

圧電材料の境界要素法による 3次元定常振動解析の効率化

EFFICIENT COMPUTATION OF TIME-HARMONIC VIBRATION ANALYSIS OF PIEZOELECTRIC MATERIALS BY BEM

松本 敏郎¹⁾, 田中 正隆²⁾, 神谷 恵輔³⁾, 鮫島 悠之⁴⁾

Toshiro MATSUMOTO, Masataka TANAKA, Keisuke KAMIYA and Masayuki SAMEJIMA

1) 名古屋大学大学院工学研究科 (〒 464-8603 名古屋市千種区不老町, E-mail: t.matsumoto@nuem.nagoya-u.ac.jp)

2) 信州大学工学部 (〒 380-8553 長野市若里 4-17-1, E-mail: dtanaka@gipwc.shinshu-u.ac.jp)

3) 名古屋大学大学院工学研究科 (〒 464-8603 名古屋市千種区不老町, E-mail: kamiya@nuem.nagoya-u.ac.jp)

4) (株) ISOWA (〒 486-0908 愛知県春日井市西屋町 66)

The fundamental solution for time-harmonic vibration of a piezoelectric material is represented with a surface integral over a unit sphere, and consumes much computation time for its evaluation in the computation process of BEM analyses. Although a convenient technique can be used for the efficient evaluation of the static fundamental solution, it cannot be applied to the dynamic part since its integrand involves implicitly the distance between the source point and the field point. This paper presents an efficient method based on a Taylor series expansion to evaluate the fundamental solution approximately with sufficient accuracy. The effectiveness of the approach for reducing the computation time is demonstrated through some numerical results.

Key Words: Piezoelectric material, Time-harmonic vibration, Fundamental solution, Boundary Element Method

1. はじめに

圧電セラミックやポリマーなどの圧電材料⁽¹⁾が, 航空機, 自動車, 医療機器, 電子機器等でますます重要になってきており, 圧電材料の強度や振動特性などの力学的挙動の高精度な数値解析法の開発が必要となってきた。圧電材料は, 弾性場と電場が互いに連成し, 材料定数も異方性⁽³⁾を示すため, その支配微分方程式は非常に複雑な形となる。

境界要素法の定式化においては, 支配微分方程式の基本解が必要となるが, 異方性材料の弾性問題や圧電材料の定常振動問題に対する基本解は, 単位円周に沿った積分や単位球面上の積分^(4,5,6)として求まる。したがって基本解の値を計算すに数値積分を必要とし, 計算時間がかかることとなる。

そこで, 本研究では 3次元の圧電材料の定常振動問題について, 基本解を計算しやすい形に導出し, 効率的に計算する方法を提案する。さらに, この基本解を組み込んだ境界要素法プログラムを開発し, 数値解析例により提案した手法の有効性を示す。

2. 理論

2.1. 基礎式

圧電体に関する力のつりあい方程式, 構成方程式, 電荷方

程式, 変位-ひずみ関係式は次のようになる。

$$\sigma_{ij,i} - \rho \ddot{u}_j + B_j = 0 \quad (1)$$

$$D_{i,i} - q = 0 \quad (2)$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} + e_{lij} \varphi_{,l} \quad (3)$$

$$D_i = e_{ikl} \epsilon_{kl} - \epsilon_{il} \varphi_{,l} \quad (4)$$

$$\epsilon_{kl} = \frac{1}{2}(u_{k,l} + u_{l,k}) \quad (5)$$

ただし, σ_{ij} は応力, C_{ijkl} は弾性定数テンソル, ϵ_{kl} はひずみテンソル, b_i は物体力ベクトル, e_{ikl} は圧電定数テンソル, D_i は電束密度, ϵ_{il} は誘電率テンソル, B_j は物体力, q は電荷密度, u_k は変位, φ は電位, ρ は密度, \ddot{u}_j は加速度ベクトルである。また, 小文字のアルファベットによる添字はデカルト座標系成分を表し, 繰り返し用いられる添字については, 総和規約が成り立つものとする。ここでは物体力と電荷分布は無視できるものとする。式(1)~(5)から次の2つの微分方程式が得られる。

$$C_{ijkl} u_{k,li} - \rho \ddot{u}_j + e_{lij} \varphi_{,li} = 0 \quad (6)$$

$$e_{ikl} u_{k,li} - \epsilon_{il} \varphi_{,li} = 0 \quad (7)$$

ここで, 物体が一定角振動数 ω の調和加振力を受け定常状態が達成されたとする。このとき i を虚数単位として $u_j = \bar{u}_j e^{-i\omega t}$,

$\varphi = \bar{\varphi}e^{-i\omega t}$ のように書くものとする、式 (6) と (7) から次式が得られる。

$$C_{ijkl}\bar{u}_{k,li} + \rho\omega^2\bar{u}_j + e_{lij}\bar{\varphi}_{,li} = 0 \quad (8)$$

$$e_{ikl}\bar{u}_{k,li} - \varepsilon_{il}\bar{\varphi}_{,li} = 0 \quad (9)$$

ここで、 \bar{u}_j と $\bar{\varphi}$ をまとめて U_J ($J = 1, 2, 3, 4$) と書くことにし、 U_J の添字が小文字 (すなわち U_j) の時は \bar{u}_j に対応し、 $U_4 = \bar{\varphi}$ であるものとする。このとき、式 (8) と (9) は次のようにまとめて書くことができる。

$$\begin{bmatrix} C_{ijkl}\partial_l\partial_i + \rho\omega^2\delta_{jk} & e_{lij}\partial_l\partial_i \\ e_{ikl}\partial_l\partial_i & -\varepsilon_{il}\partial_l\partial_i \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U_k \\ U_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (10)$$

