計算数理工学論文集 Vol. 5,No.2 (2005 年 12 月), 論文 No. 03-051209 JASCOME

三次元非定常拡散方程式の基本解とNavier-Stokes方程式のBEM解法への一提案

Presents of Fundamental Solution of Three-Dimensional Anisotopic Convective Diffusion Equation and One Idea to Boundary Element Method on Navier-Stokes Equations

松梨 順三郎 [1), 岡本 直孝 [2)

Junzaburo MATSUNASHI and Naotaka OKAMOTO

1) 神戸大学 工学部 名誉教授 (〒 666-0143 兵庫県川西市清和台西 3-2-131, E-mail: cyg02144@nifty.ne.jp)
2) 岡山理科大学 工学部 応用化学科 (〒 700-0005 岡山市理大町 1-1, E-mail: okamoto@dac.ous.ac.jp)

Firstly, the fundamental solutions of the anisotropic convective diffusion equations of transient incompressible viscous fluid flow in three dimensions are presented. Secondly, taking notice of the properties that convective diffusion equations and Navier-Stokes equations are mathematical formulations of mass and momentum conservation law respectively, and consequently both physical contents and equation styles are analogous, the boundary integral formulations for Navier-Stokes equation are considered on the basis of the formulation of the diffusion equations.

Key Words: Fundamental Solution, Convective Diffusion, Navier-Stokes Equations, Boundary Element Method, Three Dimensions, Transient Viscous Flow

1. はじめに

一般に Green 関数または基本解は方程式の積分方程式への変換に際して重要な役割をになっている。N-S 方程式は非線形方程式であるが，従来の基本解は一般にその方程式の線形作用素のみに対して構成されている。したがって，その取り扱いは N-S 方程式の線形近似として知られている Stokes 近似または Oseen 近似に相当しており，多くの研究はこの手法を用いている。[(1)(2)(3)]

本研究は三つのステップで構成されている。ステップ１では，三次元の非定常移流拡散方程式において，それを構成する係数としての速度成分を一時的に既知とし，その結果として得られる，例えば濃度を未知数とすると，その濃度に関する線形方程式の基本解を誘導する。ステップ２では，この基本解を用いて移流拡散方程式のＢＥＭ解法を確立する。移流拡散問題は物質保存則の，N-S 方程式は運動量保存則の数学的定式化であり，物理的内容も，得られた式形も類似している。ステップ３では，その特性に注目し，ステップ２で得られたＢＥＭ解法をベースにして，N-S 方程式の BEM 解法を確立することを意図している。要約すると，本解法は線形化された N-S 方程式への BEM 解法そのものである。Oseen 近似では x 方向のみの一様な速度場を仮定しているが，本解法では微小時間 (Δt) 遅れて時間空間的に変化する速度場が考慮されている。

2. 移流拡散方程式の基本解（ステップ１）

三次元の非定常異方性移流拡散方程式は次式で与えられる。

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u_i c_{,i} = D_i c_{,ii} - \lambda c + F \tag{1}$$

ここに，テンソル記法，総和規約を採用し，一つの項に同じ添え字が二個以上ある場合は，その添え字について１，２，３の総和を表すものとする。t は時間，c は濃度，u_1, u_2, u_3 および D_1, D_2, D_3 はそれぞれ x_1, x_2, x_3 方向の流速成分および拡散係数を表す。λ は物質の消散率，F は負荷項である。下添え字の $(\ )_{,i}$ は i 方向への微分，$(\ )_{,ii}$ は i 方向への重複微分を表す。

演算子 $L[\ ]$ を次式のように定義する。

$$L[c] = \frac{\partial c}{\partial t} + u_i c_{,i} + \lambda c - D_i c_{,ii} \tag{2}$$

$L[\ ]$ の随伴演算子を $L^+[\ ]$,cの随伴濃度を c^* とすると，

$$L^+[c^*] = -\frac{\partial c^*}{\partial t} - u_i c^*_{,i} + \lambda c^* - D_i c^*_{,ii} \tag{3}$$

