境界要素法と摂動法を用いた開領域の固有周波数の加振問題への応用

APPLICATION OF EIGENFREQUENCY FOR AN OPEN DOMAIN TO EXCITATION PROBLEMS USING BOUNDARY ELEMENT AND PERTURBATION METHODS

丸山　泰蔵 [1)]，杉田　直広 [2)]

Taizo MARUYAMA and Naohiro SUGITA

1) 東京工業大学環境・社会理工学院　(〒 152-8550　東京都目黒区大岡山 2 丁目 12-1,　E-mail: maruyama.t.ag@m.titech.ac.jp)
2) 東京工業大学科学技術創成研究院　(〒 226-8503　神奈川県横浜市緑区長津田町 4259,　E-mail: sugita.n.aa@m.titech.ac.jp)

This paper presents a perturbation analysis of the excitation problem for an open domain. As a fundamental study, it addresses wave scattering by a crack in a two-dimensional unbounded domain to avoid fictitious eigenfrequency issues, which are encountered in a boundary integral equation. The modal amplitude is approximated using the perturbation method, employing a Taylor expansion around the complex-valued eigenfrequency for the open domain. The eigenfrequency problem for an open domain is solved using boundary element and Sakurai-Sugiura methods. Several numerical results demonstrate that the perturbation solutions evaluate the modal amplitude with real-valued frequency excitation.

Key Words: Eigenfrequency Analysis, Open Domain, Excitation Problem, Boundary Element Method, Perturbation Method

1. はじめに

超音波非破壊検査等で扱う波動問題では，材料表面等の境界が十分遠方に存在する場合，遠方からの反射波が含まれない有限時間の計測波形を用いて欠陥の推定を行うことが多い．その場合は通常，無限遠への波の放射を考慮して（半）無限領域中の散乱問題としてモデル化を行う [(1)]．開領域の波動問題では波の放射によるエネルギーの散逸が存在するため，エネルギーが完全にトラップされる特別な場合を除いて実数の固有周波数は存在しない．しかしながら，エネルギー散逸を含んだ複素数の固有周波数は存在することが知られている．このような複素固有周波数は減衰を伴う共振として物理的に解釈することができる．したがって開領域の固有周波数によって引き起こされる共振を利用することができれば，Local Defect Resonance [(2)] を利用した欠陥のイメージングや超音波試験の S/N 向上に寄与できると考えられる．以上の観点から，如何なる加振を行えばどの程度の振幅で共振を励起できるか調べる加振問題の解析は，開領域の固有周波数の実用上意義がある．

閉領域に対する実固有周波数ではその固有関数の直交性が振動論においてよく知られており，ノーマルモード展開を用いれば加振によって励起される各共振モード振幅は求められる [(3)]．一方，開領域に対する複素固有周波数ではその固有関数の正規化，完全性，直交性に関する研究は進められ，特定の場合には物理的に意味のあるモードのみでの完全性が示されているものの [(4)]，多くの場合は定かでない．また，正規化と直交性は Perfect Matched Layer (PML) を用いた定式化によって形成する方法が提案されている [(5)]．これらの電磁気学における開領域の複素固有周波数に関する研究成果は近年，Sauvan ら [(6)] によってまとめられている．一方，振動学では，摂動法による固有周波数周りでの加振問題の解析が行われている [(7)]．複数のモードが含まれる解析を行う場合は直交関係式が必要になるが，単一の固有周波数に対して Taylor 展開する場合には必ずしも直交関係式が得られてなくとも解析可能であると思われる．そこで本研究では摂動法に基づき，直交関係式を用いずに単一の複素固有周波数による共振モードがどの程度励振できるかを調べる簡便な方法を提案する．

開領域の固有周波数問題では，空間領域において無限遠で固有関数が発散する．そのため，有限要素法や有限差分法といった領域型の数値解法で扱う場合，PML 等の吸収境界に

2023 年 10 月 09 日受付，2023 年 10 月 27 日受理

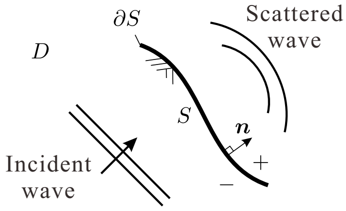

Fig. 1 Elastic wave scattering by a crack in a two-dimensional unbounded domain.

