

1次元熱方程式に対する有限要素法における Hilbert 変換と基底関数の拡張を用いた安定化について

On stabilisation of a finite element method for the heat equation in 1D
using the Hilbert transformation and expansion of a basis function

新納 和樹¹⁾, 竹内 祐介²⁾

Kazuki NIINO and Yusuke TAKEUCHI

1) 京都大学大学院情報学研究科 (〒 606-8501 京都市左京区吉田本町, E-mail: niino@i.kyoto-u.ac.jp)

2) 京都大学大学院情報学研究科 (〒 606-8501 京都市左京区吉田本町, E-mail: takeuchi@acs.i.kyoto-u.ac.jp)

This paper proposes a stabilisation method for a finite element method using the Hilbert-type operator for the heat equation. We show that the operator is identical to the original Hilbert-type operator \mathcal{H}_T up to a compact perturbation. Through a numerical example, it is also verified that the proposed method can control the computational cost and accuracy in a trade-off manner by changing parameters contained in the definition of the proposed operator.

Key Words: Finite element method (FEM), Space-time method, Heat equation, Hilbert-type transformation

1. 序論

時間域の線形偏微分方程式に対する安定な数値解法について、古くから様々な研究が行われてきた。近年、特に熱方程式や波動方程式を対象とする有限要素法において、Hilbert 型変換を用いた安定化手法^(1, 2)が提案され、盛んに研究されている。この方法は、空間方向だけでなく時間方向にも変分形式を用いて離散化を行い、変分形式における任意関数を適切な関数空間から選ぶことで、その双線形形式 $a(u, v)$ が強圧性

$$a(u, u) \geq C\|u\|^2$$

を、最大の係数 C (すなわち $C = 1$) で満たすようにする、というアイデアに基づく方法である。特に熱方程式、すなわち時間微分に関する双線形形式では、任意関数 v を Hilbert 変換型の作用素 \mathcal{H}_T (この作用素の具体的な定義は 2 節で与える。 T は時刻の最大値) の像空間から取ることで、上の条件が満たされることが示された^(1, 3)。我々のグループでは作用素 \mathcal{H}_T を直接計算するとその実装が煩雑になることから、類似のより実装が容易な作用素 $\tilde{\mathcal{H}}_\infty$ を用いることでも安定化が実現できることを示した⁽⁴⁾。一方で Steinbach and Missoni は、関数の台を適当に拡張することで Hilbert 変換 \mathcal{H} が作用素 \mathcal{H}_T とコンパクト作用素を除いて等しいことを示した⁽⁵⁾。

そこで本稿では、Hilbert 型変換 \mathcal{H}_T とコンパクト作用素を除いて等しい、新たな作用素 $\mathcal{H}_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2}$ を導入する。この作用素はパラメータ $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ を含む作用素であり、このパラメータを適切に設定することで Hilbert 変換 \mathcal{H} と一致することから、Steinbach and Missoni の Hilbert 変換の拡張と言える。また我々の先行研究⁽⁴⁾の数値解法では、用いた作用素 $\tilde{\mathcal{H}}_\infty$ が「コンパクト作用素を除いて作用素 \mathcal{H}_T に等しい」という性質を満たさないが、本稿で提案する作用素 $\mathcal{H}_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2}$ はこの性質を満たすため、提案法はより妥当性の高い手法であると言える。実際簡単な数値計算例を通して、提案法が計算量・精度の両面において $\tilde{\mathcal{H}}_\infty$ を用いる従来法より優れていることを示す。また提案法におけるパラメータを適宜変更することで、精度と計算時間がトレードオフの関係で変化し、最も精度を重視するパラメータが Hilbert 変換 \mathcal{H} に対応することも数値例を通して示す。

本稿の構成は以下のとおりである。2 節で本稿で扱う熱方程式とその変分形式の定式化、および各種 Hilbert 型変換の定義を行う。3 節では、2 節で定義した各作用素の満たす関係を示す。4 節で改めて本稿で提案する有限要素法の安定化法の定式化を与える。5 節で数値計算例を示し、最後に 6 節で結論と今後の課題を述べる。

2. 熱方程式と変分形式

1次元熱方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t), \quad (x, t) \in (x_1, x_2) \times (0, \infty) \quad (1)$$

を満たす関数 u を, 境界条件

$$u(x_1, t) = g_1(t)$$

$$u(x_2, t) = g_2(t)$$

および初期条件

$$u(x, 0) = 0$$

の下で求める問題を考える.