ただし、 δ_{jk} は Kronecker のデルタ、 ∂_i などは座標による偏微分を表すものとする。式 (10) を以下のように簡単に書くことにする。

$$\Gamma_{JK}(\partial)U_K = 0 \quad (11)$$

式 (11) から積分方程式を導出するために、次の恒等式を考える。

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (C_{ijkl}\partial_l\partial_i U_k + \rho\omega^2 U_j + e_{lij}\partial_l\partial_i U_4) U_{jM}^* d\Omega \\ & + \int_{\Omega} (e_{ikl}\partial_l\partial_i U_k - \varepsilon_{il}\partial_l\partial_i U_4) U_{4M}^* d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

式 (12) の左辺を 2 回部分積分して整理すると、次の式が得られる。

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} U_{jM}^* (C_{ijkl}U_{k,l} + e_{lij}U_{4,l}) n_i d\Gamma \\ & + \int_{\Gamma} U_{4M}^* (e_{ikl}U_{k,l} - \varepsilon_{il}U_{4,l}) n_i d\Gamma \\ & - \int_{\Gamma} (C_{ijkl}U_{kM,l}^* + e_{lij}U_{4M,l}^*) n_i U_j d\Gamma \\ & - \int_{\Gamma} (e_{ikl}U_{kM,l}^* - \varepsilon_{il}U_{4M,l}^*) n_i U_4 d\Gamma \\ & + \int_{\Omega} (C_{ijkl}U_{kM,li}^* + \rho\omega^2 U_{jM}^* + e_{lij}U_{4M,li}^*) U_j d\Omega \\ & + \int_{\Omega} (e_{ikl}U_{kM,li}^* - \varepsilon_{il}U_{4M,li}^*) U_4 d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

ただし、変形の過程で各テンソルの対称性 $C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{klij}$ 、 $e_{ikl} = e_{ilk}$ 、 $\varepsilon_{il} = \varepsilon_{li}$ を用いている。

ここで、次の記号を導入する。

$$T_j = (C_{ijkl}U_{k,l} + e_{lij}U_{4,l}) n_i \quad (14)$$

$$T_4 = (e_{ikl}U_{k,l} - \varepsilon_{il}U_{4,l}) n_i \quad (15)$$

$$T_{jM}^* = (C_{ijkl}U_{kM,l}^* + e_{lij}U_{4M,l}^*) n_i \quad (16)$$

$$T_{4M}^* = (e_{ikl}U_{kM,l}^* - \varepsilon_{il}U_{4M,l}^*) n_i \quad (17)$$

このとき、式 (13) は次のように簡潔に書くことができる。

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} U_{jM}^* T_j d\Gamma - \int_{\Gamma} T_{jM}^* U_j d\Gamma \\ & + \int_{\Omega} \Gamma_{JK}(\partial)U_{KM}^* U_K d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

ここで式 (18) の U_{jM}^* に、次の微分方程式の基本解を用いる。

$$\Gamma_{JK}(\partial)U_{KM}^* + \delta_{JM}\delta(x-y) = 0 \quad (19)$$

ただし、 $\delta(x-y)$ は Dirac のデルタ関数、 x と y はそれぞれ互いに異なる場の 2 点である。式 (19) の関係を式 (18) に用いると、静弾性問題における Somigliana の公式と同じ形をした次の式が得られる。

$$U_M(y) + \int_{\Gamma} T_{jM}^* U_j d\Gamma = \int_{\Gamma} U_{jM}^* T_j d\Gamma \quad (20)$$

2.2. 基本解

式 (19) の基本解は、Radon 変換によって求めることができる (6, 7)。

いま、 $\mathbf{x} = x_i - y_i$ を 3 次元空間 \mathbb{R}^3 内の 1 点 x の別の点 y に対する位置ベクトルとすると、任意の関数 $f(\mathbf{x})$ の Radon 変換は次式のように定義される。

$$\hat{f}(s, \mathbf{n}) = \mathbf{R}\{f(\mathbf{x})\} = \int f(\mathbf{x})\delta(s - \mathbf{n} \cdot \mathbf{x})d\mathbf{x} \quad (21)$$

ただし \mathbf{n} は単位ベクトルである。 $f(\mathbf{x})$ の導関数の Radon 変換は次のようになる (7)。

$$\mathbf{R}(\partial_i f(\mathbf{x})) = n_i \partial_s \hat{f}(s, \mathbf{n}) \quad (22)$$

また、Radon 変換の逆変換は次式のようにになる。

$$f(\mathbf{x}) = \frac{-1}{8\pi^2} \int_{|\mathbf{n}|=1} \partial_s^2 \hat{f}(s, \mathbf{n}) dS(\mathbf{n}) \quad (23)$$