となる。この定義より式 (1) は次式となる。

$$L[c] = F \tag{4}$$

つぎに次式の解（基本解）を誘導する。

$$L^{+}[c^{*}] = \delta(x_1 - y_1)\delta(x_2 - y_2)\delta(x_3 - y_3)\delta(t - \tau) \tag{5}$$

ここに，δ は Dirac のデルタ関数，$x_i (i = 1, 2, 3)$ と t は考察点と考察の時刻，$y_i (i = 1, 2, 3)$ と τ は負荷点とその時刻を表す。式 (5) で $D_1 = D_2 = D_3$ とし，速度成分 u_1, u_2, u_3 が時間空間的に不変と仮定した場合の解はすでに得られている。[(4)(5)]

上式を $x_i (i = 1, 2, 3), t$ について 4 重にフーリエ変換すると，次式を得る。

$$\hat{c}^{*}\{-i(\xi_t + u_j\xi_j) + \lambda + D_j\xi_j\xi_j\} = e^{-i\xi_j y_j - i\xi_t \tau} \tag{6}$$

ここに，$i = \sqrt{-1}$ であり，$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_t$ はそれぞれ x_1, x_2, x_3, t の変換変数である。

上式を $\hat{c}^{*}$ について解くと次式を得る。

$$\hat{c}^{*} = \frac{1}{-i\xi_t + \alpha} e^{-i\xi_j y_j - i\xi_t \tau} \tag{7}$$

ここに，

$$\alpha = -iu_j\xi_j + \lambda + D_j\xi_j\xi_j \tag{8}$$

つぎに，4 重のフーリエ逆変換すると，

$$c^{*} = \frac{1}{(2\pi)^4} \iiint_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi_j r_j} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\xi_t (t - \tau)}}{-i\xi_t + \alpha} d\xi_t \tag{9}$$

ここに，$r_j = x_j - y_j \ (j = 1, 2, 3)$ とする。

まず，積分変数 ξ_t についての積分をもとめる。

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\xi_t (t - \tau)}}{-i\xi_t + \alpha} d\xi_t \tag{10}$$

つぎに，特異点を含む単一閉曲線を想定し，次の複素積分，

$$I^{*} = \oint \frac{e^{izm}}{-iz + \alpha} dz \tag{11}$$

を考える。ここに，z は複素数，$m = t - \tau$ とする。

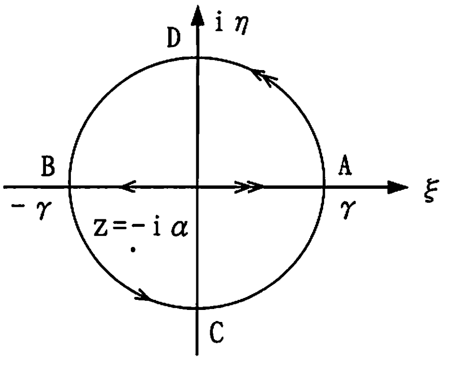
I^{*} の特異点は $z = -i\alpha$ であり，留数を A とすると，$A = ie^{\alpha m}$ となる。したがって，

$$I^{*} = 2\pi i A = -2\pi e^{\alpha m} \tag{12}$$

一方，複素平面を図－1のように $z = \xi + i\eta$ とすると，$izm = i\xi m - \eta m$ であり，積分 I^{*} が存在するためには，$\eta m > 0$ でなければならない。[(6)] そのためには、

１）$m > 0, \ \eta > 0$ ； ２）$m < 0, \ \eta < 0$

の二つの場合となる。



図－１　複素平面上の積分経路

実数軸ＡＢを含む閉曲線は $\overrightarrow{\mathrm{BADB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{ABCA}}$ が考えられるが，これらはそれぞれ 1),2) の場合に相当している。

