

弾性体の界面剥離による平面波の散乱解析に対する メッシュフリー型解析手法の開発

DEVELOPMENT OF A MESHFREE-TYPE METHOD FOR PLANE WAVE SCATTERING BY AN INTERFACE DEBONDING ON THE INTERFACE OF ELASTIC SOLIDS

古川 陽¹⁾

Akira FURUKAWA

1) 北海道大学大学院工学研究院 (〒060-8628 北海道札幌市北区北13条西8丁目, E-mail: afurukawa@eng.hokudai.ac.jp)

This paper presents an OMP-based meshfree method for anti-plane wave analysis. The developed meshfree method, OMP-Mf(s), uses not only fundamental solutions but also plane waves as basis functions and can select adequate basis functions using OMP. We applied this developed method to study plane wave scattering caused by interface debonding at the interface of two elastic solids. Several numerical results show that OMP-Mf(s) provides a good approximation of displacement wavefield for $s = 2$.

Key Words: Meshfree-Type Method, Wave Scattering, Interface Debonding, Fundamental Solutions, Plane Wave, Orthogonal Matching Pursuit

1. はじめに

鋼板接着工法による補強床版や繊維強化プラスチックは層構造を有しており、その内部に生じる界面剥離は性能低下の原因となる。界面剥離の代表的な非破壊評価手法として超音波試験があり、剥離部分からの散乱波の情報をもとに対象物を評価する。界面剥離によって生じる散乱波の特性を理解するためには、数値計算による検討が有効である。数値計算において、剥離部分による散乱波の特性の把握を目的とした解析では、半無限領域を含む解析領域を取り扱うことが一般的である。このような解析を実現するため、様々な解表現や積分方程式を用いた定式化が提案されている^(1, 2, 3)。

偏微分方程式に対するメッシュフリー型の数値解法の代表例として、基本解近似解法⁽⁴⁾ (MFS; the method of fundamental solutions) がある。MFSは、対象とする問題の近似解を基本解と近似係数の線形結合で表現する。このとき、基本解の源点は解析領域の補領域に配置され、近似係数は境界条件によって決定される。そのため、MFSは解析における未知数の数が少なく済み、基本解の特異性を取り扱う必要がないことから数値計算の実装が容易であることが知られている。その一方で、MFSの解表現に用いる基本解の源点の数や配置は任意性があり、近似解に影響を及ぼすことが知られている。MFSの源点選択については、これまで数多くの手法が提案されている^(5, 6, 7, 8)。

MFSの源点選択に関して、著者はこれまで、直交マッチング追跡⁽⁹⁾ (OMP; orthogonal matching pursuit) を用いた選択手法の開発に取り組んできた。OMPは l^0 最適化に分類される線形問題の最適化手法であり、貪欲法に基づいて基底ベクトルを選択する。OMPは劣決定問題に対しても適用可能であり、線形問題の解を表現するために必要となる基底ベクトルを選択することが可能となる。OMPによる源点選択を組み込んだMFS (以下、OMP-MFSと呼ぶ) の主な適用対象は無限領域を対象とした散乱解析⁽¹⁰⁾であったが、多層弾性体のような半無限領域を含む問題を取り扱うことが可能となれば、適用範囲の拡大が期待できる。

MFSによって半無限領域を取り扱う場合、平面波の取り扱いに注意を払う必要がある。MFSの基底関数は基本解 (2次元問題の場合は円筒波) であり、平面波の表現には不適切である。そのため、一般的には平面波は解析的に計算され、既知の情報として取り扱われる。このような平面波の計算は理論的には計算可能であるが、多層構造や材料の異方性を考慮する場合には計算が複雑になる。これに対して、OMPに基づく解析手法では、基底関数の増加に対する制約はなく、基本解以外にも例えば平面波を基底関数とする解表現であっても基底関数の選択を容易に実行できる。

以上を踏まえ、本論文では基底関数として基本解以外の関数を含むメッシュフリー型の解析手法を開発する。開発手法は基底関数に基本解と平面波を用い、OMPによって近似係数を決定する。加えて、OMPによる近似係数の決定を s 段

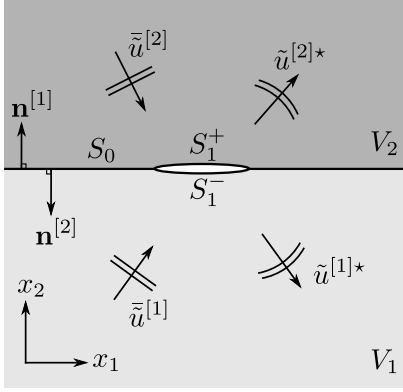


Fig.1 Anti-plane wave scattering by an interface debonding on the interface of elastic halfspaces.

階 ($s = 1, 2$) に分割して実行する計算方法についても検証する．開発手法は，将来的には多層構造弾性体を対象とする散乱解析への適用を想定しているが，その前段階として，解析手法の基礎的な性質について整理する必要があると考えられる．そのため，本論文では，開発手法を2層弾性体の界面剥離による平面波の散乱問題に適用する．これ以降では，特に断りのない限り，1つの項に繰り返し現れる下付き添え字に対して総和規約を適用する．また，ギリシャ文字による下付き添え字は1, 2をとるものとする．

2. 解析手法

2.1. 対象とする問題

本論文では，Fig.1に示すような2つの弾性体の界面に存在する剥離部分による面外波動の散乱問題について考える．同図において，解析領域 V_p ($p = 1, 2$) はいずれも半無限領域とし，等方で均質な線形弾性体とする．また，これらの弾性体の界面（境界）は S とし，健全部分 S_0 と剥離部分 $S_1 (= S_1^- \cup S_1^+)$ によって構成される．また， $\mathbf{n}^{[p]} (= [n_1^{[p]}, n_2^{[p]}]^T)$ は，領域 V_p に対する境界上の単位外向き法線ベクトルである．ただし， $(\cdot)^T$ は行列・ベクトルの転置を表す．加えて， $(\bar{\cdot})$ は散乱解析における既知項を， $(\tilde{\cdot})^*$ は散乱解析における未知項を表す．散乱解析における入射波は平面波とし，入射波は既知項に含まれるものとする．

領域 V_p ($p = 1, 2$) に対して，周波数領域における等方性弾性体の運動方程式は，物体力をゼロと仮定すると，次式で表現される．

$$(\mu_p \partial_\beta \partial_\beta + \rho_p \omega^2) \tilde{u}^{[p]}(\mathbf{x}) = 0 \quad (1)$$

ここに， $\tilde{u}^{[p]}(\mathbf{x})$ は領域 V_p の位置 $\mathbf{x} (= [x_1, x_2]^T)$ における面外方向変位， ω は角周波数を表す．また， $\partial_\beta = \partial / \partial x_\beta$ であり， ρ_p, μ_p は領域 V_p を構成する弾性体の密度とせん断弾性係数を表す．さらに，重ね合わせの原理を用いれば，面外方向変位 $\tilde{u}^{[p]}(\cdot)$ は以下の関係式を満たす．

$$\tilde{u}^{[p]}(\mathbf{x}) = \bar{\tilde{u}}^{[p]}(\mathbf{x}) + \tilde{u}^{[p]*}(\mathbf{x}); \quad \mathbf{x} \in V_p \cup S \quad (2)$$