この問題を有限要素法を用いて数値的に解く場合, 熱方程式 (1) の空間変数 x に関する変分方程式

$$\int_{x_1}^{x_2} v(x) \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) dx = - \int_{x_1}^{x_2} \frac{dv}{dx}(x) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) dx$$

を時刻 t に関する常微分方程式と見なし, 適当な差分法を用いる方法が広く用いられる. ここに $v(x)$ は任意関数である. 本稿では $w(x, t)$ を任意関数とし熱方程式 (1) の時空間に関する変分方程式

$$\int_0^T \int_{x_1}^{x_2} w(x, t) \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) dx dt = - \int_0^T \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial w}{\partial x}(x, t) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) dx dt \quad (2)$$

を考える. 時間方向の変分方程式を考える利点として, 最適なテスト空間による変分法により, 時間方向に安定な数値解法を構成できることが挙げられる. 最適なテスト空間による変分法とは, 任意関数 w を適切な関数空間から選ぶことで, 考える変分方程式の双線形形式が最も強い意味の強圧性を満たすようにする方法である. 例えば与えられた g に対する f に関する初期値問題

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt}(t) &= g(t) \\ f(0) &= 0 \end{aligned}$$

に対する変分方程式

$$\int_0^T h(t) \frac{df}{dt}(t) dt = \int_0^T h(t) g(t) dt \quad (3)$$

において,

$$h(t) = \mathcal{H}_T \tilde{f} := \int_0^T K_T(s, t) \tilde{f}(s) ds$$

$$K_T(s, t) = \frac{1}{2T} \left\{ \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{s-t}{T}\right)} + \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{s+t}{T}\right)} \right\}$$

とする. ここに f は Cauchy の主値積分である. このとき変分方程式 (3) の双線形形式

$$\tilde{a}(\tilde{f}, f) = \int_0^T (\mathcal{H}_T \tilde{f})(t) \frac{df}{dt}(t) dt$$

は, 適当な関数空間を考えると

$$a(f, f) = \|f\|$$

を満たすことが知られている^(1, 3). これは強圧性 $a(f, f) \geq C\|f\|^2$ を $C = 1$ で満たすという意味で, 最も強い条件の強圧性を満足すると捉えることができる. また K_T に対して $T \rightarrow \infty$ の極限を取ると

$$K_\infty(s, t) := \lim_{T \rightarrow \infty} K_T(s, t) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{s-t} + \frac{1}{s+t} \right)$$

となるので, 形式的に作用素 \mathcal{H}_∞ を

$$(\mathcal{H}_\infty \varphi)(t) = \int_0^\infty K_\infty(s, t) \varphi(s) ds$$

と定義する. この作用素 \mathcal{H}_∞ が Hilbert 変換

$$(\mathcal{H}\varphi)(t) := \int \frac{1}{t-s} \varphi(s) ds$$

と似ているために Hilbert 型変換と呼ばれる.

先行研究⁽⁴⁾ では, 作用素に含まれる被積分関数の特異性が等しいことから, \mathcal{H}_T の代わりに, 作用素

$$(\tilde{\mathcal{H}}_\infty \varphi)(t) := \int_0^T K_\infty(s, t) \varphi(s) ds$$

を用いる方法を提案した. 本稿では Steinbach and Missoni⁽⁵⁾ のアイデアをベースに新たに \mathcal{H}_T とコンパクト作用素を除いて等しい作用素を導出し, これを用いた安定な有限要素法を提案する.

