

トポロジー導関数を用いた 3次元スカラー波動散乱場のクラック決定解析

CRACK DETERMINATION USING TOPOLOGICAL DERIVATIVE IN 3-D SCALAR WAVE SCATTERING FIELD

吉川 仁¹⁾, 林 正磨²⁾

Hitoshi YOSHIKAWA and Shouma RIN

1) 京都大学大学院情報学研究科 (〒 606-8501 京都市左京区吉田本町, E-mail: yskhit@i.kyoto-u.ac.jp)
2) コーエーテクモ (〒 223-8503 神奈川県横浜市港北区箕輪町 1-18-12, E-mail:)

A determination of cracks using topology optimization In 3-D scalar wave scattering field is considered. We introduce the cost function which is the misfit function between the observed data and the numerical data on the boundary of the domain having the cracks. We determine the cracks as the minimizer of the cost function using the topological derivative. The determination of two cracks having the less forecast information are shown in this paper.

Key Words: crack determination, topological derivative, TD-BIEM

1. 緒言

一般に行われている超音波非破壊評価では、探触子を材料表面に当て超音波を送受し、受信した波形データを用いて内部の欠陥やクラックの情報を推定している。工学材料や社会インフラを対象とするような実問題では、欠陥の有無だけでなく、欠陥の大きさや形状や個数を推定できることが好ましく、欠陥についての先験情報を与えない定量的な非破壊評価手法が求められている⁽¹⁾⁽²⁾。

本研究では、トポロジー導関数を用いた定量的非破壊評価を考える。設計自由度が高いとされるトポロジー最適化を非破壊評価に応用した本手法では、欠陥の個数、位置、形状を定量的な指標に基づいて決定することができ、近年注目されている技術である。レベルセット法では、トポロジー導関数の分布をレベルセット関数とみなし、レベルセット関数の値がゼロとなる等高線(面)を欠陥の境界とし欠陥形状を決定する⁽³⁾。したがって、レベルセット法では欠陥の形状を解析することはできるが、厚みのないクラックの決定には向いていない。

Bonnet⁽⁴⁾ や Bellis ら⁽⁵⁾ は3次元におけるトポロジー導関数を用いたクラック決定問題を解いているが、トポロジー導関数が負の小さな値を取る内点の集合の内部にクラックが存在する、といった大域的なクラック決定しか実現できていない。著者らは、Bonnet らの主張するクラックが存在し得る

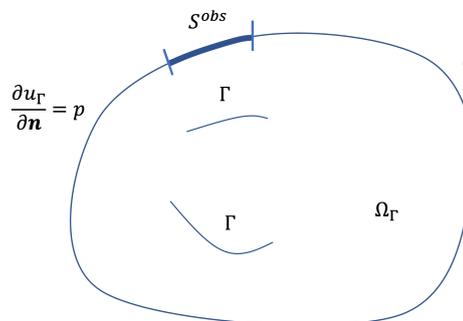


Fig. 1 u_Γ についての初期値境界値問題

領域の中に、複数のクラックの候補を見つけ出し、候補クラックの中から正解クラックを選び出すことを試み、2次元スカラー波動場においてトポロジー導関数を用いて様々な種類のクラックの決定解析を行なった⁽⁶⁾。具体的には、Bonnet⁽⁴⁾ が定式化した時間域のクラックによる波動散乱問題のトポロジー導関数を用いて得られたトポロジー導関数の分布から、複数のクラック候補を選び出し、目的関数を最小とする候補クラックの組み合わせを選び出す。そのようにして選ばれた候補クラックによりクラックの個数、位置、向きを決定する。さらに、個数、位置、向きが決定されたクラックのサイズをそれぞれ変化させ、目的関数が小さくなるようにクラックサイズを決定した。

