Green関数を用いた超音波励起レーザのソース同定

DETERMINATION OF LASER GENERATED ULTRASONIC SOURCE USING GREEN'S FUNCTION

吉川 仁[1), 西村 直志[2)

Hitoshi YOSHIKAWA and Naoshi NISHIMURA

1) 京都大学 工学研究科 (〒 606-8501 京都市左京区吉田本町, E-mail: yosikawa@mbox.kudpc.kyoto-u.ac.jp)
2) 京都大学 学術情報メディア (〒 606-8501 京都市左京区吉田本町, E-mail: nchml@media.kyoto-u.ac.jp)

Waves from an ultrasonic source generated with a laser pulse are investigated. We solve the equation of thermoelasticity to compute the normal velocity on the surface of an aluminium test piece. The computed and the measured normal velocities are compared to determine the absorbed energy in the test piece and the distribution of the laser energy. We also consider the effect of ablation of the test piece when high power laser pulses are irradiated.

Key Words: Laser generated ultrasound, Thermoelastic equation, Wave propagation, Green's function

1. 研究背景・目的

近年、超音波の励起にパルスレーザを、超音波の計測にレーザ干渉計を用いるレーザ超音波非破壊試験が行われており、レーザ干渉計により計測される変位や速度といった物理量の波形データを利用した定量的非破壊評価法の確立が求められている。レーザ計測による波形データを用いた非破壊評価を行う上で、パルスレーザにより励起される超音波を定量的に同定する必要があり、関連する研究も行われている [1, 2]。供試体に照射されるパルスレーザの強度が弱ければ、照射部付近に熱膨張が起こり弾性波動が発生する (T モード)。パルスレーザの強度が強くなると、供試体表面にアブレーションが生じ、アブレーションの影響により弾性波動が発生する (A モード)。

本研究では、半無限弾性領域における熱伝導方程式と時間域の動弾性方程式の Green 関数を求め、Green 関数を用いてパルスレーザによる超音波励起 (T モード、A モード) に相当する初期値境界値問題を解き、超音波励起レーザのソースを同定する事を目的とする。具体的には、T モードでは、熱弾性方程式に支配される半無限弾性体において、パルスレーザの照射により材料に吸収される熱量を境界条件とする初期値境界値問題を解く。数値的に得られた表面速度の波形データとレーザ干渉計による計測データを比較し、パルスレーザの強度分布と、材料に吸収される熱量を決定する。A モードでは、アブレーションにより供試体表面に時間変動を持つ鉛直方向の力 (鉛直方向等価力と呼ぶ) が作用すると仮定し、鉛直方向等価力を境界条件とする動弾性問題を解く。数値的に得られた速度波形を用いて計測データから鉛直方向等価力の時間変動を決定する。

2. 熱膨張による弾性波動場の計算

2.1. 熱弾性方程式に支配される初期値境界値問題

パルスレーザの照射による供試体の熱膨張により弾性波動場が形成される。熱ひずみを $\varepsilon^T_{k\ell}$、弾性ひずみを $\varepsilon^{ED}_{k\ell}$ とし、等方性を仮定すると、

$$\begin{aligned}\varepsilon^{ED}_{k\ell} &= \varepsilon_{k\ell} - \varepsilon^T_{k\ell}\\ \varepsilon^T_{k\ell} &= \alpha^T T\delta_{k\ell}\end{aligned}$$

であり、熱応力は次式で与えられる。

$$\begin{aligned}\tau_{ij} &= C_{ijk\ell}\varepsilon^{ED}_{k\ell}\\ &= \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} - \alpha^T(3\lambda+2\mu)T\delta_{ij}\end{aligned}$$

ここで、α^T は線膨張率、T は温度上昇、$C_{ijk\ell}$ は弾性定数である。

円筒座標系 (r, ϕ, z) を考える。パルスレーザは、ガウス型の空間強度分布を持つ事が知られている [3]。また、Q スイッチを用いた場合、パルスレーザの照射時間は 10〜15 nsec と非常に短い。そのため、3 次元半無限弾性領域 $(z \geq 0)$ において、境界 $z = 0$ に空間分布 $\frac{q_{\rm abs}}{2\pi\sigma^2}\exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right)$、時間変動 $\delta(t)$ の熱量が与えられたときの弾性波動場を考える (σ^2 はガウス分布の分散)(Fig.1)。このとき、変位 $\boldsymbol{u}(r, z, t)$ は次の初期値境界値問題を解く事で得られる。

