

# 高速多重極境界要素法を用いた複合材料の弾性波動解析

## ELASTIC WAVE ANALYSIS OF COMPOSITE MATERIALS USING FAST MULTIPOLE BOUNDARY ELEMENT METHOD

斎藤 隆泰<sup>1)</sup>, 永井 浩二<sup>2)</sup>, 廣瀬 壮一<sup>3)</sup>

Takahiro SAITOH, Koji NAGAI and Sohichi HIROSE

- 1) 東京工業大学大学院情報理工学研究科 (〒 152-8552 東京都目黒区大岡山 2-12-1, E-mail: saito@qnde.mei.titech.ac.jp)  
 2) 東京工業大学大学院情報理工学研究科 (〒 152-8552 東京都目黒区大岡山 2-12-1, E-mail: van-knagai@qnde.mei.titech.ac.jp)  
 3) 東京工業大学大学院情報理工学研究科教授 (〒 152-8552 東京都目黒区大岡山 2-12-1, E-mail: shirose@cv.titech.ac.jp)

To enhance the quality of ultrasonic nondestructive evaluation of defects in composite materials, it is one of the important keys to gain detailed knowledge on the elastic wave propagation behavior. In this paper, a Fast Multipole Boundary Element Method with diagonal form is developed for a large scale multiple scattering problem. The accuracy and computational efficiency of the proposed method are discussed. Large scale multiple scattering problems for the composites with regular or random arrangements are solved by applying periodical boundary conditions to the proposed method. The characteristics of reflected and transmitted energy by the composites are investigated.

**Key Words**: Periodic Boundary Condition, Multiple Scattering, Boundary Element Method, Fast Multipole Method.

### 1. はじめに

産業分野において、異種材料からなる複合材料が広く用いられるようになり注目を集めている。一般的に、異種材料を適切に組み合わせることにより、材料強度、靱性、剛性、そして、化学的特性を、単一の材料に比べて高めることが可能となるが、得られた複合材料は極めて非均質な材料となる。今日、材料や構造物の健全性の評価において非破壊評価の重要性が高まっているが、非破壊評価法のうち、最も一般的に用いられているものは、超音波非破壊検査法である。超音波非破壊検査法とは、材料表面に探触子を当て超音波を送受信し、受信した波形を基に材料中に存在する欠陥の有無、位置、大きさといった情報を判定する手法である。しかし、複合材料に超音波を入射すると、強化材による多重散乱によって非常に複雑な波動場が形成される<sup>(1)</sup>ため、より定量的な非破壊評価を行うには複合材料中を伝播する波動特性を明らかにする必要がある。Biwaら<sup>(2)</sup>は繊維強化材複合材料におけるSH波の多重散乱解析を行い、繊維配置が波動伝播に及ぼす影響を明らかにしている。永井、廣瀬は<sup>(3)</sup>境界要素法を用いて超音波ノイズの解析を行っている。また、Cai<sup>(4)(5)</sup>らは等間隔に配置された介在物による効率的な多重散乱解析手法を提案している。いずれの手法にしろ、多重散乱解析では必然的に大規模な計算を必要とする。本研究では、多重散

乱問題を数値解析手法を用いて解くために、無限遠を含めた散乱波の評価が容易である境界要素法<sup>(6)</sup>を用いることを考える。しかし、境界要素法は積分方程式から誘導される代数方程式が密行列になることから、自由度の高い問題に対しては実用的な計算時間、記憶容量で計算を実行することは困難であることが知られている。そのため、本研究で扱う多重散乱問題といった大規模問題に対しては、何らかの手法を用いて境界要素法を高速化することが計算効率上必要不可欠である。そこで、本研究では、大規模問題のための数値解析手法として急速に発達し続けている高速多重極法(FMM)を境界要素法に適用した高速多重極境界要素法(FMBEM)<sup>(6)</sup>を用いる。高速多重極境界要素法は、多重極展開を用いることにより遠方場からの寄与をまとめて評価する手法として知られ、計算時間、記憶容量を従来の境界要素法に比べ大幅に軽減させることが可能となる。そこで、本研究では高速多重極境界要素法を用いて多重散乱解析を効率よく実行し、材料中における多数の介在物群による反射ならびに透過エネルギーの特性を数値的に明らかにする。

### 2. 二次元動弾性境界値問題

等方均質な二次元弾性体  $D$  における面内調和波動問題を考える。角周波数が  $\omega$  であるとき、Navier の方程式は、変

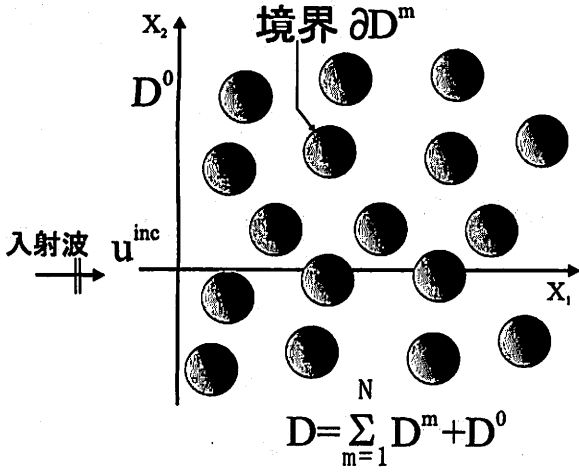


Fig. 1 多重散乱解析モデル

位  $u_i$  および物体力  $X_i$  によって、

$$c_T^2 u_{i,jj} + (c_L^2 - c_T^2) u_{j,ji} + \rho \omega^2 u_i + X_i = 0 \quad (1)$$

