

二重相反法を用いたメッシュレス局所境界積分方程式法による はり・板の曲げ振動解析

ANALYSIS OF FLEXURAL VIBRATIONS OF BEAMS AND PLATES BY MESHLESS LOCAL BOUNDARY INTEGRAL EQUATION METHOD USING DUAL RECIPROCITY METHOD

神谷 恵輔¹⁾

Keisuke KAMIYA

1) 名古屋大学大学院工学研究科機械理工学専攻 (〒464-8603 名古屋市千種区不老町, E-mail: kamiya@nuem.nagoya-u.ac.jp)

The local boundary integral equation (LBIE) method is one of the meshless methods. In this method, one transforms the governing equation of the system into the local boundary integral equations, and solves the equations by approximating the unknown quantities by using appropriate interpolation functions. For systems whose governing equations are written in the form of the Laplace equation, the local boundary integral equations do not contain domain integrals. However, for systems whose governing equations are not written in the form of the Laplace equation, such as vibratory systems, the local domain integral terms remain. This paper treats a problem of flexural vibration analysis of beams and plates, and presents a method which transforms the local domain integral terms into the local boundary integral terms by using the dual reciprocity method.

Key Words: Meshless LBIE method, Dual Reciprocity Method, Vibration Analysis, Flexural Vibration of Beams and Plates

1. はじめに

現在、構造解析ツールとして有限要素法 (FEM) が広く用いられている。FEM ではメッシュを作成することが必要とされる。メッシュ形状は解析精度に影響を与えるため、精度良い解析結果を得るためのメッシュの作成は重要な問題であるが、これは経験と時間を要する作業である。このため、メッシュを作成せずに解析を行うメッシュレス法に関する研究が近年盛んに行われている。

メッシュレス法の一つとして、局所境界積分方程式 (LBIE) に基づく手法がある⁽¹⁾。この手法は、対象とする系の支配微分方程式を局所領域における積分方程式に変換し、解析を行うものである。この手法では、系の支配微分方程式がラプラス方程式の形で与えられる場合には、局所領域の境界上における積分を計算するだけでよいが、例えば振動問題のように、系の支配微分方程式がラプラス方程式の形で書けない場合には、局所領域における領域積分を計算する必要が生じる。本論文では、はりおよび板の曲げ振動問題を取り上げ、このような場合に、二重相反法を用いることで局所領域における領域積分を境界積分に置き換えて解析を行う方法を示す。

板の曲げ振動の場合、境界条件の取扱いが場合によっては困難となる。Sladek らは、文献⁽²⁾で LBIE 法による板の曲

げ振動の解析手法を示しているが、そこでは固定支持あるいは単純支持の場合のみを取り上げている。本論文では、任意の境界条件に対して解析が可能となるような定式化を行う。最後に本研究で示した手法による解析例をいくつか示す。

2. 定式化

板の曲げ振動を考える。この板の自由振動あるいは境界部での変位加振による強制振動の解析の問題を取り上げ、定式化を行う。なお、説明の簡単のため、以下では減衰力および板の領域内での加振力は作用しないとする。

2.1. 局所積分方程式の導出

面密度 ρ 、曲げ剛性 D の板 Ω を考える。板の面内に、原点および直交する二つの座標軸 x_1 軸、 x_2 軸を定め、原点からの位置ベクトルを \mathbf{x} とする。板のたわみを $u(\mathbf{x}, t)$ あるいは単に u とすれば、この板の曲げ振動に関する運動方程式は

$$\rho \ddot{u} + \nabla^2 (D \nabla^2 u) - \zeta \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left(D \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left(D \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \right) \right\} + 2\zeta \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \left(D \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \right) = 0 \quad (1)$$

となる。ここで ζ は、 ν をポアソン比として $\zeta = 1 - \nu$ で与

えられる定数である。

ここで、式

$$\begin{aligned} F_{11}(\mathbf{x}, t) &= -D \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \\ F_{22}(\mathbf{x}, t) &= -D \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \\ F_{12}(\mathbf{x}, t) &= -D \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \end{aligned} \quad (2)$$

で定義される量 $F_{11}(\mathbf{x}, t)$, $F_{22}(\mathbf{x}, t)$, $F_{12}(\mathbf{x}, t)$ を導入する。以下、簡単のためこれらを単に F_{11} , F_{22} , F_{12} と書く。このようにすれば式 (1) は

$$\rho \ddot{u} - \nabla^2 (F_{11} + F_{22}) + \zeta \left(\frac{\partial^2 F_{22}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 F_{11}}{\partial x_2^2} - 2 \frac{\partial^2 F_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} \right) = 0 \quad (3)$$

と書き直すことができる。

式 (3) および (2) を、局所境界積分方程式と呼ばれる方程式に変換することを考える。このための準備として、微分方程式

$$\frac{\partial^2 v(\mathbf{x})}{\partial x_1^2} + \delta(x_1 - y_1) = 0, \quad \frac{\partial^2 v(\mathbf{x})}{\partial x_2^2} + \delta(x_2 - y_2) = 0 \quad (4)$$