よる処理が必要となる．しかしながら PML を用いた場合では，PML 由来の非物理的なモードが発生するため，物理的に意味のあるモードを識別する必要がある (8)．一方，積分方程式に基づいた手法では，基本解（Green 関数）が無限遠での放射条件を厳密に満足することから，境界積分方程式の見かけの固有周波数問題を除いて，不適切なモードは発生しない．そこで本研究では基礎的検討として，見かけの固有周波数問題が現れない 2 次元無限領域中のき裂による散乱問題を対象として，境界要素法を用いた解析を行う．その後，摂動法を用いて，開領域に対して得られる複素固有周波数と実際の加振問題における実周波数の近似的な関係を求める．

2. 解くべき開領域の固有値問題

本研究では時間調和な波動場を考え，時間因子は $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$ とする．ここで，i は虚数単位，ω は角周波数，t は時刻である．また特に断らない限り，2 次元直交座標系を用い，総和規約に従うものとする．

Fig. 1 に示すように，き裂 $S \subset \mathbb{R}^2$ によって入射波が散乱する問題を考える．き裂 S は縁 ∂S を有する自己交差しない滑らかな開曲線である．領域 $D(:= \mathbb{R}^2 \setminus \overline{S})$ は等方，均質な線形弾性体であると仮定する．ここで，$\overline{S}$ は S の閉包である．Fig. 1 のようにき裂 S の片側を + 方向，反対を − 方向とする．法線方向ベクトル $\boldsymbol{n}$ は S の + 方向に定義する．全変位場 $\boldsymbol{u}$ は次式のように入射波 $\boldsymbol{u}^{\mathrm{in}}$ と散乱波 $\boldsymbol{u}^{\mathrm{sc}}$ の重ね合わせであると仮定する．

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}^{\mathrm{in}} + \boldsymbol{u}^{\mathrm{sc}} \tag{1}$$

他の変数についても上付き in, sc はそれぞれ入射波，散乱波に対応することを示す．散乱波は次の Navier-Cauchy 方程式と放射条件を満足する．

$$\mu\nabla^2\boldsymbol{u}^{\mathrm{sc}}(\boldsymbol{x}) + (\lambda+\mu)\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{u}^{\mathrm{sc}}(\boldsymbol{x}) + \rho\omega^2\boldsymbol{u}^{\mathrm{sc}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0} \quad \text{for } \boldsymbol{x}\in D \tag{2}$$

$$\lim_{|\boldsymbol{x}|\to\infty}\sqrt{|\boldsymbol{x}|}\left\{\frac{\partial \boldsymbol{u}^{\mathrm{sc};\varphi}}{\partial|\boldsymbol{x}|}(\boldsymbol{x}) - \mathrm{i}k_\varphi \boldsymbol{u}^{\mathrm{sc};\varphi}(\boldsymbol{x})\right\} = \boldsymbol{0} \tag{3}$$

$$\lim_{|\boldsymbol{x}|\to\infty}\frac{1}{\sqrt{|\boldsymbol{x}|}}\boldsymbol{u}^{\mathrm{sc};\varphi}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0} \tag{4}$$

ここで，λ, μ は Lamé 定数，ρ は密度である．また，$\varphi = \mathrm{L}$ or T であり，$\boldsymbol{u}^{\mathrm{sc;L}}$, $\boldsymbol{u}^{\mathrm{sc;T}}$ はそれぞれ散乱波の縦波成分，横波成分を表しており，k_{L} と k_{T} はそれぞれ縦波と横波の波数である．入射波 $\boldsymbol{u}^{\mathrm{in}}$ は散乱体であるき裂が存在しない場合の解であるため，式 (2) を $\mathbb{R}^2$ に対して満足するが，放射条件 (3), (4) は必ずしも満足しない．き裂開口変位 $[\boldsymbol{u}](:= \boldsymbol{u}^+ - \boldsymbol{u}^-)$ に対して次の正則条件を仮定する．

$$[\boldsymbol{u}](\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0} \quad \text{for } \boldsymbol{x}\in\partial S$$