式 (23) の積分は単位球面上の積分となっている。

式 (19) の両辺を Radon 変換すると、 s に関する連立常微分方程式に変換される。

$$C_{ijkl}n_i n_j \partial_s^2 \hat{U}_{kp}^* - \rho\omega^2 \delta_{jk} \hat{U}_{kp}^* + e_{lij}n_l n_i \partial_s^2 \hat{U}_{4p}^* = -\delta_{jp}\delta(s) \quad (24)$$

$$e_{ikl}n_l n_i \partial_s^2 \hat{U}_{kp}^* - \varepsilon_{il}n_l n_i \partial_s^2 \hat{U}_{4p}^* = -\delta_{4p}\delta(s) \quad (25)$$

得られた連立常微分方程式を \hat{U}_{kp}^* について解く。まず、式 (25) を次式のように変形する。

$$\partial_s^2 \hat{U}_{4p}^* = \frac{\beta_k(\mathbf{n})\partial_s^2 \hat{U}_{kp}^* + \delta_{4p}\delta(s)}{\alpha(\mathbf{n})} \quad (26)$$

ただし、 $\alpha(\mathbf{n}) = \varepsilon_{il}n_l n_i$ 、 $\beta_k(\mathbf{n}) = e_{ikl}n_l n_i$ である。式 (26) を式 (24) に代入すると次式のようにになる。

$$\partial_s^2 \hat{U}_{kp}^* Q_{jk}(\mathbf{n}) + \rho\omega^2 \delta_{jk} \hat{U}_{kp}^* = -P_{jp}(\mathbf{n})\delta(s) \quad (27)$$

ただし、

$$Q_{jk}(\mathbf{n}) = C_{ijkl}n_l n_i + \frac{\beta_j(\mathbf{n})\beta_k(\mathbf{n})}{\alpha(\mathbf{n})} \quad (28)$$

$$P_{jp}(\mathbf{n}) = \delta_{jp} + \frac{\beta_j(\mathbf{n})}{\alpha(\mathbf{n})}\delta_{4p} \quad (29)$$

である。ここで、以下に示す関係を用いる。

$$Q_{jk}(\mathbf{n})E_{km} = \lambda_m E_{jm} \quad (30)$$

$$E_{jm}E_{jn} = \delta_{mn} \quad (31)$$

$$\hat{U}_{kp}^* = E_{kn}\hat{V}_{np} \quad (32)$$

ただし、 λ_m と E_{km} は、それぞれ $Q_{jk}(\mathbf{n})$ の固有値と固有ベクトルである。また、固有値 λ_m についての添字 m に関しては、総和規約を適用しないものとする。これらの式より、式 (27) を整理すると次式のようになる。

$$(\partial_s^2 \lambda_m + \rho \omega^2) \hat{V}_{mp} = -E_{jm} P_{jp}(\mathbf{n}) \delta(s) \quad (33)$$

式 (33) の特解は、Fourier 変換・逆変換と留数定理より求められ、次式のようになる。

$$\hat{V}_{mp} = \frac{i}{2\lambda_m k_m} E_{jm} P_{jp}(\mathbf{n}) e^{ik_m |s|} \quad (34)$$

ただし、以下に示す関係を用いた。

$$\lambda_m = \rho C_m^2 \quad (35)$$

$$k_m = \frac{\omega}{C_m} \quad (36)$$

$$\rho \omega^2 = \lambda_m k_m^2 \quad (37)$$

C_m は固有値 λ_m に関係づけられる波の位相速度である。式 (32) に、式 (34) を用いると、次式のようになる。

$$\hat{U}_{kp}^* = \sum_{m=1}^3 \frac{i}{2\lambda_m k_m} E_{km} E_{jm} P_{jp}(\mathbf{n}) e^{ik_m |s|} \quad (38)$$

式 (38) より、次式が得られる。

$$\partial_s^2 \hat{U}_{kp}^* = \sum_{m=1}^3 \frac{-1}{2\lambda_m} E_{km} E_{jm} P_{jp}(\mathbf{n}) [2\delta(s) + ik_m e^{ik_m |s|}] \quad (39)$$

式 (39) を用いて式 (38) を逆 Radon 変換すると次式のようになる。

$$U_{kp}^* = \frac{1}{8\pi^2} \int_{|\mathbf{n}|=1} \sum_{m=1}^3 \frac{1}{2\lambda_m} E_{km} E_{jm} P_{jp}(\mathbf{n}) [2\delta(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}) + ik_m e^{ik_m |\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}|}] dS(\mathbf{n}) \quad (40)$$

以上により、基本解の 3 行 4 列目までを求めることができた。基本解の 4 行目を求めるために、式 (39) を式 (26) に代入し、逆 Radon 変換すると、次式のようになる。

$$U_{4p}^* = \frac{1}{8\pi^2} \int_{|\mathbf{n}|=1} \left\{ \frac{\beta_k(\mathbf{n})}{\alpha(\mathbf{n})} \sum_{m=1}^3 \frac{1}{2\lambda_m} E_{km} E_{jm} P_{jp}(\mathbf{n}) \times [2\delta(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}) + ik_m e^{ik_m |\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}|}] - \frac{\delta_{4p} \delta(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x})}{\alpha(\mathbf{n})} \right\} dS(\mathbf{n}) \quad (41)$$