を考える。ここで $\delta(\cdot)$ はディラックのデルタ関数である。この方程式は、解の一つとして

$$v(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2}(|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + c) \quad (5)$$

をもつことは容易に確かめられる。ここで c は任意の定数である。式 (5) の $v(\mathbf{x})$ は y_1, y_2 の関数でもあるので、以降、 $v(\mathbf{x})$ を $v(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ と書く。ここで \mathbf{y} は点 (y_1, y_2) を表すベクトルである。なお、誤解のおそれのないときは、標記の簡単のため単に v と書く。式 (5) の v を用いることにより、後述のようにして、任意の境界条件を取り扱うことが可能となる。

局所境界積分方程式を導くためのもう一つの準備として、局所領域の定義を行う。図 1 に示すように、いま考えている板の領域 Ω 上あるいはその周囲を含めた領域に局所領域 Ω_L を定める。この局所領域 Ω_L と全体領域 Ω との共通領域を Ω_s とし、 Ω_s の境界を $\partial\Omega_s$ とする。局所領域 Ω_L を Ω の内部に存在するようにとった場合には、 Ω_L と Ω_s は一致する。

以上の準備のもとに、局所境界積分方程式を導くことを考える。式 (5) の v を式 (3) および (2) につけて、上で定義した

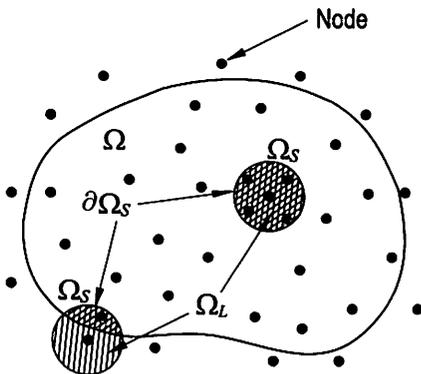


Fig. 1 Global domain Ω , local domain Ω_L and subdomain Ω_s

領域 Ω_s 上で x_1, x_2 に関して積分を行う。このとき、 Ω_s 上では板の面密度 ρ および曲げ剛性 D は定数と見なし、適当に部分積分を行えば

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_s} \{ \rho \ddot{u} v + (F_{11} + F_{22}) (\delta(x_1 - y_1) + \delta(x_2 - y_2)) \\ & \quad - \zeta (F_{11} \delta(x_2 - y_2) + F_{22} \delta(x_1 - y_1)) \} d\Omega \\ & + \int_{\partial\Omega_s} \{ (F_{11} + F_{22}) \nabla v \cdot \mathbf{n} - \zeta (F_{22} \nabla_1 v \cdot \mathbf{n} + F_{11} \nabla_2 v \cdot \mathbf{n}) \} d\Gamma \\ & - \int_{\partial\Omega_s} \{ \nabla (F_{11} + F_{22}) \cdot \mathbf{n} v - \zeta (\nabla_1 F_{22} \cdot \mathbf{n} + \nabla_2 F_{11} \cdot \mathbf{n}) v \\ & \quad + \zeta (\nabla_s F_{12} \cdot \mathbf{n} v - F_{12} \nabla_s v \cdot \mathbf{n}) \} d\Gamma = 0 \\ & \int_{\Omega_s} (F_{11} v - D u \delta(x_1 - y_1)) d\Omega \\ & - \int_{\partial\Omega_s} D (u \nabla_1 v \cdot \mathbf{n} - \nabla_1 u \cdot \mathbf{n} v) d\Gamma = 0 \\ & \int_{\Omega_s} (F_{22} v - D u \delta(x_2 - y_2)) d\Omega \\ & - \int_{\partial\Omega_s} D (u \nabla_2 v \cdot \mathbf{n} - \nabla_2 u \cdot \mathbf{n} v) d\Gamma = 0 \\ & \int_{\Omega_s} F_{12} v d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega_s} D (\nabla_s u \cdot \mathbf{n} v - u \nabla_s v \cdot \mathbf{n}) d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

を得る。ここで \mathbf{n} は境界 $\partial\Omega_s$ における外向き単位法線ベクトルであり、 \cdot は内積を表す。また $\nabla_1, \nabla_2, \nabla_s$ は、 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ をそれぞれ x_1 方向、 x_2 方向の単位ベクトルとして、

$$\begin{aligned} \nabla_1 &= \mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \nabla_2 = \mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \nabla_s &= \mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_2} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \end{aligned} \quad (7)$$

で定義される演算子とする。以下、式 (6) を局所境界積分方程式と呼ぶ。式 (6) の $\delta(x_1 - y_1)$ および $\delta(x_2 - y_2)$ を含む項の積分は、領域 Ω_s において、それぞれ直線 $x_1 = y_1$ および $x_2 = y_2$ に沿った線積分となることに注意されたい。

通常の LBIE 法では v として、式 (4) ではなく、式

$$\nabla^2 v + \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = 0 \quad (8)$$