式 (8) を考慮すると，特異点，

$$z = -i\alpha = -u_j\xi_j - i\ (\lambda + D_j\xi_j\xi_j)$$

は図－１のように後者の閉曲線内に存在する。したがって，それぞれ

$$I^{*} = 0, \qquad I^{*} = -2\pi e^{\alpha m}$$

となる。よって積分 I^{*} が 0 でないためには $m = t - \tau < 0$ でなければならない。式 (5) は本来過去に向かって拡散する逆向きの拡散を表しており，当然の結果である。

$m < 0$ とすると，

$$I^{*} = \int_{\mathrm{ABCA}} = \int_{\mathrm{AB}} + \int_{\mathrm{BCA}} = -2\pi e^{\alpha m} \tag{13}$$

図－１で $\gamma \to \infty$ とし Jordan の定理を適用すると，

$$\int_{\mathrm{BCA}} = 0, \quad \int_{\mathrm{AB}} = -2\pi e^{\alpha m}, \quad I = \int_{\mathrm{BA}} = -\int_{\mathrm{AB}} = 2\pi e^{\alpha m} \tag{14}$$

よって，

$$I = \begin{cases} 2\pi e^{\alpha m} & , \quad m < 0 \\ 0 & , \quad m > 0 \end{cases} \equiv 2\pi H(\tau - t) e^{\alpha m} \tag{15}$$

ここに，$H(\tau - t)$ は Heaviside のステップ関数である。[(7)]

式 (15) を式 (9) に代入すると，

$$c^* = \frac{H(\tau - t)}{(2\pi)^3} \iiint_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi_j r_j} e^{m\alpha}\, d\xi_1\, d\xi_2\, d\xi_3 \tag{16}$$

上式に式 (8) の α を代入すると，

$$\begin{aligned} c^* &= \frac{e^{m\lambda} H(\tau - t)}{(2\pi)^3} \prod_{j=1}^{3} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi_j r_j - imu_j \xi_j + mD_j \xi_j \xi_j}\, d\xi_j \\ &= \frac{e^{m\lambda} H(\tau - t)}{(2\pi)^3}\, f_1\, f_2\, f_3 \end{aligned} \tag{17}$$

上式に限って総和規約は適用しないものとする。f_1, f_2, f_3 をそれぞれ個別に計算する。

$$f_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(r_1 - mu_1)\xi_1 + mD_1 \xi_1^2}\, d\xi_1 \tag{18}$$

上式で，$\phi^2 = -mD_1 > 0$，$\psi = r_1 - mu_1$，$x = \xi_1$ を導入すると，

$$\begin{aligned} f_1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\phi^2 x^2 + i\psi x}\, dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\phi^2 x^2} \cos\psi x\, dx + i \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\phi^2 x^2} \sin\psi x\, dx \end{aligned} \tag{19}$$

式 (19) の右辺の第一項と第二項をそれぞれ，g_1, g_2 とする。

$$\begin{aligned} g_1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\phi^2 x^2} \cos\psi x\, dx = 2 \int_{0}^{+\infty} e^{-\phi^2 x^2} \cos\psi x\, dx \\ &= 2 \frac{\sqrt{\pi}}{2\phi} e^{\frac{-\psi^2}{4\phi^2}} \qquad \text{(積分公式)} \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{-mD_1}} \exp\left[-\frac{(r_1 - mu_1)^2}{4(-mD_1)} \right] \end{aligned} \tag{20}$$

g_2 は 0 となる。したがって，

$$f_1 = g_1 = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{-mD_1}} \exp\left[-\frac{(r_1 - mu_1)^2}{4(-mD_1)} \right] \tag{21}$$

よって，式 (17) は $m = t - \tau = -T$ を導入すると，

$$\begin{aligned} c^* &= \frac{e^{-T\lambda} H(T)}{(2\pi)^3} f_1\, f_2\, f_3 \\ &= \frac{H(T)}{(4\pi T)^{3/2} (D_1 D_2 D_3)^{1/2}} \exp\Big[-T\lambda \\ &\quad - \frac{(r_1 + Tu_1)^2}{4D_1 T} - \frac{(r_2 + Tu_2)^2}{4D_2 T} - \frac{(r_3 + Tu_3)^2}{4D_3 T} \Big] \end{aligned} \tag{22}$$

