

多層格子による平面波散乱特性の ハイブリッド・トレフツ有限要素法解析

ANALYSIS OF PLANE WAVE SCATTERING CHARACTERISTICS OF MULTILAYERED GRATINGS USING HYBRID TREFFTZ FINITE ELEMENT METHOD

佐藤 慎悟¹⁾, 長谷川 弘治²⁾

Shingo SATO and Koji HASEGAWA

1) 室蘭工業大学大学院工学研究科 (〒050-8585 室蘭市水元町 27-1, E-mail: s1024183@mmm.muroran-it.ac.jp)

2) 室蘭工業大学電気電子工学科 (〒050-8585 室蘭市水元町 27-1, E-mail: khasegaw@mmm.muroran-it.ac.jp)

Analysis of plane wave scattering characteristics from multilayered gratings in case of oblique incidence and arbitrary polarization by using hybrid Trefftz finite element method is presented. Employing Trefftz elements to homogeneous regions between each grating layers, we can have simultaneous equations with lower number of unknowns than the number of unknowns by conventional finite elements. Scattering characteristics of multilayered strip gratings are computed by this method. Comparing results computed by this method with other numerical methods, we confirmed validity and usefulness of this method.

Key Words: Hybrid Trefftz Finite Element Method, Trefftz Elements, Multilayered Gratings, Scattering Characteristics

1. はじめに

周期構造素子の散乱特性解析において、有限要素法に基づく解析法は、解析対象の形状や材料に依らず容易に適用できる利点をもっている⁽¹⁾⁻⁽⁶⁾。しかしながら、従来の有限要素法解析では、フォトニック結晶や周波数選択板のような多層構造素子の解析をする場合、各層の間にある一様均質領域も有限要素に分割しなければならず、最終的に解く行列方程式の次元数が数万次元と大きくなる欠点がある。このため、部分構造法の適用により計算時の負荷を減らす工夫がされている⁽⁶⁾。

著者らはこれまでに、回折格子などの周期構造素子による平面波の散乱特性解析をハイブリッド・トレフツ有限要素法 (Hybrid Trefftz Finite Element Method: HTFEM)⁽⁷⁾により行い、その妥当性を示してきた^{(8),(9)}。文献^{(8),(9)}では、格子の上下にある一様均質な半無限領域をトレフツ要素で分割することで、従来の有限要素法よりも行列方程式の次元数が少なく解析できることを示している。最終的に解く行列方程式の次元数が比較的少くな

る多層型格子の解析においては、各層の間にある一様均質領域をトレフツ要素で分割すれば、通常の有限要素で分割するよりも行列方程式の次元数を大幅に低減できることが予想される。

本論文では、多層格子による任意の入射方向と偏波をもつ平面波の散乱特性解析法に本手法を拡張している。具体的に、格子の厚みを無視した多層ストリップ格子の散乱特性解析を行い、他の手法による数値計算結果との比較から本手法の妥当性、有用性を示している。

2. 問題の設定

Fig.1 に示すような、比誘電率 ϵ_d の誘電体中に、厚みを無視した幅 w のストリップが x 軸方向に p , y 軸方向に d_1 の間隔で N 層詰め込まれた多層ストリップ格子に、任意の入射方向と偏波をもつ平面波が入射する散乱問題を考える。ここに、1 層目と N 層目の格子はそれぞれ誘電体の上端、下端から距離 d_2 離れている。また ϵ_0 , μ_0 はそれぞれ真空の誘電率である。ここで、格

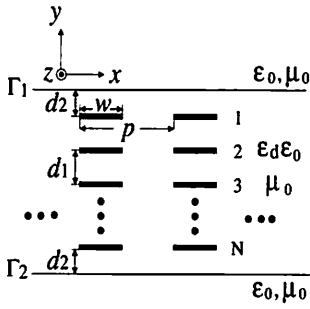


Fig.1 Multilayered strip gratings

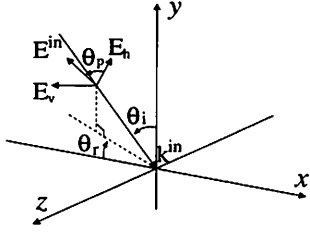


Fig.2 Incident plane wave

子は z 軸方向に一様な構造をしているため、2次元平面で考えることができる。入射平面波は Fig.2 に示すように、入射波数ベクトル \vec{k}^{in} と y 軸がなす入射角 θ_i 、入射面と x 軸がなす方位角 θ_r 、入射面と入射電界ベクトル \vec{E}^{in} がなす偏角 θ_p で入射するものとする。入射波数ベクトル \vec{k}^{in} は、

$$\vec{k}^{\text{in}} = k_x \hat{x} + k_y \hat{y} + k_z \hat{z} \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} k_x &= k_0 \sin \theta_i \cos \theta_r \\ k_y &= -k_0 \cos \theta_i \\ k_z &= k_0 \sin \theta_i \sin \theta_r \\ k_0 &= 2\pi/\lambda \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

