

格子ボルツマン法における密度差の大きな二相流に対する二粒子モデルに関する研究

A study on two phase flow with a large density difference by two particle model of the lattice Boltzmann method

葛原 道久¹⁾, Wu Long²⁾, 篠原 康彦³⁾, 榎村 真一⁴⁾, 張 曉峰⁵⁾

Michihisa TUTAHARA, Wu Long, Yasuhiko SHINOHARA, Masakazu ENOMURA, and Zhang XiaoFeng

- 1) 神戸大学大学院自然科学研究科(〒657-8501 神戸市灘区六甲台 1-1 E-mail:tutahara@mech.kobe-u.ac.jp)
- 2) 神戸大学大学院自然科学研究科(〒657-8501 神戸市灘区六甲台 1-1 E-mail:wulong@kobe-u.ac.jp)
- 3) 神戸大学大学院自然科学研究科(〒657-8501 神戸市灘区六甲台 1-1 E-mail:shinohara@mh-1.scitec.kobe-u.ac.jp)
- 4) エムテック (株) (〒594-1144 大阪府和泉市テクノステージ 2-2-4)
- 5) エムテック (株) (〒594-1144 大阪府和泉市テクノステージ 2-2-4)

We proposed a novel model of the finite difference lattice Boltzmann method which allows us to consider gas-liquid two-phase flows with large density difference, for instance, 800 for air and water. Two-particle model was used and the density difference was introduced by changing the acceleration according to the fluid density. The surface tension effect was also introduced. Compressibility of the liquid was realized, and the sound speed in the liquid phase was found to increase up to several times larger than that of the gas. Two-dimensional motion of liquid column collapse was successively simulated. The very fast motion of the liquid in cavitation bubble collapse was also simulated and the microjet was detected.

Key words: Finite difference lattice Boltzmann method, Two phase flow, Incompressible flow, Sound speed

1. はじめに

差分格子ボルツマン法(以下 FDLBM)は、格子ボルツマン法(以下 LBM)を発展させた、従来のナビエ・ストークス方程式を用いない流体の数値計算である^{[1]-[7]}。FDLBM は過去の研究から、流体計算手法として有効である事が示されている。また、精度良く音波の計算ができる^[8]といった優れた利点も見出されている。

我々は大きな密度差をもつ二相流に対する数値的な解析を行うため、FDLBMに二粒子モデルを導入し、新たなモデルとして、表面張力を考慮したモデルと密度差の大きい二流体を計算するモデルを提案すると共に、そのモデルの妥当性を検討することを目的としている。

以下の本文は次の内容で構成される。第2節でFDLBMと二粒子モデルの概要について述べた後、第3節で今回用いた表面張力と大きな密度差を考慮したモデルについて説明する。第4節では、この手法を用いて実施した、重力下における液柱崩壊および圧縮を受けた時の気泡崩壊についての数値シミュレーションの結果について報告する。

2. 差分格子ボルツマン法

2.1 定式化

格子ボルツマン法^[3](LBM)は流体を衝突と並進を繰り返す多数の離散的仮想粒子の集合体と考え、それらの規則的な粒子運動を計算することにより連続的な流体運動を模擬する流体の計算手法である。この手法を発展させた差分格子ボルツマン法(FDLBM)は、LBMに差分スキームを導入し、 f_i で代表される速度分布関数について解く方法である。

本研究で離散的粒子速度は直交格子の2次元9速度(2d9v)の非熱流体モデルを用いる。FDLBMにおける衝突と並進という粒子運動は、時刻 t 、位置ベクトル \mathbf{x} の格子点において、(2.1)で表される。

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \mathbf{c}_i \cdot \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{x}} = -\frac{1}{\phi} [f_i - f_i^{(0)}] \quad (2.1)$$

ここで \mathbf{c}_i は粒子の速度、 ϕ は時間緩和係数である。局所平衡分布関数 $f_i^{(0)}$ は Maxwell 分布を基礎にして導出され、非熱流体の場合、流速 u_α について2次まで展開した次式を用いる。

$$f_i^{(0)} = \omega_i \rho \left(1 + 3u_\alpha c_{i,\alpha} + \frac{9}{2} u_\alpha u_\beta c_{i,\alpha} c_{i,\beta} - \frac{3}{2} u^2 \right) \quad (2.2)$$