あらためて，T を t $(t > 0)$ と記すと，

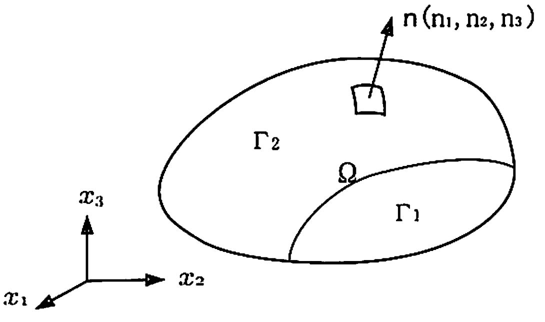
$$\begin{aligned} c^* &= \frac{H(t)}{(4\pi t)^{3/2} (D_1 D_2 D_3)^{1/2}} \exp\Big[-\lambda t \\ &\quad - \frac{(r_1 + u_1 t)^2}{4D_1 t} - \frac{(r_2 + u_2 t)^2}{4D_2 t} - \frac{(r_3 + u_3 t)^2}{4D_3 t} \Big] \end{aligned} \tag{23}$$

3. 拡散方程式のＢＥＭ解法（ステップ 2）

基礎方程式を式 (1) とし，図－2 のように，

$$\begin{array}{lll} \text{初期条件} & [c]_{t=0} = c_0 & \\ \text{基本境界条件} & c = \bar{c}, & \Gamma = \Gamma_1 \\ \text{自然境界条件} & q_n = \bar{q}, & \Gamma = \Gamma_2 \end{array} \tag{24}$$

として，この問題を BEM で定式化する。



図－2　座標軸と領域境界

式 (2)，(3) を用いると，つぎのように Green 恒等式を得る。[8][9][10]

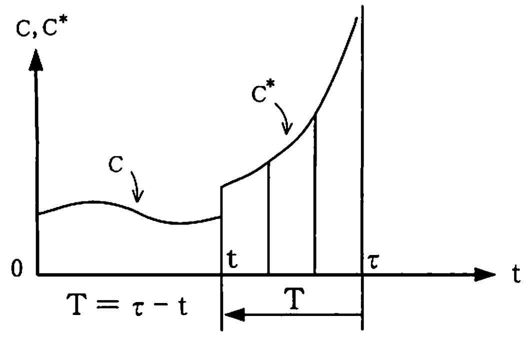
$$\begin{aligned} &\iiint_{\Omega} \left\{ L[c]c^* - L^+[c^*]c \right\} d\Omega \\ &= \iiint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t}(cc^*)\, d\Omega + \iint_{\Gamma} (q_n c^* - p_n c)\, d\Gamma \end{aligned} \tag{25}$$

ここに，

$$\left\{ \begin{aligned} q_n &= -D_j c_{,j}\, n_j \\ p_n &= (-D_j c^*_{,j} - u_j c^*) n_j \end{aligned} \right. \tag{26}$$

ここに，c^* は基本解であり，式 (23) で既に得られている。基本解はつぎの特性を持っている。[11]

$$\begin{aligned} &0 \le t < \tau, \quad c^* = c^* \quad \text{(式 (23))} \\ &t = \tau, \quad \iiint cc^* d\Omega = \begin{cases} 0 & , \text{負荷点以外} \\ c_i & , \text{負荷点} \end{cases} \end{aligned} \tag{27}$$



図－3　c, c^* の概念図

非定常問題では式 (25) が $t=0$ から $t=\tau$ まで引き続いて成立する。この式の両辺をこの時間にわたって積分すると次式を得る。

$$\int_0^\tau \iiint \{L[c]c^* - L^+[c^*]c\}\, d\Omega\, dt$$
$$= \int_0^\tau \iiint \frac{\partial}{\partial t}(cc^*)\, d\Omega\, dt + \int_0^\tau \iint (q_n c^* - p_n c)\, d\Gamma\, dt \tag{28}$$