これらの基本解 (40) と (41) は、次式のように静的な部分 (Singular 項) と動的な効果を表す正則な部分 (Regular 項) に分けることができる。

$$U_{kp}^{*S} = \frac{1}{8\pi^2} \int_{|\mathbf{n}|=1} \sum_{m=1}^3 \frac{1}{\lambda_m} E_{km} E_{jm} P_{jp}(\mathbf{n}) \delta(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}) dS(\mathbf{n}) \quad (42)$$

$$U_{4p}^{*R} = \frac{1}{8\pi^2} \int_{|\mathbf{n}|=1} \left\{ \frac{\beta_k(\mathbf{n})}{\alpha(\mathbf{n})} \sum_{m=1}^3 \frac{1}{\lambda_m} E_{km} E_{jm} P_{jp}(\mathbf{n}) \delta(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}) - \frac{\delta_{4p} \delta(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x})}{\alpha(\mathbf{n})} \right\} dS(\mathbf{n}) \quad (43)$$

$$U_{kp}^{*R} = \frac{i}{8\pi^2} \int_{|\mathbf{n}|=1} \sum_{m=1}^3 \frac{k_m}{2\lambda_m} E_{km} E_{jm} P_{jp}(\mathbf{n}) e^{ik_m |\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}|} dS(\mathbf{n}) \quad (44)$$

$$U_{4p}^{*R} = \frac{i}{8\pi^2} \int_{|\mathbf{n}|=1} \left\{ \frac{\beta_k(\mathbf{n})}{\alpha(\mathbf{n})} \times \sum_{m=1}^3 \frac{k_m}{2\lambda_m} E_{km} E_{jm} P_{jp}(\mathbf{n}) e^{ik_m |\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}|} \right\} dS(\mathbf{n}) \quad (45)$$

静的な部分は、Dirac のデルタ関数の性質を利用して、最終的に次のような単位円周上の積分に帰着する。

$$U_{kp}^{*S} = \frac{1}{8\pi^2 r} \int_0^{2\pi} Q_{kj}^{-1}(\mathbf{d}(\phi)) P_{jp}(\mathbf{d}(\phi)) d\phi \quad (46)$$

$$U_{4p}^{*S} = \frac{1}{8\pi^2 r} \int_0^{2\pi} \left[\frac{\beta_k(\mathbf{d}(\phi))}{\alpha(\mathbf{d}(\phi))} Q_{kj}^{-1}(\mathbf{d}(\phi)) P_{jp}(\mathbf{d}(\phi)) - \frac{\delta_{4p}}{\alpha(\mathbf{d}(\phi))} \right] d\phi \quad (47)$$

ただし、 $\mathbf{d}(\phi)$ は、Fig.1 で定義される基本解のソース点から場の 1 点への位置ベクトル \mathbf{r} に直交する平面上の単位円周上のベクトルである。

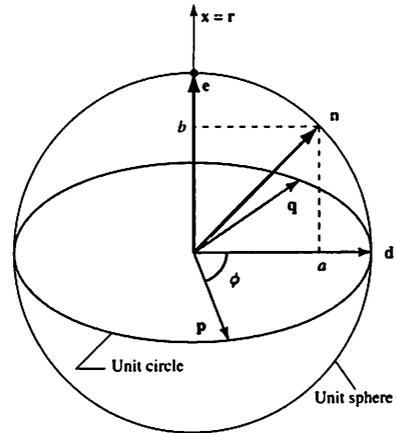


Fig.1 The orientation of \mathbf{x} , \mathbf{n} , and corresponding unit circle.

また、基本解の動的な部分については、異方性弾性体の定常振動問題の場合⁽⁷⁾と同様に、 $Q_{jk}(\mathbf{n})$ の固有ベクトルを用いない表現に書き直せる。以下の関係式を導入する。

$$A_{kj} = \text{adj}[Q_{jk}(\mathbf{n}) - \rho C_m^2 \delta_{kj}] \quad (48)$$

$$\frac{A_{kj}^m}{A_{qq}^m} = E_{km} E_{jm} \quad (49)$$

ここで、 $\text{adj}[\]$ は $[\]$ の余因子行列を意味する。これらの関係式より、式 (44) と (45) は以下のようになる。

$$U_{kp}^{*R} = \frac{i}{8\pi^2} \int_{|\mathbf{n}|=1} \sum_{m=1}^3 \frac{k_m}{2\lambda_m} \frac{A_{kj}^m}{A_{qq}^m} P_{jp}(\mathbf{n}) e^{ik_m |\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}|} dS(\mathbf{n}) \quad (50)$$

$$U_{4p}^{*R} = \frac{i}{8\pi^2} \int_{|\mathbf{n}|=1} \left\{ \frac{\beta_k(\mathbf{n})}{\alpha(\mathbf{n})} \times \sum_{m=1}^3 \frac{k_m}{2\lambda_m} \frac{A_{kj}^m}{A_{qq}^m} P_{jp}(\mathbf{n}) e^{ik_m |\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}|} \right\} dS(\mathbf{n}) \quad (51)$$

式 (50) と (51) において、3つの固有値 $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ の中のいくつかが一致している場合が存在する。説明を簡略化するために、式 (50) の被積分関数を次のように書くことにする。

$$\psi_{kj} = \sum_{m=1}^3 \frac{A_{kj}^m}{A_{qq}^m} f(\lambda_m) \quad (52)$$

(i) 3つの固有値の中の2つが等しい場合 $(\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3)$

$$\begin{aligned} \psi_{kj} &= (E_{k1}E_{j1} + E_{k2}E_{j2})f(\lambda_1) + E_{k3}E_{j3}f(\lambda_3) \\ &= (\delta_{kj} - E_{k3}E_{j3})f(\lambda_1) + E_{k3}E_{j3}f(\lambda_3) \\ &= (\delta_{kj} - \frac{A_{kj}^3}{A_{qq}^3})f(\lambda_1) + \frac{A_{kj}^3}{A_{qq}^3}f(\lambda_3) \\ &= \delta_{kj}f(\lambda_1) + \frac{A_{kj}^3}{A_{qq}^3}(f(\lambda_3) - f(\lambda_1)) \end{aligned} \quad (53)$$