境界における表面力は，次式で与える．

$$\tilde{t}^{[p]}(\mathbf{x}) = \mathcal{T}^{[p]} \tilde{u}^{[p]}(\mathbf{x}); \quad \mathbf{x} \in S \quad (3)$$

ここに， $\mathcal{T}^{[p]}$ は表面力作用素であり，次式で与えられる．

$$\mathcal{T}^{[p]} = \mu_p n_\beta^{[p]}(\mathbf{x}) \partial_\beta \quad (4)$$

Fig.1 に示す2つの弾性体の界面における境界条件は，以下のように設定する．健全部分 S_0 における境界条件は，以下の式を用いる．

$$\tilde{u}^{[1]}(\mathbf{x}) = \tilde{u}^{[2]}(\mathbf{x}); \quad \mathbf{x} \in S_0 \quad (5)$$

$$\tilde{t}^{[1]}(\mathbf{x}) = -\tilde{t}^{[2]}(\mathbf{x}); \quad \mathbf{x} \in S_0 \quad (6)$$

一方，剥離部分 S_1 における境界条件は，次式を用いる．

$$\tilde{t}^{[1]}(\mathbf{x}) = 0; \quad \mathbf{x} \in S_1^- \quad (7)$$

$$\tilde{t}^{[2]}(\mathbf{x}) = 0; \quad \mathbf{x} \in S_1^+ \quad (8)$$

2.2. 近似解の表現と線形方程式

本論文では，解析領域 V_p における変位 $\tilde{u}^{[p]}(\cdot)$ を次式で表現する．

$$\tilde{u}^{[p]}(\mathbf{x}) := \bar{\tilde{u}}^{[p]}(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^{N_a} \tilde{a}_k^{[p]}(\mathbf{x}) \tilde{c}_k^{[p]} \quad (9)$$

ここに， $\tilde{a}_k^{[p]}(\cdot)$ は未知項の近似に用いる基底関数， $\tilde{c}_k^{[p]}$ は近似係数を表す．また，境界における表面力 $\tilde{t}^{[p]}(\cdot)$ は，式(4)，(9)を用いて以下のように表現する．

$$\tilde{t}^{[p]}(\mathbf{x}) := \tilde{t}^{[p]}(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^{N_a} \tilde{b}_k^{[p]}(\mathbf{x}) \tilde{c}_k^{[p]} \quad (10)$$

ここに，

$$\tilde{b}_k^{[p]}(\mathbf{x}) = \mathcal{T}^{[p]} \tilde{a}_k^{[p]}(\mathbf{x}) \quad (11)$$

である．本論文では，基底関数 $\tilde{a}_k^{[p]}(\cdot)$ として，基本解と平面波を考える．基本解 $\tilde{U}^{[p]}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ は，次式で与えられる．

$$\tilde{U}^{[p]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{i}{4\mu_p} H_0^{(1)}(k_T^{[p]} r) \quad (12)$$

ここに， \mathbf{x} は観測点， \mathbf{y} は源点を表し， $r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ である．また， $k_T^{[p]}$ は領域 V_p における面外波動の波数， $H_n^{(1)}$ は n 次の第1種 Hankel 関数を表し， $i = \sqrt{-1}$ である．一方，平面波 $\tilde{U}^{\text{PW}[p]}(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ は次式で与えられる．

$$\tilde{U}^{\text{PW}[p]}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \exp \left[ik_T^{[p]} \langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle \right] \quad (13)$$

ここに， $\langle \cdot, \cdot \rangle$ はベクトルの内積， \mathbf{p} は平面波の進行方向ベクトルを表す．

本論文では，弾性体の界面である境界 S 上に選点 $\mathbf{x}_i (= [x_{i,1}, x_{i,2}]^T; i = 1, 2, \dots, N_x)$ を配置し，その選点上で境界条件を満足するように近似係数 $\tilde{c}_k^{[p]}$ を決定する．このとき，解くべき線形方程式は，以下のように表現できる．

$$\tilde{\mathbf{D}} \tilde{\mathbf{c}} = \tilde{\mathbf{h}} \quad (14)$$

ここに， $\tilde{\mathbf{D}} \in \mathbb{C}^{M \times N}$ ， $\tilde{\mathbf{c}} \in \mathbb{C}^N$ ， $\tilde{\mathbf{h}} \in \mathbb{C}^M$ であり，本論文における解析では， $M = 2N_x$ ， $N = 2N_a$ である．式(14)において，未知ベクトル $\tilde{\mathbf{c}}$ の成分は，次式で与えられる．

$$(\tilde{\mathbf{c}})_k := \tilde{c}_k^{[1]} \quad (15)$$

$$(\tilde{\mathbf{c}})_{N_a+k} := \tilde{c}_k^{[2]} \quad (16)$$

ただし, $k = 1, 2, \dots, N_a$ である. 既知ベクトル $\tilde{\mathbf{h}}$ の成分は, 以下の通りである.

$$(\tilde{\mathbf{h}})_i := \begin{cases} -\tilde{u}^{[1]}(\mathbf{x}_i) + \tilde{u}^{[2]}(\mathbf{x}_i) & : \mathbf{x}_i \in S_0 \\ -\tilde{t}^{[1]}(\mathbf{x}_i) & : \mathbf{x}_i \in S_1^- \end{cases} \quad (17)$$

$$(\tilde{\mathbf{h}})_{N_x+i} := \begin{cases} -\tilde{t}^{[1]}(\mathbf{x}_i) - \tilde{t}^{[2]}(\mathbf{x}_i) & : \mathbf{x}_i \in S_0 \\ -\tilde{t}^{[2]}(\mathbf{x}_i) & : \mathbf{x}_i \in S_1^+ \end{cases} \quad (18)$$

ただし, $i = 1, 2, \dots, N_x$ である. さらに, 係数行列 $\tilde{\mathbf{D}}$ の成分は, 以下のように与えられる.

$$(\tilde{\mathbf{D}})_{i,k} := \begin{cases} \tilde{a}_k^{[1]}(\mathbf{x}_i) & : \mathbf{x}_i \in S_0 \\ \tilde{b}_k^{[1]}(\mathbf{x}_i) & : \mathbf{x}_i \in S_1^- \end{cases} \quad (19)$$

$$(\tilde{\mathbf{D}})_{i,N_a+k} := \begin{cases} -\tilde{a}_k^{[2]}(\mathbf{x}_i) & : \mathbf{x}_i \in S_0 \\ 0 & : \mathbf{x}_i \in S_1^- \end{cases} \quad (20)$$

$$(\tilde{\mathbf{D}})_{N_x+i,k} := \begin{cases} \tilde{b}_k^{[1]}(\mathbf{x}_i) & : \mathbf{x}_i \in S_0 \\ 0 & : \mathbf{x}_i \in S_1^+ \end{cases} \quad (21)$$

$$(\tilde{\mathbf{D}})_{N_x+i,N_a+k} := \tilde{b}_k^{[2]}(\mathbf{x}_i) : \mathbf{x}_i \in S_0 \cup S_1^+ \quad (22)$$

ただし, $i = 1, 2, \dots, N_x$ および $k = 1, 2, \dots, N_a$ であり, $(\cdot)_{i,k}$ は行列の (i, k) 成分を表す.