3. 各作用素の関係

本節では2節で導入した各作用素が満たす関係性について述べる. 3.1節および3.2節では, Steinbach and Missoni⁽⁵⁾ に基づき作用素 $\mathcal{H}_T, \mathcal{H}_\infty, \mathcal{H}$ の関係性を示し, 特に \mathcal{H}_T と $-\mathcal{H}$ がコンパクト作用素を除いて等しいことを示す. 3.3節では \mathcal{H} とコンパクト作用素を除いて等しい作用素 $\mathcal{H}_{e_1}^2$ を導入する. なお, 本節では T を正数として, $t \in (0, T)$ とする.

3.1. 作用素 \mathcal{H} と \mathcal{H}_∞ の関係

本小節では作用素 \mathcal{H} と \mathcal{H}_∞ の関係について述べる. 2節で導入した作用素 \mathcal{H}_∞ は, 次のように変形できる:

$$\begin{aligned} (\mathcal{H}_\infty \varphi)(t) &= \int_0^\infty K_\infty(s, t) \varphi(s) ds \\ &= \frac{1}{\pi} \int \frac{\varphi(s)}{s-t} ds + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\varphi(s)}{s+t} ds \end{aligned} \quad (4)$$

この式の第二項について, $s \rightarrow -\sigma$ の変数変換を行うと

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\varphi(s)}{s+t} ds = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{\varphi(-\sigma)}{\sigma-t} d\sigma$$

となる. よって関数 $\tilde{\varphi}$ を

$$\tilde{\varphi}(s) := \begin{cases} \varphi(s) & \text{for } s \in [0, \infty) \\ -\varphi(-s) & \text{for } s \in (-\infty, 0) \end{cases}$$

と定義することで, (4) 式は

$$\begin{aligned} (\mathcal{H}_\infty \varphi)(t) &= \frac{1}{\pi} \int \frac{\varphi(s)}{s-t} ds + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{-\varphi(-s)}{s-t} ds \\ &= -(\mathcal{H}\tilde{\varphi})(t) \end{aligned} \quad (5)$$

となる.

3.2. 作用素 \mathcal{H}_∞ と \mathcal{H}_T の関係

関数 φ を、区間 $[0, T]$ で定義され $\varphi(0) = 0$ を満たす関数とする。この φ に対して区間 $[0, \infty)$ で定義される関数 $\bar{\varphi}$ を以下の様に定義する:

$$\bar{\varphi}(s) := \begin{cases} \varphi(s) & \text{for } s \in [0, T] \\ \varphi(2T - s) & \text{for } s \in (T, 2T) \\ 0 & \text{for } [2T, \infty) \end{cases}$$

この $\bar{\varphi}$ に作用素 \mathcal{H}_∞ を作用させると、

$$\begin{aligned} (\mathcal{H}_\infty \bar{\varphi})(t) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\bar{\varphi}(s)}{s-t} \frac{2s}{s+t} ds \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ \int_0^T \frac{\varphi(s)}{s-t} ds + \int_0^T \frac{\varphi(s)}{s+t} ds \right. \\ &\quad \left. + \int_T^{2T} \frac{\varphi(2T-s)}{s-t} ds + \int_T^{2T} \frac{\varphi(2T-s)}{s+t} ds \right\} \end{aligned}$$

となる。第 3, 4 項目の区間 $(T, 2T)$ における積分において、 $\sigma = 2T - s$ の変数変換を施すと、

$$\begin{aligned} (\mathcal{H}_\infty \bar{\varphi})(t) &= \frac{1}{\pi} \int_0^T \varphi(s) \left\{ \frac{1}{s-t} + \frac{1}{s+t} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2T-s-t} + \frac{1}{2T-s+t} \right\} ds \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^T \varphi(s) \left\{ \frac{2T}{(s-t)(2T-(s-t))} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2T}{(s+t)(2T-(s+t))} \right\} ds \end{aligned}$$