(ii) 固有値がすべて等しい場合 $(\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3)$

$$\begin{aligned} \psi_{kj} &= (E_{k1}E_{j1} + E_{k2}E_{j2} + E_{k3}E_{j3})f(\lambda_1) \\ &= \delta_{kj}f(\lambda_1) \end{aligned} \quad (54)$$

境界要素法では、式 (16) と (17) により U_{JM}^* に関係づけられる T_{JM}^* も必要となる。そのためには基本解 U_{JM}^* の勾配が必要となり、それらを求めると以下の式ようになる。

$$\begin{aligned} U_{kp,l}^{*S} &= \frac{1}{8\pi^2 r} \int_0^{2\pi} \left\{ Q_{kj,l}^{-1}(\mathbf{d}(\phi)) P_{jp}(\mathbf{d}(\phi)) \right. \\ &\quad \left. + Q_{kj}^{-1}(\mathbf{d}(\phi)) \left[P_{jp,l}(\mathbf{d}(\phi)) - \frac{r,l}{r} P_{jp}(\mathbf{d}(\phi)) \right] \right\} d\phi \end{aligned} \quad (55)$$

$$\begin{aligned} U_{4p,l}^{*S} &= \frac{1}{8\pi^2 r} \int_0^{2\pi} \left\{ Q_{kj}^{-1}(\mathbf{d}(\phi)) P_{jp}(\mathbf{d}(\phi)) \right. \\ &\quad \times \left[\hat{\alpha}_{k,l}(\mathbf{d}(\phi)) - \frac{r,l}{r} \hat{\alpha}_k(\mathbf{d}(\phi)) \right] \\ &\quad + \hat{\alpha}_k(\mathbf{d}(\phi)) \left[Q_{kj}^{-1}(\mathbf{d}(\phi)) P_{jp,l}(\mathbf{d}(\phi)) \right. \\ &\quad \left. + Q_{kj,l}^{-1}(\mathbf{d}(\phi)) P_{jp}(\mathbf{d}(\phi)) \right] \\ &\quad \left. - \hat{\beta}_{4p,l}(\mathbf{d}(\phi)) + \frac{r,l}{r} \hat{\beta}_{4p}(\mathbf{d}(\phi)) \right\} d\phi \end{aligned} \quad (56)$$

$$U_{kp,l}^{*R} = \frac{1}{8\pi^2} \int_{|\mathbf{n}|=1} \sum_{m=1}^3 \frac{k_m}{2\lambda_m} \frac{A_{kj}^m}{A_{qq}^m} n_l P_{jp}(\mathbf{n}) e^{i\mathbf{m} \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}} dS(\mathbf{n}) \quad (57)$$

$$U_{4p,l}^{*R} = \frac{1}{8\pi^2} \int_{|\mathbf{n}|=1} \frac{\beta_k(\mathbf{n})}{\alpha(\mathbf{n})} \sum_{m=1}^3 \frac{k_m}{2\lambda_m} \frac{A_{kj}^m}{A_{qq}^m} n_l P_{jp}(\mathbf{n}) e^{i\mathbf{m} \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}} dS(\mathbf{n}) \quad (58)$$

ただし、 $\hat{\alpha}_k = \beta_k(\mathbf{d}(\phi))/\alpha(\mathbf{d}(\phi))$ 、 $\hat{\beta}_{4p} = \delta_{4p}/\alpha(\mathbf{d}(\phi))$ とした。これらを式 (16) と (17) に代入すると、 T_{JM}^* が以下の形に求められる。

$$T_{JM}^* = T_{JM}^{*S} + T_{JM}^{*R} \quad (59)$$

ただし、 T_{JM}^{*S} 、 T_{JM}^{*R} はそれぞれ T_{JM}^* において U_{JM}^{*S} 、 U_{JM}^{*R} に対応する部分である。

2.3. 境界積分方程式

境界積分方程式は、前節で導出した基本解を用いて変形し、 U_{JM}^{*S} が静的な場合の基本解⁽⁶⁾であることを利用すると、以下の形に導出することができる。

$$\begin{aligned} &\left(\int_{\Gamma} T_{JM}^{*R} d\Gamma \right) U_J(y) + \int_{\Gamma} T_{JM}^* (U_J - U_J(y)) d\Gamma \\ &= \int_{\Gamma} U_{JM}^* T_J d\Gamma \end{aligned} \quad (60)$$

3. 基本解の計算の効率化

これまで示したように、圧電材料の調和振動解析の基本解は、静的な部分（特異性を示す部分）と動的な部分（正則な部分）に分けることができる。このうち静的な部分では基本解の値は単位円周上の積分として表され、動的な部分は単位球面上の面積分で表される。このため、いずれの部分もその値の計算コストは大きいものとなる。特に、後者の動的な部分の計算コストは著しいものとなり、その計算の効率化を工夫することが必要となる。