2.3. OMP (直交マッチング追跡)

本論文では, 式 (14) に示す線形方程式の求解に OMP を用いる. OMP では, 線形システム $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ に対して, 以下に示す l^0 最適化問題を解く.

$$\underset{\mathbf{x}}{\text{minimize}} \|\mathbf{x}\|_0 \text{ subject to } \mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (23)$$

ここに, $\|\cdot\|_0$ は l^0 擬似ノルムを表し, その値は対象とするベクトルの非ゼロ成分の個数に対応する. OMP では, 以下に示す初期値を用いて, 式 (23) を解くために反復計算を実行する.

$$\mathbf{x}[0] = \mathbf{0}, \mathbf{r}[0] = \mathbf{y}, S_{-1} = \emptyset, k = 0 \quad (24)$$

ここに, $\mathbf{0}$ は零ベクトル, S_k は各反復ステップで選択した列ベクトル (基底ベクトル) の情報を記憶するためのインデックス集合を表す. OMP による最適解の計算では, 式 (24) をもとに, 以下に示す処理を順に実行する.

$$i[k] := \arg \max_i \frac{|\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{r}[k] \rangle|^2}{\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_i \rangle} \quad (25)$$

$$S_k := S_{k-1} \cup \{i[k]\} \quad (26)$$

$$\bar{\mathbf{x}}[k] := [\mathbf{A}_{S_k}^H \mathbf{A}_{S_k}]^{-1} \mathbf{A}_{S_k}^H \mathbf{y} \quad (27)$$

$$\mathbf{x}[k+1] := \sum_{i \in S_k} \bar{x}_i[k] \mathbf{e}_i \quad (28)$$

$$\mathbf{r}[k+1] := \mathbf{y} - \sum_{i \in S_k} \bar{x}_i[k] \mathbf{a}_i \quad (29)$$

$$k := k + 1 \quad (30)$$

ここに, \mathbf{a}_i は行列 \mathbf{A} の i 列目の列ベクトルである. また, \mathbf{A}_{S_k} は, 行列 \mathbf{A} のうち, インデックス集合 S_k に記憶されたインデックスの列ベクトルのみを格納した行列を表す. 加えて, \mathbf{e}_i は i 番目の成分にのみ値を持つ標準基底を表す. 式 (29) に示す $\mathbf{r}[k+1]$ は, $k+1$ 回目の反復計算における残差ベクトルである. なお, 式 (27) における逆行列の計算には, 特異値分解を用いる. 式 (25)–(30) に示す反復計算は, 以下の終了条件のいずれか 1 つが満足されるまで繰り返し実行する.

$$\|\mathbf{r}[k+1]\|_2 < \epsilon_{\text{OMP}} \quad (31)$$

$$s_{\min}[k] < \epsilon_{\text{SVD}} \quad (32)$$

$$k = M \quad (33)$$

ここに, $\|\cdot\|_2$ は l^2 ノルム, $s_{\min}(k)$ は行列 \mathbf{A}_{S_k} の最小特異値を表す. ただし, この終了条件の判定は式 (30) の計算の後に実行される. OMP における反復計算が $k = N^*$ において終了条件を満足したとき, 近似係数は, 形式上, 以下のように表現できる.

$$\tilde{\mathbf{c}} = \mathbf{x}[N^*] \quad (34)$$

式 (34) で与えられるベクトル $\tilde{\mathbf{c}}$ の非ゼロ成分の個数は N^* であり, 最終的な基底ベクトルの数は M 個以下となる. 加えて, OMP では $N > M$ (劣決定) として計算を実行することも可能であり, この場合は基底ベクトルの取捨選択が可能となる.

式 (23) に示す通り, OMP における目的関数は l^0 擬似ノルムであり, 基底ベクトル \mathbf{a}_i (行列 \mathbf{A} の列ベクトル) と線形システムの残差ベクトル $\mathbf{r}[k]$ の関係のみで解を決定する. そのため, OMP では, 勾配法における目的関数の勾配計算や, 正則化における正則化パラメータの設定が不要である. また, OMP は行列 \mathbf{A} が行フルランクであれば最大 M 回の反復で解が得られる. さらに言えば, OMP は貪欲法であるものの, 線形システム $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ に十分スパースな解が存在すれば, 最適解を有限ステップで求められることも知られている (13).

2.4. OMP に基づくメッシュフリー型解析手法

本節では, 本論文で用いる OMP に基づくメッシュフリー型解析手法である OMP-MFS, OMP-Mf(s) について説明する. OMP-MFS は OMP による源点選択を組み込んだ MFS であり, OMP-Mf(s) との比較のために用いる. OMP-Mf(s) は, 本論文で開発を行った解析手法である. この解析手法では, 基底関数に基本解と平面波の両方を用い, OMP を用いた近似係数の決定を s 段階に分けて実行する. ただし, $s = 1, 2$ とし, それぞれについて OMP-MFS に続けて説明する.

解析手法の説明の前に, MFS の成り立ちと OMP-Mf(s) の位置付けについて説明する. 本論文で開発する解析手法は MFS を基礎としている. MFS は間接法に分類され, 境界要素法 (BEM; boundary element method) との関連も指摘されている. 具体的には, BEM の拡張である仮想境界間接法

において、仮想境界上の分布密度を離散的に表現することで MFS を導出できる⁽¹¹⁾。また、MFS は Trefftz 法に分類することができることも知られている⁽¹²⁾。このようにして得られる MFS は、原則として基底関数に 1 種類の関数（基本解）を用いる。これに対して、OMP-Mf(s) は、基底関数に基本解と平面波の 2 種類の関数を用いる点に特徴がある。

2.4.1. OMP-MFS

OMP-MFS では、式 (9), (10) における既知項を次式で与える。

$$\bar{u}^{[1]}(\mathbf{x}) = \tilde{u}^{\text{in}[1]}(\mathbf{x}) + \tilde{u}^{\text{re}[1]}(\mathbf{x}) \quad (35)$$

$$\bar{u}^{[2]}(\mathbf{x}) = \tilde{u}^{\text{tr}[2]}(\mathbf{x}) \quad (36)$$

$$\bar{t}^{[1]}(\mathbf{x}) = \tilde{t}^{\text{in}[1]}(\mathbf{x}) + \tilde{t}^{\text{re}[1]}(\mathbf{x}) \quad (37)$$

$$\bar{t}^{[2]}(\mathbf{x}) = \tilde{t}^{\text{tr}[2]}(\mathbf{x}) \quad (38)$$

ここに、 $(\cdot)^{\text{in}}$ は入射波、 $(\cdot)^{\text{re}}$ は反射波、 $(\cdot)^{\text{tr}}$ は透過波を表す。これらの反射波・透過波は、文献⁽¹⁴⁾をもとに解析的に計算する。また、基底関数は基本解を用いて次式で与える。

$$\tilde{a}_k^{[p]}(\mathbf{x}) = \tilde{U}^{[p]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}_k^{[p]}) \quad (39)$$

$$\tilde{b}_k^{[p]}(\mathbf{x}) = \tilde{T}^{[p]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}_k^{[p]}) \quad (40)$$