と表される。ここに、 $c_L$  は  $P$  波、 $c_T$  は  $S$  波の位相速度であり、Lamé 定数を  $\lambda$ 、 $\mu$ 、質量密度を  $\rho$  とするとき、

$$c_L = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad c_T = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (2)$$

である。応力  $\sigma_{ij}$  は、弾性定数  $C_{ijkl}$  により

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} u_{k,l} = \lambda \delta_{ij} u_{k,k} + \mu (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (3)$$

で表される。 $\delta_{ij}$  は Kronecker のデルタである。ここで Fig.1 に示すような、無限弾性媒質  $D^0$  中に  $N$  個の介在物  $D^m$  ( $m = 1, 2, \dots, N$ ) が存在する時の入射波  $u^{inc}$  による散乱問題を考える。解くべき問題は、全領域  $D$  において Navier の方程式 (1) を満足し、境界  $\partial D^m$  上で与えられた変位  $u_i$ 、及び表面力  $t_i$  に関する次の完全結合条件、

$$u_i^{m+} = u_i^{m-}, \quad t_i^{m+} = -t_i^{m-} \quad \text{on } \partial D^m \quad (4)$$

を満たす変位  $u_i$ 、表面力  $t_i$  を決定する問題である。ただし式 (4) において、 $+$  と  $-$  は  $\partial D^m$  における  $D^0$  側と  $D^m$  側の変位および表面力である。今、物体力を無視すると、Navier の方程式 (1) の解  $u_i$  は、動弾性学における Somigliana の公式により、領域  $D^0, D^m$  に対してそれぞれ、

$$\begin{aligned} & c_{ij}^0(\mathbf{x}) (u_i^{m+}(\mathbf{x}) - u_i^{inc}(\mathbf{x})) \\ &= \sum_m \left[ \int_{\partial D^m} \{U_{ij}^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) t_j^{m+}(\mathbf{y}) - W_{ij}^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u_j^{m+}(\mathbf{y})\} ds_y \right. \\ & \left. - \int_{\partial D^m} \{U_{ij}^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) t_j^{inc}(\mathbf{y}) - W_{ij}^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u_j^{inc}(\mathbf{y})\} ds_y \right] \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} & c_{ij}^m(\mathbf{x}) u_i^{m-}(\mathbf{x}) = \\ & \int_{\partial D^m} \{U_{ij}^m(\mathbf{x}, \mathbf{y}) t_j^{m-}(\mathbf{y}) - W_{ij}^m(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u_j^{m-}(\mathbf{y})\} ds_y \end{aligned} \quad (6)$$

を満足する。ここに、 $c_{ij}(\mathbf{x})$  は、境界に依存する自由項である。 $U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  は基本解で、 $r_{xy} = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$  とすれば、

$$\begin{aligned} U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{i}{4\mu} \left[ H_0^{(1)}(k_T r_{xy}) \delta_{ij} \right. \\ & \left. + \frac{1}{k_T^2} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left\{ H_0^{(1)}(k_T r_{xy}) - H_0^{(1)}(k_L r_{xy}) \right\} \right] \end{aligned} \quad (7)$$

で表される。ここに、 $H_0^{(1)}$  は 0 次の第一種 Hankel 関数である。 $W_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  は第二基本解で、

$$W_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \overset{n}{T}_{jk}(\mathbf{y}) U_{ik}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (8)$$

で定義される。また、 $\overset{n}{T}_{jk}$  は応力ベクトル作用素であり、

$$\overset{n}{T}_{jk} u_k = n_k \sigma_{kj} = \lambda n_j u_{i,i} + \mu n_k (u_{j,k} + u_{k,j}) \quad (9)$$

で定義される。 $n_i$  は境界上の外向き法線ベクトルを表す。式 (5)、(6) で表された境界積分方程式を離散化し、得られる代数方程式を解けば、変位  $u_i$  を求めることが出来る。

### 3. エネルギー透過率

多重散乱問題では多数の散乱体の相互干渉によって非常に複雑な挙動を示す。よって各点ごとの変位や応力などを詳細に検討することはあまり得策ではない。波動が散乱体を通ると散乱現象によって透過エネルギーが減衰する。このようなエネルギーの変動はしばしば散乱体群の特性と密接に関連しており、多重散乱現象を検討する上で有用な指標となりうる。よってここではエネルギー透過率の定義を示し、後に示す解析結果の考察において用いる。