を満たす関数を用いられる。上式の左辺第 2 項は 2 次元領域におけるディラックのデルタ関数を意味する。通常の LBIE 法で得られる局所境界積分方程式と式 (6) を比較すると、第 1, 2, 3 式の左辺第 1 項の被積分関数のうち $\delta(x_1 - y_1)$ および $\delta(x_2 - y_2)$ を含む項の形が異なっている。Sladek らは、文献 (2) で、板の曲げ振動解析を LBIE 法により行っているが、そこでは式 (8) を満たす関数を用いられているため、単純支持あるいは固定支持された板のみが取り上げられている。

2.2. 局所境界積分方程式の離散化

次に、局所境界積分方程式 (6) を離散化することを考える。このため、図 1 に示すように、領域 Ω 内およびその周囲に N 個の節点を配置し、各節点において未知量を四つ定める。以下、これら未知量を節点値と呼び、 i 番目の節点における節点値をそれぞれ $\hat{u}_i(t)$, $\hat{F}_{11i}(t)$, $\hat{F}_{22i}(t)$, $\hat{F}_{12i}(t)$ と書く。領域内の板のたわみ u および式 (2) で定義した F_{11} , F_{22} , F_{12}

を、次式で定義される \hat{u} , \hat{F}_{11} , \hat{F}_{22} , \hat{F}_{12} で近似する。

$$\begin{aligned}\hat{u} &= \sum_{i=1}^N \phi_i(\mathbf{x}) \hat{u}_i(t) = \phi(\mathbf{x})^T \hat{\mathbf{u}}(t) \\ \hat{F}_{11} &= \sum_{i=1}^N \phi_i(\mathbf{x}) \hat{F}_{11i}(t) = \phi(\mathbf{x})^T \hat{\mathbf{F}}_{11}(t) \\ \hat{F}_{22} &= \sum_{i=1}^N \phi_i(\mathbf{x}) \hat{F}_{22i}(t) = \phi(\mathbf{x})^T \hat{\mathbf{F}}_{22}(t) \\ \hat{F}_{12} &= \sum_{i=1}^N \phi_i(\mathbf{x}) \hat{F}_{12i}(t) = \phi(\mathbf{x})^T \hat{\mathbf{F}}_{12}(t)\end{aligned}\quad (9)$$

ここで $\phi(\mathbf{x})$, $\hat{\mathbf{u}}(t)$, $\hat{\mathbf{F}}_{11}(t)$, $\hat{\mathbf{F}}_{22}(t)$, $\hat{\mathbf{F}}_{12}(t)$ はそれぞれ形状関数および節点値 $\hat{u}_i(t)$, $\hat{F}_{11i}(t)$, $\hat{F}_{22i}(t)$, $\hat{F}_{12i}(t)$ を並べてできるベクトルである。形状関数の定め方は次節で述べる。式(9)の \hat{u} , \hat{F}_{11} , \hat{F}_{22} , \hat{F}_{12} を式(6)の u , F_{11} , F_{22} , F_{12} へそれぞれ代入し、整理すれば

$$\begin{aligned}m^T \ddot{\mathbf{u}}(t) + k_{01}^T \hat{\mathbf{F}}_{11}(t) + k_{02}^T \hat{\mathbf{F}}_{22}(t) + k_{03}^T \hat{\mathbf{F}}_{12}(t) &= e_0 \\ k_{11}^T \hat{\mathbf{F}}_{11}(t) - k_{12}^T \hat{\mathbf{u}}(t) &= e_1 \\ k_{21}^T \hat{\mathbf{F}}_{22}(t) - k_{22}^T \hat{\mathbf{u}}(t) &= e_2 \\ k_{31}^T \hat{\mathbf{F}}_{12}(t) - k_{32}^T \hat{\mathbf{u}}(t) &= e_3\end{aligned}\quad (10)$$

を得る。ここで、右辺の e_0, e_1, e_2, e_3 は、 $u, F_{11}, F_{22}, F_{12}$ を $\hat{u}, \hat{F}_{11}, \hat{F}_{22}, \hat{F}_{12}$ で近似したことによる残差である。また左辺の $m, k_{01}, k_{02}, k_{03}, k_{11}, k_{12}, k_{21}, k_{22}, k_{31}, k_{32}$ は次式で与えられるベクトルである。