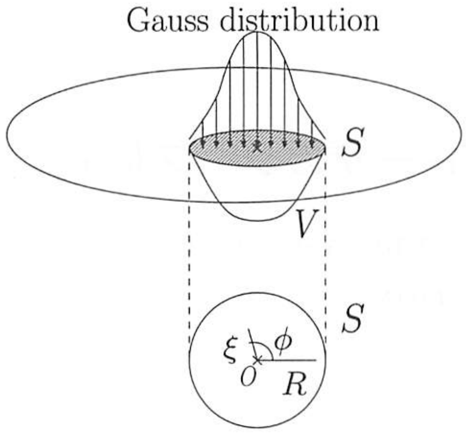

Fig. 1　パルスレーザの強度分布

$$
\begin{aligned}
\mu\Delta \boldsymbol{u} + (\lambda+\mu)\nabla(\nabla\cdot \boldsymbol{u}) &= \rho\ddot{\boldsymbol{u}} + \alpha^T(3\lambda+2\mu)\nabla T \\
\Delta T - \frac{1}{\kappa^2}\dot{T} &= -\frac{\delta(z)\delta(t)q_{\mathrm{abs}}}{4\pi^2 rK\sigma^2}\exp(-\frac{r^2}{2\sigma^2}) \\
\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0} \quad &\text{for} \quad t\le 0 \\
\tau_{zz}=\tau_{zr}=0 \quad &\text{on} \quad z=0, \ \text{for} \ \ t\ge 0 \\
T=0 \quad &\text{for} \quad t\le 0 \\
\frac{\partial T}{\partial n}=0 \quad &\text{on} \quad z=0, \ \text{for} \ \ t\ge 0 \qquad (1)
\end{aligned}
$$

ここで、λ,μ はラメ定数、ρ は密度、K は熱伝導率、κ^2 は温度拡散率で $\kappa^2=\frac{K}{\rho c}$, ($c$ は比熱)、$\boldsymbol{n}$ は境界での外向き単位法線ベクトルで $(0,0,-1)$、$\frac{\partial}{\partial n}$ は法線微分を、'$(\dot{\ })$' は時間微分を表す。なお、供試体 (アルミニウム合金を想定) の熱伝導度が空気の熱伝導度に比べ極めて大きいため式 (1) の境界条件を課す。

供試体内の温度分布 T は、熱伝導方程式の基本解を用いて次式で得られる。

$$
\begin{aligned}
T(\xi,\zeta,t) &= \frac{2\kappa^2}{K}q_{\mathrm{abs}}\left(\frac{1}{4\pi\kappa^2 t}\right)^{\frac{3}{2}}\exp\left(-\frac{\zeta^2}{4\kappa^2 t}\right) \\
&\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\exp\left(-\frac{(\xi-R\cos\phi)^2+R^2\sin\phi^2}{4\kappa^2 t}\right) \\
&\exp\left(-\frac{R^2}{2\sigma^2}\right)R\,dR\,d\phi \qquad (2)
\end{aligned}
$$

式 (2) で与えられる温度分布によって熱膨張する volume source: V を考える (Fig.1)。このとき、供試体表面における法線方向変位は次の積分方程式で表現できる [1]。

$$
\begin{aligned}
&u_z(r,0,t) \\
=&\int_V \alpha^T\frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+2\mu}T(\xi,\zeta,t)*g(r',\zeta,t)\,dV(\xi,\theta,\zeta) \quad (3)
\end{aligned}
$$

$$
g(r',\zeta,t)=\left\{\frac{\partial(\xi G_{zr})}{\xi\partial\xi}+\frac{\partial G_{zz}}{\partial\zeta}\right\}(r',\zeta,t)
$$

ここで、$G_{z\beta}(r,\zeta,t)$ は、時間域の動弾性問題の Green 関数であり、時刻 $t=0$ において点 $(0,0,\zeta)$ に β 方向に $\delta(t)$ の時間変動を持つ大きさ 1 の集中荷重を加えた時の、点 $(r,0,0)$ での z 方向変位を表す。また、'$*$' は時間に関する畳み込み積分で $f(t)*g(t)=\int f(t-s)g(s)ds$、$r'=\sqrt{r^2+\xi^2-2r\xi\cos\theta}$ であり、θ は原点を中心とした ソース点 と観測点の成す角度である。