基本解の静的な部分をよく観察すると、単位円周上の積分の部分は、場の2点の方向のみに依存し距離に依存しない関数の積分となっていることが分かる。したがって、計算に先立ち r のいくつかの方向についてこの積分の値をあらかじめ計算して記憶しておき、境界積分方程式の評価に際してはそれらを補間したものを用いることによって計算の効率化を図ることができる。この方法は3次元異方性弾性体の静弾性問題に対する境界要素法において既に用いられており⁽⁸⁾、3次元圧電材料の定常振動問題においても、基本解の静的な部分の計算の効率化にそのまま用いることができる。しかしながら、基本解の動的な部分は場の2点の距離が指数関数の引数として含まれているので、このような方法を用いて計算の効率化を図ることはこのままでは可能でない。ここで、Fig.1 に示すように r と同じ方向に取った変数 $b \in [-1, +1]$ と、 $\phi \in [0, 2\pi]$ によって式 (50) と (51) の単位球面上の面積分を評価すると、以下のようになる。

$$U_{kp}^{*R} = \frac{i}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \sum_{m=1}^3 \frac{k_m}{2\lambda_m} E_{km} E_{jm} P_{jp}(\mathbf{n}) e^{i\mathbf{k}_m \cdot \mathbf{b}} db d\phi \quad (61)$$

$$\begin{aligned} U_{4p}^{*R} &= \frac{i}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \left\{ \frac{\beta_k(\mathbf{n})}{\alpha(\mathbf{n})} \right. \\ &\quad \left. \times \sum_{m=1}^3 \frac{k_m}{2\lambda_m} E_{km} E_{jm} P_{jp}(\mathbf{n}) e^{i\mathbf{k}_m \cdot \mathbf{r}} \right\} db d\phi \end{aligned} \quad (62)$$

ここで、 $e^{i\mathbf{k}_m \cdot \mathbf{r}}$ を次のように Taylor 展開する。

$$e^{i\mathbf{k}_m \cdot \mathbf{r}} = 1 + i\mathbf{k}_m \cdot \mathbf{r} - \frac{1}{2}(\mathbf{k}_m \cdot \mathbf{r})^2 - \frac{i}{6}(\mathbf{k}_m \cdot \mathbf{r})^3 + O(r^4) \quad (63)$$

必要な展開項数は、波数 k_m と r の積の大きさに適切に決めることができる。波数 k_m と解析対象の最大距離 r_{\max} の積 $k_m r_{\max}$ によって展開の項数を変えればよい。たとえば、Table 1 に示す項数を用いれば $|e^{i\mathbf{k}_m \cdot \mathbf{r}}|$ の展開による誤差をいずれの場合も 10^{-13} 以下にできる。

Table 1 Number of terms used for expansions of $e^{ik_m r|b|}$.

$k_m r_{\max}$	Number of terms
1	16
2	21
3	25
4	29
5	32
6	36

式 (63) を式 (61) と式 (62) にそれぞれ代入すると次式のようになる。

$$\begin{aligned}
 U_{kp}^{*R} = & \frac{i}{16\pi^2} \left[\int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \sum_{m=1}^3 \frac{k_m}{\lambda_m} E_{km} E_{jm} P_{jp}(\mathbf{n}) dbd\phi \right. \\
 & + ir \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \sum_{m=1}^3 \frac{k_m}{\lambda_m} E_{km} E_{jm} P_{jp}(\mathbf{n}) k_m |b| dbd\phi \\
 & - \frac{r^2}{2} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \sum_{m=1}^3 \frac{k_m}{\lambda_m} E_{km} E_{jm} P_{jp}(\mathbf{n}) (k_m |b|)^2 dbd\phi \\
 & - \frac{ir^3}{6} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \sum_{m=1}^3 \frac{k_m}{\lambda_m} E_{km} E_{jm} P_{jp}(\mathbf{n}) (k_m |b|)^3 dbd\phi \\
 & \left. + \dots \right] \quad (64)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 U_{4p}^{*R} = & \frac{i}{16\pi^2} \left[\int_0^\pi \int_{-1}^1 \left\{ \frac{\beta_k(\mathbf{n})}{\alpha(\mathbf{n})} \sum_{m=1}^3 \frac{k_m}{2\lambda_m} E_{km} E_{jm} P_{jp}(\mathbf{n}) \right\} dbd\phi \right. \\
 & + ir \int_0^\pi \int_{-1}^1 \left\{ \frac{\beta_k(\mathbf{n})}{\alpha(\mathbf{n})} \sum_{m=1}^3 \frac{k_m}{2\lambda_m} E_{km} E_{jm} P_{jp}(\mathbf{n}) k_m |b| \right\} dbd\phi \\
 & - \frac{r^2}{2} \int_0^\pi \int_{-1}^1 \left\{ \frac{\beta_k(\mathbf{n})}{\alpha(\mathbf{n})} \sum_{m=1}^3 \frac{k_m}{2\lambda_m} E_{km} E_{jm} P_{jp}(\mathbf{n}) (k_m |b|)^2 \right\} dbd\phi \\
 & - \frac{ir^3}{6} \int_0^\pi \int_{-1}^1 \left\{ \frac{\beta_k(\mathbf{n})}{\alpha(\mathbf{n})} \sum_{m=1}^3 \frac{k_m}{2\lambda_m} E_{km} E_{jm} P_{jp}(\mathbf{n}) (k_m |b|)^3 \right\} dbd\phi \\
 & \left. + \dots \right] \quad (65)
 \end{aligned}$$