$$\begin{aligned}m &= \int_{\Omega_s} \rho \phi(\mathbf{x}) v d\Omega \\ k_{01} &= \int_{\Omega_s} \phi(\mathbf{x}) \{ \delta(x_1 - y_1) + (1 - \zeta) \delta(x_2 - y_2) \} d\Omega \\ &\quad + \int_{\partial\Omega_s} \phi(\mathbf{x}) (\nabla v - \zeta \nabla_2 v) \cdot \mathbf{n} d\Gamma \\ &\quad - \int_{\partial\Omega_s} (D\phi(\mathbf{x}) - \zeta D_2\phi(\mathbf{x})) n v d\Gamma \\ k_{02} &= \int_{\Omega_s} \phi(\mathbf{x}) \{ (1 - \zeta) \delta(x_1 - y_1) + \delta(x_2 - y_2) \} d\Omega \\ &\quad + \int_{\partial\Omega_s} \phi(\mathbf{x}) (\nabla v - \zeta \nabla_1 v) \cdot \mathbf{n} d\Gamma \\ &\quad - \int_{\partial\Omega_s} (D\phi(\mathbf{x}) - \zeta D_1\phi(\mathbf{x})) n v d\Gamma \\ k_{03} &= \int_{\partial\Omega_s} \zeta \{ D_s \phi(\mathbf{x}) n v - \phi(\mathbf{x}) \nabla_s v \cdot \mathbf{n} \} d\Gamma \\ k_{11} = k_{21} = k_{31} &= \int_{\Omega_s} \phi v d\Omega \\ k_{12} &= \int_{\Omega_s} D\phi(\mathbf{x}) \delta(x_1 - y_1) d\Omega \\ &\quad + \int_{\partial\Omega_s} D \{ \phi(\mathbf{x}) \nabla_1 v \cdot \mathbf{n} - D_1\phi(\mathbf{x}) n v \} d\Gamma \\ k_{22} &= \int_{\Omega_s} D\phi(\mathbf{x}) \delta(x_2 - y_2) d\Omega \\ &\quad + \int_{\partial\Omega_s} D \{ \phi(\mathbf{x}) \nabla_2 v \cdot \mathbf{n} - D_2\phi(\mathbf{x}) n v \} d\Gamma \\ k_{32} &= \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega_s} D \{ \phi(\mathbf{x}) \nabla_s v \cdot \mathbf{n} - D_s \phi(\mathbf{x}) n v \} d\Gamma\end{aligned}\quad (11)$$

ここで D, D_1, D_2, D_s は演算子で、ベクトル関数 $\mathbf{f} = \{f_1, f_2, \dots\}^T$ に対して、 $D\mathbf{f}$ は \mathbf{f} のヤコビアンを与え、他は以下の式で定義される行列を与えるものである。

$$D_1 \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & 0 \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix}, D_2 \mathbf{f} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ 0 & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix}, D_s \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix}\quad (12)$$

2.3. 形状関数の定め方

式(11)の係数のうち、 $m, k_{11}, k_{21}, k_{31}$ を計算するためには、領域 Ω_s 上での領域積分が必要である。一方、他の係数を計算するためには Ω_s の境界あるいはその領域内の線分に沿った線積分の計算でよい。領域積分の計算が必要な係数を、境界あるいは領域内の線分に沿った線積分で求めることができれば、類似のアルゴリズムですべての係数を計算でき、便利である。また領域 Ω_s の境界の一部が全体領域 Ω の境界となっている場合、 Ω_s の形状が複雑になる可能性がある。このような場合、領域積分に比べると線積分のほうが計算を行いやすくなる。

ここでは、二重相反法⁽³⁾を用いて領域積分を線積分に置き換えることを考える。このため、形状関数 $\phi_i(\mathbf{x})$ を、

$$\nabla^2 \Phi_i(\mathbf{x}) = \phi_i(\mathbf{x})\quad (13)$$

を満たす $\Phi_i(\mathbf{x})$ が求められるように選ぶ。このようにすれば、係数 $m, k_{11}, k_{21}, k_{31}$ を与える式は、

$$\begin{aligned}m &= - \int_{\Omega_s} \rho \Phi(\mathbf{x}) (\delta(x_1 - y_1) + \delta(x_2 - y_2)) d\Omega \\ &\quad + \int_{\partial\Omega_s} \rho (D\Phi(\mathbf{x}) n v - \Phi(\mathbf{x}) \nabla v \cdot \mathbf{n}) d\Gamma \\ k_{11} = k_{21} = k_{31} &= - \int_{\Omega_s} \Phi(\mathbf{x}) (\delta(x_1 - y_1) + \delta(x_2 - y_2)) d\Omega \\ &\quad + \int_{\partial\Omega_s} (D\Phi(\mathbf{x}) n v - \Phi(\mathbf{x}) \nabla v \cdot \mathbf{n}) d\Gamma\end{aligned}\quad (14)$$

と変換できる。ここで Φ は、式(13)を満たす $\Phi_i(\mathbf{x})$ を並べてできるベクトルである。式(14)の領域積分は、前述のように実際には線積分であるので、上式により、全ての係数が $\partial\Omega_s$ あるいは Ω_s 内の線分に沿った線積分で求められることとなった。なお、式(5)の関数 v は特異関数ではないため、式(11)および(14)の計算は何ら問題なく行うことができる。

式(11)および(14)における $v(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ の \mathbf{y} に各節点の座標値を代入して得られる式(10)を、行列とベクトルを用いて整理すれば

$$\begin{aligned}M \ddot{\mathbf{u}}(t) + K_0 \hat{\mathbf{F}}(t) &= e_u \\ K_1 \hat{\mathbf{F}}(t) - K_2 \hat{\mathbf{u}}(t) &= e_F\end{aligned}\quad (15)$$

の形の式を得る。ここで $\hat{\mathbf{F}}(t)$ は $\hat{\mathbf{F}}_{11}(t), \hat{\mathbf{F}}_{22}(t), \hat{\mathbf{F}}_{12}(t)$ を並べてできるベクトルであり、 M, K_0, K_1, K_2 はそれぞれ