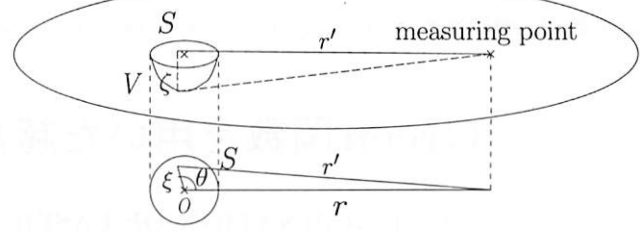

Fig. 2　volume source と計測点

2.2. 動弾性問題の解法

式 (2) より、供試体内の温度 $T(r,z,t)$ は距離減衰が大きい。そのため、volume source: V として考える領域の深さは小さく、式 (3) において g が深さ方向に一定であり、その値を $g(r',0,t)$ と近似しても構わない。

$$
\begin{aligned}
&u_z(r,0,t) \\
=&\int_S \alpha^T\frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+2\mu}\left(\int_0^\infty T(\xi,\zeta,t)d\zeta\right)*g(r',0,t)\ dS(\xi,\theta) \\
&\qquad\qquad (4)
\end{aligned}
$$

ここで、S は volume source: V の供試体表面上の境界である。区分線形の時間内挿関数を導入し、式 (4) の時間積分を数値的に行う。

$$
g^L(r,t)=\int_0^t sg(r,0,s)ds
$$

とすると、g^L は次式の様に求められる。$\tau=\frac{t}{rb}$ とすると、$\tau<\frac{a}{b}$ 時、

$$
g^L(r,t)=0
$$

$\frac{a}{b}\le\tau<1$ の時、

$$
\begin{aligned}
g^L(r,t) &= \frac{b}{4\pi^2 r\sqrt{1-\eta}}E\left(\sqrt{\frac{\tau^2-\eta}{1-\eta}}\right) \\
&- \frac{2bK_i(2v_i^4-v_i^2)(\eta-v_i^2)}{\pi^2 r\sqrt{1-\eta}}\left[K\left(\sqrt{\frac{\tau^2-\eta}{1-\eta}}\right)\right. \\
&+ \left.\frac{v_i^2-1}{\eta-v_i^2}\Pi\left(\frac{\tau^2-\eta}{\eta-v_i^2},\sqrt{\frac{\tau^2-\eta}{1-\eta}}\right)\right]
\end{aligned}
$$

$1\le\tau$ の時、

$$
\begin{aligned}
&g^L(r,t) \\
=& b\frac{4K_i v_i^6-\frac{2\tau^2-2\eta-3}{8(1-\eta)}}{\pi^2 r\sqrt{\tau^2-\eta}}K\left(\sqrt{\frac{1-\eta}{\tau^2-\eta}}\right) \\
+& \frac{b\sqrt{\tau^2-\eta}}{4\pi^2 r(1-\eta)}E\left(\sqrt{\frac{1-\eta}{\tau^2-\eta}}\right) \\
-& \frac{2bK_i v_i^2(2v_i^2-1)(v_i^2-1)}{\pi^2 r\sqrt{\tau^2-\eta}}\Pi\left(\frac{1-\eta}{\eta-v_i^2},\sqrt{\frac{1-\eta}{\tau^2-\eta}}\right) \\
+& \frac{(\gamma/b)^2)(1-2(\gamma/b)^2)^3}{32(1-\eta)(\gamma/b)^6-16(\gamma/b)^2+4}\frac{bH(\tau-\gamma/b)}{\pi r\sqrt{\tau^2-(\gamma/b)^2}}
\end{aligned}
$$

$$K_i = -\frac{1}{16(1-\eta)(\chi_i^2-\chi_j^2)(\chi_i^2-\chi_k^2)}, \quad i \neq j \neq k$$

ここに、$\gamma = v_3 > 1$ で、χ_i^2 および v_i^2 は次式の異なる 3 根である。

$$-16\chi^6(1-\eta) + 8\chi^4(3-2\eta) - 8\chi^2 + 1 = 0$$
$$(1-2v^2)^2 + 4v^2(v^2-1)^{1/2}(v^2-\eta)^{1/2} = 0$$