エネルギー透過率は、介在物の存在する領域を通過したエネルギー量  $\langle E \rangle$  と入射波の持つエネルギー量  $\langle I \rangle$  の比で表すことができる。ここで  $\langle \cdot \rangle$  は時間平均を表す。また  $E$  は、次式で定義される介在物の存在により生じた散乱波  $u_i^{sc}$  が有する単位時間単位面積当たりのエネルギーである。

$$E = \frac{1}{A} \int_A n_i \sigma_{ij}^{sc} u_j^{sc} dA \quad (10)$$

ここに、 $A$  は散乱波が通過する任意の面であり、 $n_i$  はこの面の単位法線ベクトルである。また、 $\sigma_{ij}^{sc}$  は  $u_i^{sc}$  に対応する応力であり、 $\bar{\cdot}$  は時間領域の値を意味する。さらに、式 (10) は、時間因子を  $e^{-i\omega t}$  とする定常波動場においては、

$$\langle E \rangle = -\frac{\omega}{2A} \int_A n_i \text{Im}[\sigma_{ij}^{sc} u_j^{sc}] dA \quad (11)$$

で表される。 $*$  は複素共役である。いま、入射波を、波数  $k_L$ 、入射伝播方向ベクトル  $\mathbf{p}$  の成分  $p_i$  を用いた単位振幅の平面  $P$  波

$$\tilde{u}_i^{inc}(\mathbf{x}, t) = p_i e^{i(k_L p_k x_k - \omega t)}$$

とすると、入射波の持つエネルギー  $\langle I \rangle$  は、次のようになる。

$$\langle I \rangle = -\frac{\omega}{2} k_L (\lambda + 2\mu) \quad (12)$$

最終的に式 (11) および式 (12) の関係から、エネルギー透過率は以下のように導かれる。

$$\frac{\langle E \rangle}{\langle I \rangle} = \frac{1}{k_L (\lambda + 2\mu) A} \int_A n_i \text{Im}[\sigma_{ij}^{sc} \cdot u_j^{sc}] dA \quad (13)$$

Table 1 解析に用いた材料密度及び波速

	密度 $\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	$c_L$ (m/s)	$c_T$ (m/s)
母材	4400	6100	3200
介在物	3200	11700	7450

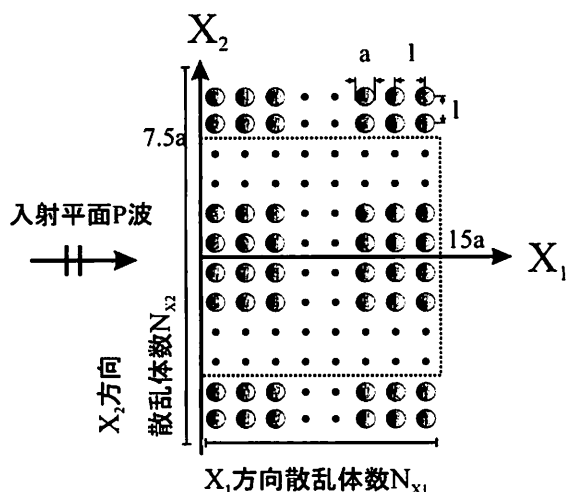


Fig. 2 入射平面 P 波に対する多重散乱モデル

#### 4. 高速多重極境界要素法

先に述べたように、本研究では多重散乱問題を効率よく実行するために高速多重極境界要素法 (FMBEM) を用いる。FMBEM は、福井ら<sup>(7)</sup>、西村ら<sup>(8)</sup>により二次元 Helmholtz 問題、三次元動弾性問題に対する定式化が示され、今日まで発展してきた。本論文では詳しい定式化は割愛し、FMBEM の概略を述べるにとどめる。FMBEM は、波動問題に対しては、解くべき問題の領域サイズと問題となる波数の関係から、従来の高速多重極法を用いた定式化と Diagonal Form<sup>(9)</sup>を用いた定式化を使い分ける必要がある。理由は多重極展開に必要な展開項数が各レベル間で波数の増加と共に増えることに起因する。そのような場合に多重極展開は遠方では Fourier 級数で表される性質を利用して計算を効率化させる方法が Diagonal Form と呼ばれており、福井<sup>(10)</sup>ら、大谷<sup>(11)</sup>らにより diagonal form を用いた高速多重極境界要素法が行われている。本研究においても Diagonal Form を用いた高速多重極境界要素法を用いる。