である。ここに、 λ は入射平面波の波長である。また、 \hat{x} 、 \hat{y} 、 \hat{z} はそれぞれ x 、 y 、 z 軸方向の単位ベクトルである。入射電界は等価電磁流源として、境界 Γ_1 上に置換される。

3. ハイブリッド・トレフツ有限要素法による定式化

本論文の解析対象は、格子厚みをゼロとしたため、文献(8),(9)のように格子領域を通常要素で分割する必要はなく、Fig.3 に示

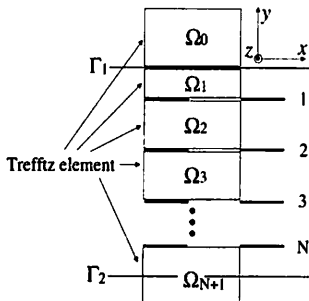


Fig.3 Division of elements

すように、一様均質領域 $\Omega_k (k = 0, 1, 2, \dots, N+1)$ をそれぞれトレフツ要素で分割する。任意の入射方向と偏波をもつ平面波の散乱問題における、半無限領域 Ω_0, Ω_{N+1} を評価する汎関数、波源の離散化および電力評価式については文献(9)で詳細に述べているので、ここでは、各層の間の一様均質領域 $\Omega_i (i = 1, 2, \dots, N)$ の汎関数の離散化と組み立てについて述べる。

3.1. 一様均質領域における汎関数の離散化

一様均質領域 $\Omega_i (i = 1, 2, \dots, N)$ の汎関数 I_i は、

$$\begin{aligned} I_i &= \frac{j\omega}{2} \int_{\partial\Omega_i} [\hat{n} \cdot (\vec{E}^t \times \vec{H}) - \hat{n} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}^t)] ds \\ &\quad - j\omega \int_{\partial\Omega_i} [\hat{n} \cdot (\vec{E}^t \times \vec{H}) - \hat{n} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}^t)] ds \\ &\quad + j\omega \int_{\partial\Omega_i} [\hat{n} \cdot (\vec{E}^t \times \vec{H}) - \hat{n} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}^t)] ds \end{aligned} \quad (3)$$

である。ここに、 ω は角周波数、 \hat{n} は法線方向の単位ベクトル、 \vec{E} 、 \vec{H} はそれぞれ隣接する要素の接続境界上の電界、磁界であり、上添字 t はトランスポーズ界(10)を表し、積分 $\int_{\partial\Omega_i} ds$ は領域 Ω_i を囲む境界の周回積分を表す。ここで、補関数がフロケの定理より周期境界条件

$$\begin{aligned} \vec{E}(x+p) &= \vec{E}(x)e^{-jk_x p}, & \vec{E}^t(x+p) &= \vec{E}^t(x)e^{jk_x p} \\ \vec{H}(x+p) &= \vec{H}(x)e^{-jk_x p}, & \vec{H}^t(x+p) &= \vec{H}^t(x)e^{jk_x p} \end{aligned} \quad (4)$$

を満足すると、周期境界上の線積分は打ち消し合う。

各層の間の一様均質領域 Ω_i (幅 p 、高さ d) 内の電界、磁界の z 成分が系の支配方程式を満足する平面波解となるように、空間高調波展開すると、

$$E_{z,i} = \sum_{n=-M}^M [A_{n,i} e^{\kappa_{n,i} y} + B_{n,i} e^{-\kappa_{n,i} y}] f_{n,i}(x, z) \quad (5)$$

$$H_{z,i} = \sum_{n=-M}^M [C_{n,i} e^{\kappa_{n,i} y} + D_{n,i} e^{-\kappa_{n,i} y}] f_{n,i}(x, z) \quad (6)$$

となる。ここに、 M はモード数、 $A_{n,i}$ 、 $B_{n,i}$ は電界の z 成分の展開係数、 $C_{n,i}$ 、 $D_{n,i}$ は磁界の z 成分の展開係数であり、

$$f_{n,i}(x, z) = \exp(-\gamma_n x - jk_z z) \quad (7)$$

$$\gamma_n = j \left(k_x + \frac{2n\pi}{p} \right) \quad (8)$$

$$\kappa_{n,i} = j \sqrt{k_0^2 \epsilon_i + \gamma_n^2 - k_z^2} \quad (9)$$

である。 ϵ_i は領域 Ω_i の比誘電率である。電界の x 、 y 成分は式(5)、(6)を用いると、

$$\begin{aligned} E_{x,i} &= \sum_{n=-M}^M \alpha_i [-\kappa_{n,i} \{ C_{n,i} e^{\kappa_{n,i} y} - D_{n,i} e^{-\kappa_{n,i} y} \} f_{n,i}(x, z) \\ &\quad + \beta \gamma_n \{ A_{n,i} e^{\kappa_{n,i} y} + B_{n,i} e^{-\kappa_{n,i} y} \} f_{n,i}(x, y)] \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} E_{y,i} &= \sum_{n=-M}^M \alpha_i [-\gamma_n \{ C_{n,i} e^{\kappa_{n,i} y} + D_{n,i} e^{-\kappa_{n,i} y} \} f_{n,i}(x, z) \\ &\quad - \beta \kappa_{n,i} \{ A_{n,i} e^{\kappa_{n,i} y} - B_{n,i} e^{-\kappa_{n,i} y} \} f_{n,i}(x, y)] \end{aligned} \quad (11)$$