本論文では、前報で示したトポロジー導関数を用いたクラックの決定手法が3次元スカラー波動場においても有用で

2023 年 10 月 12 日受付, 2023 年 10 月 27 日受理

あるのかを確認する。

2. スカラー波動問題におけるトポロジー導関数を用いたクラック決定解析

Fig. 1 に示すような複数のクラック Γ が内在する領域 Ω について次の初期値境界値問題を考える。

$$\begin{cases} \Delta u_\Gamma(\boldsymbol{\xi}, t) - \frac{1}{c^2} \ddot{u}_\Gamma(\boldsymbol{\xi}, t) = 0, & \boldsymbol{\xi} \in \Omega_\Gamma, 0 < t \\ \frac{\partial u_\Gamma}{\partial \mathbf{n}}(\boldsymbol{\xi}, t) = p(\boldsymbol{\xi}, t), & \boldsymbol{\xi} \in S, 0 < t \\ \frac{\partial u_\Gamma^\pm}{\partial \mathbf{n}^\pm}(\boldsymbol{\xi}, t) = 0, & \boldsymbol{\xi} \in \Gamma^\pm, 0 < t \\ u_\Gamma(\boldsymbol{\xi}, 0) = \dot{u}_\Gamma(\boldsymbol{\xi}, 0) = 0, & \boldsymbol{\xi} \in \Omega_\Gamma \end{cases} \quad (1)$$

ここに、 $\Omega_\Gamma = \Omega \setminus \Gamma$ 、 S は領域 Ω の境界、 c は波速、 p は Neumann 条件で既知関数、 $(\cdot) = \frac{\partial}{\partial t}$ 、 $\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} = n_i(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial}{\partial \xi_i}$ で $\mathbf{n}(\boldsymbol{\xi})$ は境界上の点 $\boldsymbol{\xi}$ における外向き法線ベクトル、 \mathbf{n}^+ 、 \mathbf{n}^- はそれぞれクラック Γ の + 面 (Γ^+)、- 面 (Γ^-) における法線ベクトル、 u^\pm は u の \mathbf{n}^\pm 方向からのクラック上への極限を表す。

クラックが正解の配置であるときの u_Γ の値が境界 S の一部 S^{obs} にて u^{obs} として計測されているとする。このとき、次の目的汎関数 $J(\Omega_\Gamma)$ を導入する。

$$J(\Omega_\Gamma) = \int_0^T \int_{S^{\text{obs}}} \varphi(u_\Gamma, \boldsymbol{\xi}, t) d\Gamma_\boldsymbol{\xi} dt, \quad (2)$$

$$\varphi(u_\Gamma, \boldsymbol{\xi}, t) = \frac{1}{2} \{u_\Gamma(\boldsymbol{\xi}, t) - u^{\text{obs}}(\boldsymbol{\xi}, t)\}^2 \quad (3)$$

この $J(\Omega_\Gamma)$ の値が最小となるクラックの配置 Γ を決定する問題を考える。

領域内の点 \mathbf{x}° に新たな長さ ε で単位法線ベクトル \mathbf{m} の向きを持つ微小なクラック $D_\varepsilon(\mathbf{m})$ が発生した際の目的汎関数の変化率 T を考える。

$$T(\mathbf{x}^\circ, \mathbf{m}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^3} \{J(\Omega_{\Gamma_\varepsilon(\mathbf{m})}) - J(\Omega_\Gamma)\} \quad (4)$$

この T をトポロジー導関数と呼ぶ。ここに、 $\Gamma_\varepsilon(\mathbf{m}) = \Gamma \cup D_\varepsilon(\mathbf{m})$ 、 $\Omega_{\Gamma_\varepsilon(\mathbf{m})} = \Omega_\Gamma \setminus D_\varepsilon(\mathbf{m})$ である。正解のクラック配置において点 \mathbf{x}° に法線 \mathbf{m} 方向のクラックが存在しているのであれば、 $J(\Omega_{\Gamma_\varepsilon(\mathbf{m})})$ は小さくなり、トポロジー導関数 $T(\mathbf{x}^\circ, \mathbf{m})$ は負の値となるはずである。この考えに基づいて、トポロジー導関数の分布とその値を用いてクラックを決定することを考える。

