表される方程式に変換して問題を解くというものである。この考えを異方性熱伝導問題に拡張すれば、異方性熱伝導テンソルを等方性の部分とその他の部分に分けて定式化を行えば良い。上付 A で異方性を、上付 I で等方性を示すとして次式とおく。

$$k_{ij}^A = k_{ij}^I + k_{ij}^{A-I} \quad (3)$$

$$k_{ij}^A = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{31} \\ k_{12} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{23} & k_{33} \end{bmatrix}, \quad k_{ij}^I = \begin{bmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & M \end{bmatrix}$$

$$k_{ij}^{A-I} = \begin{bmatrix} m_1 & k_{12} & k_{31} \\ k_{12} & m_2 & k_{23} \\ k_{31} & k_{23} & m_3 \end{bmatrix}$$

ただし、 M には任意の材料定数を用いてもよいが、ここでは k_{11}, k_{22}, k_{33} の平均値を用いる。式 (1) は次式となる。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x_3^2} \\ &= -\frac{m_1}{M} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x_1^2} - \frac{m_2}{M} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x_2^2} - \frac{m_3}{M} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x_3^2} \\ & -2 \frac{k_{12}}{M} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x_1 \partial x_2} - 2 \frac{k_{23}}{M} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x_2 \partial x_3} - 2 \frac{k_{31}}{M} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x_3 \partial x_1} \\ & \quad + \frac{\rho c \dot{u}(x, t)}{M} \end{aligned} \quad (4)$$

式 (4) の右辺をソース項と見なせばこの式は Poisson 方程式であり、Laplace 方程式の基本解を用いて定式化を行うことができる。

2.2. DRM の適用

境界積分方程式の導出において、本研究では Laplace 方程式の基本解を使用する。3次元 Laplace 方程式の基本解は次式で与えられる。

$$u^*(x, y) = \frac{1}{4\pi r} \quad (5)$$

ただし、 r はソース点 y と観測点 x との距離を表す。式 (4) の両辺に上式の基本解 $u^*(x, y)$ をかけ、考察領域 Ω 全体で積分し、部分積分すると次式を得る。

$$\begin{aligned} & c(y)u(y, t) + \int_{\Gamma} q^*(x, y)u(x, t)d\Gamma \\ & \quad - \int_{\Gamma} u^*(x, y)q(x, t)d\Gamma \\ &= \int_{\Omega} u^*(x, y) \left\{ -\frac{m_1}{M} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x_1^2} - \frac{m_2}{M} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x_2^2} \right. \\ & \quad - \frac{m_3}{M} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x_3^2} - 2 \frac{k_{12}}{M} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x_1 \partial x_2} - 2 \frac{k_{23}}{M} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x_2 \partial x_3} \\ & \quad \left. - 2 \frac{k_{31}}{M} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x_3 \partial x_1} + \frac{\rho c \dot{u}(x, t)}{M} \right\} d\Omega \end{aligned} \quad (6)$$

ただし、 $c(y)$ はソース点のある境界形状で決まる定数であり、 $y \in \Omega$ のときには $c(y) = 1$ となる。また、 $q^*(x, y)$ は基本解 $u^*(x, y)$ の法線方向勾配を表し、具体形は次式となる。

$$q^*(x, y) = -\frac{1}{4\pi r^2} \frac{\partial r}{\partial n} \quad (7)$$

式 (6) の左辺は境界積分となっているが、右辺は領域積分のまま残る。この領域積分を評価する際、領域内部を要素またはセルに区切ることにより領域積分を評価する手法が提案されているが、この作業には非常に手間がかかり、境界要素法の特長が半減してしまう⁽³⁾。そこで、この領域積分項を境界積分に変換するために DRM を適用する。

まず、式 (4) の右辺を次式で近似する。

$$\begin{aligned} & -\frac{m_1}{M} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x_1^2} - \frac{m_2}{M} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x_2^2} - \frac{m_3}{M} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x_3^2} \\ & -2 \frac{k_{12}}{M} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x_1 \partial x_2} - 2 \frac{k_{23}}{M} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x_2 \partial x_3} - 2 \frac{k_{31}}{M} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x_3 \partial x_1} \\ & \quad + \frac{\rho c \dot{u}(x, t)}{M} = \sum_{\ell=1}^{N+L} \alpha^\ell f(x, z^\ell) \end{aligned} \quad (8)$$