また、a, b, γ は、それぞれ P 波、S 波、Rayleigh 波の slowness、$\eta = \frac{a^2}{b^2}$、$H(t)$ は Heaviside 関数である。K, E, Π は、それぞれ第 1 種、第 2 種、第 3 種完全楕円積分で、

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$$
$$E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin^2\theta}$$
$$\Pi(c,k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{(1+c\sin^2\theta)\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$$

である。

2.3. レーザ超音波計測とソース同定 (T モード)

YAG レーザ発生装置 (LOTUS TII LS-2135) に 14J の pump energy を加え、アルミニウム合金製の円筒形供試体にパルスレーザを照射した (Fig.3)。パルスレーザを焦点距離 200mm のレンズを用いて絞り、供試体をレンズから 250mm の場所に設置した。また、照射の中心から 10mm、15mm、20mm 離れた 3 点 (計測点 M_1, M_2, M_3) での法線方向速度をレーザ干渉計 (小野測器 LV-1710 高周波計測用改良型) を用いて計測した。計測点 M_i における鉛直方向速度 $V_T^i(t)$ を Fig.4 に示す。なお、解析に用いたアルミニウム合金の諸量は以下の通りである [(4)]。

$$\rho = 2.70 \times 10^6 [\mathrm{g/m^3}]$$
$$c = 0.896 [\mathrm{J/deg \cdot g}]$$
$$\alpha = 2.313 \times 10^{-5} [1/\mathrm{deg}]$$
$$K = 203.9 [\mathrm{J/m \cdot sec \cdot deg}]$$
$$\kappa^2 = 8.432 \times 10^{-5} [\mathrm{m^2/sec}]$$
$$c_L = 6380 [\mathrm{m/sec}]$$
$$c_T = 3180 [\mathrm{m/sec}]$$

ここで、c_L, c_T は、それぞれ P 波速度、S 波速度。

パルスレーザの強度分布の分散 σ^2 と、供試体に吸収される熱量 q_{abs} をパラメータとし、式 (4) を時間微分して求めた表面速度の数値解 $v_{\mathrm{T}z}^i$ と計測値の差の 2 乗からなるコスト関数 J

$$J = \sum_{i=1}^{3} \sum_{m} \left\{ (V_{\mathrm{T}}^i(m\Delta t) - v_{\mathrm{T}z}^i(m\Delta t, \sigma^2, q_{\mathrm{abs}}) \right\}^2$$

を最小とするパラメータを決定した (ここで、Δt は時間ステップ幅)。$(\sigma^2, q_{\mathrm{abs}}) = (0.26\mathrm{mm}^2, 3.1\mathrm{mJ})$ の時、コストが最小となった。Fig.5 に、$(\sigma^2, q_{\mathrm{abs}}) = (0.26\mathrm{mm}^2, 3.1\mathrm{mJ})$ のときの $v_{\mathrm{T}z}^1$ と V_{T}^1 を示した。数値解と計測値は高い精度で一致している。この結果より、パルスレーザの強度分布と供試体に吸収される熱量がわかれば、パルスレーザ照射部の熱膨張による弾性波動場を数値的に表現する事が可能であると言えよう。

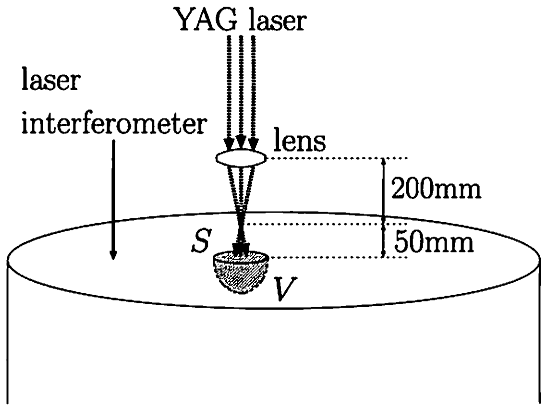

Fig. 3　レーザ超音波計測 (T モード)