次の \hat{u}_Γ についての随伴問題を考える。

$$\begin{cases} \Delta \hat{u}_\Gamma(\boldsymbol{\xi}, t) - \frac{1}{c^2} \ddot{\hat{u}}_\Gamma(\boldsymbol{\xi}, t) = 0, & \boldsymbol{\xi} \in \Omega_\Gamma, 0 < t < T \\ \frac{\partial \hat{u}_\Gamma}{\partial \mathbf{n}}(\boldsymbol{\xi}, t) = \frac{\partial \varphi}{\partial u_\Gamma}(u_\Gamma(\boldsymbol{\xi}, T-t), \boldsymbol{\xi}, T-t), & \boldsymbol{\xi} \in S^{\text{obs}}, 0 < t < T \\ \frac{\partial \hat{u}_\Gamma}{\partial \mathbf{n}}(\boldsymbol{\xi}, t) = 0, & \boldsymbol{\xi} \in S \setminus S^{\text{obs}}, 0 < t < T \\ \frac{\partial \hat{u}_\Gamma^\pm}{\partial \mathbf{n}^\pm}(\boldsymbol{\xi}, t) = 0, & \boldsymbol{\xi} \in \Gamma^\pm, 0 < t < T \\ \hat{u}_\Gamma(\boldsymbol{\xi}, 0) = \dot{\hat{u}}_\Gamma(\boldsymbol{\xi}, 0) = 0, & \boldsymbol{\xi} \in \Omega_\Gamma \end{cases} \quad (5)$$

このとき、トポロジー導関数は次のように表される (4)。

$$T(\mathbf{x}^\circ, \mathbf{m}) = \hat{u}_{\Gamma, i} * u_{\Gamma, j}(\mathbf{x}^\circ, t) \mathcal{B}_{ij} \quad (6)$$

さらに、クラックが微小な円形平面の場合、 \mathcal{B} は次式のように求められる。

$$\mathcal{B} = \frac{8}{3}(\mathbf{m} \otimes \mathbf{m}) \quad (7)$$

ここで、法線 \mathbf{m} によるトポロジー導関数 $T(\mathbf{x}^\circ, \mathbf{m})$ の最小値を考える。 $T(\mathbf{x}^\circ, \mathbf{m})$ が最小となるときの法線 \mathbf{m} を \mathbf{m}^{min} とする。式 (6), (7) より $T(\mathbf{x}^\circ, \mathbf{m})$ は次式で表される。

$$T(\mathbf{x}^\circ, \mathbf{m}) = \mathbf{m}^T \mathcal{S} \mathbf{m} \quad (8)$$

ここに、 $\mathcal{S}_{ij} = \frac{8}{3} \hat{u}_{\Gamma, i} * u_{\Gamma, j}(\mathbf{x}^\circ, t)$ であり、“*” は時間に関する畳み込みを表す。 \mathbf{m} は単位ベクトルなので $|\mathbf{m}| = 1$ であるため、次式で表されるラグランジェ関数 L の極値問題を考えれば良い。

$$L(\mathbf{m}, \lambda) = \mathbf{m}^T \mathcal{S} \mathbf{m} - \lambda(|\mathbf{m}| - 1) \quad (9)$$

L が極値をとる条件は次式で表される。

$$(\mathcal{S} + \mathcal{S}^T) \mathbf{m} - \lambda \mathbf{m} = 0 \quad (10)$$

式 (10) は \mathbf{m} が $\mathcal{S} + \mathcal{S}^T$ の固有ベクトルであることを示す。 $\mathcal{S} + \mathcal{S}^T$ の単位固有ベクトルの中で $T(\mathbf{x}^\circ, \mathbf{m})$ の値を最も小さくする \mathbf{m} が \mathbf{m}^{min} である。

本研究では境界要素法を用いた数値解析により、 u_Γ 、 \hat{u}_Γ を数値的に求め、領域の内点 \mathbf{x}° において法線方向 \mathbf{m}^{min} を向いた微小クラックを発生させたときのトポロジー導関数 $T(\mathbf{x}^\circ, \mathbf{m}^{\text{min}})$ を計算する。

3. トポロジー導関数を用いたクラック決定解析の手順

以下にトポロジー導関数を用いたクラック決定解析の手順を示す。

1. クラックが存在しうる領域内部の格子点上で式 (6) で表されるトポロジー導関数の最小値とそれを与える \mathbf{m}^{min} を求める。
2. 1 で求めたトポロジー導関数の値が、ある閾値以下となる格子点を繋ぎ合わせ三角要素を作り、三角形要素同士を連結させたもののうち、一定以上の大きさのものをクラックの候補とする。各クラックの候補の存在を仮定して目的汎関数 J を計算し、そのクラックが存在しないときと比べて目的汎関数 J の値が小さくなる場合のみクラックを発生させる。ここで、三角形要素に関する閾値については3つの頂点 $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ が次の条件 a, b を満たしていることとする。

a.