ただし、 $k = 1, 2, \dots, N_y$ であり、 $N_a = N_y$ となる。OMP-MFS では、基底関数である基本解を用いて、界面剥離による散乱波を表現する。

2.4.2. OMP-Mf(1)

OMP-Mf(1) は、基底関数に基本解と平面波の両方を用い、それらに対応する近似係数の計算を 1 段階で実行する。OMP-Mf(1) では、式 (9), (10) における既知項を次式で与える。

$$\bar{u}^{[1]}(\mathbf{x}) = \tilde{u}^{\text{in}[1]}(\mathbf{x}) \quad (41)$$

$$\bar{u}^{[2]}(\mathbf{x}) = 0 \quad (42)$$

$$\bar{t}^{[1]}(\mathbf{x}) = \tilde{t}^{\text{in}[1]}(\mathbf{x}) \quad (43)$$

$$\bar{t}^{[2]}(\mathbf{x}) = 0 \quad (44)$$

つまり、既知項は入射波のみとなる。また、基底関数は次式で与える。

$$\tilde{a}_k^{[p]}(\mathbf{x}) = \tilde{U}^{[p]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}_k^{[p]}) \quad (45)$$

$$\tilde{a}_{N_y+l}^{[p]}(\mathbf{x}) = \tilde{U}^{\text{PW}[p]}(\mathbf{x}, \mathbf{p}_l^{[p]}) \quad (46)$$

$$\tilde{b}_k^{[p]}(\mathbf{x}) = \tilde{T}^{[p]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}_k^{[p]}) \quad (47)$$

$$\tilde{b}_{N_y+l}^{[p]}(\mathbf{x}) = \tilde{T}^{\text{PW}[p]}(\mathbf{x}, \mathbf{p}_l^{[p]}) \quad (48)$$

ただし、 $k = 1, 2, \dots, N_y$ および $l = 1, 2, \dots, N_p$ であり、 $N_a = N_y + N_p$ となる。基底関数は基本解と平面波によって構成されるため、界面剥離による散乱波のみならず、反射波・透過波（いずれも平面波）を表現するための近似係数を 1 段階で決定する。

2.4.3. OMP-Mf(2)

OMP-Mf(2) は、OMP-Mf(1) と同様に基底関数に基本解と平面波の両方を用いる。ただし、近似係数の計算は 2 段階で

実行する。以下では、第 s 段階に関する物理量には $(\cdot)^{(s)}$ を付けて区別する。第 1 段階では、既知項を以下の式を用いる。

$$\bar{u}^{1}(\mathbf{x}) = \tilde{u}^{\text{in}[1]}(\mathbf{x}) \quad (49)$$

$$\bar{u}^{[2](1)}(\mathbf{x}) = 0 \quad (50)$$

$$\bar{t}^{1}(\mathbf{x}) = \tilde{t}^{\text{in}[1]}(\mathbf{x}) \quad (51)$$

$$\bar{t}^{[2](1)}(\mathbf{x}) = 0 \quad (52)$$

また、基底関数は、平面波を用いて次式で与える。

$$\tilde{a}_k^{[p](1)}(\mathbf{x}) = \tilde{U}^{\text{PW}[p]}(\mathbf{x}, \mathbf{p}_k^{[p]}) \quad (53)$$

$$\tilde{b}_k^{[p](1)}(\mathbf{x}) = \tilde{T}^{\text{PW}[p]}(\mathbf{x}, \mathbf{p}_k^{[p]}) \quad (54)$$

ただし、 $k = 1, 2, \dots, N_p$ であり、 $N_a^{(1)} = N_p$ となる。第 1 段階では、平面波に関する近似係数 $\tilde{c}_k^{[p](1)}$ を決定する。そのためには境界条件の修正が必要であり、具体的には剥離部分 S_1 においても境界条件を式 (7), (8) から式 (5), (6) に置き換えて、近似係数 $\tilde{c}_k^{[p](1)}$ を求める。

第 2 段階では、既知項を以下の式で与える。

$$\bar{u}^{[1](2)}(\mathbf{x}) = \bar{u}^{1}(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^{N_a^{(1)}} \tilde{a}_k^{1}(\mathbf{x}) \tilde{c}_k^{1} \quad (55)$$

$$\bar{u}^{2}(\mathbf{x}) = \bar{u}^{[2](1)}(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^{N_a^{(1)}} \tilde{a}_k^{[2](1)}(\mathbf{x}) \tilde{c}_k^{[2](1)} \quad (56)$$

$$\bar{t}^{[1](2)}(\mathbf{x}) = \bar{t}^{1}(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^{N_a^{(1)}} \tilde{b}_k^{1}(\mathbf{x}) \tilde{c}_k^{1} \quad (57)$$

$$\bar{t}^{2}(\mathbf{x}) = \bar{t}^{[2](1)}(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^{N_a^{(1)}} \tilde{b}_k^{[2](1)}(\mathbf{x}) \tilde{c}_k^{[2](1)} \quad (58)$$

また、基底関数は、基本解を用いて次式で与える。

$$\tilde{a}_k^{[p](2)}(\mathbf{x}) = \tilde{U}^{[p]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}_k^{[p]}) \quad (59)$$

$$\tilde{b}_k^{[p](2)}(\mathbf{x}) = \tilde{T}^{[p]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}_k^{[p]}) \quad (60)$$

ただし、 $k = 1, 2, \dots, N_y$ であり、 $N_a^{(2)} = N_y$ となる。第 2 段階では健全部分と剥離部分の両方を考慮するため、境界条件は式 (5)-(8) を用いて近似係数 $\tilde{c}_k^{[p](2)}$ を決定する。

OMP-Mf(2) において、第 1 段階では境界条件として式 (5), (6) を用いており、入射波は平面波であるため、このとき未知となる波動場（反射波・透過波）は平面波のみで表現可能である。そのため、第 1 段階では平面波のみを基底関数として用いる。一方、第 2 段階では界面剥離による散乱波が発生し、この散乱波は放射条件を満たす基本解を用いて表現する必要がある。そのため、第 2 段階では基本解のみを基底関数として用いる。OMP-Mf(2) は OMP-Mf(1) とは異なり、平面波によって構成される波動場のみを先に平面波で近似し、円筒波で表現されるべき波動場を後から基本解で近似する。このように、OMP-Mf(s) の段階数 s は、表現したい波動場の性質に基づいて適切に決定する必要がある。仮に、本節に示した OMP-Mf(2) において第 1 段階と第 2 段階を入れ替えた場合、本来は平面波で表現されるべき反射波・透過波が基本解によって表現されてしまう可能性がある。