基本解の特性，式 (27) を上式に適用すると，

$$k_i c(r_i,\tau) - \int_0^\tau \iint p_n c\, d\Gamma\, dt = -\int_0^\tau \iint q_n c^*\, d\Gamma\, dt$$
$$+ \iiint [cc^*]_{t=0}\, d\Omega + \int_0^\tau \iiint F c^*\, d\Omega\, dt \tag{29}$$

上式の段階では一般的に $k_i=2$ であるが，k_i は r_i が領域の内点であるか，境界上の点であるかに依存し，r_i 点近傍の境界形状にも依存するので，一般化して，k_i とおいた。

未知数 c，q_n などの時間依存性は既知関数 c^*，q_n^* などのそれと比較して，取り扱う現象にもよるが一般に格段に小さいと考えられる。したがって，微小時間間隔 $\Delta t = t_2 - t_1$ では c，q_n は時間的に不変と仮定する。また，F も Δt 間で一定と仮定すると，式 (29) は，

$$k_i c(r_i,t_2) - \iint_\Gamma c \int_{t_1}^{t_2} p_n\, dt\, d\Gamma = -\iint_\Gamma q_n \int_{t_1}^{t_2} c^*\, dt\, d\Gamma$$
$$+ \iiint_\Omega [cc^*]_{t_1}\, d\Omega + \iiint F \int_{t_1}^{t_2} c^*\, dt\, d\Omega \tag{30}$$

となり，上式の計算を繰り返すことにより，現象の時間変化を再現することができる。p_n および c^* の時間積分をそれぞれ $\bar{p_n}$ および $\bar{c^*}$ とすると，これらは解析的に得られる。[8]

これらを用い，例えば一定要素を適用すると，上式は，

$$k_i c(r_i,t_2) - \sum_{j=1}^{N} c_j \int_{\Delta\Gamma_j} \overline{p_n}\, d\Gamma = -\sum_{j=1}^{N} q_{nj} \int_{\Delta\Gamma_j} \overline{c^*}\, d\Gamma$$
$$+ \sum_{k=1}^{M} \int_{\Delta\Omega_k} [c\,c^*]_{t_1}\, d\Omega + \sum_{k=1}^{M} \int_{\Delta\Omega_k} F\, \bar{c^*}\, d\Omega \tag{31}$$

となる。ここに N は境界要素数，M は領域要素数とする。

上式を $i=1,2,\ldots,N$ について設定し，行列表示すると次式を得る。

$$\begin{bmatrix} k_1 & & \\ & \ddots & \\ & & k_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_N \end{bmatrix}^{t_2} - \begin{bmatrix} \\ H_{i,j} \\ \\ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_N \end{bmatrix}^{t_2}$$
$$= -\begin{bmatrix} \\ G_{i,j} \\ \\ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{n1} \\ \vdots \\ q_{nN} \end{bmatrix}^{t_2} + \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_N \end{bmatrix}^{t_1} + \begin{bmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_N \end{bmatrix}^{t_1} \tag{32}$$

上式を用い，$t_1=0$，$t_2=t_1+\Delta t=\sigma$ とし，$c_i(\sigma)$ を計算し，次に $t_1=\sigma$，$t_2=t_1+\Delta t=2\sigma$ として $c_i(2\sigma)$ を計算する。以下このように計算を進めればよい。[12]

4. N-S方程式のＢＥＭ解法（ステップ３）

Navier-Stokes 方程式および連続方程式はそれぞれ次式で与えられる。

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j u_{i,j} = X_i - \frac{1}{\rho} p_{,i} + \nu u_{i,jj} \tag{33}$$

$$u_{i,i} = 0 \tag{34}$$

ここに，ρ は密度，ν は動粘性係数とする。

式 (33) で，$i=1$ とすると次式を得る。

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + u_3\frac{\partial u_1}{\partial x_3} = X_1 - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_1} + \nu\Delta u_1 \tag{35}$$