れ、 \mathbf{y} を各節点の座標値としたときの \mathbf{m} , \mathbf{k}_{0i} ($i = 1, 2, 3$), \mathbf{k}_{i1} ($i = 1, 2, 3$), \mathbf{k}_{i2} ($i = 1, 2, 3$) を適当に並べてできる行列、 \mathbf{e}_u , \mathbf{e}_F は、 \mathbf{y} を各節点の座標値としたときの \mathbf{e}_0 および \mathbf{e}_i ($i = 1, 2, 3$) を並べてできるベクトルである。

以上では、板に作用する減衰力および加振力を考慮していないが、減衰力としてたわみ速度に比例する粘性減衰力が作用する場合には、運動方程式における減衰力項は、上記の慣性力項と全く同様に取り扱うことができる。外部から加振力が作用する場合には、加振力の分布を、式(13)を満たす関数 $\phi_i(\mathbf{x})$ で近似することにより、上記と同様にして領域積分を線積分に変換できる。

2.4. 境界条件の指定方法

次に、式(9)の \hat{u} , \hat{F}_{11} , \hat{F}_{22} , \hat{F}_{12} が境界条件を満たすようにするための方法について考える。いま用いている形状関数の性質から、一般に、節点位置での未知量の値は節点値とは一致しない、このため、有限要素法のように、境界上あるいは拘束点上の節点の節点値を指定の値にする方法では境界条件・拘束条件を満たすことができない。上記の問題を解決するための手法としてペナルティ法や修正選点法がある(4, 5, 6, 7)。また、Ouatuatiらは特異値分解を利用することにより、選点的に境界条件・拘束条件を満足させる方法を提案している(8)。ただし、そこでは拘束量を零とする場合のみが考えられている。ここではOuatuatiらの方法を一般化し、拘束量を零とは限定せず、例えば境界部で変位加振を受けるような場合にも適用な方法を示す。なお、説明の簡単のため、境界部はばね等で支持されておらず、たわみおよび傾きに関する幾何学的境界条件とせん断力および曲げモーメントに関する自然境界条件は独立に取り扱えんとする。

幾何学的境界条件・拘束条件として、例えば点 $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ でたわみを指定値 $U(t)$ に拘束する場合、条件式は

$$u(\mathbf{x}_0, t) = U(t) \quad (16)$$

と書ける。また、 x_1 軸に対する傾き角を指定値 $\Theta(t)$ に拘束する場合、条件式は

$$\frac{\partial}{\partial x_1} u(\mathbf{x}_0, t) = \Theta(t) \quad (17)$$

と書ける。さらに、2つの点 \mathbf{x}_A , \mathbf{x}_B におけるたわみを等しくするように拘束する場合、条件式は

$$u(\mathbf{x}_A, t) - u(\mathbf{x}_B, t) = 0 \quad (18)$$

と書ける。ここでは、このような拘束条件を選点的に N_g 個の点 \mathbf{x}_i ($i = 1, 2, \dots, N_g$) で満足させるとする。式(16), (17), (18) のような拘束条件式の u に、式(9)の \hat{u} を代入し、整理すれば

$$\mathbf{C}_g \hat{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{q}_g(t) \quad (19)$$

の形の式を得る。ここで \mathbf{C}_g は拘束条件から決まる定数行列であり、 $\mathbf{q}_g(t)$ は拘束の指定値を並べてできるベクトルである。例えば、全ての拘束点でたわみを零とする場合には $\mathbf{q}_g(t)$ は零ベクトルとなる。また、ある拘束点で、調和変位加振を与える場合には、 $\mathbf{q}_g(t)$ の対応する成分が調和関数となる。

節点値 $\hat{\mathbf{u}}(t)$ が式(19)を満たすようにすることを考える。このため式(19)の係数行列 \mathbf{C}_g を特異値分解する。このようにすれば \mathbf{C}_g は

$$\mathbf{C}_g = \mathbf{U}_g [\Delta_g \ \mathbf{O}] \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{g1}^T \\ \mathbf{V}_{g2}^T \end{bmatrix} \quad (20)$$

と書ける。ここで \mathbf{U}_g , \mathbf{V}_{g1} , \mathbf{V}_{g2} は直交行列、 Δ_g は零以外の特異値からなる対角行列、 \mathbf{O} は零行列である。上式に現れる行列 \mathbf{U}_g , Δ_g , \mathbf{V}_{g1} , \mathbf{V}_{g2} および拘束の指定値 $\mathbf{q}_g(t)$ を用いて、次式で定義される変数変換を考える。

$$\hat{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{V}_{g2} \bar{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{V}_{g1} \Delta_g^{-1} \mathbf{U}_g^T \mathbf{q}_g(t) \quad (21)$$

上式で与えられる $\hat{\mathbf{u}}(t)$ は、 Δ_g の次数が N_g と等しいとき、 $\bar{\mathbf{u}}(t)$ の値によらずに式(19)を満たすことは容易に示される。