ただし、 N は境界節点数、 L は内部選点数、 α^ℓ は未知係数、 $f(x, z^\ell)$ は近似関数、 z^ℓ は DRM 選点を表すものとする。DRM で用いられる近似関数⁽⁷⁾⁽⁸⁾ に対しては多くの研究がなされており、観測点 x と DRM 選点 z^ℓ との距離の関数を使用することが一般的である。本研究では近似関数として次式を使用する。

$$f(x, z^\ell) = \begin{cases} (1 - r^\ell/a)^4 (4r^\ell/a + 1), & 0 \leq r^\ell \leq a \\ 0, & r^\ell > a \end{cases} \quad (9)$$

上式は、Compactly Supported Radial Basis Function⁽⁷⁾ と呼ばれる近似関数であり、 a は近似関数が影響する半径である。

ここで、次式を満たす特解を $\hat{u}(x, z^\ell)$ とする。

$$\nabla^2 \hat{u}(x, z^\ell) = f(x, z^\ell) \quad (10)$$

この特解 $\hat{u}(x, z^\ell)$ を用いると、式 (4) の展開された支配微分方程式は未知係数 α^ℓ と特解 $\hat{u}(x, z^\ell)$ により次式のように書き表すことができる。

$$\nabla^2 u(x, t) = \sum_{\ell=1}^{N+L} \alpha^\ell \nabla^2 \hat{u}(x, z^\ell) \quad (11)$$

上式の両辺に基本解 $u^*(x, y)$ をかけ、考察領域全体で積分し部分積分することにより、次の境界積分方程式を得る。

$$\begin{aligned} & c(y)u(y, t) + \int_{\Gamma} q^*(x, y)u(x, t)d\Gamma \\ & - \int_{\Gamma} u^*(x, y)q(x, t)\Gamma \\ = & \sum_{\ell=1}^{N+L} \alpha^{\ell} \left\{ c(y)\hat{u}(y, t) + \int_{\Gamma} q^*(x, y)\hat{u}(x, z^{\ell})d\Gamma \right. \\ & \left. - \int_{\Gamma} u^*(x, y)\hat{q}(x, z^{\ell})d\Gamma \right\} \quad (12) \end{aligned}$$

ただし、 $\hat{q}(x, z^{\ell})$ は特解 $\hat{u}(x, z^{\ell})$ の法線方向勾配を表す。

$$\hat{q}(x, z^{\ell}) = \frac{\partial \hat{u}(x, z^{\ell})}{\partial n} \quad (13)$$

2.3. 異方性問題の熱流束の導入

異方性問題に対する熱流束は次式で定義される。

$$\begin{aligned} q^A(x, t) &= -k_{ij}^A \frac{\partial u(x, t)}{\partial x_i} n_j \\ &= -k_{ij}^I \frac{\partial u(x, t)}{\partial x_i} n_j - k_{ij}^{A-I} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x_i} n_j \\ &= -M \frac{\partial u(x, t)}{\partial n} - k_{ij}^{A-I} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x_i} n_j \quad (14) \end{aligned}$$

ただし、 $q^A(x, t)$ は熱流束の法線方向成分を表す。よって温度の法線方向勾配は次式で表すことが出来る。

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial n} = -\frac{q^A(x, t)}{M} - \frac{k_{ij}^{A-I}}{M} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x_i} n_j \quad (15)$$

上式を DRM を適用した積分方程式 (12) に代入する。

$$\begin{aligned} & c(y)u(y, t) + \int_{\Gamma} q^*(x, y)u(x, t)d\Gamma \\ & - \int_{\Gamma} u^*(x, y) \left\{ -\frac{q^A(x, t)}{M} - \frac{k_{ij}^{A-I}}{M} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x_i} n_j \right\} d\Gamma \\ = & \sum_{\ell=1}^{N+L} \alpha^{\ell} \left\{ c(y)\hat{u}(y, z^{\ell}) + \int_{\Gamma} q^*(x, y)\hat{u}(x, z^{\ell})d\Gamma \right. \\ & \left. - \int_{\Gamma} u^*(x, y)\hat{q}(x, z^{\ell})d\Gamma \right\} \quad (16) \end{aligned}$$