ここで、 ρ は密度、下添字 i は粒子速度ベクトルの識別子、下添字 α, β は座標系の指標である。 ω_i は各種の粒子に対応する定数であり、粒子速度モデルにより決める。これらの分布関数と粒子速度を用いてマクロな流体の密度、運動量および圧力は(2.3)～(2.5)によって定義され、流れ場の変数を得ることが可能である。

$$\rho = \sum_i f_i \quad (2.3)$$

$$\rho \mathbf{u} = \sum_i f_i \mathbf{c}_i \quad (2.4)$$

$$p = \frac{1}{3} \rho \quad (2.5)$$

2.2 二粒子モデル

混相流のモデルとして、Rothman らの二粒子モデル^[9]、Swift らの自由エネルギー理論を用いたモデル^[10]等がある。ここでは二相流を解析するためにその分布関数が f_L, f_G によって代表される二つの粒子を存在させた。ここで添え字の L と G はそれぞれ液体の粒子および気体の粒子を表すものとする。これらの分布関数と粒子速度を用いて二つの粒子密度、運動量および圧力は(2.6)～(2.8)によって定義され、巨視的な流れ場の変数を得ることが可能である。

$$\rho_L = \sum_i f_{Li}, \quad \rho_G = \sum_i f_{Gi} \quad (2.6 \text{ a,b})$$

$$(\rho_L + \rho_G) \mathbf{u} = \sum_i (f_{Li} \mathbf{c}_i + f_{Gi} \mathbf{c}_i) \quad (2.7)$$

$$p = \frac{1}{3}(\rho_L + \rho_G) \quad (2.8)$$

この時、(2.9) に示す形で局所平衡分布関数 $f^{(0)}_{Li}$ に外力を付加すると、(2.10) のようなナビエ・ストークス方程式を導く。

$$f^{(0)}_{Li} = f^{(0)}_{Li}(t, \rho_L, \mathbf{u} + \phi \mathbf{F}^L) \quad (2.9)$$

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{\rho^L}{\rho} \mathbf{F}^L \quad (2.10)$$

3. 表面張力と密度差モデルの提案

3.1 表面張力を考慮したモデルの提案

前章のモデルに加え二相流体の相分離を模擬するために局所的な粒子間の相互作用を考慮し二相を自律的に分離させる。(3.1) の形で表面張力を考慮する。

$$\mathbf{s}^L = \kappa \rho^G \nabla \rho^L, \quad \mathbf{s}^G = -\kappa \rho^L \nabla \rho^L \quad (3.1 \text{ a,b})$$

重みとして ρ^L, ρ^G をそれぞれ異なる表面張力に使用しているが、これは後に示すように (3.5), 局所的な運動量を保存するためである。L の粒子を粒子間力の大きな流体粒子と考え、粒子間力の働く方向を L 粒子の密度勾配 $d\rho_L/d\mathbf{x}$ より与える。ここで κ は粒子間力係数である。

3.2 二粒子の密度差を考慮した計算方法の提案

気液の密度比の大きいモデルとして He らの密度比を 40 倍程度まで考慮できるモデル^[11]や、Inamuro らによるポアソン方程式を解くことで密度比を 1000 倍まで考慮できるモデル^[12]がある。本研究では二粒子の密度比に応じた慣性力を考慮するために L 粒子と G 粒子の密度比に応じた力積を求めることにより、二粒子の加速度を修正するモデルを提案する。

まず、FDLBM を用いて計算を行い、各粒子の密度および速度・圧力を求める。それらの値を用いて導出されるべきナビエ・ストークス方程式を離散化して圧力と粘性による外力を計算する。G 粒子を空気、L 粒子を水と考えた時、水は空気に対して密度は約 800 倍、動粘度は 1/15 倍であるとして、外力として作用する圧力項・粘性項を修正する (3.2)。また、液体は気体に比べて密度が少し変化すると圧力が大きく変化することを、(3.3) により考慮する。 β は圧力変化の大きさを操作するパラメータである。 ρ_{ref}^L は基準となる密度で、今回の計算では初期密度を 1 としてあるので $\rho_{ref}^L = 1$ としてある。つまり、液相においては、 ρ^L が 1 を少しでも超えれば、圧力が大きく変化することを意味している。

$$\mathbf{a} = \frac{\nabla p}{\rho} - \nu \nabla^2 \mathbf{u} - \frac{1}{800} \frac{\nabla p'}{\rho} + \frac{1}{15} \nu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (3.2)$$