##### 4.1. FMBEM に関する数値的検討

diagonal form への切り替え波数を数値計算により決定する。そのために、Fig.2 で表されるような平面 P 波による多重散乱問題を  $N_{x1} = 8$ ,  $N_{x2} = 4$  とし、境界要素法、通常の高速度多重極境界要素法、diagonal form を利用した場合の高速度多重極境界要素法を用いて計算を行った。介在物は全て直径  $a$  の円とし  $x_1, x_2$  方向の隣り合う介在物の中心間距離を  $l = 2a$  とした。この時、要素数は 6400 (未知数 12800) である。また、母材、各介在物における密度、波速は Table1 の値を用いた。まず、diagonal form を利用した場合の高速度多重極境界要素法において高速多重極アルゴリズムという最小セル<sup>(6)</sup>に外接する円の半径を  $d$  とし無次元化波数を  $k_L d = 2.5 \sim 10$  と変化させ計算を行った。Fig.3 は境界要素法及び diagonal form を利用した高速多重極境界要素法で得られた全ての境界値の相対誤差の最大値をそれぞれの波数ごとにプロットしたものである。 $k_L d$  が増加するにつれて解の相対誤差は減少

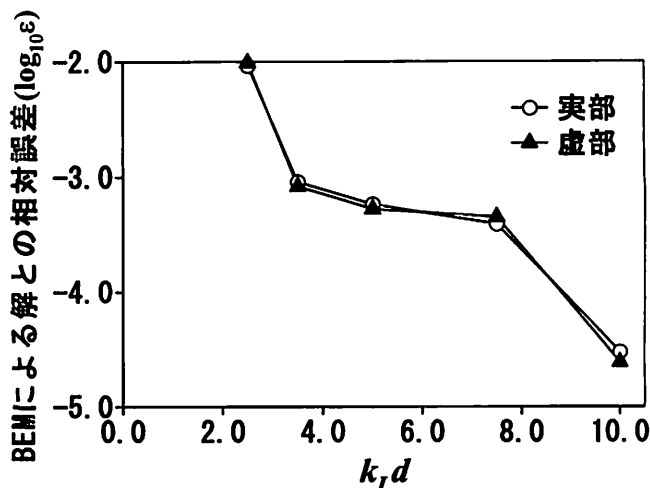


Fig. 3 相対誤差の比較

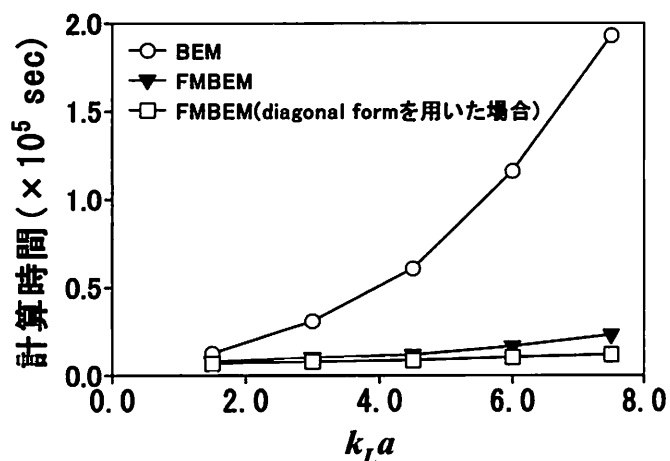


Fig. 4 計算時間の比較

する。 $k_L d = 3.0$  以上では、誤差は  $10^{-3}$  以下で推移していることがわかる。実用上は 3 桁程度で十分であると考えられる。この結果から、若干余裕を見込み  $k_L d = 5.0$  以上となるレベルのセルについて diagonal form を用いることにする。一方、波数の増加と計算時間の関係を調べるために、Fig.4 に境界要素法、通常の高速度多重極境界要素法及び diagonal form を利用した場合の高速度多重極境界要素法 ( $k_L d \geq 5.0$  で diagonal form 利用) における波数、計算時間の関係を示す。diagonal form を利用した場合は波数の増加と共に計算時間の増加率が小さく、効率的に計算を実行できていることがわかる。

#### 5. 解析結果

様々に配置された介在物群に対する多重散乱解析結果を示

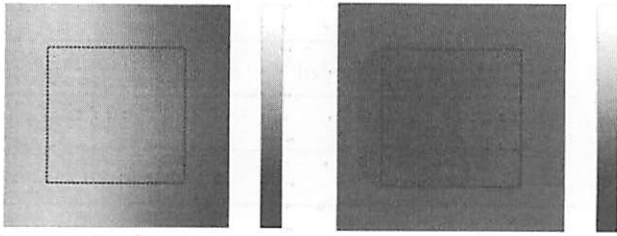


Fig. 5  $k_L a = 0.15$  における全変位場 (実部) Fig. 6  $k_L a = 0.15$  における全変位場 (絶対値)

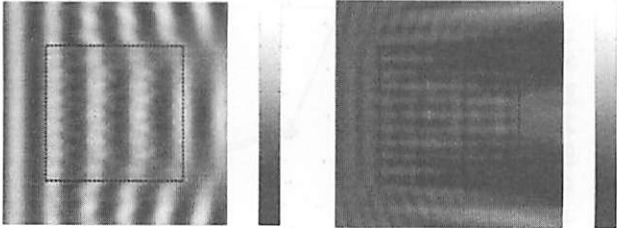


Fig. 7  $k_L a = 1.55$  における全変位場 (実部) Fig. 8  $k_L a = 1.55$  における全変位場 (絶対値)