$$\begin{cases} \max_{i \in \{1, 2, 3\}} |x_i - y_i| \leq \Delta x \\ \max_{i \in \{1, 2, 3\}} |y_i - z_i| \leq \Delta x \\ \max_{i \in \{1, 2, 3\}} |z_i - x_i| \leq \Delta x \end{cases} \quad (11)$$

b.

$$\begin{cases} |m_x^{\min} \cdot h| \geq K \\ |m_y^{\min} \cdot h| \geq K \\ |m_z^{\min} \cdot h| \geq K \end{cases} \quad (12)$$

ここに、 Δx は格子間距離、 $m_x^{\min}, m_y^{\min}, m_z^{\min}$ はそれぞれ点 x, y, z における m^{\min} 、 h は三角形要素の単位法線ベクトル、 K は適当な定数である。また、複雑な形状をもつクラックの発生を防ぐため、辺 e_{lm} を共有している隣接する三角形要素 l, m について次の条件 c, d を満たしていることとする。

c.

$$h_l \cdot h_m \geq M \quad (13)$$

d. 辺 e_{lm} は三角形要素 l, m 以外の三角形要素の一辺とならない。

ここに、 M は適当な定数である。

3. 手順 2 で発生させたクラックを配置に持つ領域におけるトポロジー導関数を計算し、2 での条件 $a \sim d$ を満たすようにクラックを 1 要素分延長する。

4. 3 を繰り返す。条件 $a \sim d$ を満たすようにクラックを延長できない場合は計算を終了する。各繰り返し step 毎に目的汎関数を計算し、その値が最小となるクラックの配置を最終的な計算結果とする。

4. 数値解析結果

Fig. 2 に示すような原点中心の一辺 2 の立方体内部にクラックが存在するような無限領域を考える。入射波として 3 方向から次の平面波を入射する。

$$u_I(\mathbf{x}, t) = u_0 \left\{ 1 - \cos 2\pi \left(t - \frac{|x_I - d|}{c} \right) \right\}, \quad \frac{|x_I - d|}{c} \leq t \leq 1 + \frac{|x_I - d|}{c}, \quad I = 1, 2, 3 \quad (14)$$

ここに、 $u_0 = 0.1, c = 1, d = 2$ とする。対象が無限領域のため、観測点は原点を中心とした 1 辺 5 の立方体の各頂点 $\mathbf{x}^m, m = 1, \dots, 8$ とする。観測点 \mathbf{x}^m にて $u_I^{\text{obs}}(\mathbf{x}^m, t)$ を計測し、次の目的汎関数の最小化問題を考える。

$$J(\Omega_\gamma) = \frac{1}{2} \sum_{I=1}^3 \sum_{m=1}^8 \int_{-\infty}^{\infty} |u_{rI}(\mathbf{x}^m, t) - u_I^{\text{obs}}(\mathbf{x}^m, t)|^2 dt \quad (15)$$

4.1. 数値例 1

Fig. 3 に示すように、正解のクラックを $(0.25, 0.1, 0.5), (-0.25, 0.1, 0), (0.25, -0.6, -0.25), (-0.25, -0.6, -0.75)$ の 4 点を頂点とする一辺 0.5 の平行四辺形 1 つとし、そのクラックを決定する解析を行った。時間ステップ幅を 0.15、時間ステップ数を 70、手順 2 での閾値を $K = 0.9, M = 0.5$ とした。