よって異方性問題の熱流束を導入した境界積分方程式は次式となる。

$$\begin{aligned} & c(y)u(y, t) + \int_{\Gamma} q^*(x, y)u(x, t)d\Gamma \\ & + \int_{\Gamma} \frac{u^*(x, y)}{M} q^A(x, t)d\Gamma \\ & + \int_{\Gamma} \frac{u^*(x, y)}{M} k_{ij}^{A-I} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x_i} n_j d\Gamma \\ = & \sum_{\ell=1}^{N+L} \alpha^{\ell} \left\{ c(y)\hat{u}(y, z^{\ell}) + \int_{\Gamma} q^*(x, y)\hat{u}(x, z^{\ell})d\Gamma \right. \\ & \left. - \int_{\Gamma} u^*(x, y)\hat{q}(x, z^{\ell})d\Gamma \right\} \quad (17) \end{aligned}$$

式 (17) より、すべて境界積分に変換された境界積分方程式が得られていることが分かる。式 (17) の境界積分方程式を、 N 個の境界節点にソース点を置くことにより、 N 個の式が

得られる。また、同様に L 個の内部選点にソース点を置くことにより、 L 個の式が得られる。これらの $N+L$ 個の式は、マトリックス形式で次式のように一つにまとめることができる。

$$Hu + \frac{1}{M}Gq + \frac{k_{ij}^{A-I}}{M}Gn_i u_{x_j} = [H\hat{U} - G\hat{Q}]\alpha \quad (18)$$

ここで温度 u の座標微分は、DRM の未知係数を求める際と同様に、近似関数を用いて評価する方法を適用する。よって温度 u の座標微分は次式のように表すことが出来る。

$$u_{x_j} = F_{x_j} F^{-1} u \quad (19)$$

ただし、 F^{-1} は F の逆行列を表し、

$$F = \begin{bmatrix} f(x^1, z^1) & \dots & f(x^1, z^{N+L}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f(x^{N+L}, z^1) & \dots & f(x^{N+L}, z^{N+L}) \end{bmatrix} \quad (20)$$

である。したがって、式 (18) は次式となる。

$$Hu + \frac{1}{M}Gq + \frac{1}{M}GKu = [H\hat{U} - G\hat{Q}]\alpha \quad (21)$$

ただし、 K は次式で表される $(N+L)$ の正方マトリックスである。

$$K = k_{ij}^{A-I} n_j F_{x_i} F^{-1} \quad (22)$$

2.4. 未知係数

DRM を適用し領域積分項を境界積分に変換する際、未知係数と近似関数を用いて定式化を進めてきた。ここでは、未知係数を決定するための手法を示す。

式 (8) を再記する。

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^{N+L} \alpha^{\ell} f(x, z^{\ell}) &= -\frac{m_1}{M} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x_1^2} - \frac{m_2}{M} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x_2^2} \\ &- \frac{m_3}{M} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x_3^2} - 2\frac{k_{12}}{M} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x_1 \partial x_2} - 2\frac{k_{23}}{M} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x_2 \partial x_3} \\ &- 2\frac{k_{31}}{M} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x_3 \partial x_1} + \frac{\rho c \dot{u}(x, t)}{M} \quad (23) \end{aligned}$$

ここで、近似関数 $f(x, z^{\ell})$ は 2 点 x と z^{ℓ} を決定することにより既知関数となる。この関係式が全ての境界節点と内部選点に対して成り立つと仮定すると、未知係数 α^{ℓ} を求めることができ、マトリックス形式で書き表すと次式となる。

$$\begin{aligned} \alpha &= F^{-1} \left[-\frac{m_1}{M} u_{x_1 x_1} - \frac{m_2}{M} u_{x_2 x_2} - \frac{m_3}{M} u_{x_3 x_3} \right. \\ &\left. - 2\frac{k_{12}}{M} u_{x_1 x_2} - 2\frac{k_{23}}{M} u_{x_2 x_3} - 2\frac{k_{31}}{M} u_{x_3 x_1} + \frac{\rho c}{M} \dot{u} \right] \quad (24) \end{aligned}$$

また、各ベクトルの成分は次のようになる。

$$u_{x_m x_n} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial^2 u^1(x, t)}{\partial x_m x_n} \\ \vdots \\ \frac{\partial^2 u^{N+L}(x, t)}{\partial x_m x_n} \end{array} \right\} \quad (25)$$

$$\dot{u} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial u(x^1, t)}{\partial t} \\ \vdots \\ \frac{\partial u(x^{N+L}, t)}{\partial t} \end{array} \right\} \quad (26)$$