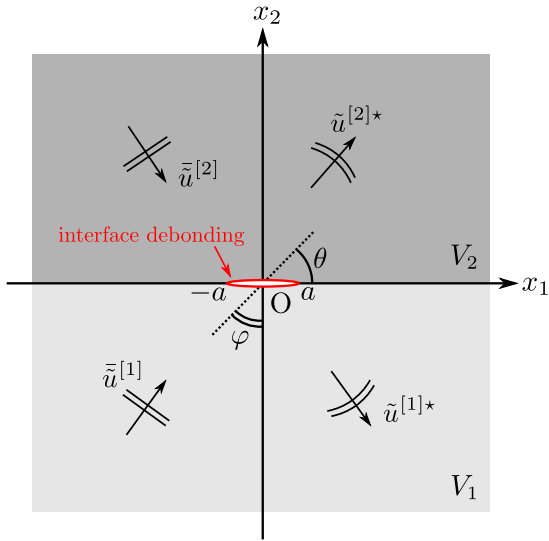


Fig. 2 Analytical model.

3. 数値解析例

3.1. 解析条件

解析モデルを Fig.2 に示す. 領域 V_1 と V_2 の界面は $x_2 = 0$ とし, 界面における剥離部分の長さは $2a$ とした. 解析領域を構成する弾性体の材料定数は, 密度を $\rho_1 = \rho_2 = 1$ とし, せん断弾性係数を $\mu_1 = 1, \mu_2 = 0.25$ とした. また, 角周波数は $\omega = \pi$ とした. 界面き裂の代表長さ a は, 領域 V_1 における面外波動の波長 λ_1 との関係が $\lambda_1 = 2a$ となるように設定した. 入射波である平面波の振幅は $u_0 = 1$ とし, その進行方向は $\varphi^{\text{in}} = 0.25\pi$ ($\theta^{\text{in}} = 0.625\pi$) とした. ただし, φ および θ の角度の取り方は, Fig.2 に示す通りとした.

本論文で取り扱うメッシュフリー型解析手法の適用において, 選点 \mathbf{x}_i は界面上の $x_{i,1} \in (-10a, 10a)$ を満たす範囲に, 等間隔に配置した. 選点の個数は $N_x = 200$ とした. 近似解の表現において, 基本解の源点 $\mathbf{y}_k^{[p]}$ は次式で与えた.

$$\mathbf{y}_k^{[p]} = \mathbf{x}_j + \begin{Bmatrix} 0 \\ \Delta y_0 \end{Bmatrix} + (-1)^{p-1}(l-1) \begin{Bmatrix} 0 \\ \Delta y \end{Bmatrix}; \quad k = (l-1)N_x + j \quad (61)$$

ただし, $l = 1, 2, \dots, N_l$ および $j = 1, 2, \dots, N_x$ である. このとき, 源点の個数は $N_y = N_l N_x$ となる. 本論文では, $N_l = 20, \Delta y_0 = \Delta y = 0.1$ とした. 式 (61) を用いて計算した源点 $\mathbf{y}_k^{[p]}$ および選点 \mathbf{x}_i の配置は, Fig.3 に示す通りである. また, 近似解の表現において, 平面波の進行方向ベクトル $\mathbf{p}_k^{[p]}$ は次式で与えた.

$$\mathbf{p}_k^{[p]} = \begin{Bmatrix} \cos \theta_k^{[p]} \\ \sin \theta_k^{[p]} \end{Bmatrix}; \quad k = 1, 2, \dots, N_p \quad (62)$$

ただし,

$$\theta_k^{[p]} = \theta_{\min}^{[p]} + (k-1)\Delta\theta^{[p]} \quad (63)$$

$$\Delta\theta^{[p]} = \frac{\theta_{\max}^{[p]} - \theta_{\min}^{[p]}}{N_p - 1} \quad (64)$$

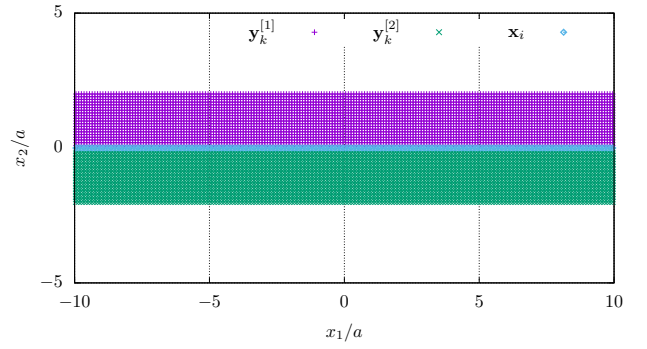


Fig. 3 The location of source points $\mathbf{y}_k^{[p]}$ and collocation points \mathbf{x}_i .

Table 1 The number of equations and unknowns

	M	N
OMP-MFS	400	8000
OMP-Mf(1)	400	16000
OMP-Mf(2) stage 1	400	8000
OMP-Mf(2) stage 2	400	8000

とした. 本論文では, 進行方向ベクトルの個数を $N_p = 20N_x$ とした. また, 進行方向ベクトルを与える角度の範囲は, $(\theta_{\min}^{[1]}, \theta_{\max}^{[1]}) = (1.5\pi, 2\pi)$, $(\theta_{\min}^{[2]}, \theta_{\max}^{[2]}) = (0, 0.5\pi)$ とした. なお, Table 1 に各解析手法における方程式の数 M と未知数の数 N の関係をまとめる. いずれの解析手法においても, 劣決定問題を取り扱っていることが確認できる. 加えて, 式 (31), (32) に示す OMP の終了条件に含まれるパラメータは, $\epsilon_{\text{OMP}} = 10^{-10}$, $\epsilon_{\text{SVD}} = 10^{-10}$ で与えた.

3.2. 解析結果

3.2.1. 界面における変位・表面力

界面における変位および表面力の計算結果を比較する. 比較には, メッシュフリー型解析手法 (OMP-MFS, OMP-Mf(s)) による近似解に加え, BEM による近似解を参照解として用いる. BEM による解析では, 界面の影響によって生じる平面波 (反射波, 透過波) を既知とせず, 全変位に関する境界積分方程式を用いた. そのため, BEM による近似解には無限長の境界に配置されるべき要素を打ち切ることで生じる影響が含まれるが, ここでは $x_1 \in [-80a, 80a]$ の範囲に境界要素を配置することで, その影響を可能な限り取り除いた. なお, 境界積分方程式の離散化には一定要素を用いた.

Fig.4 および Fig.5 に, 領域 V_1 に対する境界における変位および表面力を示す. Fig.4 に示す変位の計算結果では, 解析手法ごとに値がわずかに異なるものの概ね等しい値が得られた. また, Fig.5 に示す表面力の計算結果では, 境界 S_1^- において表面力がゼロとなる点も含めて, 各解析手法の近似解は概ね一致した.