$$p' = p + \beta(\rho^L - \rho_{ref}^L) \quad (3.3)$$

3.3 表面張力と密度差を考慮することにより導かれる運動方程式

外力を (3.4) の形でそれぞれ付加する。

$$\mathbf{F}^G = \mathbf{s}^G \quad (3.4 \text{ a,b})$$

$$\mathbf{F}^L = \mathbf{s}^L + \mathbf{a} - \mathbf{g}$$

局所平衡分布関数の速度を修正し、(2.9), (2.10) の要領で、最終的に解く運動方程式 (3.5) を導くことができる。

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{\rho^G}{\rho} (-\kappa \rho^L \nabla \rho^L) + \frac{\rho^L}{\rho} \times \left[(\kappa \rho^G \nabla \rho^L) - \mathbf{g} + \left(\frac{\nabla p}{\rho} - \nu \nabla^2 \mathbf{u} - \frac{1}{800} \frac{\nabla p'}{\rho} + \frac{1}{15} \nu \nabla^2 \mathbf{u} \right) \right] \quad (3.5)$$

3.4 β と音速の関係について

今回提案したモデルの液相における圧縮性を検証するため β と音速の関係について調べた。 β を (3.6) に変形することで、 $\sqrt{\beta}$ と音速の間に比例関係があると考えられる。

Fig.1 に示すように、平坦な固体壁で囲まれ上部から速度 0.01 を加えられる計算空間内に、 ρ^G のみを与えた場合と、それぞれ β を変えて ρ^L のみを与えた場合の計算を行なう。 $\sqrt{\beta}$ に対する音速の求め方として、伝播する圧力波のピーク値の移動分を、移動に要した計算時間で割る。参考に、 $\beta = 6400$ 時の圧力波の伝播を Fig.2 に示す。図中の音波面後方の波は分散誤差による数値的なものである。Fig.3 では圧力波伝播により求めた音速と $\sqrt{\beta}$ の関係について示す。正確に比例関係を示しており、提案したモデルが液体の圧縮性に対し妥当なモデルであることが示された。また、水は空気に対して 4.4 倍程度の音速を持つが、今回の計算では $\beta = 6400$ 程度がその関係に対応していることを確認した。

$$\beta = \frac{p' - p}{\rho^L - \rho_{ref}^L}, \quad c_s = \sqrt{\frac{\Delta p}{\Delta \rho}} \quad (3.6 \text{ a,b})$$

4. 気液二相数値シミュレーション

ここでは、前章で示した手法を用いて、大きな密度差を持つ気液二相への適用を行なった。2 種類の二相数値シミュレーションの結果を述べる。対象は空気・水系と同じ性質を持つ二相流体で、液相の密度は気相の 800 倍、動粘度は 1/15 倍としてある。

4.1 重力下における液柱の崩壊

まず、重力下における柱状流体の挙動の数値シミュレーションについて述べる。初期条件では、Fig.4 に示すように、

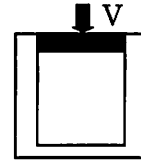


Fig.1 Schematic of computational domain (Lattice size 51×301)

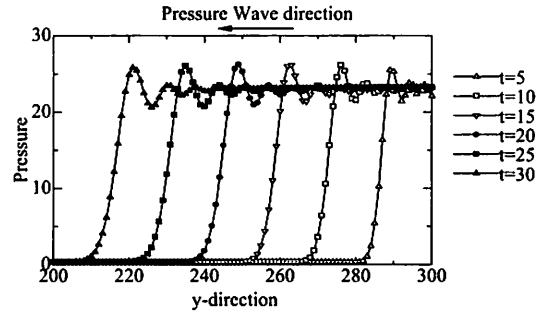


Fig.2 The Pressure Wave transmission at some different times

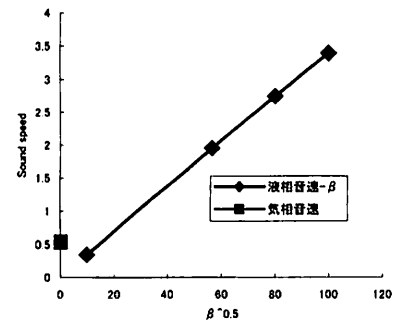


Fig.3 Relation between Sound speed and $\sqrt{\beta}$

液体は x - z 平面状で幅 a , 高さ H の矩形状を取り, 平坦な固体壁で囲まれた計算空間内の左側に配置されている. 固体壁境界上では, 粘着条件を与えた. 重力加速度 $|g|=1 \times 10^{-4}$ を液相側に加えた. $\beta=5000$, $\kappa=2$, $\phi=0.15$, 格子幅は $\Delta x=\Delta y=1$, 計算時間刻みは $\Delta t=5 \times 10^{-2}$ で進行させた. なお, 基礎方程式の離散化は時間項を 2 次精度の Runge-Kutta 法, 移流項には 3 次精度風上差分を用いた.