となる。ここに、

$$\alpha_i = \frac{jk_0\eta_0}{k_0^2\epsilon_i - k_z^2} \quad (12)$$

$$\beta = \frac{k_z}{k_0\eta_0} \quad (13)$$

である。 $\eta_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$ は特性インピーダンスである。トレフツ要素の境界上の電界 \vec{E} の x, z 成分は直辺混合要素⁽¹¹⁾ に適合するように、

$$\vec{E}_x = \{N_x\}^T \{\tilde{E}_x\} \quad (14)$$

$$\vec{E}_z = \{N_z\}^T \{\tilde{E}_z\} \quad (15)$$

と補間する。ここに、 $\{N_x\}, \{N_z\}$ は補間関数ベクトルであり、 $\{\tilde{E}_x\}$ は要素の各辺上の電界ベクトルの x 成分、 $\{\tilde{E}_z\}$ は要素の各節点での電界ベクトルの z 成分である。上添字 T は転置をとることを表す。離散化した汎関数 I_i は、

$$\begin{aligned} I_i = & \{F_i^t\}^T [G_i] \{F_i\} + \{\tilde{E}_{u,i}^t\}^T [U_i] \{F_i\} \\ & + \{F_i^t\}^T [U_i^t] \{\tilde{E}_{u,i}\} + \{\tilde{E}_{l,i}^t\}^T [L_i] \{F_i\} \\ & + \{F_i^t\}^T [L_i^t] \{\tilde{E}_{l,i}\} + \{\tilde{E}_{u,i}^t\}^T \{Y_{u,i}\} \\ & + \{Y_{u,i}^t\}^T \{\tilde{E}_{u,i}\} + \{\tilde{E}_{l,i}^t\}^T \{Y_{l,i}\} \\ & + \{Y_{l,i}^t\}^T \{\tilde{E}_{l,i}\} \end{aligned} \quad (16)$$

となる。ここに、電界ベクトルの下添字 u, l はそれぞれ、各トレフツ要素の上部境界、下部境界上での量であることを示し、

$$\{F_i\} = [\{A_{n,i}\} \{B_{n,i}\} \{C_{n,i}\} \{D_{n,i}\}]^T \quad (17)$$

$$\{\tilde{E}_{u,i}\} = [\{\tilde{E}_{zu,i}\} \{\tilde{E}_{xu,i}\}]^T \quad (18)$$

$$\{\tilde{E}_{l,i}\} = [\{\tilde{E}_{zl,i}\} \{\tilde{E}_{xl,i}\}]^T \quad (19)$$

$$\{Y_{u,i}\} = [\{Y_{zu,i}\} \{Y_{xu,i}\}]^T \quad (20)$$

$$\{Y_{l,i}\} = [\{Y_{zl,i}\} \{Y_{xl,i}\}]^T \quad (21)$$

である。ここに、

$$\{Y_{zu,i}\} = \int_{\partial\Omega_i} j\omega \tilde{H}_x \{N_z\} dx \quad (22)$$

$$\{Y_{xu,i}\} = - \int_{\partial\Omega_i} j\omega \tilde{H}_z \{N_x\} dx \quad (23)$$

$$\{Y_{zl,i}\} = - \int_{\partial\Omega_i} j\omega \tilde{H}_x \{N_z\} dx \quad (24)$$

$$\{Y_{xl,i}\} = \int_{\partial\Omega_i} j\omega \tilde{H}_z \{N_x\} dx \quad (25)$$

$$\{Y_{zu,i}^t\} = - \int_{\partial\Omega_i} j\omega \tilde{H}_x^t \{N_z\}^T dx \quad (26)$$

$$\{Y_{xu,i}^t\} = \int_{\partial\Omega_i} j\omega \tilde{H}_z^t \{N_x\}^T dx \quad (27)$$

$$\{Y_{zl,i}^t\} = \int_{\partial\Omega_i} j\omega \tilde{H}_x^t \{N_z\}^T dx \quad (28)$$

$$\{Y_{xl,i}^t\} = - \int_{\partial\Omega_i} j\omega \tilde{H}_z^t \{N_x\}^T dx \quad (29)$$