一方，$D_1=D_2=D_3=D$ として，拡散方程式 (1) を書き直すと，

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u_1\frac{\partial c}{\partial x_1} + u_2\frac{\partial c}{\partial x_2} + u_3\frac{\partial c}{\partial x_3} = D\Delta c - \lambda c + F \tag{36}$$

ここに，Δ はラプラシアンとする。

上式で，

$$\begin{cases} \lambda \equiv 0, \quad D \equiv \nu \\ F \equiv X_1 - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x_1} \end{cases} \tag{37}$$

とし，$c \equiv u_1$ とすれば，式 (35) と式 (36) は形式的には完全に一致する。しかし，内容的には圧力項 $\partial p/\partial x_1$ は未知数である。ここでは，これをひとまず既知数として取り扱う。(本論文の第５節で，圧力 p の評価方法を記述する。)

$u_i (i = 1, 2, 3)$ と c を共に未知数とすると式 (35)，式 (36) は共に非線形の微分方程式である。ステップ１，２での取り扱いでは式 (36) の速度成分 u_1，u_2，u_3 を微少時間の間，一時的に既知量とし，線形方程式として解析を展開した。N-S 方程式 (35) についても係数としての速度成分を既知とし，一時的に線形方程式とみなして，ステップ１，２と同様の取り扱いをする。

未知量と既知量の記号的重複を避けるため，以後 N-S 方程式 (33) の未知量，u_1，u_2，u_3 をそれぞれ α，β，γ と記すことにする。

類推により，式 (25) において，$c \equiv \alpha$，$c^* \equiv \alpha^*$ として次式を得る。

$$\iiint \left\{ L[\alpha]\alpha^* - L^+[\alpha^*]\alpha \right\} d\Omega$$

$$= \iiint \frac{\partial}{\partial t}(\alpha\alpha^*)\, d\Omega + \iint \left(q_{n\alpha}\alpha^* - p_{n\alpha}\alpha\right) d\Gamma \tag{38}$$

ここに，

$$q_{n\alpha} = (-\nu\alpha_{,i})n_i, \quad p_{n\alpha} = (-\nu\alpha^*_{,i} - u_i\alpha^*)n_i \tag{39}$$

基本解 α^* は式 (23) を参照し，$D_1 = D_2 = D_3 = \nu$，$\lambda = 0$ として，次式を得る。

$$\alpha^* = \frac{H(t)}{(4\pi\nu t)^{3/2}} \exp\Big[-\frac{1}{4\nu t}\big\{(r_1 + u_1 t)^2 + (r_2 + u_2 t)^2 + (r_3 + u_3 t)^2\big\}\Big] \tag{40}$$

式 (29) に対応して，

$$k_i\alpha(r_i, \tau) - \int_0^\tau \iint p_{n\alpha}\alpha\, d\Gamma dt = -\int_0^\tau \iint q_{n\alpha}\alpha^*\, d\Gamma dt + \iiint [\alpha\alpha^*]_{t=0}\, d\Omega + \int_0^\tau \iiint \Big(X_1 - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_1}\Big)\alpha^*\, d\Omega dt \tag{41}$$

さらに，$p_{n\alpha}$ および α^* の時間積分をそれぞれ $\overline{p_{n\alpha}}$，$\overline{\alpha^*}$ とすると，式 (31) に対応して次式を得る。

$$k_i\alpha(r_i, t_2) - \sum_{j=1}^N \alpha_j \int_{\Delta\Gamma_j} \overline{p_{n\alpha}}\, d\Gamma = -\sum_{j=1}^N q_{n\alpha_j} \int_{\Delta\Gamma_j} \overline{\alpha^*}\, d\Gamma + \sum_{k=1}^M \int_{\Delta\Omega_k} [\alpha\alpha^*]_{t_1}\, d\Omega + \sum_{k=1}^M \int_{\Delta\Omega_k} \Big(X_1 - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_1}\Big)\overline{\alpha^*}\, d\Omega \tag{42}$$