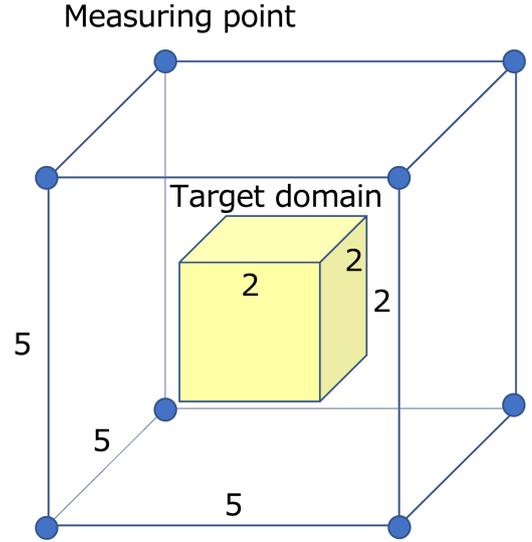


Fig. 2 対象領域と観測点

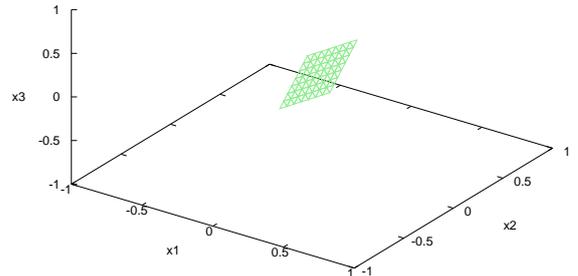


Fig. 3 正解のクラック (数値例 1)

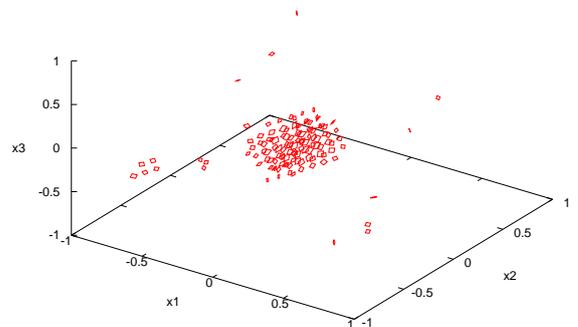


Fig. 4 手順 1 でのトポロジー導関数の計算結果

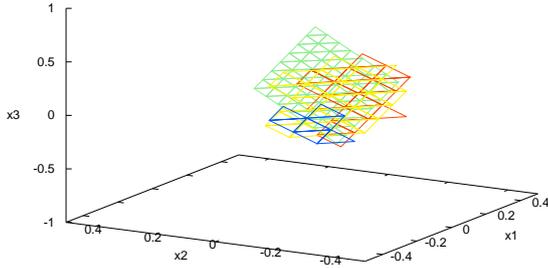


Fig. 5 候補クラック Γ_1 (赤), Γ_2 (黄), Γ_3 (青) と正解のクラック (黄緑) との位置関係

クラックが存在する一辺2の立方体を対象領域とし、その内部の $25 \times 25 \times 25 = 15625$ 点の格子点 \mathbf{x}^o でのトポロジー導関数 $T(\mathbf{x}^o, \mathbf{m}^{\min})$ を計算した。結果を Fig. 4 で示す。Fig. 4 では、各点 \mathbf{x}^o でのトポロジー導関数の値と \mathbf{m}_x^{\min} の向きを持つ平面要素をプロットしている。この平面要素は \mathbf{m}_x^{\min} を法線に持ち、次式の辺長の正方形である。

$$\frac{|T(\mathbf{x}, \mathbf{m}_x^{\min})|}{|\min_{\mathbf{y} \in \mathcal{X}} T(\mathbf{y}, \mathbf{m}_y^{\min})|} \Delta x \quad (16)$$

ここに、 \mathcal{X} は全格子点の集合を表す。つまり、トポロジー導関数の絶対値が大きいものほど、大きな正方形として表している。ただし、見やすさのため式 (16) での値が $0.5\Delta x$ 以下の点での平面要素はプロットしていない。図を確認すると、正解の位置に近い点での平面要素が大きく表示されていることがわかる。

手順2におけるクラックの候補と各クラックの存在を仮定した場合の目的汎関数の値をそれぞれ Fig. 5、Fig. 6、Table 1 で示す。なお、候補を絞るためメッシュの連結の数が5つ以上のものを選んでいく。Fig. 5 に示すようにクラックの候補を Γ_1 、 Γ_2 、 Γ_3 と名付ける。Table 1 を確認すると、クラック Γ_1 のみが存在する場合に目的汎関数の値が最も小さくなった。これより、クラック Γ_1 のみを発生させることとする。なお、表中の"—" は、目的汎関数の値がクラックが存在しないとして求めた値よりも大きな値となった場合を表している。手順3の操作を繰り返し行い、クラック Γ_1 の延長を図る。手順3の繰り返しにおいて、8ステップ以降は目的関数が大きくなったため、8つの要素を付け加えたクラック形状を推定クラックとする。手順3の操作後のクラックと正解のクラックとの比較を Fig. 7、Fig. 8 に示す。最終的に十分な精度でクラックの位置と向きを特定できていることがわかるが、形状やサイズについては必ずしも十分な精度で決定できたとは言えない結果である。