であり、

$$[G_i] = \begin{bmatrix} [G_{AA,i}] & [0] & [G_{AC,i}] & [0] \\ [0] & [G_{BB,i}] & [0] & [G_{BD,i}] \\ [G_{CA,i}] & [0] & [G_{CC,i}] & [0] \\ [0] & [G_{DB,i}] & [0] & [G_{DD,i}] \end{bmatrix} \quad (30)$$

$$[U_i] = \begin{bmatrix} [U_{Az,i}] & [U_{Bz,i}] & [U_{Cz,i}] & [U_{Dz,i}] \\ [0] & [0] & [U_{Cx,i}] & [U_{Dx,i}] \end{bmatrix} \quad (31)$$

$$[U_i^t] = \begin{bmatrix} [U_{Az,i}^t] & [U_{Bz,i}^t] & [U_{Cz,i}^t] & [U_{Dz,i}^t] \\ [0] & [0] & [U_{Cx,i}^t] & [U_{Dx,i}^t] \end{bmatrix}^T \quad (32)$$

$$[L_i] = \begin{bmatrix} [L_{Az,i}] & [L_{Bz,i}] & [L_{Cz,i}] & [L_{Dz,i}] \\ [0] & [0] & [L_{Cx,i}] & [L_{Dx,i}] \end{bmatrix} \quad (33)$$

$$[L_i^t] = \begin{bmatrix} [L_{Az,i}^t] & [L_{Bz,i}^t] & [L_{Cz,i}^t] & [L_{Dz,i}^t] \\ [0] & [0] & [L_{Cx,i}^t] & [L_{Dx,i}^t] \end{bmatrix}^T \quad (34)$$

である。 $[G_i]$ の各小行列は対角行列であり、各 (j, j) 成分は、

$$G_{AA,i(j,j)} = \frac{\kappa_{m,i}}{\mu_0} (1 - \alpha_i \beta j k_z) (1 - e^{-2\kappa_{m,i}d}) \quad (35)$$

$$G_{AC,i(j,j)} = \frac{-\alpha_i \gamma_m}{2\mu_0} \{j k_z + \alpha_i \beta (\gamma_m^2 + \kappa_{m,i}^2)\} (1 - e^{-2\kappa_{m,i}d}) \quad (36)$$

$$G_{BB,i(j,j)} = \frac{-\kappa_{m,i}}{\mu_0} (1 - \alpha_i \beta j k_z) (1 - e^{-2\kappa_{m,i}d}) \quad (37)$$

$$G_{BD,i(j,j)} = \frac{-\alpha_i \gamma_m}{2\mu_0} \{j k_z + \alpha_i \beta (\gamma_m^2 + \kappa_{m,i}^2)\} (1 - e^{-2\kappa_{m,i}d}) \quad (38)$$

$$G_{CA,i(j,j)} = \frac{\alpha_i \gamma_m}{2\mu_0} \{j k_z + \alpha_i \beta (\gamma_m^2 + \kappa_{m,i}^2)\} (1 - e^{-2\kappa_{m,i}d}) \quad (39)$$

$$G_{CC,i(j,j)} = \frac{-\alpha_i^2 \kappa_{m,i}}{\mu_0} (\gamma_m^2 + \kappa_{m,i}^2) (1 - e^{-2\kappa_{m,i}d}) \quad (40)$$

$$G_{DB,i(j,j)} = \frac{\alpha_i \gamma_m}{2\mu_0} \{j k_z + \alpha_i \beta (\gamma_m^2 + \kappa_{m,i}^2)\} (1 - e^{-2\kappa_{m,i}d}) \quad (41)$$

$$G_{DD,i(j,j)} = \frac{\alpha_i^2 \kappa_{m,i}}{\mu_0} (\gamma_m^2 + \kappa_{m,i}^2) (1 - e^{-2\kappa_{m,i}d}) \quad (42)$$

である。ここに、 $m = -(M - j + 1)$ である。 $[L_i], [L_i^t]$ の各小行列は、

$$[L_{Az,i}] = -[L_{Bz,i}] = \sum_{ie} \int_{ie} \{N_z\} \{\xi_{n,i}\}^T dx \quad (43)$$

$$[L_{Cz,i}] = [L_{Dz,i}] = \sum_{ie} \int_{ie} \{N_z\} \{\eta_{n,i}\}^T dx \quad (44)$$

$$[L_{Cx,i}] = [L_{Dx,i}] = \sum_{ie} \int_{ie} \{N_x\} \{\zeta_{n,i}\}^T dx \quad (45)$$

$$[L_{Az,i}^t] = -[L_{Bz,i}^t] = \sum_{ie} \int_{ie} \{\xi_{n,i}^t\} \{N_z\}^T dx \quad (46)$$

$$[L_{Cz,i}^t] = [L_{Dz,i}^t] = \sum_{ie} \int_{ie} \{\eta_{n,i}^t\} \{N_z\}^T dx \quad (47)$$

$$[L_{Cx,i}^t] = [L_{Dx,i}^t] = \sum_{ie} \int_{ie} \{\zeta_{n,i}^t\} \{N_x\}^T dx \quad (48)$$