未知数の β，γ についても，上式に対応してそれぞれ次式を得る。

$$k_i\beta(r_i, t_2) - \sum_{j=1}^N \beta_j \int_{\Delta\Gamma_j} \overline{p_{n\beta}}\, d\Gamma = -\sum_{j=1}^N q_{n\beta_j} \int_{\Delta\Gamma_j} \overline{\beta^*}\, d\Gamma + \sum_{k=1}^M \int_{\Delta\Omega_k} [\beta\beta^*]_{t_1}\, d\Omega + \sum_{k=1}^M \int_{\Delta\Omega_k} \Big(X_2 - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_2}\Big)\overline{\beta^*}\, d\Omega \tag{43}$$

$$k_i\gamma(r_i, t_2) - \sum_{j=1}^N \gamma_j \int_{\Delta\Gamma_j} \overline{p_{n\gamma}}\, d\Gamma = -\sum_{j=1}^N q_{n\gamma_j} \int_{\Delta\Gamma_j} \overline{\gamma^*}\, d\Gamma + \sum_{k=1}^M \int_{\Delta\Omega_k} [\gamma\gamma^*]_{t_1}\, d\Omega + \sum_{k=1}^M \int_{\Delta\Omega_k} \Big(X_3 - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_3}\Big)\overline{\gamma^*}\, d\Omega \tag{44}$$

ここに，

$$\begin{cases} q_{n\beta} = (-\nu\beta_{,i})n_i, \quad p_{n\beta} = (-\nu\beta^*_{,i} - u_i\beta^*)n_i \\ q_{n\gamma} = (-\nu\gamma_{,i})n_i, \quad p_{n\gamma} = (-\nu\gamma^*_{,i} - u_i\gamma^*)n_i \end{cases} \tag{45}$$

なお，$\overline{p_{n\beta}}$，$\overline{\beta^*}$，$\overline{p_{n\gamma}}$，$\overline{\gamma^*}$ はそれぞれ $p_{n\beta}$，β^*，$p_{n\gamma}$，γ^* の時間積分である。また基本解 α^*，β^*，γ^* の間には次式が成立する。

$$\alpha^* = \beta^* = \gamma^* \tag{46}$$

5. 圧力の評価 [3]

式 (33) に ρ を掛け，i 方向に微分すると次式を得る。

$$p_{,ii} + \rho\frac{\partial u_{i,i}}{\partial t} + \rho\big(u_j u_{i,j}\big)_{,i} - \rho X_{i,i} - \mu u_{i,jji} = 0 \tag{47}$$

ここに μ は粘性係数とする。式 (34) を考慮し，上式の圧力 p に注目すると，この式は p に関する Poisson 方程式と見なすことができる。したがって重み関数として Laplace 方程式の基本解

$$H^* = \frac{1}{4\pi \mathrm{r}} \tag{48}$$

を用いると，重みつき残差式は次式となる。ここに，$\mathbf{r}^2 = (r_1{}^2 + r_2{}^2 + r_3{}^2)$ とする。

$$I = \iiint_{\Omega} H^* \Big\{ p_{,ii} + \rho \frac{\partial u_{i,i}}{\partial t} + \rho \big(u_j u_{i,j}\big)_{,i} - \rho X_{i,i} - \mu u_{i,jji} \Big\} d\Omega = 0 \tag{49}$$

式 (33) の右辺を左辺に移行し，得られた式の左辺を ω とし，Gauss の定理を用いると，

$$I = \iiint H^* \omega_{,i}\, d\Omega = \iint_{\Gamma} H^* \omega n_i d\Gamma - \iiint H^*_{,i}\, \omega\, d\Omega \tag{50}$$

上式の右辺第一項内の ω に注目すると，$\omega = 0$ は N-S 方程式そのものであり，境界上の各点でも成立すると考えられる。したがって，右辺第一項は 0 になり，次式を得る。

$$I = -\iiint H^*_{,i} \Big\{ p_{,i} + \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho \big(u_j u_{i,j}\big) - \rho X_i - \mu u_{i,jj} \Big\} d\Omega = 0 \tag{51}$$