二相数値シミュレーションの結果を以下に述べる. Fig.5 は液柱が時間の経過と共に崩れていく様子を示す. $n^2=1.6, a=50$ の場合の図で, 黒色の領域が液相を表している. Fig.6 は下部の固体壁面上を移動する液柱界面の先端位置 X の時間履歴を示す. 横軸の時刻 T_1 は a, g, n^2 で無次元化されている. 実験^[13]によると, 下部界面の先端位置は液柱の寸寸に関係なくアスペクト比 $n^2=H/a$ によって決まり, n^2 の増加に従って界面の移動速度は減少している. 本計算では実験値と多少のズレは見られるものの, アスペクト比が増えるに従って界面の移動速度が遅くなっており, 移動速度の傾向は実験結果と一致している. また, 本計算では固体表面の濡れ性を考慮に入れており, これの大きさが原因で多少ではあるが速度のズレに影響があると思われる. なお, 高田らがフェーズフィールドモデルに基づく高密度比二相流計算法^[14]を用いて同様のシミュレーションを行なっている.

4.2 圧縮を受けた時の気泡の崩壊

次に, 圧縮を受けた時の気泡の崩壊についての数値シミュレーションについて述べる. 3 節で β と音速の関係を求めるために行なった計算と同様な方法で, Fig.7 に示すように平坦な固体壁で囲まれ上部から速度を加えられる計算空間内に, 液相とそこに気泡を与える. 固体壁境界条件は粘着条件, $\kappa=2$, $\phi=0.15$, 上壁の z 方向速度は $V=0.1$ で, 圧縮による影響が重力に比べて大きいと考えられるため, 重力は考慮していない. なお, 今回は $\beta=500, 1000$ の結果について報告する. β の値が大きくなると計算が不安定になるが, 気泡の潰れる速度が非常に早くなるため, 界面付近, もしくは気泡内部でなんらかの不安定要因が発生するためではないかと思われる.

数値シミュレーション結果について Fig.8 に示す. $\beta=500$ に比べて, $\beta=1000$ では圧縮波が早く伝わっていることがわかる. また, $\beta=1000$ の方が圧縮を受けることによって高まる密度が小さいことがわかる. β は音速を操作することで大きな密度変動を抑えることができるパラメーターと考えることができ, これらの結果より, β を大きくすることでより非圧縮性を強めていると言うことができる.

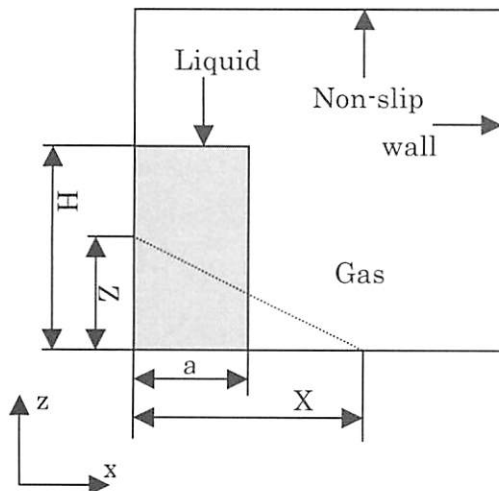


Fig.4 Schematic of computational domain(Lattice size 151×151)