Fig.6 および Fig.7 に, 領域 V_2 に対する境界における変位および表面力を示す. これらの図に示す結果も, Fig.4 および Fig.5 に示す結果と同様に, 各解析手法によって得られる近似

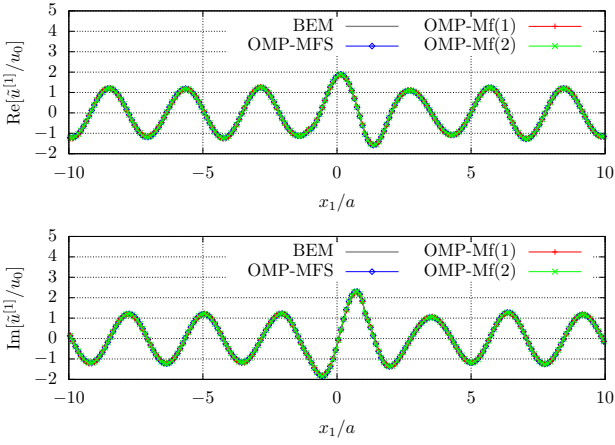


Fig. 4 Displacement distribution on the boundary of domain V_1 .

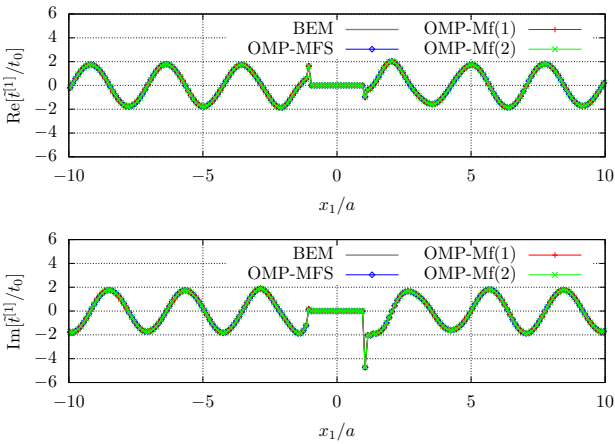


Fig. 5 Traction distribution on the boundary of domain V_1 ($t_0 = \mu_1 u_0/a$).

解が概ね一致していることが確認された。解析条件に示した通り、OMP-MFS、OMP-Mf(s)は、選点 \mathbf{x}_i を $x_{i,1} \in (-10a, 10a)$ の範囲に配置している。本節に示した結果から、境界値の計算では、OMP-MFS、OMP-Mf(s)において選点を配置する範囲（選点の配置を打ち切る範囲）による影響は顕著に出現しないことが確認された。

3.2.2. OMP-Mf(s) による近似解の傾向

領域 V_p の変位分布の比較から、OMP-Mf(s)によって得られる近似解の傾向について整理する。比較には、OMP-Mf(s)とOMP-MFSによって計算された変位の差（以下、変位差分と呼ぶ）を用いる。比較対象としてOMP-MFSを用いる理由は、OMP-Mf(s)による近似解と同様の表現を用いているためである。Fig.8に、OMP-Mf(1)とOMP-MFSの変位差分の実部を示す。同図において、変位差分は領域 V_p に広く分布しており、その値はFig.4およびFig.6に示した境界値の変位と比較して無視できない程度の大きさとなった。また、同位相面の分布から、この変位差分は平面波（反射波、透過波）の近似誤差に起因するものと考えられる。

Fig.9に、OMP-Mf(2)とOMP-MFSの変位差分の実部を示す。同図に示す結果から、OMP-Mf(2)ではOMP-Mf(1)の場合と比較して変位差分が比較的小さくなることが確認さ

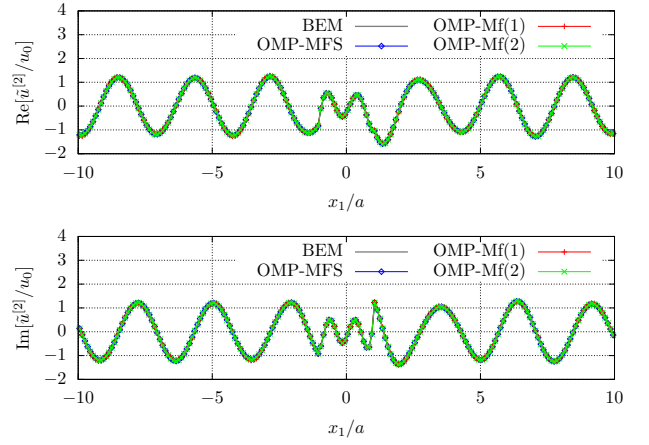


Fig. 6 Displacement distribution on the boundary of domain V_2 .

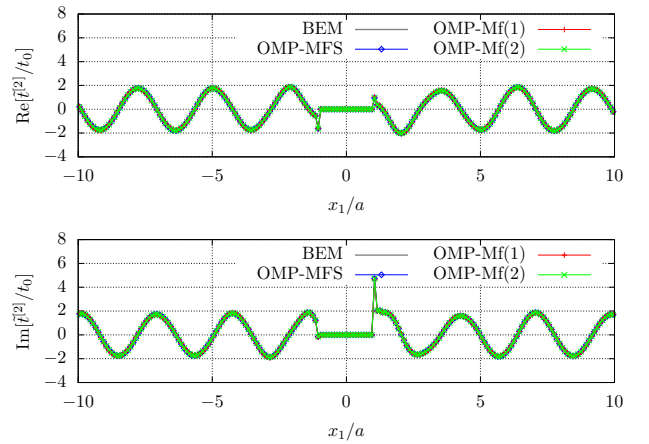


Fig. 7 Traction distribution on the boundary of domain V_2 ($t_0 = \mu_1 u_0/a$).

れた。可視化領域内部の $\mathbf{x} = [-10a, 10a]^T$ の近傍において、変位差分が相対的に大きくなった。変位差分の同位相面の分布から、この変位差分についてもOMP-Mf(1)と同様に、平面波の近似誤差に起因して生じていると考えられる。この点をより詳細に調べるため、次節では開発手法における基底関数の選択傾向について議論する。

3.2.3. OMP-Mf(s) における基底関数の選択傾向

OMP-Mf(s)において選択された基底関数の傾向について考察する。Table 2に、各解析手法においてOMPによって選択された基底関数の個数をまとめる。この表において、 $N_y^{[p]}$ は領域 V_p に関する基本解の個数、 $N_p^{[p]}$ は領域 V_p に関する平面波の個数を表す。この結果から、OMP-MFSとOMP-Mf(2)では、各領域における基本解の個数が等しくなった。また、OMP-Mf(1)とOMP-Mf(2)では、解表現に用いる平面波の個数が大きく異なっていることが確認できる。