である。ここに \sum_{ie} は評価される境界上に関する線要素の重ね合わせを表し、

$$\xi_{n,i} = \frac{-\kappa_{n,i}}{\mu_0} (1 - \alpha_i \beta j k_z) e^{-\gamma_n x} \quad (49)$$

$$\eta_{n,i} = \frac{\alpha_i}{\mu_0} j k_z \gamma_n e^{-\gamma_n x} \quad (50)$$

$$\zeta_{n,i} = \frac{\alpha_i}{\mu_0} (\gamma_n^2 + \kappa_{n,i}^2) e^{-\gamma_n x} \quad (51)$$

$$\xi_{n,i}^t = \frac{-\kappa_{n,i}}{\mu_0} (1 - \alpha_i \beta j k_z) e^{\gamma_n x} \quad (52)$$

$$\eta_{n,i}^t = \frac{-\alpha_i}{\mu_0} j k_z \gamma_n e^{\gamma_n x} \quad (53)$$

$$\zeta_{n,i}^t = \frac{-\alpha_i}{\mu_0} (\gamma_n^2 + \kappa_{n,i}^2) e^{\gamma_n x} \quad (54)$$

である。\$[U_i]\$, \$[U_i^t]\$ の各小行列は、

$$[U_{Az,i}] = -e^{\kappa_{n,i}d} [L_{Az,i}] \quad (55)$$

$$[U_{Bz,i}] = -e^{-\kappa_{n,i}d} [L_{Bz,i}] \quad (56)$$

$$[U_{Cz,i}] = -e^{\kappa_{n,i}d} [L_{Cz,i}] \quad (57)$$

$$[U_{Dz,i}] = -e^{-\kappa_{n,i}d} [L_{Dz,i}] \quad (58)$$

$$[U_{Cx,i}] = -e^{\kappa_{n,i}d} [L_{Cx,i}] \quad (59)$$

$$[U_{Dx,i}] = -e^{-\kappa_{n,i}d} [L_{Dx,i}] \quad (60)$$

$$[U_{Az,i}^t] = -e^{\kappa_{n,i}d} [L_{Az,i}^t] \quad (61)$$

$$[U_{Bz,i}^t] = -e^{-\kappa_{n,i}d} [L_{Bz,i}^t] \quad (62)$$

$$[U_{Cz,i}^t] = -e^{\kappa_{n,i}d} [L_{Cz,i}^t] \quad (63)$$

$$[U_{Dz,i}^t] = -e^{-\kappa_{n,i}d} [L_{Dz,i}^t] \quad (64)$$

$$[U_{Cx,i}^t] = -e^{\kappa_{n,i}d} [L_{Cx,i}^t] \quad (65)$$

$$[U_{Dx,i}^t] = -e^{-\kappa_{n,i}d} [L_{Dx,i}^t] \quad (66)$$

である。式 (16) は変分量として、展開係数ベクトルと電界ベクトルを含んでいることに注意して、展開係数ベクトルに関する変分により、式 (16) から \$\{F_i\}\$, \$\{F_i^t\}\$ を消去し、さらに電界のトランスポート界に関する変分により、行列方程式

$$\begin{bmatrix} [X_{uu,i}] & [X_{ul,i}] \\ [X_{lu,i}] & [X_{ll,i}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\tilde{E}_{u,i}\} \\ \{\tilde{E}_{l,i}\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\{Y_{u,i}\} \\ -\{Y_{l,i}\} \end{bmatrix} \quad (67)$$

を得る。ここに、

$$[X_{uu,i}] = -[U_i][G_i]^{-1}[U_i^t] \quad (68)$$

$$[X_{ul,i}] = -[U_i][G_i]^{-1}[L_i^t] \quad (69)$$

$$[X_{lu,i}] = -[L_i][G_i]^{-1}[U_i^t] \quad (70)$$

$$[X_{ll,i}] = -[L_i][G_i]^{-1}[L_i^t] \quad (71)$$

である。なお、トレフツ要素の境界上にストリップが存在する場合の境界条件は、まだ式 (67) に課されていない。この条件の処理は次節で説明する。

3.2. トレフツ有限要素モデルの組み立て

すべてのトレフツ要素から得られる行列方程式 (67) を連立させることにより、最終的に解くべき連立 1 次方程式が得られる。ここでは、領域 \$\Omega_i\$ と \$\Omega_{i+1}\$ のトレフツ要素から、ストリップを