自然境界条件に対しても、上記の幾何学的境界条件と同様に、まず、式(19)に対応する式を、 \hat{F}_{11} , \hat{F}_{22} , \hat{F}_{12} を用いて記述する。例えば、単純支持に対しては曲げモーメントが零であるので、境界が x_2 軸と平行な場合、条件式は

$$\hat{F}_{11} + \nu \hat{F}_{22} = 0 \quad (22)$$

と書ける。このような条件式を、節点値 $\hat{\mathbf{F}}(t)$ に関する方程式の形で行列とベクトルを用いて表現すれば

$$\mathbf{C}_n \hat{\mathbf{F}}(t) = \mathbf{q}_n(t) \quad (23)$$

と書ける。上式の係数行列 \mathbf{C}_n を、

$$\mathbf{C}_n = \mathbf{U}_n [\Delta_n \ \mathbf{O}] \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{n1}^T \\ \mathbf{V}_{n2}^T \end{bmatrix} \quad (24)$$

の形に特異値分解し、これにより得られる行列を用いて式(21)と同様の変数変換

$$\hat{\mathbf{F}}(t) = \mathbf{V}_{n2} \bar{\mathbf{F}}(t) + \mathbf{V}_{n1} \Delta_n^{-1} \mathbf{U}_n^T \mathbf{q}_n(t) \quad (25)$$

を行う。

式(21)および(25)を式(15)に代入する。代入後の第1式および第2式をそれぞれ $\bar{\mathbf{u}}(t)$, $\bar{\mathbf{F}}(t)$ に関する方程式と見なし、それぞれの残差の二乗和を最小とるように $\bar{\mathbf{u}}(t)$, $\bar{\mathbf{F}}(t)$ に関する方程式を改めて導けば

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{M}} \ddot{\bar{\mathbf{u}}}(t) + \bar{\mathbf{K}}_0 \bar{\mathbf{F}}(t) &= \bar{\mathbf{q}}_0(t) \\ \bar{\mathbf{K}}_1 \bar{\mathbf{F}}(t) - \bar{\mathbf{K}}_2 \bar{\mathbf{u}}(t) &= \bar{\mathbf{q}}_1(t) \end{aligned} \quad (26)$$

を得る。ここで $\bar{\mathbf{M}}$, $\bar{\mathbf{K}}_0$, $\bar{\mathbf{K}}_1$, $\bar{\mathbf{K}}_2$ は

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{M}} &= (\mathbf{M} \mathbf{V}_{g2})^T \mathbf{M} \mathbf{V}_{g2}, \quad \bar{\mathbf{K}}_0 = (\mathbf{M} \mathbf{V}_{g2})^T \mathbf{K}_0 \mathbf{V}_{n2} \\ \bar{\mathbf{K}}_1 &= (\mathbf{K}_1 \mathbf{V}_{n2})^T (\mathbf{K}_1 \mathbf{V}_{n2}), \quad \bar{\mathbf{K}}_2 = (\mathbf{K}_1 \mathbf{V}_{n2})^T (\mathbf{K}_2 \mathbf{V}_{g2}) \end{aligned} \quad (27)$$

で与えられる行列である。ベクトル $\bar{\mathbf{q}}_0$, $\bar{\mathbf{q}}_1$ を与える式は冗長であるのでここでは省略する。式(26)の第2式を $\bar{\mathbf{F}}$ について解き、得られた結果を第1式に代入すれば $\bar{\mathbf{u}}$ に関する微分方程式となる。これを解いて $\bar{\mathbf{u}}$ を求め、得られた $\bar{\mathbf{u}}$ を式(21)に代入し、さらに得られた $\hat{\mathbf{u}}$ を式(9)の第1式へ代

入することで、指定の選点において境界条件・拘束条件を満足する $\hat{u}(x, t)$ を得ることができる。

上記では、境界部はばね等で支持されておらず、幾何学的境界条件と自然境界条件は独立に取り扱うことができるとした。しかし、例えば x_2 軸に平行な境界部が回転ばねで支持されている場合には、曲げモーメントと傾きの間で

$$\hat{F}_{11} + \nu \hat{F}_{22} = \pm k \frac{\partial \hat{u}}{\partial x_1} \quad (28)$$

が成立しなければならない。ここで k は回転ばねのばね定数であり、右辺の復号は、境界の位置によってどちらになるかが決まる。このような場合には、式 (19) あるいは (23) を、 $\hat{u}(t)$ 、 $\hat{F}(t)$ の両者に関する式として表し、上記と同様に特異値分解を行い、得られた行列を用いて変数変換を行えばよい。

ここで示した境界条件・拘束条件の指定方法では、選点は必ずしも節点でなくてもよいことに注意されたい。このため、全体領域 Ω の境界上に節点を取る必要はない。

ここでは、板を取り上げて手法の説明をしたが、これははりの曲げ振動問題に対しても、式 (2) の F_{22} 、 F_{12} および x_2 での微分を零とおけば、そのまま適用可能である。

3. 解析例

以下、解析例をいくつか示す。なお、精度の検討は厳密解との相対的な比較で行う。このため、丸め誤差を除けば物性値や寸法の値は解析精度には無関係である。紙数の制約もあるのでここでは使用した物性値等の記述は省略する。