ここで，上付き添字 ± は D 中の場の変数をどちらの方向から S に極限移行したのかを示す．向かい合うき裂面は常に非接触であると仮定し，き裂面における境界条件は次式で表される表面力フリーとする．

$$t_i(\boldsymbol{x}) := \mathcal{T}_{ij}u_j(\boldsymbol{x}) = 0 \quad \text{for } \boldsymbol{x}\in S \tag{5}$$
$$\mathcal{T}_{ij} := n_k(\boldsymbol{x})C_{kijl}\frac{\partial}{\partial x_l}$$

ここで，$\boldsymbol{t}$ は表面力，$\mathcal{T}_{ij}$ は表面力作用素，$\boldsymbol{C}$ は弾性定数テンソルである．式 (5) では $\boldsymbol{t}^+ = \boldsymbol{t}^-$ であるため上付き添字を省略している．

式 (2)–(4) から得られる散乱波に対する積分表現に式 (1) を代入すると，次の全波動場に対する積分表現が得られる．

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{u}^{\mathrm{in}}(\boldsymbol{x}) + \int_S \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\omega)\cdot[\boldsymbol{u}](\boldsymbol{y})\mathrm{d}S(\boldsymbol{y}) \quad \text{for } \boldsymbol{x}\in D \tag{6}$$

ここで，$\boldsymbol{T}$ は二重層核，$\mathrm{d}S$ は線素である．式 (6) の両辺に $\boldsymbol{x}$ に関する表面力作用素を作用させた後，$\boldsymbol{x}$ を境界 S 上に極限移行し，式 (5) を考慮すると次の超特異境界積分方程式が得られる．

$$-\boldsymbol{t}^{\mathrm{in}}(\boldsymbol{x}) = \mathrm{p.f.}\int_S \boldsymbol{W}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\omega)\cdot[\boldsymbol{u}](\boldsymbol{y})\mathrm{d}S(\boldsymbol{y}) \quad \text{for } \boldsymbol{x}\in S \tag{7}$$

ここで，$\boldsymbol{W}$ は超特異積分核である．通常の境界要素法では，設定した入射波項 $\boldsymbol{t}^{\mathrm{in}}$ に対して式 (7) をき裂開口変位 $[\boldsymbol{u}]$ について解く．その後，式 (6) によって領域 D 内での任意の点における変位を求めることができる．

式 (7) で表される系に対する固有周波数 ω^* と対応する固有関数 $[\boldsymbol{u}^*]$ は次を満足する

$$\mathrm{p.f.}\int_S \boldsymbol{W}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\omega^*)\cdot[\boldsymbol{u}^*](\boldsymbol{y})\mathrm{d}S(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{0} \quad \text{for } \boldsymbol{x}\in S \tag{8}$$

このとき，$\boldsymbol{W}$ は ω に対する非線形関数であるため，式 (8) を空間について離散化した場合，非線形固有値問題に帰着される．波の無限遠への放射によってエネルギーが完全に停留できないため，固有周波数 ω^* はエネルギー減衰を含む意味で複素数となる．本研究では時間因子を $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$ と設定したため，$\Im[\omega^*] < 0$ となる．

3. 加振問題への応用

非線形固有値問題 (8) を解いて得られる固有周波数は複素数であるが，実際の加振は実周波数で行われることを考慮して加振問題への応用を考える．本研究では，実軸に近い位置に分布する単一の固有周波数 ω^* を対象とし，摂動法による加振問題の定式化を行う．

加振に用いる実周波数 ω は次のように表されると仮定する．

$$\omega = \omega^* + \epsilon\hat{\omega} \tag{9}$$

ここで，ϵ は小さな正数，$\hat{\omega}$ は固有周波数からの離調パラメータである．加振によって励起されるき裂開口変位 $[\boldsymbol{u}]$ は次のように ϵ のべき級数で表現できると仮定する．

$$[\boldsymbol{u}] = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n [\boldsymbol{u}_n] \tag{10}$$