ただし、 x^i は全ての境界節点と内部選点の内、 i 番目の点を表す。

式 (24) に表れる温度 $u(x, t)$ の 2 階座標微分を近似関数を用いて評価する方法について述べる。まず、温度 $u(x, t)$ を近似関数を用いて次式で近似する。

$$u(x, t) = \sum_{\ell=1}^{N+L} \beta^\ell f(x, z^\ell) \quad (27)$$

ただし、 β^ℓ は未知係数である。ここで使用される近似関数は DRM で使用する近似関数と必ずしも一致させる必要はない。さらに上式を x_m で一階微分すると次式を得る。

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x_m} = \sum_{\ell=1}^{N+L} \beta^\ell \frac{\partial f(x, z^\ell)}{\partial x_m} \quad (28)$$

式 (27), (28) をすべての選点に対して適用することにより未知係数 β^ℓ が消去され、 u_{x_m} を次式のように評価することができる。

$$u_{x_m} = F_{x_m} F^{-1} u \quad (29)$$

さらに、温度の 1 階座標偏微分を次式で近似する

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x_m} = \sum_{\ell=1}^{N+L} \gamma^\ell f(x, z^\ell) \quad (30)$$

γ^ℓ も未知係数である。ここで上式を偏微分すると次式を得る。

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x_m \partial x_n} = \sum_{\ell=1}^{N+L} \gamma^\ell \frac{\partial f(x, z^\ell)}{\partial x_n} \quad (31)$$

式 (30), (31) をすべての選点に対して適用することにより未知係数 γ^ℓ が消去され、 $u_{x_m x_n}$ を次式のように評価することができる。

$$u_{x_m x_n} = F_{x_n} F^{-1} u_{x_m} \quad (32)$$

上式と式 (29) より、温度の 2 階座標偏微分は温度 $u(x, t)$ と近似関数 $f(x, z^\ell)$ の関数として近似することができ、次式となる。

$$u_{x_m x_n} = F_{x_n} F^{-1} F_{x_m} F^{-1} u \quad (33)$$

ただし、

$$F_{x_m} = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial f(x^1, z^1)}{\partial x_m} & \cdots & \frac{\partial f(x^1, z^{N+L})}{\partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f(x^{N+L}, z^1)}{\partial x_m} & \cdots & \frac{\partial f(x^{N+L}, z^{N+L})}{\partial x_m} \end{array} \right] \quad (34)$$

上式の各成分は、次式から計算することができる。

$$\frac{\partial f(x, z^\ell)}{\partial x_m} = \frac{\partial f(x, z^\ell)}{\partial r} \frac{r_m^\ell}{r^\ell} \quad (35)$$

ただし、 r_m^ℓ は r^ℓ の x_m 方向成分を表す。

また、温度 $u(x, t)$ の時間微分に関しては差分近似を適用する。このとき、初回の計算においては後退差分近似、2 回目以降の計算においては二次曲線差分近似を適用するものとする。このとき、初回の計算におけるの近似式は次式となる。

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{u(x, t) - u(x, t - \Delta t)}{\Delta t} \quad (36)$$

ただし、 Δt はタイムステップ幅、 $u(x, t - \Delta t)$ は 1 ステップ前の温度を表すものとする。また、2 回目以降の差分近似に次式を適用する。

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{3u(x, t) - 4u(x, t - \Delta t) + u(x, t - 2\Delta t)}{2\Delta t} \quad (37)$$

ただし、 $u(x, t - \Delta t)$ は 1 ステップ前の温度、 $u(x, t - 2\Delta t)$ は 2 ステップ前の温度を表すものとする。1 ステップまたは 2 ステップ前の各点における温度を見かけの初期条件として計算を進める。

したがって、未知係数 α^ℓ は次式のようにまとめて書き表すことができる。

$$\alpha = F^{-1} \left\{ -\frac{m_1}{M} F_{x_1} F^{-1} F_{x_1} F^{-1} - \frac{m_2}{M} F_{x_2} F^{-1} F_{x_2} F^{-1} - \frac{m_3}{M} F_{x_3} F^{-1} F_{x_3} F^{-1} - 2\frac{k_{12}}{M} F_{x_1} F^{-1} F_{x_2} F^{-1} - 2\frac{k_{23}}{M} F_{x_2} F^{-1} F_{x_3} F^{-1} - 2\frac{k_{31}}{M} F_{x_3} F^{-1} F_{x_1} F^{-1} + K_p \right\} u - F^{-1} t_0 \quad (38)$$