式 (64) と (65) のように展開することによって、基本解の計算に必要な 2 点間の距離を積分の外に出すことができる。その結果、被積分関数は 2 点の方向がわかれば計算できることになり、基本解の静的な部分の計算で行ったような効率化を図ることが可能となる。また、必要な展開項数の数だけの積分を計算する必要があるものの、被積分関数は $k_m |b|$ のべきを除いてすべて同じものとなるので、計算は効率的に行うことができる。このように、式 (64) と (65) のように展開することによって、各項の二重積分は r の大きさに依存せず r の方向に依存する積分として表現され、それぞれの積分について Fig.2 に示すような球面上の r の複数の方向に対してあらかじめ積分を評価して数表を作成しておき、実際の基本解の計算に際しては、その数表の値を補間してそれぞれの積分値を計算すれば、基本解の計算の効率化が可能となる。ここで

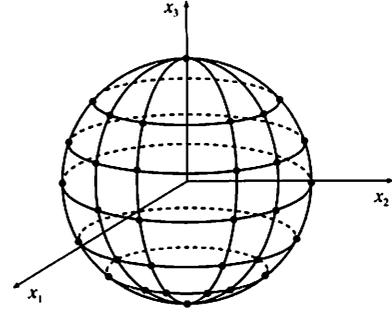


Fig.2 Directions of r to which integrals in equations (64) and (65) are evaluated in advance.

は、球面の経線、緯線の方向に表面を分割し、球の中心から経線と緯線のそれぞれの交点の方向と r の方向が一致するときの積分値を求めて数表にしておき、 r の方向がそれ以外の方向のときは Lagrange の多項式により積分値を補間する。

4. 解析例

Fig.3 に示すようなモデルを圧電体として解析を行った。このモデルに対して、境界節点数 170 点からなる 2 次要素を用いて 56 要素に分割した。境界条件として、 x_1 に垂直な右側の面において x_1 軸方向のみを支持し、電束密度を 0 とした。左側の面においては x_1 方向に調和加振力 1 [MPa]、電束密度を 0 とした。また x_2 軸に垂直な奥の面は x_2 方向のみを支持し、電束密度を 0、手前の面は表面力を 0、電束密度を 0 とした。さらに、 x_3 軸に垂直な下側の面は、 x_3 方向のみを支持し、電位を 0、上側の面は自由表面力で電位を 0 とした。材料定数は、 $c_{11} = 139$ [GPa]、 $c_{12} = 77.8$ [GPa]、 $c_{13} = 74.3$ [GPa]、 $c_{33} = 115$ [GPa]、 $c_{44} = 25.6$ [GPa]、 $c_{66} = 30.6$ [GPa]、 $E_{15} = 12.7$ [C/m²]、 $E_{24} = 12.7$ [C/m²]、 $E_{31} = -5.2$ [C/m²]、 $E_{32} = -5.2$ [C/m²]、 $E_{33} = 15.1$ [C/m²]、 $\epsilon_{11} = 6.461 \times 10^{-9}$ [C/Vm]、 $\epsilon_{22} = 6.461 \times 10^{-9}$ [C/Vm]、 $\epsilon_{33} = 5.620 \times 10^{-9}$ [C/Vm] とし、密度を 7600 [kg/m³]、振動数を 1500 [Hz] とした。ただし、 $c_{\alpha\beta}$ ($\alpha = 1, \dots, 6; \beta = 1, \dots, 6$) と E_{kp} ($k = 1, 2, 3; p = 1, \dots, 6$) はそれぞれ弾性定数マトリックスと圧電定数マトリックスであり、 $c_{\alpha\beta}$ の添字は α と β は弾性定数テンソル C_{ijkl} の添字 i, j, k, l と $\alpha = i$ ($i = j$)、 $9 - i - j$ ($i \neq j$) および $\beta = k$ ($k = l$)、 $9 - k - l$ ($k \neq l$) で関係づけられる。同様に圧電定数マトリックスは圧電定数テンソルと $k = 1, 2, 3$ に対して、 $E_{k1} = e_{k11}$ 、 $E_{k2} = e_{k22}$ 、 $E_{k3} = e_{k33}$ 、 $E_{k4} = e_{k23} = e_{k32}$ 、 $E_{k5} = e_{k13} = e_{k31}$ 、 $E_{k6} = e_{k12} = e_{k21}$ のように関係づけられる。以上のとき x_1 方向の波数は 2.89 [rad/m] となる。境界積分方程式は、8 節点アイソパラメトリック要素で離散化し、数値積分には 16 点の Gauss の数値積分公式を用いて解析した。Fig.4, Fig.5 に、このときの線分 AB 上の変位の x_2 方向成分 u_2 と電束密度 D_{in_i} を、それぞれ選点法⁽²⁾ による解析結果と比較して示す。概ね妥当な解が得られていると考えられる。

次に、基本解の計算の効率化の有効性を調べるために、上記の問題に対して、球面の 10°, 5°, 2° ごとのそれぞれの方向に対して、あらかじめ基本解の中の積分を計算しておき、

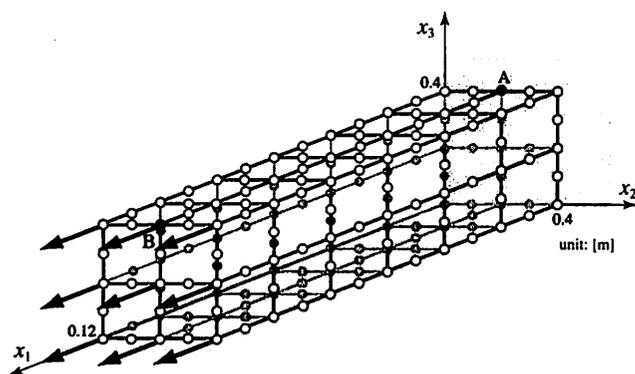


Fig. 3 Analysis model.