となる。ここで作用素 B を

$$\begin{aligned} (B\varphi)(t) &:= (\mathcal{H}_T\varphi)(t) - (\mathcal{H}_\infty \bar{\varphi})(t) \\ &= \int_0^T (k_1(s, t) + k_2(s, t))\varphi(s) ds \end{aligned} \quad (6)$$

と定義する。ここに

$$\begin{aligned} k_1(s, t) &:= \frac{1}{2T} \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{s-t}{T}\right)} - \frac{1}{\pi} \frac{2T}{(s-t)(2T-(s-t))} \\ k_2(s, t) &:= \frac{1}{2T} \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{s+t}{T}\right)} - \frac{1}{\pi} \frac{2T}{(s+t)(2T-(s+t))} \end{aligned}$$

である。 k_1, k_2 は $s, t \in (0, T)$ において有界かつ連続であるため、 B はコンパクト作用素である。したがって作用素 \mathcal{H}_T と \mathcal{H}_∞ は、式 (6) の意味においてコンパクト作用素を除いて等しいことがわかる。

さらに式 (5) より、 $-\mathcal{H}$ と \mathcal{H}_T も次の式の意味においてコンパクト作用素を除いて等しいと言える。

$$\mathcal{H}_T\varphi = -\mathcal{H}\bar{\varphi} + B\varphi$$

ここに $\bar{\varphi}$ は、区間 $(0, T)$ で定義される関数 φ を用いて

$$\bar{\varphi}(s) := \begin{cases} \varphi(s) & \text{for } s \in (0, T) \\ \varphi(2T - s) & \text{for } s \in (T, 2T) \\ -\varphi(-s) & \text{for } s \in (-T, 0) \\ -\varphi(2T + s) & \text{for } s \in (-2T, -T) \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (7)$$

で表される関数である。

3.3. 作用素 \mathcal{H} と $\mathcal{H}_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2}$ の関係

前節の結果より、有限要素法の安定化のために \mathcal{H}_T の代わりに、作用素

$$\mathcal{H}\bar{\varphi} = \int_{-\infty}^\infty \frac{\varphi(s)}{s-t} ds = \int_{-2T}^{2T} \frac{\varphi(s)}{s-t} ds$$

を用いる方法が考えられるが、時刻 t が $t \in (0, T)$ であることを利用して、分解

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} + \mathcal{K}$$

を考える。ここに

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \bar{\varphi} &:= \int_{-\varepsilon_1}^{T+\varepsilon_2} \frac{\bar{\varphi}(s)}{s-t} ds, \\ \mathcal{K} \bar{\varphi} &:= \left(\int_{-2T}^{-\varepsilon_1} + \int_{T+\varepsilon_2}^{2T} \right) \frac{\varphi(s)}{s-t} ds, \end{aligned} \quad (8)$$

$\varepsilon_1 \in (0, 2T]$, $\varepsilon_2 \in (0, T]$ である。実際、作用素 \mathcal{K} 内の核関数 $1/(s-t)$ は $t \in (0, T)$, $s \in (-2T, -\varepsilon_1)$ または $s \in (T+\varepsilon_2, 2T)$ において有界連続であるため、作用素 \mathcal{K} はコンパクトである。

以上より、作用素 $\mathcal{H}_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2}$ を \mathcal{H}_T の代わりに用いた有限要素法の安定化が考えられる。なお、 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ の値は、それぞれの最大値 $\varepsilon_1 = 2T$, $\varepsilon_2 = T$ において $\mathcal{H}_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} = \mathcal{H}$ であるため、大きく取るほど安定化の効果が大きくなる一方で、計算が必要な積分の範囲が増えるため計算量が增大すると考えられる。逆に $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ を小さく取ると、安定化の効果が弱まり計算量が小さくなることが予想される。また $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ の値をどれ程小さくとっても \mathcal{K} はコンパクトであるが、数値計算においてはあまりに小さく取ると安定化の効果が損なわれると考えられる。5 節で具体的な数値例を用い、上記の考察に関する検証を行う。