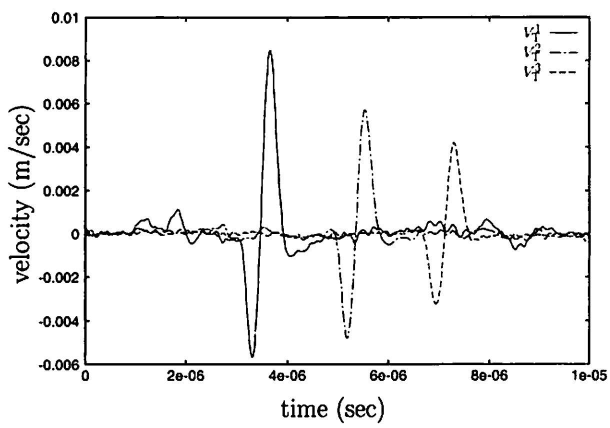

Fig. 4　法線方向速度波形 V_{T}^i (pump energy = 14J)

3. アブレーションによる弾性波動場の計算

3.1. Lamb の解を用いた弾性波動場の計算

強いエネルギーを持つパルスレーザを供試体に照射すると照射部にアブレーションが生じる。金属のアブレーションにより、供試体には鉛直方向の力が作用する。そのため、次の 3 次元半無限弾性領域 ($z \geq 0$) において、境界 $z = 0$ 上の領域 ∂D_{ab} に鉛直方向の力 $p(r,t)$ が与えられたときの弾性波動場を考える (Fig.6)。

$$\mu\Delta\boldsymbol{u} + (\lambda+\mu)\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{u}) = \rho\ddot{\boldsymbol{u}}$$
$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} \quad \text{for} \quad t \leq 0$$
$$\tau_{zz} = p, \ \tau_{zr} = 0 \quad \text{on} \quad \partial D_{\mathrm{ab}}, \ \text{for} \ t \geq 0$$
$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{0} \quad \text{on} \quad z = 0 \setminus \partial D_{\mathrm{ab}}, \ \text{for} \ t \geq 0$$

3 次元半無限領域 $z \geq 0$ において原点に z 方向に大きさ $H(t)$ の集中荷重が加えられたときの $z = 0$ 上の点での変位

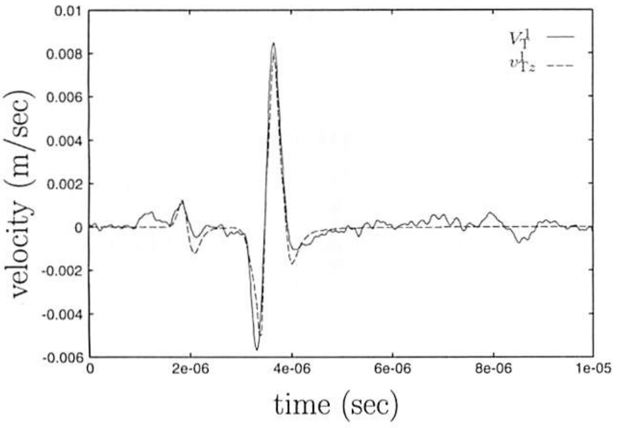

Fig. 5　法線方向速度波形 V_{T}^1, $v_{\mathrm{T}z}^1$ (pump energy = 14J)

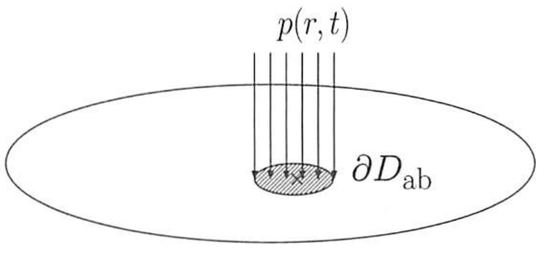

Fig. 6　アブレーションによる鉛直方向等価力

は Lamb の解 [5] $\boldsymbol{u}_{\mathrm{Lamb}}$ として解析的に与えられるため、u_z は次の積分方程式で表される。

$$u_z(r,0,t) = \int_{\partial D_{\mathrm{ab}}} \frac{\partial}{\partial t} u_{z_{\mathrm{Lamb}}}(r-r',t) * p(r',t)dr'$$

ここで、原点から距離 r の点での変位の法線成分 $u_{z_{\mathrm{Lamb}}}$ は次の様に表される (Fig.7)。

$\tau < \frac{a}{b}$ の時、

$$u_{z_{\mathrm{Lamb}}}(r,t) = 0$$

$\frac{a}{b} \leq \tau < 1$ の時、

$$\begin{aligned} u_{z_{\mathrm{Lamb}}}(r,t) &= -\frac{1}{2\pi\mu r}\left[\frac{1}{4(1-\eta)}\right. \\ &+ \sum_{i=1}^{2}\frac{K_i(1-2v_i^2)^2\left(\eta - v_i^2\right)^{1/2}}{(\tau^2 - v_i^2)^{1/2}} \\ &+ \left.\frac{K_3(1-2v_3^2)^2(v_3^2-\eta)^{1/2}}{(v_3^2-\tau^2)^{1/2}}\right] \end{aligned}$$