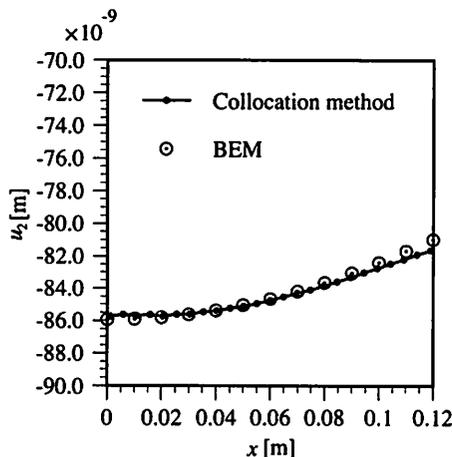


Fig. 4 Results for displacement u_2 along AB

実際の基本解の計算では、これらの値を補間して用いる方法を適用した。このときのCPU時間と効率化を行わなかったときの解に対するの点Bの x_1 方向の変位 u_1 の誤差をTable 2に比較して示す。この場合の球面の分割数は、それぞれ 36×18 , 72×36 , 180×90 である。基本解の計算の効率化を行わないときは、Gaussの数値積分公式の個々の積分点ごとに単位球面上で数値積分して基本解の値を計算する必要があるため、計算時間もかなり必要となっている。これに対して、基本解の方向毎にあらかじめ必要な積分を計算しておく方法では、精度をあまり低下させることなく効率化が達成できていることが分かる。

5. 結言

本研究では、圧電材料の定常振動問題に対する境界要素法の基本解の導出と基本解を計算を効率的に行う方法を提案し

Table 2 Comparisons of CPU times and relative errors for u_1 .

	CPU time [s]	Error of u_1 [%]
normal	3687	
2° (180×90)	394	0.28
5° (72×36)	170	0.42
10° (36×18)	130	0.72

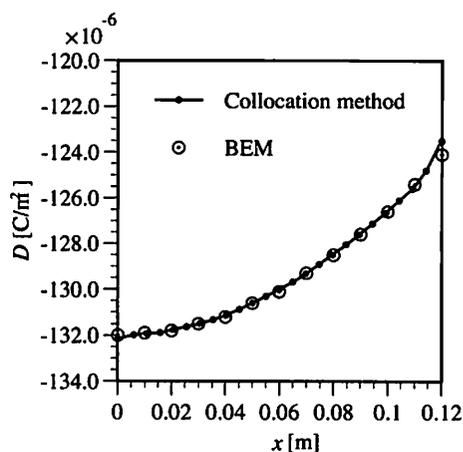


Fig. 5 Results for charge flux densities D along AB.

た。この問題の基本解は、単位球面上の表面積分を含み、その被積分関数は場の2点の方向と距離を含むために、そのままでは基本解の値を計算することに単位球面上の表面積分を数値積分で計算する必要があった。本研究では、この被積分関数において場の2点の距離が含まれているのは指数関数の部分だけである点に着目し、この部分をTaylor展開して距離に関する項を積分の外に出すことで効率化する方法を提案した。数値解析例から、本方法により計算の効率化が図られることを示した。

参考文献

- (1) Jaffe, B., Cook Jr., W.R. and Jaffe, H. : *Piezoelectric Ceramics*, Academic Press, (1971).
- (2) 松本敏郎, 田中正隆, 石川真之, 小川洋平 : 選点法による3次元圧電材料の調和振動解析法, 計算数理工学論文集, 2(2002), pp. 57-60.
- (3) 大橋義男, 神谷紀生 : 異方性弾性板の理論, 森北出版, (1975).
- (4) Hill, L.R. and Farris, T.N. : Three-dimensional piezoelectric boundary element method, *AIAA Journal*, 36(1998), pp. 102-108.
- (5) Norris, A.N. : Dynamic Green's functions in anisotropic piezoelectric, thermoelastic and poroelastic solids, *Proc. R. Soc. Lond., A*, 447 (1994), pp. 175-188.
- (6) Pan, E. and Tonon, F. : Three-dimensional Green's functions in anisotropic piezoelectric solids, *Int. J. Solids Struct.*, 37(2000), pp. 943-958.
- (7) Wang, C.-Y. and Achenbach, J.D. : Three-dimensional time-harmonic elastodynamic Green's functions for anisotropic solids, *Proc. R. Soc. Lond., A*, 449(1995), pp. 441-458.
- (8) Wilson R.B. and Cruse T.A. : Efficient implementation of anisotropic three-dimensional boundary-integral equation stress analysis, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 12(1978), pp. 1383-1397.