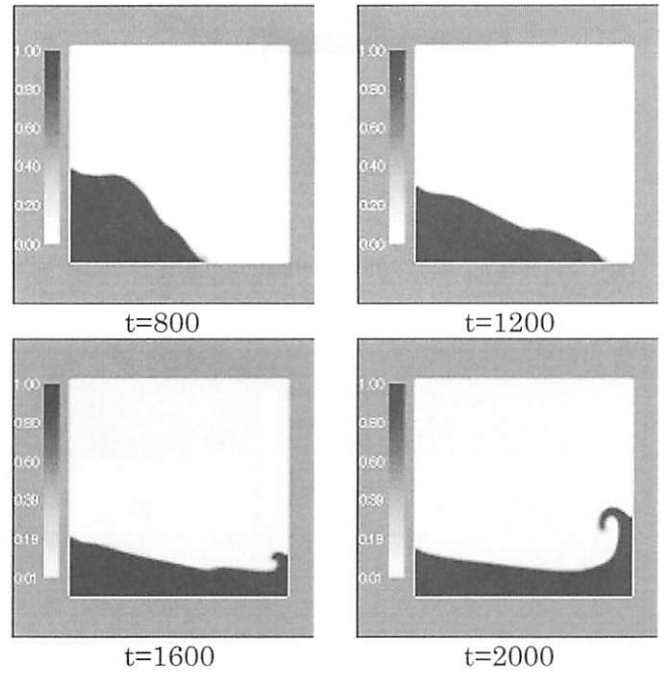


Fig.5 Snapshots of collapsing liquid column for $n^2=1.6$

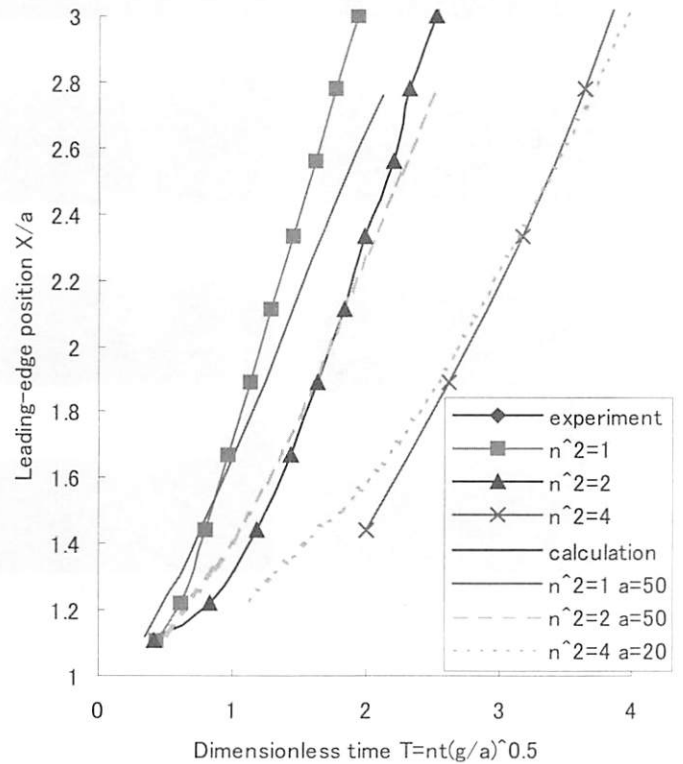


Fig.6 Time series of position of the leading edge in collapse of liquid

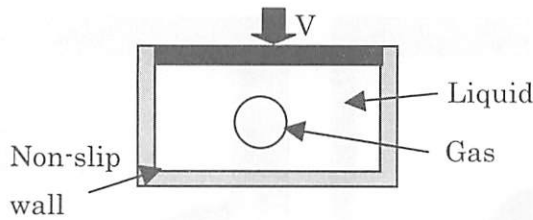


Fig.7 Schematic of computational domain (Lattice size 371×171)