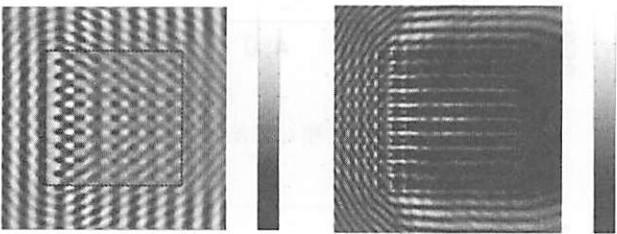


Fig. 9  $k_L a = 3.09$  における全変位場 (実部) Fig. 10  $k_L a = 3.09$  における全変位場 (絶対値)

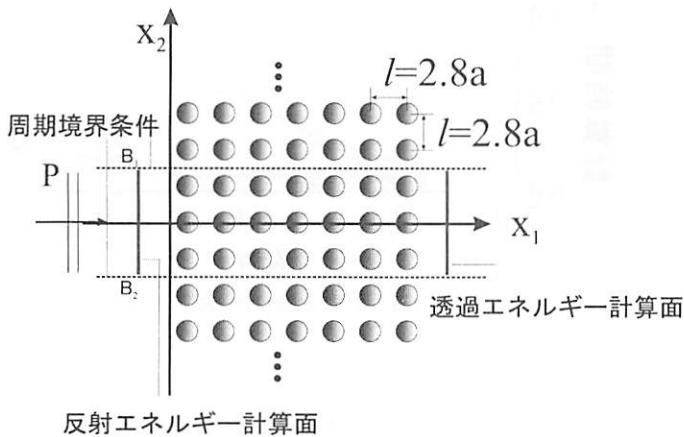


Fig. 11  $x_2$  方向に介在物が等間隔・無限個配置された場合の多重散乱モデル

す。なお、介在物は全て直径  $a$  の円とし、母材、各介在物における密度及び、波速は Table 1 と同様とする。入射波は平面 P 波である。

### 5.1. 等間隔配置された有限個の介在物による多重散乱解析

介在物の総数が有限個で、現実的な計算時間内で計算が可能な場合は直接、高速多重境界要素法を用いて波動場を求めることが出来る。Fig. 5, 6 は Fig. 2 において  $l = 1.5a$ ,  $N_{x1} = 10$ ,  $N_{x2} = 5$  の条件で配置された介在物群に対して  $k_L a = 0.15$  の平面 P 波が入射した時の波動場の実部及び絶

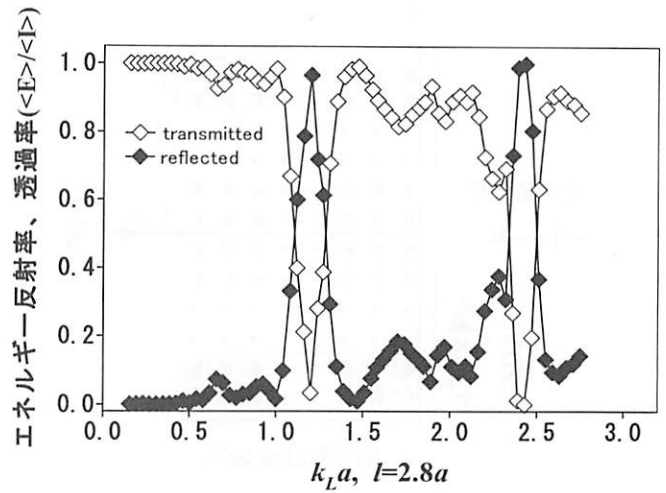


Fig. 12 等間隔配置された無限個の介在物による波数とエネルギーの関係

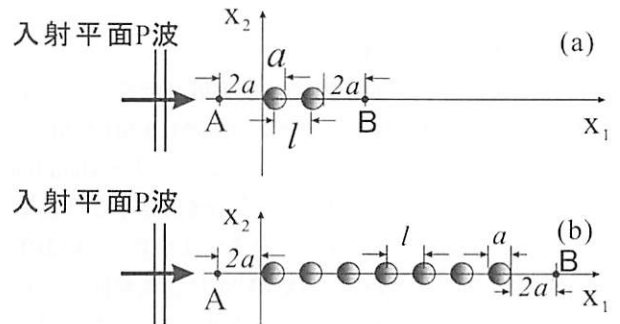


Fig. 13 2個及び7個の介在物による解析モデル

対値を表している。同様に、Fig. 7, 8 は  $k_L a = 1.55$  の場合、Fig. 9, 10 は  $k_L a = 3.09$  の場合の全波動場の実部、虚部をそれぞれ表している。この時、介在物は Fig. 2 における横  $15a$ 、縦  $15a$  の正方領域中に、体積含有率  $\phi = 34.9\%$  (正方領域の面積に対する介在物の占める面積の割合) で配置されている。 $k_L a = 0.15$  の場合では散乱体の直径や配置間隔に対して波長の長い波が入射しているため、入射波はほとんど散乱されることがなく透過していることがわかる。一方、 $k_L a = 1.55$  では、散乱体を通過した波動と母材を通過した波動で位相のずれが生じている。これは、散乱体内部における波速が母材中のそれよりも速いためであると考えられる。 $k_L a = 3.09$  では、介在物群を通過する波動の変位がしだいに小さくなっていることが確認出来る。これはある特定の波数において入射波の大部分が反射されるストップバンド<sup>(12)</sup>と呼ばれる現象が生じていると考えられる。