$1 \leq \tau$ の時、

$$\begin{aligned} u_{z_{\mathrm{Lamb}}}(r,t) &= -\frac{1}{\pi\mu r}\left[\frac{1}{4(1-\eta)}\right. \\ &+ \left.\frac{K_3(1-2v_3^2)^2(v_3^2-\eta)^{1/2}}{(v_3^2-\tau^2)^{1/2}}H(\gamma/b-\tau)\right] \end{aligned}$$

3.2. アブレーションによる鉛直方向等価力の逆解析

レーザ計測により計測点 M_i $(i = 1 \cdots n_m)$ で得られる供試体表面の鉛直方向速度 $V_{\mathrm{a}}^i(t)$ を用いて、アブレーションにより発生する鉛直方向等価力 $p(r,t)$ を決定する問題を考える。なお、実験においては、レンズによりレーザ光を絞り、空間的に強いエネルギーを照射している。このため、供試体表面の非常に小さな領域 (半径 0.3mm の円領域) でアブレーションが生じており、アブレーションが生じる供試体表面 ∂D_{ab} において、鉛直方向等価力は空間的に一定であると仮定する。このとき、$V_{\mathrm{a}}^i(t)$ は次式で表される。

$$V_{\mathrm{a}}^i(t) = \int_0^t k^i(t-s)p_{\mathrm{c}}(s)ds \tag{5}$$

ここで、$p_{\mathrm{c}}(t)$ は ∂D_{ab} において空間的に一定な鉛直方向等価力、$k^i(t)$ は

$$k^i(t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_{\partial D_{\mathrm{ab}}} u_{z_{\mathrm{Lamb}}}(r^i - r', t)dr'$$

である (r^i は計測点 M_i の原点からの距離)。式 (5) のような第 1 種 Abel 型の積分方程式を直接解く事は数値的に不安定であるので Tikhonov の方法論 [6] を用いて、複数の計測点での情報から $p_{\mathrm{c}}(t)$ を求める [7]。

3.3. レーザ超音波計測とソース同定 (A モード)

YAG レーザ発生装置 (LOTUS TII LS-2135) により、14J、14.5J の pump energy を加えアルミニウム合金製の円筒形供試体にパルスレーザを照射した (Fig.8)。強いエネルギーを持つパスルレーザの照射を実現するために、パルスレーザを焦点距離 200mm のレンズを用いて絞り、供試体をレンズの焦点距離に設置した。また、照射の中心から 10mm、15mm、20mm 離れた 3 点 (計測点 M_1, M_2, M_3) での法線方向速度をレーザ干渉計 (小野測器 LV-1710 高周波計測用改良型) を用いて計測した。各計測点で得られた法線方向速度波形 V_{a}^i を Fig.9, Fig.10 に示す。また、比較のため Fig.11 に、pump energy が 14J の時の V_{a}^1 と、Fig.3 で示した T モードのレーザ超音波計測における V_{T}^1 をプロットした。T モードでは、余り見られなかった S 波の挙動が、A モードでは大きく出ている等、明らかに速度波形が異なっている事がわかる。

計測速度波形から式 (5) を用いて復元された鉛直方向等価力 $p_{\mathrm{c}}(t)$ を Fig.12 に示す。パルスレーザの pump energy が大きなほど、鉛直方向等価力も大きな値となっている。Fig.12 に示された復元された鉛直方向等価力を境界条件とした順問題を解く事で、アブレーションによる弾性波動場を数値的に