4. 提案する有限要素法とその実装

3 節の結果に従い、作用素 $\mathcal{H}_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2}$ を用いた有限要素法の定式化を行う。区間 (x_1, x_2) および $(0, T)$ をそれぞれ N_x, N_t 個の区間に等分割し、これらの各頂点上で定義された区分線形基底をそれぞれ $\psi_i(x)$, $\varphi_m(t)$ とする ($i = 0, \dots, N_x$, $m = 0, \dots, N_t$)。式 (2) の変分形式において、未知関数 u をこれらの基底関数を用いて

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{N_t} \sum_{j=0}^{N_x} u_j^n \psi_j(x) \varphi_n(t)$$

と内挿し、任意関数 w として、 $w(x, t) = \psi_i(x)(\mathcal{H}_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \bar{\varphi}_m)(t)$ を代入すると、

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N_t} \sum_{j=0}^{N_x} u_j^n \left\{ \int_0^T \int_{x_1}^{x_2} \psi_i(x) (\mathcal{H}_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \bar{\varphi}_m)(t) \psi_j(x) \frac{\partial \varphi_n(t)}{\partial t} dx dt \right. \\ \left. + \int_0^T \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \psi_i(x)}{\partial x} (\mathcal{H}_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \bar{\varphi}_m)(t) \frac{\partial \psi_j(x)}{\partial x} \varphi_n(t) dx dt \right\} \end{aligned}$$

を得る。ただし関数 $\bar{\varphi}_m$ は、 $(0, T)$ で定義された区分線形基底 φ_m に対して、式 (7) で定義された拡張を適用した関数で

ある. この式に (8) を代入することで,

$$\sum_{n=1}^{N_t} \sum_{j=0}^{N_x} u_j^n \left\{ \int_0^T \frac{\partial \varphi_n(t)}{\partial t} \int_{-\varepsilon_1}^{T+\varepsilon_2} \frac{\tilde{\varphi}_m(s)}{s-t} ds dt \int_{x_1}^{x_2} \psi_i(x) \psi_j(x) dx \right. \\ \left. + \int_0^T \varphi_n(t) \int_{-\varepsilon_1}^{T+\varepsilon_2} \frac{\tilde{\varphi}_m(s)}{s-t} ds dt \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \psi_i}{\partial x}(x) \frac{\partial \psi_j}{\partial x}(x) dx \right\} \quad (9)$$

を得る.

数値計算を行う際, ε_i の値は時間方向の分割幅 $\Delta t = T/N_t$ の整数倍 $\varepsilon_i = k_i \Delta t$ とする. 式 (9) の未知数は u_j^n ($j = 1, \dots, N_x - 1, n = 1, \dots, N_t$) であり, その個数は $(N_x - 1)N_t$ であるため, 解くべき線形方程式のサイズは k_i に依存しない. 一方, 式 (9) 中の各積分は, 分割した要素毎に計算を行うが, 線形方程式の係数行列を計算するために必要な時間方向の積分は

$$\int_{\Delta t_1} \frac{\partial \varphi_n(t)}{\partial t} \int_{\Delta t_2} \frac{\tilde{\varphi}_m(s)}{s-t} ds dt, \quad \int_{\Delta t_1} \varphi_n(t) \int_{\Delta t_2} \frac{\tilde{\varphi}_m(s)}{s-t} ds dt$$

である. ここに $\int_{\Delta t_i}$ ($i = 1, 2$) は, 時間方向の分割のある要素上での積分である. 式 (9) より, Δt_1 は N_t 個, Δt_2 は $N_t + k_1 + k_2$ 個の要素上で計算する必要がある. 一方, 式 (9) 中の空間方向積分に対応する行列は, サイズ N_x の疎行列であるため, N_x, N_t が十分大きいとき, その計算量は時間方向積分に要する計算量と比べて十分に小さい. 以上より, 係数行列の全ての非零要素を直接計算する場合, その計算量は概ね $N_t(N_t + k_1 + k_2)$ に比例すると考えられる.