ただし、 K_p は現在求めている温度 $u(x, t)$ の差分近似に関する係数、 t_0 は初期条件、又は見かけの初期条件に関する既知ベクトルを表す。この未知係数 α を離散化された式 (21) へ代入し整理すると、次式を得る。

$$Hu + \frac{1}{M} Gq + \frac{1}{M} GKu = [H\hat{U} - G\hat{Q}] [Ru - T_0] \quad (39)$$

ただし、

$$R = F^{-1} \left[-\frac{m_1}{M} F_{x_1} F^{-1} F_{x_1} F^{-1} - \frac{m_2}{M} F_{x_2} F^{-1} F_{x_2} F^{-1} - \frac{m_3}{M} F_{x_3} F^{-1} F_{x_3} F^{-1} - 2\frac{k_{12}}{M} F_{x_1} F^{-1} F_{x_2} F^{-1} - 2\frac{k_{23}}{M} F_{x_2} F^{-1} F_{x_3} F^{-1} - 2\frac{k_{31}}{M} F_{x_3} F^{-1} F_{x_1} F^{-1} + K_p \right] \quad (40)$$

$$T_0 = F^{-1} t_0 \quad (41)$$

式 (39) に境界条件を適用して未知量と既知量に振り分け、連立方程式を解くことにより、各時間ステップにおける境界上の未知量と領域内部の未知温度を求めることができる。

3. 数値解析例

本手法の有効性を示すために、2 つの数値解析例を示す。

3.1. 解析例 1

Fig. 1 に示す直方体モデルを用いて数値解析を行う。境界節点を 650 点、境界を四角形 2 次要素を用いて 216 要素に分

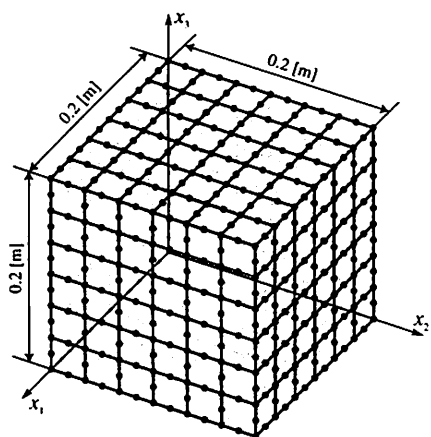


Fig. 1 Analysis model and discretization

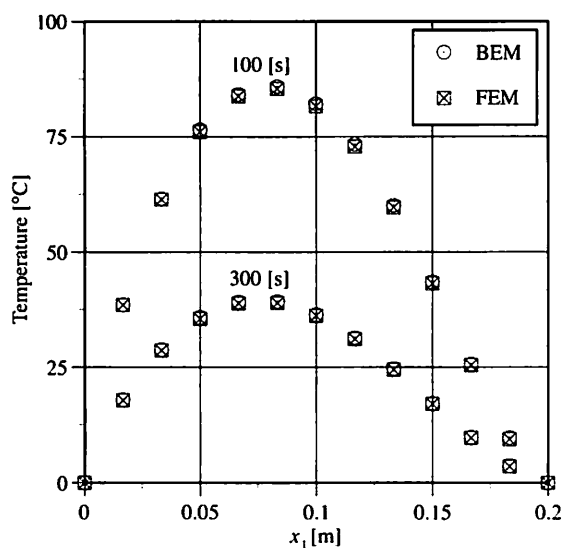


Fig. 2 Temperature distribution along axis x_1

割する。内部選点は領域内部に x_1, x_2, x_3 方向にそれぞれ 11 点の計 1331 点を均等に配置する。境界条件は、 x_1 軸に垂直な面において温度 $u = 0$ [°C]、その他の面においては断熱境界条件 $q = 0$ [W/m²] を与えるものとする。また、初期温度は領域全体に一樣に 100 [°C] として与える。材料定数は、熱伝導率 $k_{11} = k_{22} = k_{33} = 60$ [W/mK], $k_{12} = 30$ [W/mK], $k_{23} = k_{31} = 0$ [W/mK], 密度 $\rho = 7800$ [kg/m³], 比熱 $c = 440$ [J/kgK] とする。また、タイムステップ幅は $\Delta t = 1$ [s], 影響半径は $a = 0.35$ [m] とした。比較対象には汎用 FEM 解析プログラム MSC. Nastran を用いた数値計算結果を用いる⁽⁹⁾。この解析では 8 節点六面体要素を用いる。また、熱流束は、MSC. Nastran と BEM の解析結果のほか、FEM の節点温度を使い差分法で熱流束を求めた結果も示す。