4.2. 数値例 2

2つの大きさの異なるクラックに対しての決定解析を行う。Fig. 9 に示すように、 $(-0.2, 0.5, 1)$ 、 $(-0.2, 0, 0.5)$ 、 $(-0.7, 0, 0)$ 、

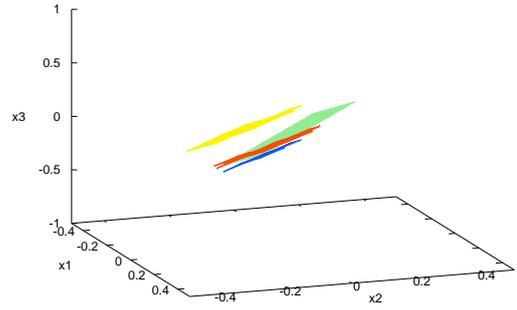


Fig. 6 候補クラック Γ_1 (赤), Γ_2 (黄), Γ_3 (青) と正解のクラック (黄緑) との位置関係 [別視点]

Table 1 各クラック候補に対する目的汎関数の値

存在を仮定するクラック	目的汎関数の値
なし	7.008×10^{-7}
Γ_1	2.097×10^{-7}
Γ_2	3.937×10^{-7}
Γ_3	7.044×10^{-7}
Γ_1, Γ_2	—
Γ_1, Γ_3	2.484×10^{-7}

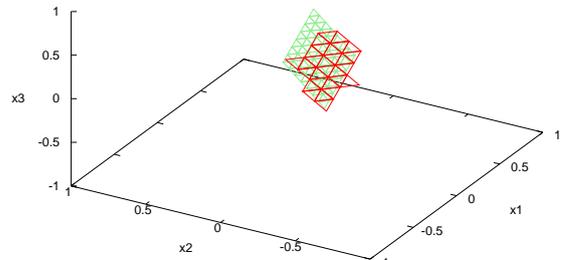


Fig. 7 要素延長後のクラック (赤) と正解のクラック (黄緑)

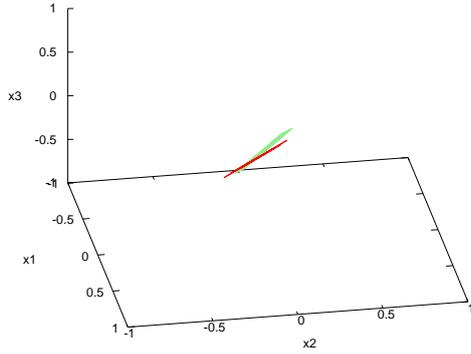


Fig. 8 要素延長後のクラック (赤) と正解のクラック (黄緑)[別視点]

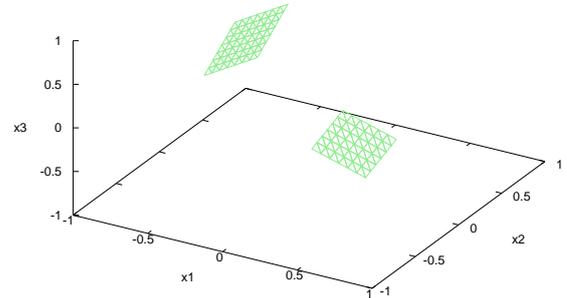


Fig. 9 正解のクラック (数値例 2)