含む領域 (\$\Omega_i + \Omega_{i+1}\$) の有限要素モデルの組み立てについて述べる。\$\Omega_i\$ と \$\Omega_{i+1}\$ から得られる行列方程式 (67) を連立させると、

$$\begin{bmatrix} [X_{uu,i}] & [X_{ul,i}] & [0] \\ [X_{lu,i}] & [X_{ll,i}] + [X_{uu,i+1}] & [X_{ul,i+1}] \\ [0] & [X_{lu,i+1}] & [X_{ll,i+1}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\tilde{E}_{u,i}\} \\ \{\tilde{E}_{l,i+1}\} \\ \{\tilde{E}_{l,i+1}\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\{Y_{u,i}\} \\ -(\{Y_{l,i}\} + \{Y_{u,i+1}\}) \\ -\{Y_{l,i+1}\} \end{bmatrix} \quad (72)$$

を得る。ここに、\$\{\tilde{E}_{l,i+1}\}\$ は \$\Omega_i\$ と \$\Omega_{i+1}\$ の接続境界上の電界を表し、

$$\{\tilde{E}_{l,i+1}\} = [\{\tilde{E}_d\} \quad \{\tilde{E}_s\}]^T \quad (73)$$

である。ここに、下添字 \$s\$, \$d\$ はそれぞれストリップ上、境界からストリップを除いた残りの接続境界上の量であることを表す。

ストリップ上の境界条件は

$$\left. \begin{aligned} [\tilde{E}_T^+ + \tilde{E}_T^-]/2 &= \eta_0 R \hat{n} \times [\tilde{H}_T^+ - \tilde{H}_T^-] \\ \tilde{E}_T^+ &= \tilde{E}_T^- = \tilde{E}_s \end{aligned} \right\} \quad (74)$$

である⁽¹²⁾。ここに、上添字 \$+\$, \$-\$ はそれぞれストリップ上面、下面での量を表し、下添字 \$T\$ は電磁界の \$x\$, \$z\$ 成分からなるベクトルであることを表す。\$R\$ は特性インピーダンス \$\eta_0\$ で規格化されたストリップの表面抵抗である。連立方程式 (72) の右辺は、ストリップ上の節点ならびにエッジにおいて、式 (22)~(25) 中の磁界を電界 \$\{\tilde{E}_s\}\$ で表すと

$$\begin{aligned} \{Y_{l,i}\}_s + \{Y_{u,i+1}\}_s &= \frac{-jk_0}{\mu_0 R} \int_s \{N_x\} \{N_x\}^T dx \{\tilde{E}_{sx}\} \\ &\quad - \frac{jk_0}{\mu_0 R} \int_s \{N_z\} \{N_z\}^T dx \{\tilde{E}_{sz}\} \\ &= [W] \{\tilde{E}_s\} \end{aligned} \quad (75)$$

であり、他方、ストリップを除いた接続境界上には波源がないので、

$$\{Y_{l,i}\}_d + \{Y_{u,i+1}\}_d = \{0\} \quad (76)$$

となる。ここに、\$\{\tilde{E}_{sx}\}\$, \$\{\tilde{E}_{sz}\}\$ はそれぞれストリップ上の電界の \$x\$, \$z\$ 成分からなるベクトルであり、\$\int_s dx\$ はストリップ上での線積分を表す。

結局、式 (72) は

$$\begin{bmatrix} [X_{uu,i}] & [X_{ul,i}]_d & [X_{ul,i}]_s \\ [X_{lu,i}]_d & [[X_{ll,i}] + [X_{uu,i+1}]]_{dd} & [[X_{ll,i}] + [X_{uu,i+1}]]_{ds} \\ [X_{lu,i}]_s & [[X_{ll,i}] + [X_{uu,i+1}]]_{sd} & [[X_{ll,i}] + [X_{uu,i+1}]]_{ss} + [W] \\ [0] & [X_{lu,i+1}]_d & [X_{ll,i+1}]_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\tilde{E}_{u,i}\} \\ \{\tilde{E}_d\} \\ \{\tilde{E}_s\} \\ \{\tilde{E}_{l,i+1}\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\{Y_{u,i}\} \\ \{0\} \\ \{0\} \\ -\{Y_{l,i+1}\} \end{bmatrix} \quad (77)$$

となる。

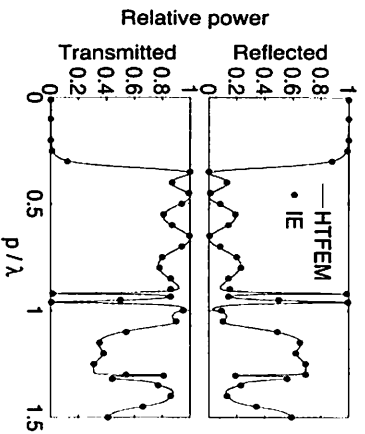


Fig.4 Frequency dependence of relative powers for perfect conductor strip gratings