Fig. 2 に、 x_1 軸上での $t = 100$ [s] と $t = 300$ [s] における温度分布を FEM と比較して示す。2 つの解法による結果は一致していることがわかる。Fig. 3 は $t = 100$ [s] での $x_1 = 0.2$ [m] での熱流束を FEM と差分法と比較して示す。解析結果は中心部分では一致しているが、両端付近では BEM と FEM-FDM

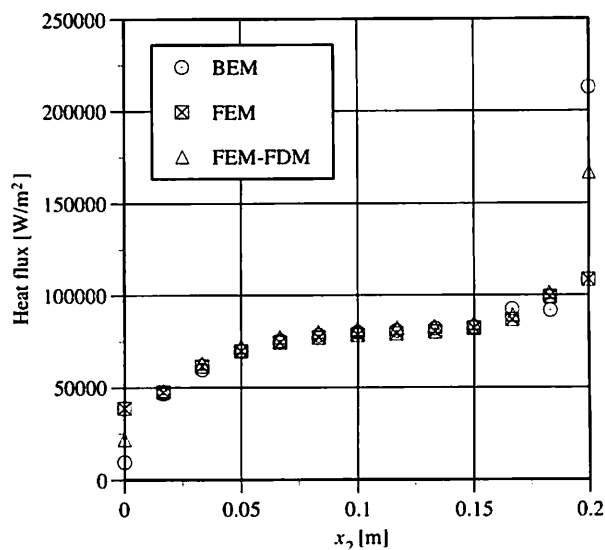


Fig. 3 Variations of heat flux on $x_1 = 0.2$

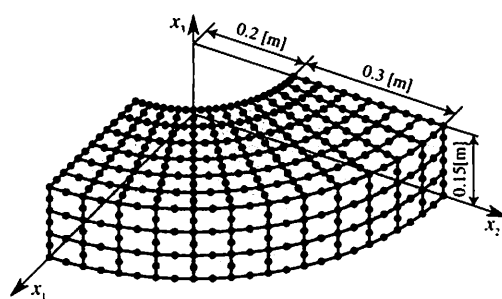


Fig. 4 Analysis model and discretization

は急激な変化を示している。これらの解法は、この近傍での熱流束の特異性に基づく挙動をより正確に表していると考えられる。温度分布に殆ど違いが無いのに熱流束に大きな違いが生じている理由は、BEM が温度と熱流束を未知量として直接求めているのに対し、FEM では求めた節点温度をもとに数値微分して熱流束を求めているためだと考えられる。FEM で要素をさらに細かくしていくことにより、熱流束についても BEM に近い値が求められることは確認している。

3.2. 解析例 2

Fig. 4 に示す 4 分の 1 円筒モデルを用いて数値解析を行う。境界節点を 758 点、境界を四角形 2 次要素を用いて 252 要素に分割する。また、内部選点は円周方向に 23 点、半径方向に 11 点、 x_3 方向に 5 点の計 1265 点を配置する。境界条件は、円筒内外面において温度 $u = 0$ [°C]、その他の面においては断熱境界条件 $q = 0$ [W/m²] を与えるものとする。また、初期温度は領域全体に一樣に 100 [°C] として与える。材料定数は、熱伝導率 $k_{11} = k_{22} = k_{33} = 35$ [W/mK], $k_{12} = 25$ [W/mK], $k_{23} = k_{31} = 0$ [W/mK], 密度 $\rho = 7800$ [kg/m³], 比熱 $c = 440$ [J/kgK] とする。また、タイムステップ幅は $\Delta t = 1$ [s], 影響半径は $a = 0.73$ [m] とした。比較対象には解析例 1 と同様に汎用 FEM 解析プログラム MSC. Nastran を用いた数値計