Gauss の定理を用いて上式を変形し，基本解の特性，

$$\iiint H^*_{,jj}\, p\, d\Omega = -\iiint p\, \delta(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, \delta\Omega = -p \tag{52}$$

を用いると，次式を得る。[3]

$$\begin{aligned} p = & -\iint H^*_{,i}\, T_i\, d\Gamma - \iint H^*_{,i}\, \rho\, u_j u_i n_j\, d\Gamma \\ & + \iiint H^*_{,i}\, \rho \Big(X_i - \frac{\partial u_i}{\partial t} \Big) d\Omega \\ & - 2 \iint \mu u_i n_j H^*_{,ij}\, d\Gamma + \iiint H^*_{,ij}\, \rho\, u_j u_i\, d\Omega \end{aligned} \tag{53}$$

ここに，

$$T_i = -\Big\{ -\delta_{ij} p + \mu \big(u_{i,j} + u_{j,i} \big) \Big\} n_j \tag{54}$$

と定義する。ここに，δ_{ij} は Kronecker delta とする。閉鎖性海域の潮流現象を研究対象とし，平均海面上に x_1，x_2 軸，鉛直上方に x_3 軸をとると，近似的に

$$\frac{\partial p}{\partial x_3} = -\rho g \tag{55}$$

となる。[13] また，各点の p が数値的に評価されると，$\partial p/\partial x_1$，$\partial p/\partial x_2$ を近似的に評価することが可能である。ここに，g は重力加速度である。

6. 結言

本論文によって提示された三次元非定常異方性移流拡散方程式の基本解は，著者らが知っている限りでは，初めてみいだされた貴重な成果であると考えられる。また，N-S 方程式の BEM 解法への提案はこの方面の研究への一つの契機になるであろう。しかし実証はなく，今後，実現象の計算例による検証がなされるよう期待される。

参考文献

(1) 登坂宣好：粘性流れ問題の積分方程式による定式化，境界要素法論文集，JASCOME, **2**(1985) pp. 155–160.

(2) 大西和栄： Boundary Integral Equations For Navier-Stokes Equations，境界要素法論文集，JASCOME, **5**(1988) pp. 179–184.

(3) M.Hasegawa, M.Onishi, M.Soya： Fundamental Solution for Transient Incompressible Viscous Flow and Its Application to the Two Dimensional Problem, Structural Eng./Earthquake Eng., Japan Society of Civil Engineers(Proc.of JSCE NO.368), **3**,No.1.23s-32s(1986) p. 25.

(4) M.Ikeuchi： Fundamental solutions to convective diffusion operators, Okayama University of Science,preprint (1982).

(5) 岡本直孝：反応を伴う移流拡散問題に対する有限要素/境界要素解法の研究，中央大学学位論文，(1990).

(6) 神谷紀生：有限要素法と境界要素法，サイエンス社，(1982) pp. 38–39.

(7) 及川正行：偏微分方程式，岩波書店，(2003) pp. 185–186.

(8) 河村隆二, 福間通人：境界要素法による三次元非定常移流拡散の直接解法，境界要素法研究会第 27 回例会，研究発表資料，No.135(1989).

(9) 松梨順三郎：環境流体汚染，森北出版，(1993) pp. 123–128.

(10) 松梨順三郎，吉田吉治：境界要素法による三次元拡散解析，中部大学工学部紀要，**26**(1990) pp. 133–142.

(11) L.C.Wrobel and C.A.Brebbia：The Boundary Elements Method for Steady State and Transient Heat Conduction, Proc. of the 1st Int. Conf. on Numerical Methods in Thermal Problems, (1979) pp. 58–73, Southampton univ., England.

(12) 松梨順三郎：移流拡散問題への境界要素法の適用，第4回　流れの有限要素法解析シンポジウム，日科技連，(1983) pp. 145–152.

(13) 松梨順三郎：環境流体汚染，森北出版，(1993) pp. 73–75.