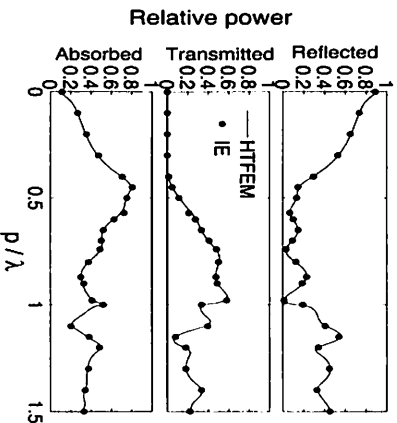
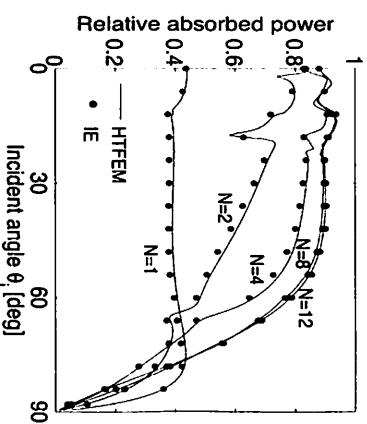


Fig.5 Frequency dependence of relative powers for lossy conductor strip gratings

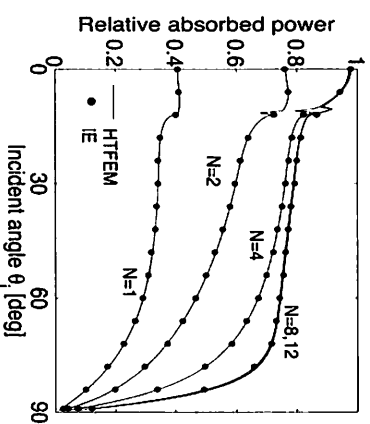
4. 数値計算例

以下の数値計算ではモード数 M を 40 とし、解析領域の x 軸方向への分割数 D_x を 40 としている。Fig.1 において、 $\epsilon_a = 3.4$ 、 $d_1 = 0.25p$ 、 $d_2 = 0.125p$ とした 4 層導体ストリッパ ($N = 4$) に、 $\theta_i = 0^\circ$ の TE 波 ($\theta_r = 0^\circ$ 、 $\theta_p = 90^\circ$) が入射した場合を考える。Fig.4、Fig.5 はそれぞれ、完全導体ストリッパ ($R = 0$ 、 $w = 0.25p$)、損失をもつ金属ストリッパ ($R = 0.06$ 、 $w = 0.5p$) とした場合の規格化電力の周波数依存性を調べたものである。 p/λ が小さい低周波域では入射平面波は透過しない、また、Fig.4 の完全導体の場合には、全反射する周波数が存在するが、Fig.5 の損失のある金属の場合では、損失による吸収のために全反射はない。

Fig.6 は $\epsilon_a = 2.54$ 、 $d_1 = 0.5p$ 、 $d_2 = 0.25p$ とした N 層金属ストリッパ ($R = 0.25$ 、 $w = 0.65p$) に、 $\theta_r = 0^\circ$ の方向から入射する平面波の吸収電力の入射角と層数の依存性を調べたものである。 $\theta_p = 0^\circ$ (Fig.6(a)) の場合に、 $\theta_i = 65^\circ \sim 90^\circ$ において、 $N = 1$ での吸収電力が $N = 2$ 以上の吸収電力を上回ることを除けば、 $\theta_p = 0^\circ$ 、 $\theta_p = 90^\circ$ のいずれの場合も、層数が多いほうが吸収電力は大きい。Fig.4~Fig.6 において、本手法の計算結果



(a) $\theta_p = 0^\circ$

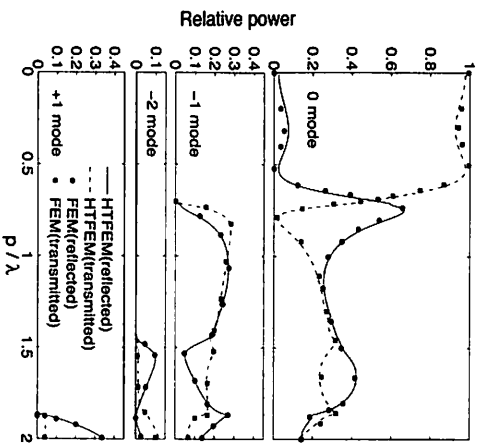


(b) $\theta_p = 90^\circ$

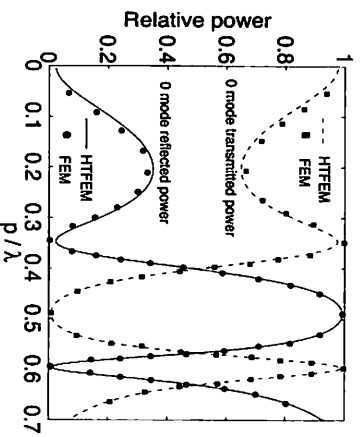
Fig.6 Incident angle and number of layers dependences of absorbed powers