また 3.3 節で述べた通り, $\varepsilon_1 = 2T, \varepsilon_2 = T$ とすることで, 式 (9) は作用素 \mathcal{H} を用いた有限要素法⁽⁵⁾ に一致する. また我々のグループが以前行った $\tilde{\mathcal{H}}_\infty$ を用いた方法⁽⁴⁾ は, 3.2 節の結果より, 式 (9) において $\varepsilon_1 = T, \varepsilon_2 = 0$ とした方法と一致することがわかる.

5. 数値計算例

本節では以下の問題に対して数値計算を行った.

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t), \quad (x, t) \in (-1, 1) \times (0, 1) \\ u(-1, t) = t^2 \\ u(1, t) = t^2 \\ u(x, 0) = 0$$

この問題は解析解が

$$u_{\text{ana}}(x, t) = t^2 + 4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{(k+1)}}{\alpha_k^3} \cos(\alpha_k x) \left(t + \frac{e^{-\alpha_k^2 t} - 1}{\alpha_k^2} \right),$$

$$\alpha_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

であることが知られている⁽⁶⁾.

本節で比較を行った有限要素法は以下の 3 つの方法である.

Approach 1 $\mathcal{H}_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \tilde{\varphi}$ をテスト関数に用いる提案法 (式 (9) において, $\varepsilon_i = k_i \Delta t$ ($i = 1, 2$) とする方法に対応. k_1, k_2 の値については, 各数値計算結果で示す.)

Approach 2 $\mathcal{H} \tilde{\varphi}$ をテスト関数に用いる方法⁽⁵⁾ (式 (9) において, $\varepsilon_1 = -2T, \varepsilon_2 = T$ とする方法と同値.)

Approach 3 $\tilde{\mathcal{H}}_\infty \varphi$ をテスト関数に用いる従来法⁽⁴⁾ (式 (9)

において, $\varepsilon_1 = -T, \varepsilon_2 = 0$ とする方法と同値.)

上記の数値解法に加えて, 空間方向の離散化に有限要素法, 時間方向の離散化に差分法 (陰解法) を用いる従来法:

$$\int_0^T \psi_i(x) \frac{\sum_{j=0}^{N_x} u_j^{k+1} \psi_j(x) - \sum_{j=0}^{N_x} u_j^k \psi_j(x)}{\Delta t} dx \\ = - \sum_{j=0}^{N_x} u_j^{k+1} \int_0^T \frac{\partial \psi_i}{\partial x}(x) \frac{\partial \psi_j}{\partial x}(x) dx$$

との比較も行った. 数値計算において, 積分の計算は全て解析的に行い, 線形方程式の求解には LU 分解に基づく直接解法を用いた. また Approach 1 における $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ の値は, 時間方向の刻み幅を $\Delta t = T/N_t$, k_1, k_2 を正の整数として $\varepsilon_i = k_i \Delta t$ ($i = 1, 2$) とした.

まず Approach 2 の妥当性の確認および差分法との比較のために, いくつかの分割数 N_t, N_x に対する Approach 2 と差分法の相対誤差を確認した. それぞれの数値解法の各時刻 t における数値解の相対誤差

$$\sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{N_x} |u_j^n - u_{\text{ana}}(x_j, t_n)|^2}{\sum_{j=1}^{N_x} |u_{\text{ana}}(x_j, t_n)|^2}} \quad (10)$$

を示した図を Fig. 1 に, 時空間での l_2 相対誤差

$$\sqrt{\frac{\sum_{n=0}^{N_t} \sum_{j=1}^{N_x} |u_j^n - u_{\text{ana}}(x_j, t_n)|^2}{\sum_{n=0}^{N_t} \int_{j=1}^{N_x} |u_{\text{ana}}(x_j, t_n)|^2}} \quad (11)$$

を示した表を Table 1 に示す. ここに $t_n = n \Delta t$, $x_j = -1 + j h_x$ は, それぞれ時空間分割の n, j 番目の節点の座標である. Fig. 1, Table 1 より Approach 2 では時空間方向の分割数が増加するほど精度が向上しており, また同程度の分割数の差分法と比べてより良い精度を示していることがわかる.