3.1. 両端単純支持はりの自由振動解析

はじめに、図2に示す両端が単純支持されたはりを取り上げ、このはりの自由振動解析を行う。節点は、図2に示すように、はりの両端から、はりの長さの10%だけ外側に離れた位置にまず二つ配置し、次にはりの両端から、はりの長さの1%だけ内側の位置に二つ配置し、この間を等分割するように全部で N 個配置する。形状関数 $\phi_i(x)$ としては、 i 番目

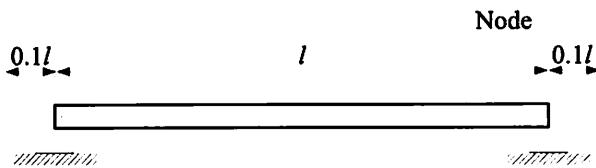


Fig. 2 Simply supported beam

Table 1 Errors in % of the obtained natural frequencies for the simply supported beam

N	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
8	0.086	0.293	0.533	2.429	91.696
9	0.061	0.211	0.373	0.654	2.930
10	0.045	0.164	0.291	0.374	0.797
11	0.035	0.128	0.243	0.310	0.362
12	0.028	0.104	0.204	0.283	0.300

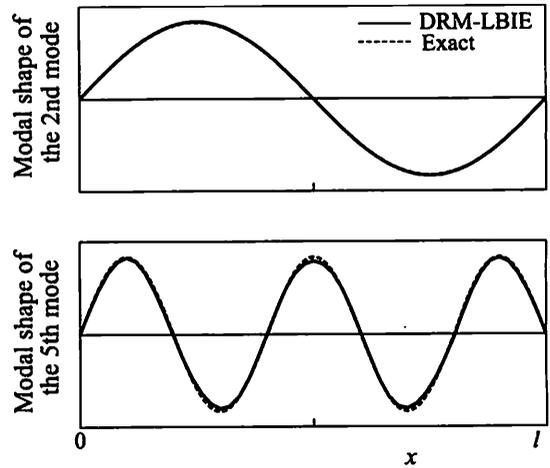


Fig. 3 Modal shapes of the 2nd and 5th modes

の節点の位置を x_{Ni} として

$$\phi_i(x) = |x - x_{Ni}|^3 \quad (29)$$

で与えられる関数を用いる。また局所領域としては、はりの内部の節点に対しては節点を中心としてその左右に節点間距離の1.5倍の長さの領域をとり、はりの外部の節点に対しては節点からはりの内部に向かう方向にはりの長さの15%領域をとる。なお、局所領域の大きさを変化させると解析精度に変化が見られたが、節点数が十分多い場合には、精度の変化は比較的小さいものであった。境界条件としては、両端で変位および曲げモーメントを零とした。式 (5) における c は節点から局所領域の境界までの距離とした。節点数 N を 8, 9, 10, 11, 12 とした場合に得られた第1モードから第5モードまでの固有振動数 ω_n , ($n = 1, 2, \dots, 5$) の、厳密解に対する誤差を表1に示す。また図3に、節点数が12のときの、第2モードと第5モードのモード形状を、厳密解と併せて示す。実線が本論文で示した方法により求めた解であり、破線が厳密解である。これらの結果より、本論文で示した方法により厳密解に近い解が得られることおよび節点数を増すと精度が向上することがわかる。

3.2. 変位加振を受ける単純支持はりの強制振動解析

次に、図2のはりにおいて、右端が単位振幅の調和変位加振を受ける場合の強制振動解析を行う。節点と局所領域の選び方、形状関数、式 (5) の v は前節と同じとする。境界条件としては、左端で変位および曲げモーメントを零とし、右端では変位を単位振幅の調和運動とし、曲げモーメントを零とした。節点数が12の場合における、左端から全体の長さの80%位置における振動数応答曲線を図4に示す。図の横軸は、第1モードの固有振動数に対する加振振動数の比であり、縦軸は加振振幅に対するはりの振幅比である。また振動数比が18.2のときの振動形状を図5に示す。図4および5のいずれも、実線が本論文で提案した方法により求めた解であり、破線が厳密解である。これらの図から精度よい解が得られていることがわかる。

3.3. 4辺単純支持板の自由振動解析

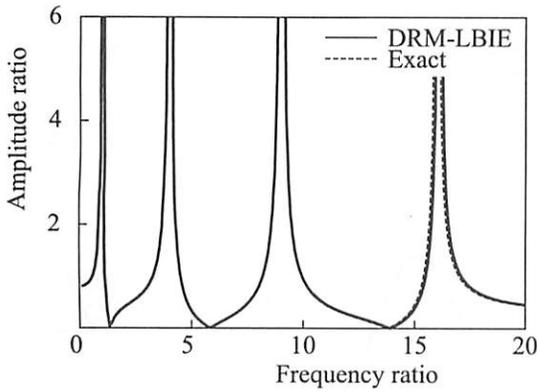


Fig. 4 Frequency response function of the beam subjected to the displacement excitation