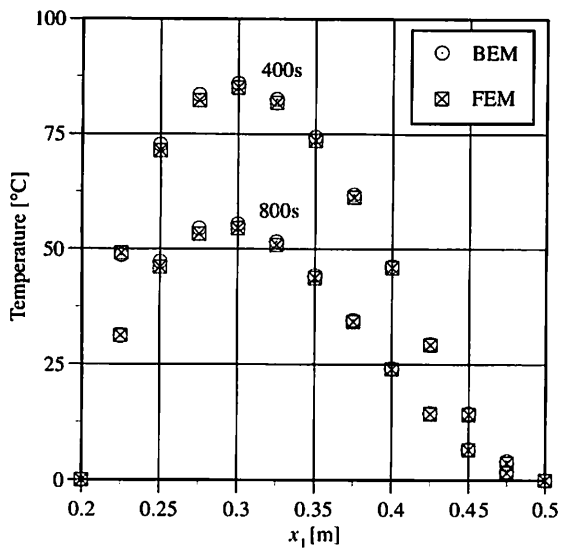


Fig.5 Temperature distribution along axis x_1

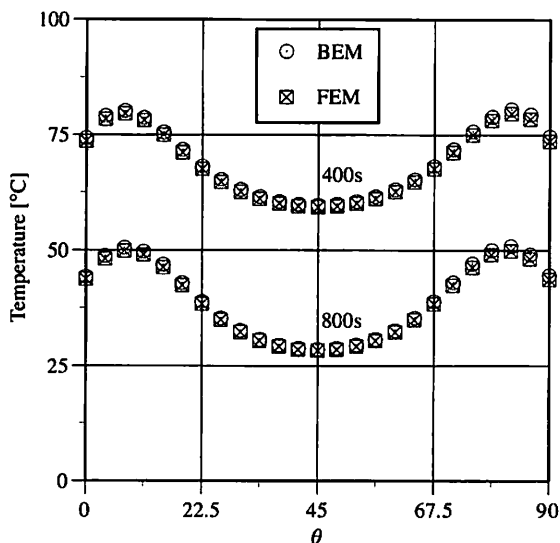


Fig.6 Temperature distribution on $r = 0.35$ [m]

算結果を用いる。

Fig. 5 に、 x_1 軸上での $t = 400$ [s] と $t = 800$ [s] における温度分布を FEM と比較して示す。2つの解法による結果は一致していることがわかる。また、Fig. 6 に、 $r = 0.35$ [m] での $t = 400$ [s] と $t = 800$ [s] における温度分布を FEM と比較

して示す。ここで r は、半径方向の距離を表す。2つの解法による結果は一致していることがわかる。

4. おわりに

異方性材料の非定常熱伝導問題に対する DRM を用いた時間ステップ境界要素法の 3次元問題への適用について検討した。開発した解析プログラムにより 2つの例題に対して数値解析を行い、本手法の有効性を確認した。二重相反法を異方性材料の非定常熱伝導問題へ適用することにより、3次元問題に対して境界要素法が有効利用できる範囲を広げることができたと言える。

参考文献

- (1) 田中正隆, 松本敏郎, 楊慶峰, 直交異方性体の非定常熱伝導問題に対する時間ステップ境界要素法, 日本機械学会論文集 (A 編), **59**-559, (1993), pp.856-862.
- (2) 石黒周司, 田中正隆, 松本敏郎, 境界要素法による異方性体の 2次元非定常熱伝導解析, 日本機械学会論文集 (A 編), **67**-659, (2001), pp.1-6.
- (3) 田中正隆, 松本敏郎, 中村正行, 境界要素法, 培風館, (1991).
- (4) 田中正隆, 荒井雄理 (共訳), J. T. Katsikadelis (著), 境界要素法—基本と応用—, 朝倉書店, (2004).
- (5) J. T. Katsikadelis and M. S. Nerantzaki, The boundary element method for nonlinear problems, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, **23**, (1992), pp. 365-373.
- (6) P. W. Partridge, C. A. Brebbia & L. C. Wrobel, *The Dual Reciprocity Boundary Element Method*, Computational Mechanics Publications, (1992).
- (7) M. A. Golberg, C. S. Chen & H. Bowman, Some Recent Results and Proposals for the use of Radial Basis Functions, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, **23**, (1999), pp. 285-296.
- (8) M. A. Golberg, C. S. Chen & S.R. Karur, Improved multi-quadratic approximation for partial differential equations, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, **18**, (1996), pp. 9-17.
- (9) 日本エムエスシー: MSC.Patran 2001 日本語オンラインドキュメント, (2001).