Fig.10に、OMP-Mf(s)において選択された平面波の進行方向ベクトル $\mathbf{p}_k^{[p]}$ から得られる進行方向の角度 θ と、それに対応する近似係数の絶対値を示す。同図には、解析的に求めた反射係数および透過係数の値もあわせて示している。これらの反射係数・透過係数は、OMP-MFSにおいて反射波 $\tilde{u}^{\text{re}[1]}(\cdot)$ および透過波 $\tilde{u}^{\text{tr}[2]}(\cdot)$ の計算に用いているため、これ

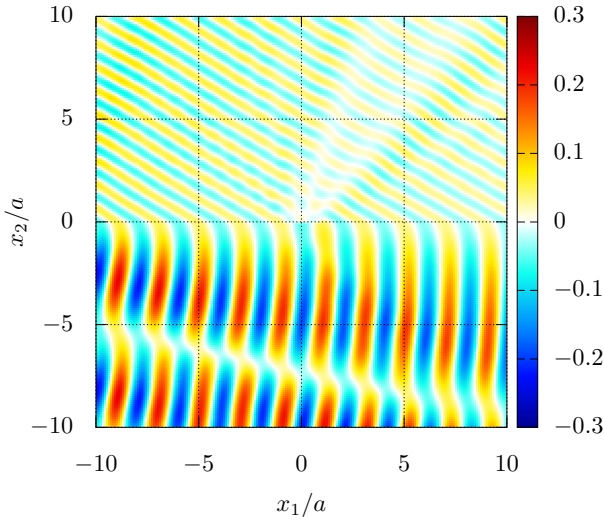


Fig. 8 The real part of displacement difference between OMP-Mf(1) and OMP-MFS.

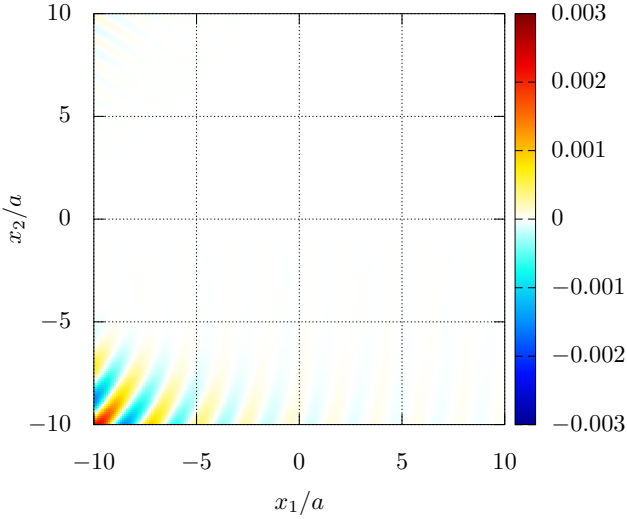


Fig. 9 The real part of displacement difference between OMP-Mf(2) and OMP-MFS.

らの値に近い値が得られていれば、反射波・透過波を良く近似していることになる。Fig.10の上図は、領域 V_1 における平面波（反射波）に関する計算結果に対応する。この図では、OMP-Mf(1)、OMP-Mf(2)ともに $\theta/\pi = 0.175$ の反射係数に近い値が得られている。また、OMP-Mf(2)では $\theta/\pi = 0.175$ 以外の成分が比較的小さくなったが、OMP-Mf(1)では他にも近似係数の絶対値が大きい成分が含まれていた。これらがFig.8に示すような変位差分を生じさせた原因と考えられる。これに対して、Fig.10の下図は、領域 V_2 における平面波（透過波）に関する計算結果に対応する。この図では、OMP-Mf(1)、OMP-Mf(2)ともに透過係数に概ね一致する結果が得られた。しかし、OMP-Mf(1)では透過波の進行方向から離れた角度に近似係数の絶対値が比較的大きな成分が確認された。これらが影響した結果、OMP-Mf(1)の変位差分はOMP-Mf(2)と比較して大きくなった考えられる。

続けて、基本解の源点の選択傾向について考察する。OMPによって選択された源点の配置とそれに対応する近似係数の

Table 2 The number of basis functions selected by OMP

	$N_y^{[1]*}$	$N_y^{[2]*}$	$N_p^{[1]*}$	$N_p^{[2]*}$
OMP-MFS	200	200	-	-
OMP-Mf(1)	198	195	3	4
OMP-Mf(2) stage 1	-	-	23	37
OMP-Mf(2) stage 2	200	200	-	-

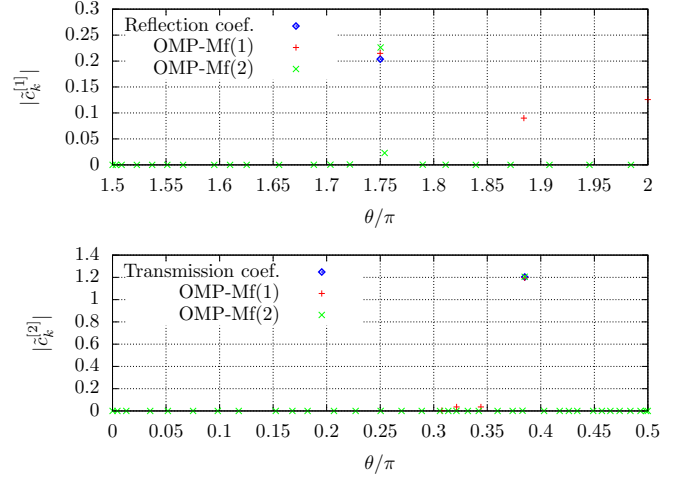


Fig. 10 The angle of propagation of plane waves and the corresponding approximation coefficients.

絶対値を、Fig.11-Fig.13に示す。ただし、Fig.11はOMP-MFS、Fig.12はOMP-Mf(1)、Fig.13はOMP-Mf(2)の結果に対応する。なお、これらの図において、近似係数の絶対値がゼロとなる源点はあらかじめ取り除いてある。これらの結果を比較すると、いずれの解析手法においても、境界近傍に源点が密に配置されていることがわかる。また、健全部分と剥離部分の境界と界面から離れた位置に、近似係数の絶対値が大きな源点が分布することが確認された。加えて、OMP-MFSとOMP-Mf(2)の結果では、源点の配置が一致し、近似係数の絶対値の値が概ね等しくなった（両者の差は 10^{-9} 程度であった）。以上の結果から、平面波と基本解による波動場を同時に決定するOMP-Mf(1)よりも、それらを2つの段階に分割して決定するOMP-Mf(2)の方が、解析的に平面波を取り扱うOMP-MFSに近い解析を実現できることが確認された。

4. おわりに

本論文では、弾性体の界面剥離による面外波動散乱問題を対象に、OMPに基づくメッシュフリー型解析手法を開発し、その有効性を確認した。対象とする問題では入射波を平面波に設定し、すべてのメッシュフリー型解析手法において、近似解を平面波と基本解による円筒波の重ね合わせによって表現した。本論文における開発手法であるOMP-Mf(s)は、近似係数の決定をs段階に分割して行う解析手法であり、 $s = 1, 2$ とした場合の計算結果の比較を行った。OMP-Mf(1)および