($-0.7, 0.5, 0.5$) の 4 点を頂点とする一辺 0.5 の平行四辺形と、 $(0.3, -0.6, 0)$, $(0.3, -0.2, 0.2)$, $(0.7, -0.2, 0)$, $(0.7, -0.6, -0.2)$ の 4 点を頂点とする一辺 0.4 の平行四辺形を正解のクラックとする。他のパラメータについては、数値例 1 と同様にした。各格子点でのトポロジー導関数の大きさに比例した一辺を持つ平面要素のプロットを Fig. 10 にて示す。2つの正解クラック間にあるいくつかの格子点においても平面要素が表示されているが、特に正解に近い位置の点で大きく表示されていることがわかる。

クラックの候補の配置と各候補クラックの存在を仮定した場合の目的汎関数の値をそれぞれ Fig. 11、Fig. 12、Table 2 にて示す。Fig. 11、Fig. 12 に示すようにクラックの候補を Γ_1 、 Γ_2 、 Γ_3 、 Γ_4 、 Γ_5 と名付ける。Fig. 11、Fig. 12 から分かるように、2つの正解クラック間の格子点では候補となるクラックは発生しなかった。Table 2 より、目的関数を小さくする候補クラックの組 Γ_1 、 Γ_4 を選び出し、手順 3 でのクラックの延長操作を行う。手順 3 の繰り返しにおいて、14 ステップ以降は目的関数が大きくなったため、14 個の要素を付け加えたクラック形状を推定クラックとする。Fig. 13、Fig. 14 で示す通り、大きさの異なる複数のクラックに対しても十分な精度でクラックの個数とそれぞれのクラックの正しい配置と向きを決定できている。しかし、数値例 1 と同様、クラックのサイズと形状の決定は十分とは言えない結果となった。

5. 結論

3次元領域におけるクラック波動散乱問題においてトポロジー導関数を用いたクラック決定解析を行なった。クラックの個数を未知とするような先験情報の少ないクラック決定解析に対しても定性的ではあるが十分な精度でその位置と向きを決定することができた。クラックの向きや位置の結成精度の定量評価は今後の課題である。しかし、Fig. 4 や Fig. 10 で示した平面要素を取り囲む領域の中にクラックが存在するとした Bonnet らの大域的な決定解析に比べて、クラック

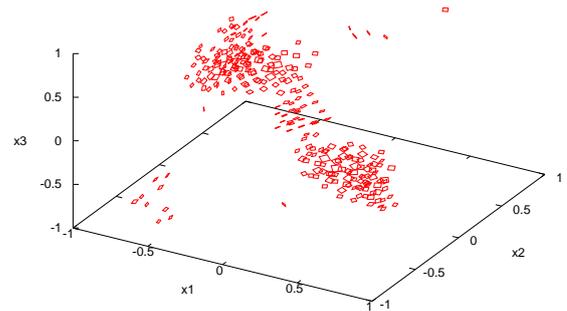


Fig. 10 手順 1 でのトポロジー導関数の計算結果

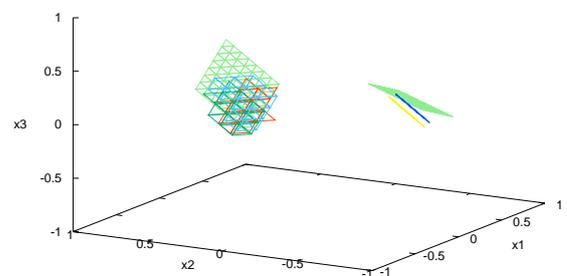


Fig. 11 候補クラック Γ_1 (青), Γ_2 (黄), Γ_3 (赤), Γ_4 (水), Γ_5 (緑) と正解のクラック (黄緑) との位置関係

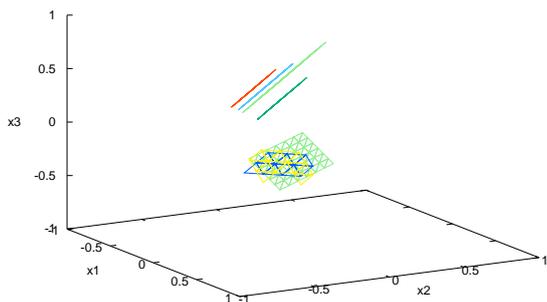


Fig. 12 候補クラック Γ_1 (青), Γ_2 (黄), Γ_3 (赤), Γ_4 (水), Γ_5 (緑) と正解のクラック (黄緑) との位置関係 [別視点]