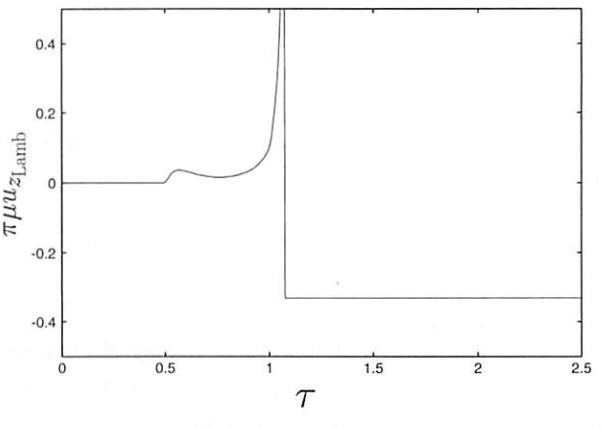

Fig. 7　Lamb の解: $u_{z_{\mathrm{Lamb}}}$ (poisson ratio: $\nu = 0.3347$)

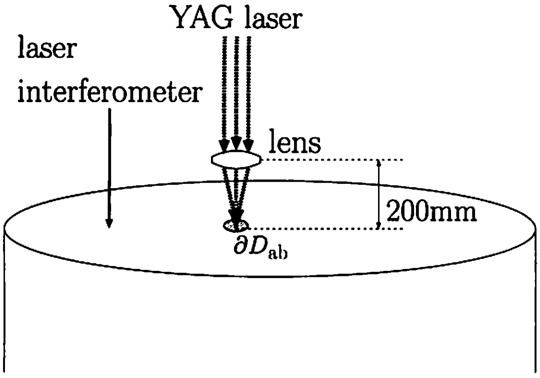

Fig. 8　レーザ超音波計測 (A モード)

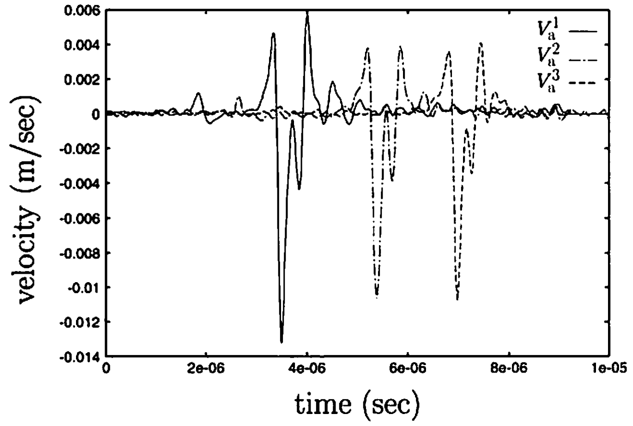

Fig. 9　法線方向速度波形 V_a^i (pump energy = 14J)

表現できる。Fig.13 に順問題を解き得られた計測点 M^1 での法線方向速度 v_{az}^1 と計測値 V_a^1 を示した。

4. 結論

レーザ超音波非破壊試験等で用いられるパルスレーザから励起される超音波を定量的に同定した。Fig.11 に示した様に、熱膨張による励起超音波 (T モード) と、アブレーションによる励起超音波 (A モード) は波形が大きく異なる。本研究では、それぞれの場合について時間域の 3 次元動弾性問題の Green 関数を用いた逆解析を行い、ソースを同定した。復元されたソースにより、パルスレーザの照射による弾性波動場を定量的に表現する事が可能となった。なお、本研究の結果を用いて、定量的なレーザ超音波非破壊評価を行う事が今後の課題として挙げられる。

謝辞: レーザ超音波計測に御協力いただいた京都大学大学院工学研究科社会基盤工学専攻 塚田和彦助教授、波多野浩司氏に感謝致します。

参考文献

(1) L.R.F. Rose: Point-source representation for laser-genetated ultrasound, *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol.75, No.3, pp.723-732, 1984.

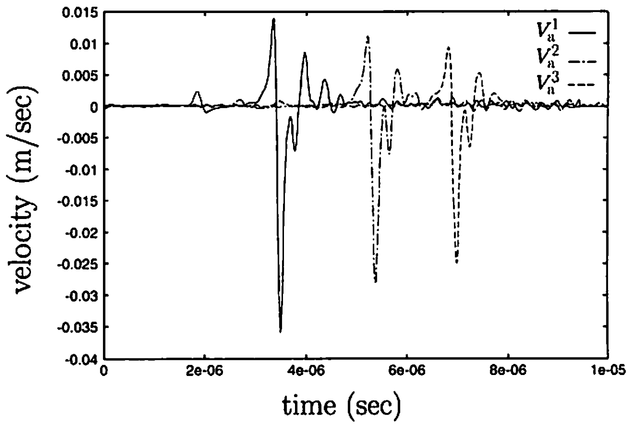

Fig. 10　法線方向速度波形 V_a^i (pump energy = 14.5J)