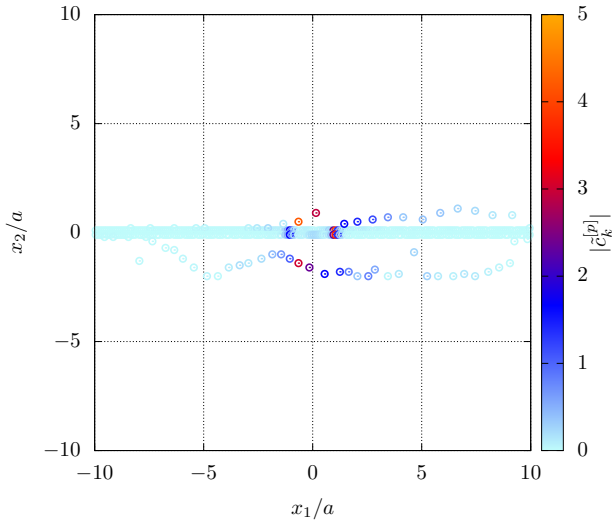


Fig. 11 The location of the source points and the corresponding approximation coefficients (OMP-MFS).

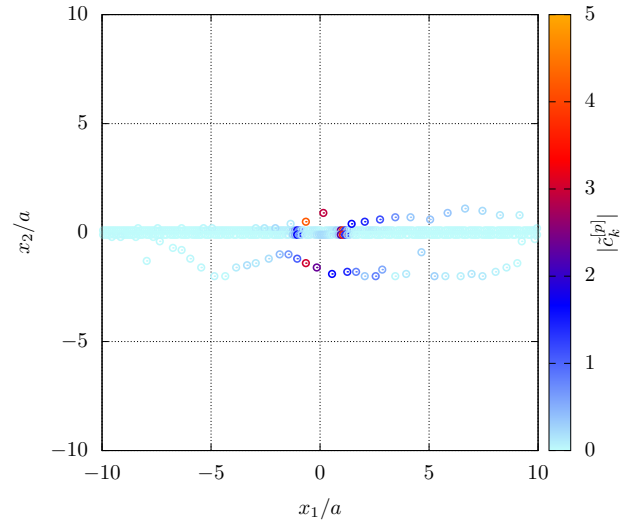


Fig. 13 The location of the source points and the corresponding approximation coefficients (OMP-Mf(2)).

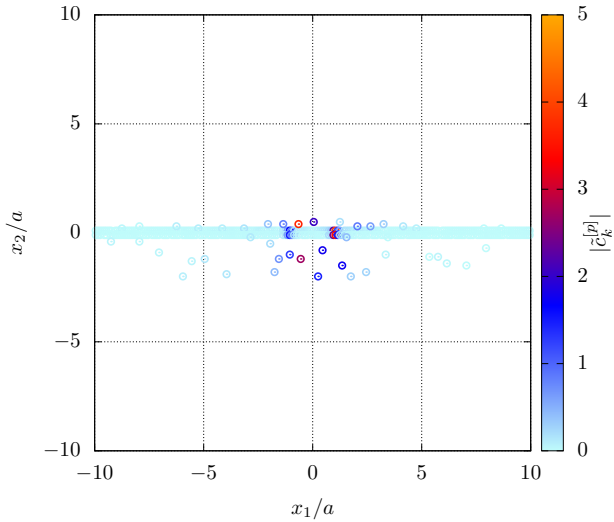


Fig. 12 The location of the source points and the corresponding approximation coefficients (OMP-Mf(1)).

OMP-Mf(2) における結果の比較から、境界値については両者に大きな差は生じなかったが、領域内部の変位分布については OMP-Mf(2) が優れていることが確認された。なお、本論文では計算コストに関する定量的な考察は行っていないが、開発手法は OMP による基底関数の探索を含むため、従来の MFS と比較して計算コストは高くなる。また、この傾向は、解析に用いる基底関数の数の増加に伴い顕著となる。今後は、OMP-Mf(s) を界面剥離を有する多層構造弾性体に対する波動散乱問題に適用し、その有効性を確認する予定である。

謝辞：本研究は、JSPS 科研費 22K04277 の助成を受けたものです。この場を借りて感謝申し上げます。

参考文献

(1) Boström, A.: Elastic wave scattering from an interface crack: Antiplane strain, *J. Appl. Mech.*, **54**(1987),

pp. 503–508.
 (2) Hirose, S., Kitahara, M.: Scattering of elastic waves by interface cracks between dissimilar materials, *Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation*, **12**(1993), pp. 1467–1474.
 (3) Golub, M.V., Doroshenko, O.V.: Boundary integral equation method for simulation scattering of elastic waves obliquely incident to a doubly periodic array of interface delaminations, *J. Comput. Phys.*, **376**(2019), pp. 675–693.
 (4) Fairweather, G., Karageorghis, A., Martin, P.A.: The method of fundamental solutions for scattering and radiation problems, *Eng. Anal. Bound. Elem.*, **27**(2003), pp. 759–769.
 (5) Shigeta, T., Young, D.L., Liu, C.S.: Adaptive multi-layer method of fundamental solutions using a weighted greedy QR decomposition for the Laplace equation, *J. Comput. Phys.*, **231**(2012), pp. 7118–7132.
 (6) Li, M., Chen, C.S., Karageorghis, A.: The MFS for the solution of harmonic boundary value problems with non-harmonic boundary conditions, *Comput. Math. Appl.*, **66**(2013), pp. 2400–2424.
 (7) Lin, J., Lamichhane, A.R., Chen, C.S., Lu, J.: The adaptive algorithm for the selection of sources of the method of fundamental solutions, *Eng. Anal. Bound. Elem.*, **95**(2018), pp. 154–159.
 (8) Oh, J., Zhu, H., Fu, Z.: An adaptive method of fundamental solutions for solving the Laplace equation, *Comput. Math. Appl.*, **77**(2019), pp. 1828–1840.
 (9) 永原正章：スパースモデリング–基礎から動的システムへの応用–, (2017), コロナ社.
 (10) 古川陽, 松村耕佑, 斎藤隆泰, 廣瀬壮一：異方性材料の面外波動問題に対する基本解近似解法の適用, *土木学会論文集*, **79**(2023), 論文 No.22-15024.

- (11) 結城良治, 木須博行: 境界要素法による弾性解析, (1987), 培風館.
- (12) Pluymers, B., Van Hal, B. Vandepitte, D., Desmet, W.: Trefftz-based methods for time-harmonic acoustics, Arch. Comput. Methods Eng., **14**(2007), pp. 343–381.
- (13) Elad, M. 著, 玉木徹訳: スパースモデリング- l_1/l_0 ノルム最小化の基礎理論と画像処理への応用, (2016), 共立出版.
- (14) Achenbach, J.D.: Wave Propagation in Elastic Solids, (1973), North-Holland Publishing Company.