(実線) は積分方程式法による計算結果 (●) (13) と良く一致している。

Fig.7 は $d_1 = 0.4p$ 、 $d_2 = 0$ とした 2 層完全導体ストリッパ ($N = 2$ 、 $R = 0$ 、 $w = 0.5p$) に、 $\theta_i = 30^\circ$ 、 $\theta_r = 30^\circ$ 、 $\theta_p = -35.26^\circ$ で平面波が入射した場合の規格化電力の周波数依存性を調べたものである。 $\epsilon_a = 3.5$ (Fig.7(b)) では、 $\epsilon_a = 1.0$ (Fig.7(a)) よりも多重散乱の影響が大きいため、規格化電力の変化は激しくなっている。本手法による計算結果 (実線、破線) は解析解と有限要素法の結合解法による計算結果 (●、■) (6) と良く一致している。Table 1 はストリッパを含む誘電体層をトリアツ要素で分割する場合と、通常要素で分割する場合とで、最終的に解く行列方程式の次元数と一点当りの計算時間を比べたものである。 D_x 、 D_y はそれぞれ解析領域の x 軸方向、 y 軸方向への分割数を表す。通常要素では、形状が正方形となるように周期方向を 40 分割 ($D_x = 40$)、厚み方向を 16 分割 ($D_y = 16$) した。トリアツ要素のみを用いる本手法は、通常要素を併用する場合に比べて大幅に次元数を低減でき、計算率が向上していることがわかる。



(a) $\epsilon_d = 1.0$



(b) $\epsilon_d = 3.5$

Fig. 7 Frequency dependence of relative powers for perfect conductor strip gratings

Table 1 Comparison of number of unknowns

| 計算モデル | 分割数 (D_x, D_y) | 次元数 | 計算時間 |
|-------|--------------------|------|-------------|
| 本手法 | (40, 1) | 118 | 0.425 [sec] |
| 従来法 | (40, 16) | 3238 | 3.016 [sec] |

5. むすび

任意の入射方向と偏波をもつ平面波の多層格子による散乱問題へ、ハイブリッド・トリップツ有限要素法を拡張し、定式化および数値解析を行った。他の解析法との計算結果の比較から、本手法の妥当性を示した。また、各層の間の一様均質領域をそれぞれトリップツ要素で分割することにより、従来の有限要素を直接適用するよりも最終的に解く行列方程式の次元数を大幅に低減できることを確認し、本手法の有用性を示した。

参考文献

(1) 中田康則, 小柴正則, 鈴木道雄: 誘電体格子による平面波

回折の有限要素法解析, 電子通信学会論文誌 (C), **J69-C**(1986), pp. 1503-1511.

(2) 大川諭一, 辻寧英, 小柴正則: 異方性誘電体格子による平面波回折の有限要素法解析, 電子情報通信学会論文誌 (C-1), **J78-C-1**(1995), pp. 391-399.

(3) 国司和浩, 小柴正則, 辻寧英: 有限要素法によるキラルグレーティングの偏波特性解析, 電子情報通信学会論文誌 (C-1), **J82-C-1**(1999), pp. 318-325.

(4) J. Jin, J. L. Volaski, and J. D. Collins: A finite-element-boundary-integral method for scattering and radiation by two- and three-dimensional structures, *IEEE Antennas Propagat. Mag.*, **33**(1991), pp. 22-32.

(5) G. Pelosi, A. Cocchi, and A. Monorchio: A hybrid FEM-based procedure for the scattering from photonic crystals illuminated by a gaussian beam, *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, **48**(2000), pp. 973-980.

(6) 中田康則, 小柴正則: 任意の入射面と偏波をもつ平面波による散乱特性の有限要素法解析, 電子情報通信学会論文誌 (C-1), **J72-C-1**(1989), pp. 731-739.

(7) Qing-Hua Qin: The Trefftz Finite and Boundary Element Method, (2000), WIT Press.

(8) 佐藤慎悟, 長谷川弘治: ハイブリッド・トリップツ有限要素法に基づく回折格子の散乱特性解析法, 境界要素法論文集, **21**(2004), pp. 53-58.

(9) 佐藤慎悟, 長谷川弘治: 3次元入射する平面波の回折格子散乱特性のハイブリッド・トリップツ有限要素法解析, 電子情報通信学会論文誌 (C), 12月号掲載予定.

(10) L. Cairo and T. Kahan: Variational Techniques in Electromagnetism, (1965), Gordon and Breach.

(11) X. Q. Sheng and S. Xu: An efficient high-order mixed-edge rectangular-element method for lossy anisotropic dielectric waveguides, *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, **45**(1997), pp. 1009-1013.

(12) T. L. Zinenko, A. I. Nosich, Y. Okuno: Plane wave scattering and absorption by resistive-strip and dielectric-strip periodic gratings, *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, **46**(1998), pp. 1498-1505.

(13) T. L. Zinenko, A. Matsushima, and Y. Okuno: Scattering and absorption of electromagnetic plane wave by a multilayered resistive strip grating embedded in a dielectric slab, *IEICE Trans. Electron.*, **E82-C**(1999), pp. 2255-2264.