### 5.2. 無限個の介在物による多重散乱解析

介在物が  $x_2$  方向にある周期性を持って無限に配置しているモデルを考える。

#### 5.2.1 等間隔配置された無限個の介在物

介在物が Fig. 11 のように  $x_2$  方向に対して無限個配置されている場合を考える。介在物は  $l = 2.8a$  の間隔で配置されて

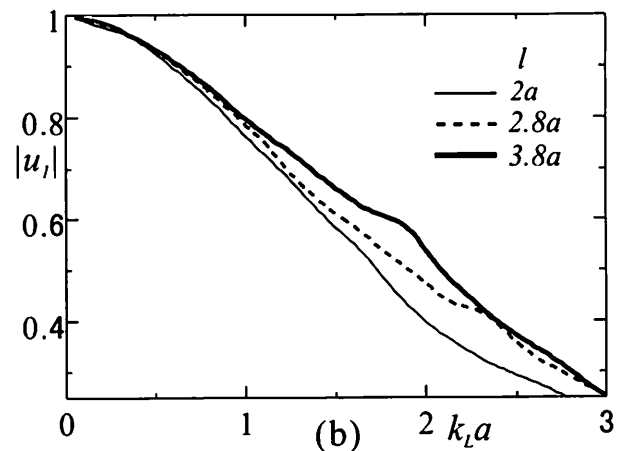
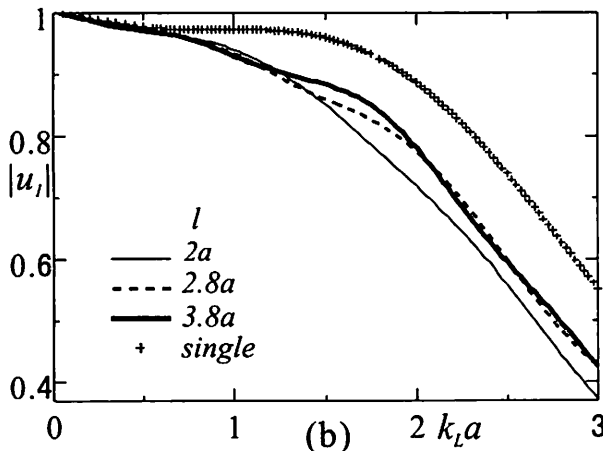
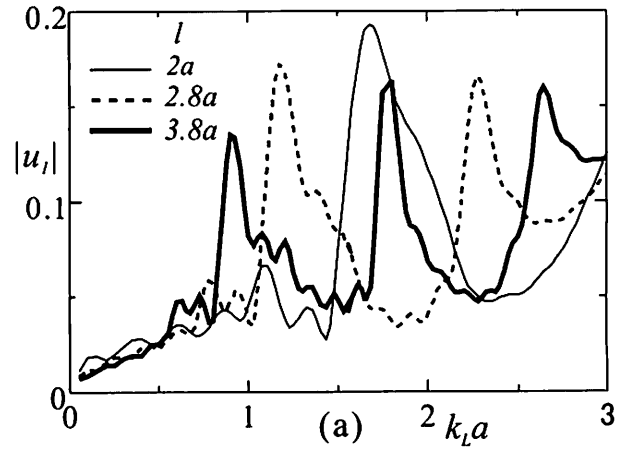
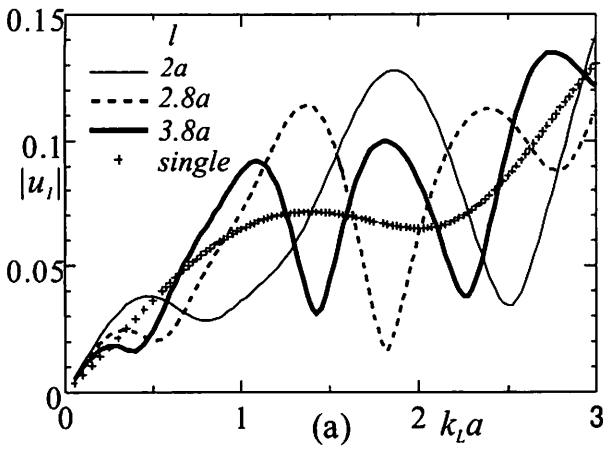