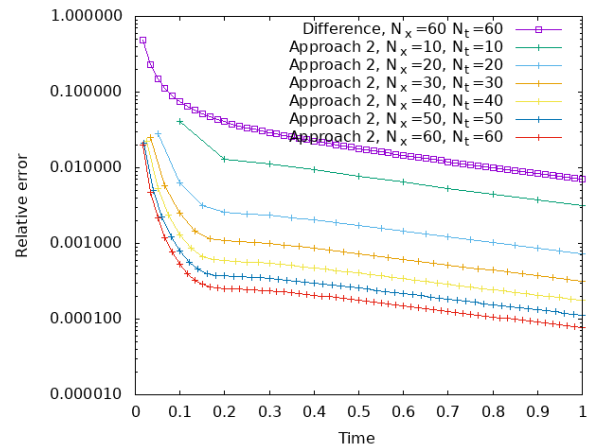


Fig. 1 Relative errors in (10) of Approach 2 and the difference method.

次に Approach 1 のパラメータ k_1, k_2 の検証および Approach 2, 3 との比較のための数値計算を行った. Fig. 2 は $k_2 = N_t$ で固定し, 積分範囲の下限に対応する k_1 を様々な値に取った Approach 1 と Approach 2, 3 の相対誤差をプロットした図である. Fig. 2 より Approach 3 は Approach 1, 2 と

Table 1 L_2 relative errors in (11) of Approach 2 and the difference method.

Approach 2	$N_x = N_t = 10$	4.058×10^{-3}
	$N_x = N_t = 20$	9.618×10^{-4}
	$N_x = N_t = 30$	4.204×10^{-4}
	$N_x = N_t = 40$	2.346×10^{-4}
	$N_x = N_t = 50$	1.495×10^{-4}
	$N_x = N_t = 60$	1.034×10^{-4}
Difference method	$N_x = N_t = 60$	9.840×10^{-3}

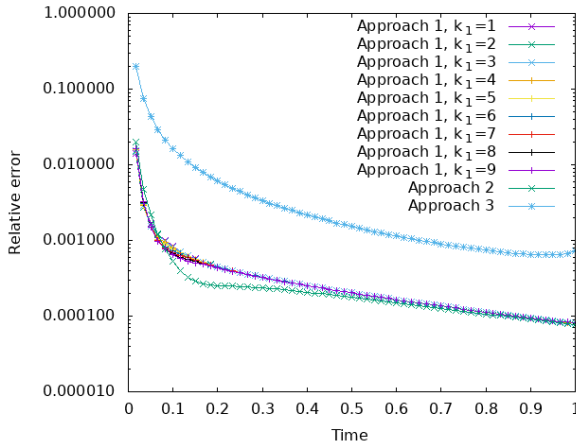


Fig. 2 Relative errors in (10) of Approach 1, 2 and 3.