超特異積分核 $\boldsymbol{W}$ を次のように ω について ω^* 周りで Taylor 展開する．

$$\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \omega) = \boldsymbol{W}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \omega^*) + \epsilon\hat{\omega}\frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial \omega}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \omega^*) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \tag{11}$$

また，加振力である入射波の表面力は次のオーダーと仮定する．

$$\boldsymbol{t}^{\mathrm{in}} = \epsilon\hat{\boldsymbol{t}}^{\mathrm{in}} \tag{12}$$

式 (9)–(12) を式 (7) に代入し，ϵ についてのオーダーごとに方程式を満足させることを考えると，$\mathcal{O}(\epsilon^0)$，$\mathcal{O}(\epsilon^1)$ に対して次式が得られる．

$$\mathcal{O}(\epsilon^0): \quad \mathrm{p.f.}\int_S \boldsymbol{W}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \omega^*) \cdot [\boldsymbol{u}_0](\boldsymbol{y}) \mathrm{d}S(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{0} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{O}(\epsilon^1): \quad & \mathrm{p.f.}\int_S \Bigg\{ \boldsymbol{W}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \omega^*) \cdot [\boldsymbol{u}_1](\boldsymbol{y}) \\ & + \hat{\omega}\frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial \omega}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \omega^*) \cdot [\boldsymbol{u}_0](\boldsymbol{y}) \Bigg\} \mathrm{d}S(\boldsymbol{y}) = -\hat{\boldsymbol{t}}^{\mathrm{in}}(\boldsymbol{x})\end{aligned} \tag{14}$$

式 (13) の解は式 (8) より，次のように得られる．

$$[\boldsymbol{u}_0] = \alpha[\boldsymbol{u}^*] \tag{15}$$

ここで，α は固有モード振幅である．式 (15) を式 (14) に代入して α と $\boldsymbol{t}^{\mathrm{in}}$ の関係を求めることができれば，設定した加振に対して固有モードがどの程度の強さで励振できるかを調べられる．

式 (14) について，如何なる $[\boldsymbol{u}_1]$ に対しても次のような関係を持つ関数 $\boldsymbol{v}^*$ が存在すると仮定する．

$$\int_S \overline{\boldsymbol{v}^*(\boldsymbol{x})} \cdot \left[\mathrm{p.f.}\int_S \boldsymbol{W}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \omega^*) \cdot [\boldsymbol{u}_1](\boldsymbol{y}) \mathrm{d}S(\boldsymbol{y}) \right] \mathrm{d}S(\boldsymbol{x}) = 0$$

式 (14) の両辺に左から $\overline{\boldsymbol{v}^*(\boldsymbol{x})}$ を掛けて $\boldsymbol{x}$ について S にわたって積分すると次式が得られる．

$$\begin{aligned}\alpha &= -\frac{1}{X^*\hat{\omega}} \int_S \overline{\boldsymbol{v}^*(\boldsymbol{x})} \cdot \hat{\boldsymbol{t}}^{\mathrm{in}}(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}S(\boldsymbol{x}) \\ &= -\frac{1}{X^*(\omega - \omega^*)} \int_S \overline{\boldsymbol{v}^*(\boldsymbol{x})} \cdot \boldsymbol{t}^{\mathrm{in}}(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}S(\boldsymbol{x})\end{aligned} \tag{16}$$

ここで，X^* は次式で定義している．

$$X^* := \int_S \overline{\boldsymbol{v}^*(\boldsymbol{x})} \cdot \left[\mathrm{p.f.}\int_S \frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial \omega}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \omega^*) \cdot [\boldsymbol{u}^*](\boldsymbol{y}) \mathrm{d}S(\boldsymbol{y}) \right] \mathrm{d}S(\boldsymbol{x})$$