Fig. 14 2個の間在物による点A(a),B(b)における水平変位

Fig. 15 7個の間在物による点A(a),B(b)における水平変位

いるとする。この時、Fig.11のように  $x_2 = \pm 4.2a$  にそれぞれ仮想境界 B1, B2 を設定しそれぞれの境界上の境界値  $u_i^{B1}$ ,  $t_i^{B1}$  及び、 $u_i^{B2}$ ,  $t_i^{B2}$  に周期境界条件、

$$u_i^{B1} = u_i^{B2}, t_i^{B1} = -t_i^{B2} \quad (14)$$

を与え解析を行った。Fig.12 は式 (13) を用いて反射、透過エネルギー率を求めた結果である。全体の傾向として、波数の増加に伴い、エネルギー透過率は少しずつ減少する傾向にあるが、 $k_L a = 1.2, 2.4$  付近ではエネルギー透過率が大きく減少し、逆に反射率は大きくなっていることが確認出来る。有限個の間在物の解析で見られたストップバンドの現象である。なお、間在物配置間隔  $l$  を変化した場合においても特定の波数でエネルギー透過率が非常に小さくなる。

また比較のため Fig.13 のような間在物が  $x_1$  方向に 2 個、 $x_2$  方向に 7 個のみ存在する場合を考える。Fig.14,15 は Fig.13 中の点 A, B における  $x_1$  方向の変位を表した図である。間在物間の距離  $l$  を  $l = 2a, 2.8a, 3.8a$  と変化させている。また、Fig.14 には単一の間在物による結果も示している。これらの図より、点 A における反射波の変位は、間在物が 2 個の場合にも既に Fig.12 で見られたストップバンドが見られ、波数  $lk_L = n\pi$  において大きくなっていることがわかる。ただし、Fig.14(b)、Fig.15(b) の点 B での透過波にはストップバンドに対応する応答は見られない。また、配置間隔が疎であ

る場合ほど低い波数帯で大きな反射波を確認することが出来る。

### 5.2.2 ランダム配置された無限個の間在物

Fig.16,17 のように  $10a \times 10a$  の領域に体積含有率  $\phi = 15.8\%$  (Fig.16)、 $\phi = 23.5\%$ (Fig.17) で間在物がランダムに配置され、前節と同様、 $x_2$  方向にその領域が無限に配置されているとする。Fig.18,19 はそれぞれ Fig.16,17 の間在物配置に対応する反射・透過エネルギー率を求めた結果である。Fig.18,19 より体積含有率が  $\phi = 15.8\%$  と疎である場合の方が、各波数間のエネルギー反射率・透過率の増減幅が大きい傾向にある。これについては一般的な常識に反しており、今後詳細な検討が必要である。また低い波数帯から反射エネルギーが増加する傾向にある。また、体積含有率  $\phi = 15.8\%$ 、 $\phi = 23.5\%$  の場合ともに、Fig.12 のような顕著なストップバンド現象は確認されなかった。なお、本研究では反復解法として GMRES 法を用いている。ブロック対角行列を前処理行列として使用しているが、周期境界条件を与えて解析を行った場合、行列の非対角項に周期境界条件による寄与が加わるため、行列の性質が悪くなり、反復回数が増加した。周期境界条件を与えた場合の収束性の改善は今後の大きな課題である。

## 6. おわりに

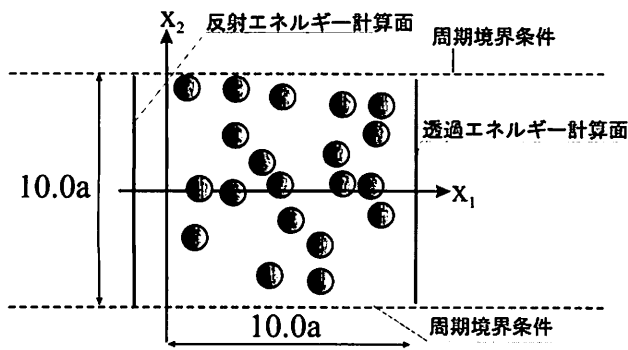


Fig. 16  $x_2$  方向に介在物がランダム・無限個配置された場合の多重散乱モデル、 $\phi = 15.8\%$

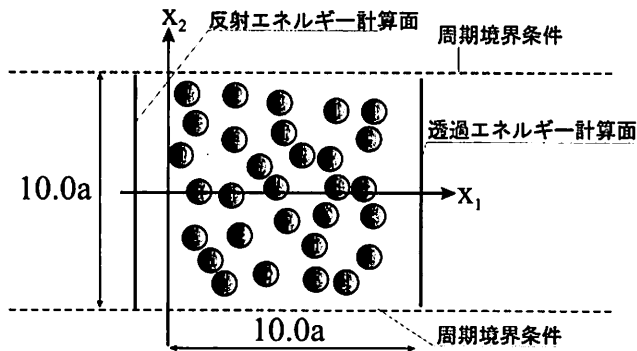


Fig. 17  $x_2$  方向に介在物がランダム・無限個配置された場合の多重散乱モデル、 $\phi = 23.5\%$

FMBEM を二次元面内多重散乱問題に適用した。無限個の介在物に対する多重散乱問題には単位領域に周期境界条件を導入し、介在物群による反射ならびに透過エネルギーの特性を数値的に明らかにした。今後は、より効率的な解析手法の開発と体積含有率、配置間隔とエネルギーの関係をより明らかにするとともに、三次元問題への拡張を試みる予定である。