Table 2 各クラック候補に対する目的汎関数の値

存在を仮定するクラック	目的汎関数の値
なし	4.921×10^{-6}
Γ_1	4.177×10^{-6}
Γ_2	4.438×10^{-6}
Γ_3	4.668×10^{-6}
Γ_4	4.069×10^{-6}
Γ_5	5.140×10^{-6}
Γ_1, Γ_4	3.340×10^{-6}
Γ_2, Γ_4	3.667×10^{-6}
Γ_3, Γ_4	4.204×10^{-6}
Γ_4, Γ_5	—
$\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_4$	3.356×10^{-6}

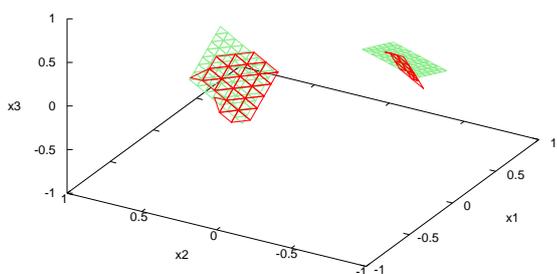


Fig. 13 要素延長後のクラック (赤) と正解のクラック (黄緑)

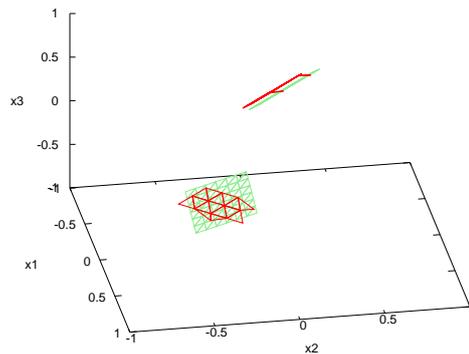


Fig. 14 要素延長後のクラック (赤) と正解のクラック (黄緑)[別視点]

ク位置の決定精度はかなり向上していると言えよう。

また、数値例2のように、大きさの異なる複数のクラックを対象とした場合でも、本手法が有用であると確認できた。しかし、クラックのサイズや形状の決定の精度は十分とは言えない結果となった。

今回行った数値解析例では、平行四辺形のクラックの決定を試みた。波動散乱を考えた場合、平行四辺形の頂点付近で散乱される波動成分は、平行四辺形の中央部分で散乱される波動成分よりも少ない。このため、計測データには頂点部分の情報あまり含まれていない。このことが原因で、クラックのサイズと形状の決定精度が悪くなったと思われる。よりクラック端の情報に着目したクラック決定手法の導入などが今後の課題として挙げられる。また、3節で示したクラック決定手順におけるパラメータの決め方という点にも課題が残る。本研究では、手順2での候補となるクラックに許容するメッシュ連結数の下限や隣接するメッシュ間の角度など、多くの閾値を設定している。これらの値はある程度天下りの決めており、閾値次第では意図しない結果となる可能性を捨てきれない。数学的な根拠に基づいたパラメータの設定が必要になるだろう。

参考文献

- (1) 廣瀬 壮一: 定量的超音波非破壊評価とその周辺技術, 応用力学論文集, Vol. 7, pp. 3-12, 2004.
- (2) J.D. Achenbach: Quantitative nondestructive evaluation, Int. J. Solids and Structures, Vol. 37, pp. 13-27, 2000.
- (3) 吉川 仁, 寺沢 龍: 3次元スカラー波動問題における時間域境界積分方程式法を用いたトポロジー最適化による散乱体決定解析, 土木学会論文集 A2(応用力学), Vol. 71, No. 2, pp. I.71-I.78, 2015.
- (4) M. Bonnet: Topological sensitivity for 3D elastodynamic and acoustic inverse scattering in the time do-

main, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 195, No. 45, pp. 2876-2891, 2006.

- (5) C. Bellis, M. Bonnet: Crack identification by 3D time-domain elastic or acoustic topological sensitivity, C.R.Mecanique, Vol. 337, pp.124-130, 2009.
- (6) 服部潤也, 吉川仁: 2次元散乱波動場におけるトポロジー導関数を用いた様々なクラックの決定解析, 土木学会論文集 A2(応用力学), Vol. 73, No. 2, pp. L255-L262, 2017.