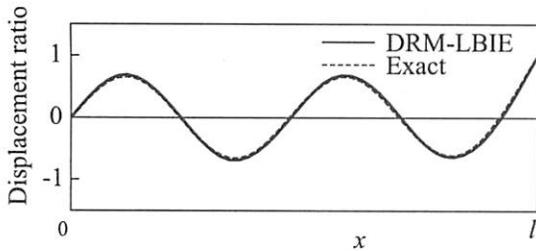


Fig. 5 Shape of the beam at the frequency ratio 18.2

最後に、2辺の長さ a, b の比が0.7で、4辺が単純支持された長方形板の自由振動解析を行う。節点は、はりに対して行った節点のとり方を直交2方向で行い、図6に示すように長辺方向に13点、短辺方向に10点、全部で130点取る。形状関数としては、ここでも式(29)で与えられる関数を用いる。局所領域は、図6中に示すように、中心が各節点で半径が板の長辺に平行な方向の節点間距離の1.5倍の円とした。式(5)における c は節点から局所領域の境界までの距離とした。境界条件は、板の長辺および短辺に沿って等間隔にそれぞれ11等分および8等分する点で変位および曲げモーメントを零とした。得られた第2モードのモード形状を図7に示す。この形状は厳密解に非常に近いものである。固有振動数の誤差も0.019%と小さいものであった。他のモードについても、低次のものは同程度の精度で解が得られた。

4. まとめ

本研究では、メッシュレス局所境界積分方程式法に二重相反法を組み合わせることで、はりおよび板の曲げ振動問題に対して、局所領域における領域積分を線積分に置き換えて解析を行う方法を示した。定式化の際、任意の境界条件の取り扱いが可能となるようにした。最後に、本研究で示した手法による解析例をいくつか示した。

参考文献

(1) Zhu, T., Zhang, J. and Atluri, S.N., A meshless method based on the local boundary integral equation (LBIE) to solve linear and non-linear boundary value problems, *Eng. Anal. Bound. Elem.*, Vol.23, pp.375-389, 1999.

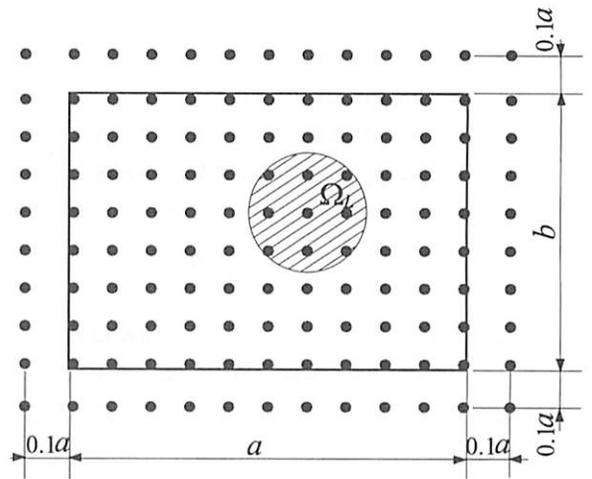


Fig. 6 Simply supported rectangular plate

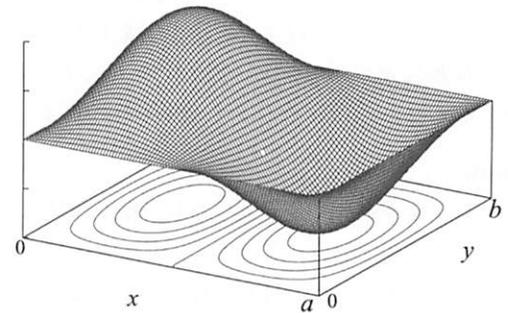


Fig. 7 Shape of the 2nd mode obtained by the presented method

(2) Sladek, J., Sladek, V. and Mang, H.A., Meshless LBIE formulations for simply supported and clamped plates under dynamic load, *Compt. Struct.*, Vol.81, pp.1643-1651, 2003.

(3) Partridge, P.W., Brebbia, C.A. and Wrobel, L.C., The dual reciprocity boundary element method, Computational mechanics publications, 1992.

(4) Zhu, T. and Atluri, S., A modified collocation method and a penalty formulation for enforcing the essential boundary conditions in the element free Galerkin method, *Compt. Mechanics*, Vol.21, pp.211-222, 1998.

(5) Atluri, S. and Zhu, T., A new meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics, *Compt. Mechanics*, Vol.22, pp.117-127, 1998.

(6) Atluri, S., Kim, H. and Cho, J., A critical assessment of the truly meshless local Petrov-Galerkin (MLPG), and local boundary integral equation (LBIE) methods, *Compt. Mechanics*, Vol.24, pp.348-372, 1999.

(7) Zhang, X. Liu, X. Lu, M. and Chen, Y., Imposing of essential boundary conditions by displacement constraint equations in meshless methods, *Comm. Numer. Methods Engg.*, Vol.17, pp.165-178, 2001.

(8) Ouatouati, A.E. and Johnson, D.A.: A new approach for numerical modal analysis using the element-free method, *Int. J. Numer. Methods Engg.* Vol.46, pp.1-27, 1999.