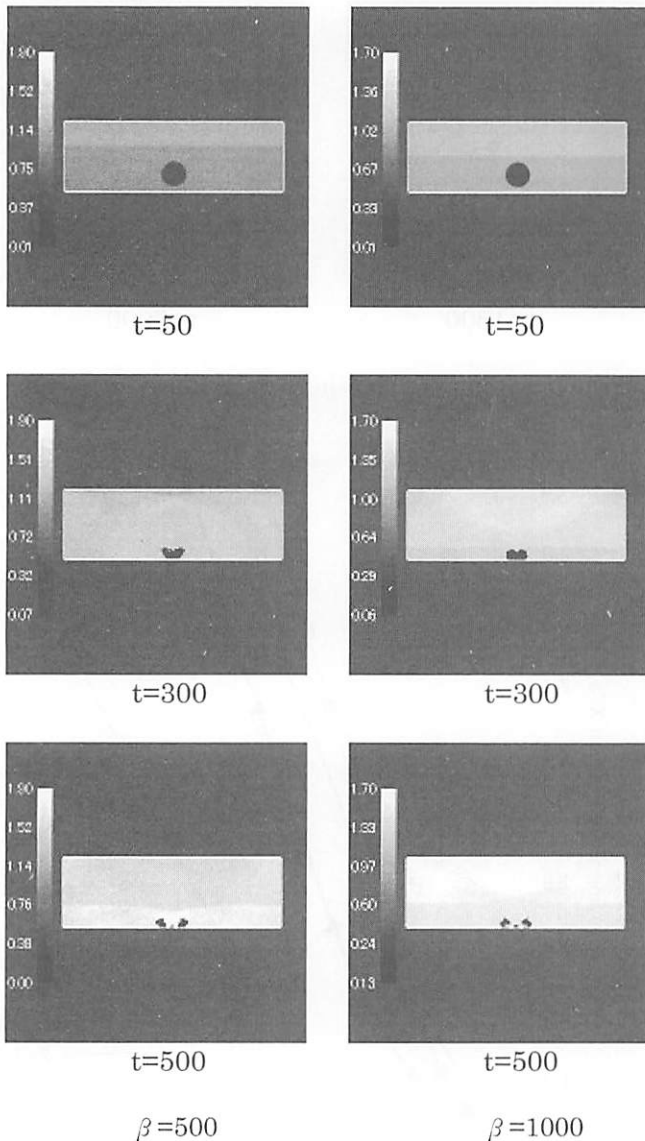


Fig.8 Snapshots of bubble collapse

5. 結言

差分格子ボルツマン法を用いて表面張力を考慮したモデル、並びに密度の異なる気液二流体の解析を行うことのできるモデルを提案した。音速と圧縮率の関係について検証を行い妥当と思われる結果を得ることができた。また、このモデルを用いて空気-水に相当する気液二相流の数値シミュレーションを行い、妥当と思われる結果を得ることができた。 β の値を大きくとりすぎると、気液二相流計算において計算が不安定になるという問題が残る。局所的に圧力が大きく変動することや、界面上での圧力の扱い方等に原因があると考えられる。これらは今後の課題とする。

参考文献

- [1] Qian, Y. H., Succi, S. and Orszag, S. A. Recent Advances in Lattice Boltzmann Computing, Ann. Rev. of Comp. Phy. III (D. Stauffer ed.), (1995), pp. 195-242, World Scientific.
- [2] Rothman, D. H. and Zaleski, S., Lattice-Gas Cellular automata, Cambridge U. P., (1997), pp. 73-90.
- [3] Chopard, B. and Droz, M., Cellular Automata Modeling of Physical System, (1998), pp. 122-137, Cambridge University Press.
- [4] Chen, S. and Doolen, G. D., Lattice Boltzmann method for fluid flows, Ann. Rev. Fluid Mech, (1998), pp. 329-364, Ann. Rev. Inc.
- [5] 薦原道久・高田尚樹・片岡武, 「格子気体法」「格子ボルツマン法」, (1999), pp. 101-112, コロナ社.
- [6] Wolf-Gladrow, D. A., Lattice-Gas Cellular Automata and Lattice Boltzmann Models, Lecture Notes in Mathematics, (2000), pp. 159-224, Springer.
- [7] Succi, S., The lattice Boltzmann Equation for Fluid Dynamics and Beyond, (2001), pp. 51-123, Oxford.
- [8] 薦原道久・栗田誠・片岡武, 機械学会論文集 B, 69-680(2003), pp. 841-847.
- [9] Gunstensen, A. K., Rothman, D. H., Zaleski, S., and Zanetti, G., Lattice Boltzmann model of immiscible fluid. Phys. Rev. A43, (1991), pp.4320-4327.
- [10] Swift, M. R., Orlandini, E., Osborn, W. R., and Yeomans, J. M., Lattice Boltzmann simulations of liquid-gas and binary-fluid systems. Phys. Rev. E54 (1996), pp. 5041-5052.
- [11] He X., Chen S., and Zhang R., A lattice Boltzmann Scheme for Incompressible Multiphase Flow and Its Application in Simulation of Rayleigh-Taylor Instability, J. Computational Physics 152, (1999), pp. 642-663.
- [12] Inamuro T., Ogata T., Tajima S. and Konishi N., A lattice Boltzmann method for incompressible two-phase flows with large density differences, J. Computational Physics 198, (2004), pp. 628-644.
- [13] Martin, J. C., and Moyce, W. J., An experimental study of the collapse of liquid columns on a rigid horizontal plane, Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser.A, 244 (1952), pp.312-324.
- [14] 高田尚樹・三澤雅樹, 第18回数値流体力学シンポジウム D4-2.