比較して精度が悪い。Approach 3 は式 (9) において $\varepsilon_2 = 0$ (すなわち $k_2 = 0$) とした方法であり, ε_2 を正の値に取ることが本質的に重要であることがこの結果からもわかる。また Approach 1 の積分範囲の下限に対応する k_1 に関しては, 精度への影響があまり大きくないこともわかる。

次に Approach 1 の積分範囲の上限に対応する k_2 の検証のために, $k_1 = 1$ で固定し, 様々な k_2 に対する Approach 1 の相対誤差を Fig. 3 に示す。Fig. 3 より比較した方法の内, Approach 2 の精度が最もよく, Approach 1 では k_2 の値を大きくする程, 精度が Approach 2 に近づいていることがわかる。 k_2 の値を大きくする程, Approach 1 において計算が必要な積分の範囲が大きくなるため, 計算量と精度がトレードオフの関係になっていると言える。また $k_2 = 0$ の Approach 1 および Approach 3 は, 他の解法と比較して精度が悪く, この結果からも k_2 を正に取ることの重要性がわかる。

6. 結論

本稿では, 作用素 $\mathcal{H}_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2}$ を用いた熱方程式に対する有限要素法の安定化手法について述べた。この作用素が元の Hilbert 変換型作用素 \mathcal{H}_T とコンパクト作用素を除いて等しいことを示した。また数値例により, パラメータ $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ を変更することで計算量と精度をトレードオフの関係でコントロールできることも確かめた。作用素 $\mathcal{H}_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2}$ に関する行列は密行列になるため, 高速多重極法などを用いて高速化することが今

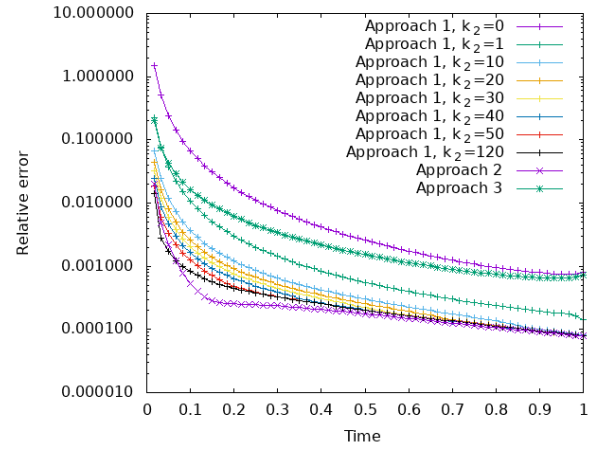


Fig. 3 Relative errors in (10) of Approach 1, 2 and 3.

後の課題として挙げられる。また本稿では基底関数として時空間それぞれの基底関数のテンソル積を用いた一次元の熱方程式という極めて単純な問題を扱ったが, 時空間の区分線形基底を用いる方法や, 空間の次元として高次の空間を考えるなど, より一般的な問題への本手法の適用も今後の課題である。本稿では簡単な数値例を通して, 提案手法のパラメータ ε_i を調節し積分範囲を広げることで精度が向上することを確認したが, この点に関する理論的な裏付けは得られておらず, 様々な問題に対してこの性質が成り立つかを調べることも今後の課題である。

参考文献

- (1) Olaf Steinbach: Space-time finite element methods for parabolic problems, Computational methods in Applied Mathematics, Vol.15, No.4, PD551-566, 2015.
- (2) Truman Ellis, Jesse Chan and Leszek Demkowicz: Robust DPG methods for transient convection-diffusion, In *Building Bridges: Connections and Challenges in Modern Approaches to Numerical Partial Differential Equations*, pp. 179-203, Springer, 2016.
- (3) Olaf Steinbach, Marc Zank: Coercive space-time finite element methods for initial boundary value problems, Berichte aus dem Institut für Angewandte Mathematik, 2018.
- (4) 新納和樹, 半澤美紗樹, Olaf Steinbach: Hilbert 型変換を用いた一次元熱方程式に対する有限要素法について, 計算数理工学論文集 Vol.19, 19-191201, 2019.
- (5) Olaf Steinbach, Agnese Missoni: A note on a modified Hilbert transform, *Applicable Analysis* Vol.102, pp. 2583-2590, 2023.
- (6) Patrick James Noon: The single layer heat potential and Galerkin boundary element methods for the heat equation, Thesis in the University of Maryland, 1988.