### 参考文献

- (1) 琵琶志朗：複合材料の弾性波動散乱理論 = 超音波減衰特性の理解のために =, 超音波 TECHNO, 11-12(2001), pp. 85-89.
- (2) S. Biwa, S. Yamamoto, F. Kobayashi and N. Ohno : Computational multiple scattering analysis for shear wave propagation in unidirectional composites, *Int. J. Solids Struct.*, 41(2004), pp. 435-457.
- (3) 永井浩二, 廣瀬壮一 : 境界要素法を用いた超音波ノイズの解析, 第 58 回年次学術講演回, 土木学会 (2003)
- (4) L. W. Cai and J. H. Williams, Jr.: Large-scale multiple scattering problems, *Ultrasonics*, 37(1999), pp.453-462.
- (5) L. W. Cai and J. H. Williams, Jr.: Full-scale simulations of elastic wave scattering in fiber-reinforced composites, *Ultrasonics*, 37(1999), pp.463-482.
- (6) 小林昭一編著：波動解析と境界要素法, 京都大学学術出版会, (2000)

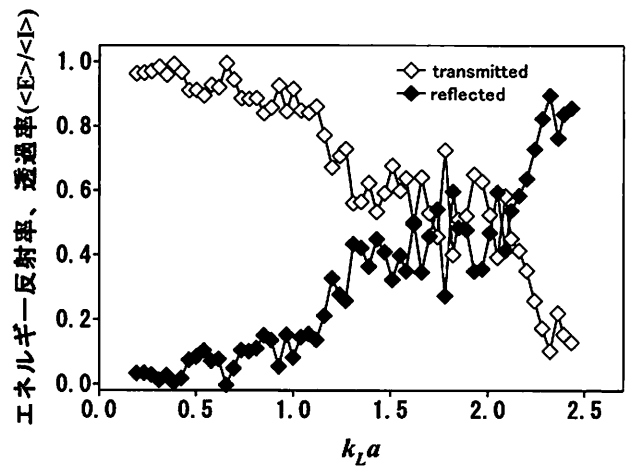


Fig. 18 ランダム配置された無限個の介在物による波数とエネルギーの関係、 $\phi = 15.8\%$

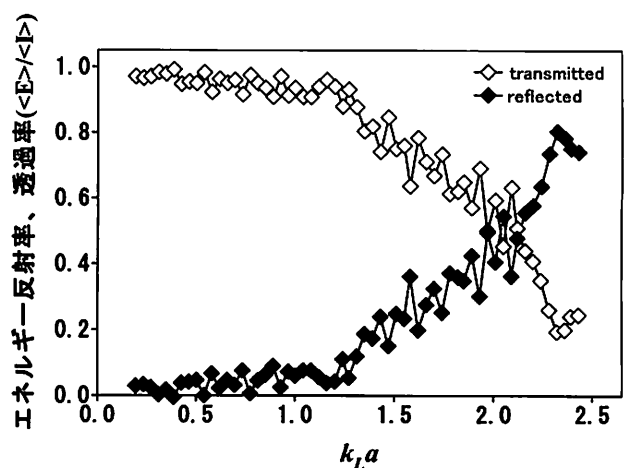


Fig. 19 ランダム配置された無限個の介在物による波数とエネルギーの関係、 $\phi = 23.5\%$

- (7) 福井卓雄, 勝本順三 : 2次元 Helmholtz 方程式のための高速多重極アルゴリズムと境界要素法への応用, 境界要素法論文集, 14(1997), pp.81-86.
- (8) N. Nishimura : Fast multipole accelerated boundary integral equation methods, *Applied Mechanics Rev.*, 55(2002), pp. 299-324.
- (9) V. Rokhlin : Rapid solution of integral equations of scattering theory in two dimensions, *J. Computational Physics*, 86(1990), pp.414-439.
- (10) 福井卓雄, 勝本順三 : 高速 Fourier 変換を援用した高速多重極境界要素法による 2次元散乱問題の解析, 境界要素法論文集 15(1998), pp.93-98.
- (11) 大谷佳広, 西村直志 : 2次元 Helmholtz 方程式における改良された多重極法と前処理について, 応用力学論文集 6(2003), pp.283-292.
- (12) L. W. Cai and J. H. Williams, Jr.: NDE via stop band formulation in fiber reinforced composites having square fiber arrangements, *Ultrasonics*, 37(1999), pp.483-492.