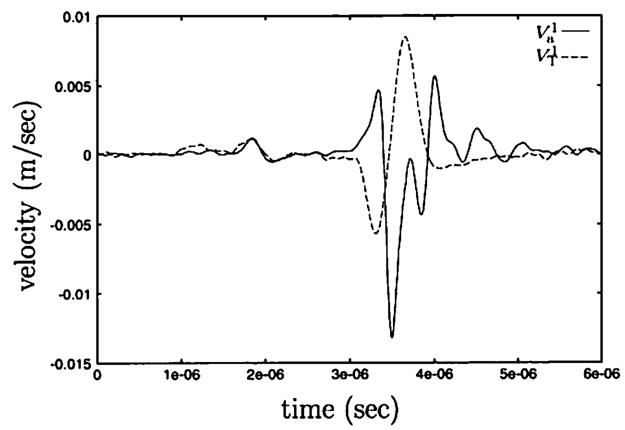

Fig. 11　法線方向速度波形 V_a^1, V_T^1 (pump energy = 14J)

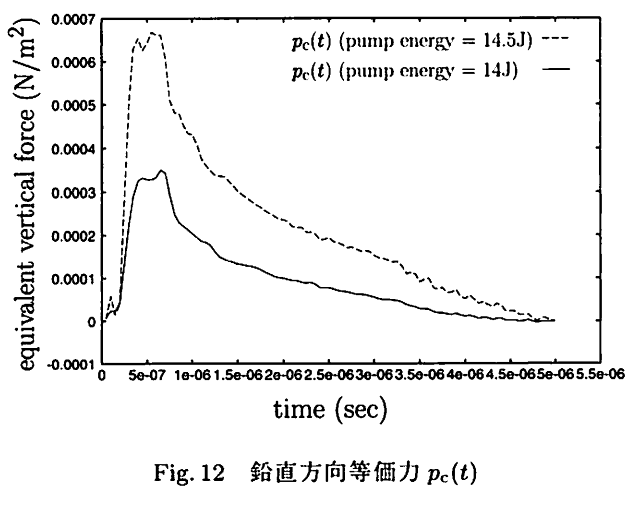

Fig. 12　鉛直方向等価力 $p_c(t)$

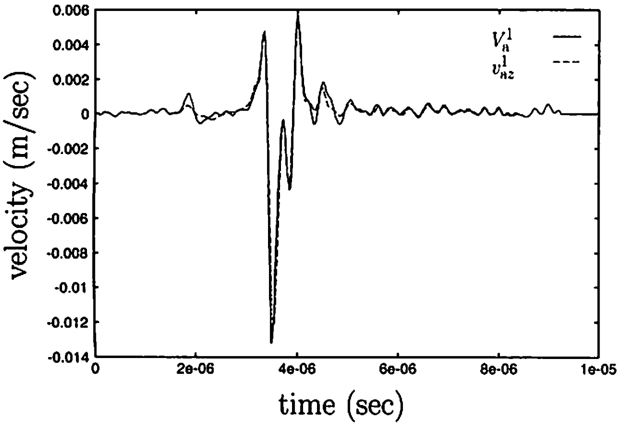

Fig. 13 法線方向速度波形 V_a^1, v_{az}^1 (pump energy = 14J)

(2) F. Schubert, A. Peiffer, B. Köhler and T. Ssanderson: The elastodynamic finite integration technique for waves in cylindrical geometries, *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol.104, No.5, pp.2604-2614, 1998.

(3) 大澤敏彦, 小保方富夫: レーザ計測, 裳華房, 1994.

(4) 玉虫文一他: 理化学事典 第3版, 岩波書店, 1971.

(5) C.A. Erigen and E.S. Suhubi: *Elastodynamics, Vol.II*, Academic Press, New York, 1975.

(6) A.N. Tikhonov and V.I. Arsenin: *Solution of Ill-Posed Problems*, Halsted Press, 1977.

(7) H. Yoshikawa, N. Nishimura and S. Kobayashi: On the determination of ultrasonic waves emitted from transducers using laser measurements with applications to defect determination problems, 土木学会応用力学論文集, vol.4, pp.145–152, 2001.