X^* は固有ペア $(\omega^*, [\boldsymbol{u}^*])$，及び $\boldsymbol{v}^*$ の情報のみから求められるため，定数として考えられる．したがって式 (16) に示すように，固有モード振幅 α は加振項と $\boldsymbol{v}^*$ の内積，固有周波数からの離調 $(\omega - \omega^*)$ によって近似的に求められる．

4. 離散系での取り扱い

境界要素法を用いた数値計算における前節の理論の扱いを説明する．本研究では Galerkin 法を用いて境界積分方程式 (7) を離散化し，数値計算する．したがって，重み関数 ψ を用いた次の式を考える．

$$\begin{aligned}&-\int_S \psi(\boldsymbol{x})\boldsymbol{t}^{\mathrm{in}}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}S(\boldsymbol{x}) \\ &\quad = \int_S \psi(\boldsymbol{x})\mathrm{p.f.}\int_S \boldsymbol{W}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \omega) \cdot [\boldsymbol{u}](\boldsymbol{y}) \mathrm{d}S(\boldsymbol{y}) \mathrm{d}S(\boldsymbol{x})\end{aligned} \tag{17}$$

式 (17) を通常の境界要素法の枠組みで空間について離散化すると，次の連立一次方程式が得られる．

$$\mathbf{W}(\omega)[\mathbf{u}] = -\mathbf{t}^{\mathrm{in}}$$

ここで，$\mathbf{W}$，$[\mathbf{u}]$，$\mathbf{t}^{\mathrm{in}}$ はそれぞれ，超特異積分核に対応する係数行列，き裂開口変位に対応する未知ベクトル，入射表面力に対応する既知ベクトルである．したがって，本問題では次式を満足する ω^* と $[\mathbf{u}^*]$ のペアが固有周波数と右固有ベクトルである．

$$\mathbf{W}(\omega^*)[\mathbf{u}^*] = \mathbf{0} \tag{18}$$

ここで，$\mathbf{W}$ は ω に対する非線形関数行列であるため，式 (18) は非線形固有値問題である．本研究では，Sakurai-Sugiura Method [9] (SSM) によって非線形固有値問題を数値的に解く．

摂動法における各種パラメータは以下のように仮定する．

$$\begin{aligned}[\mathbf{u}] &= \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n [\mathbf{u}_n] \\ \mathbf{W}(\omega) &= \mathbf{W}(\omega^*) + \epsilon\hat{\omega}\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \omega}(\omega^*) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ \mathbf{t}^{\mathrm{in}} &= \epsilon\hat{\mathbf{t}}^{\mathrm{in}}\end{aligned}$$

以上を考慮すると，$\mathcal{O}(\epsilon^0)$，$\mathcal{O}(\epsilon^1)$ に対する方程式は次である．

$$\mathcal{O}(\epsilon^0): \quad \mathbf{W}(\omega^*)[\mathbf{u}_0] = \mathbf{0} \tag{19}$$

$$\mathcal{O}(\epsilon^1): \quad \mathbf{W}(\omega^*)[\mathbf{u}_1] + \hat{\omega}\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \omega}(\omega^*)[\mathbf{u}_0] = -\hat{\mathbf{t}}^{\mathrm{in}} \tag{20}$$

式 (19) の解は式 (18) より，次のように得られる．

$$[\mathbf{u}_0] = \alpha[\mathbf{u}^*] \tag{21}$$

固有値問題 (18) に対して次式を満足する左固有ベクトル $\mathbf{v}^*$ を考える．

$$\mathbf{v}^{*;\mathrm{H}}\mathbf{W}(\omega^*) = \mathbf{0}$$

ここで，上付き H は共役転置を示している．式 (21) と左固有ベクトル $\mathbf{v}^*$ を用いると，式 (20) は次のように変形できる．

$$\begin{aligned}\alpha &= -\frac{1}{\mathrm{X}^*\hat{\omega}}\mathbf{v}^{*;\mathrm{H}}\hat{\mathbf{t}}^{\mathrm{in}} \\ &= -\frac{1}{\mathrm{X}^*(\omega - \omega^*)}\mathbf{v}^{*;\mathrm{H}}\mathbf{t}^{\mathrm{in}}\end{aligned} \tag{22}$$

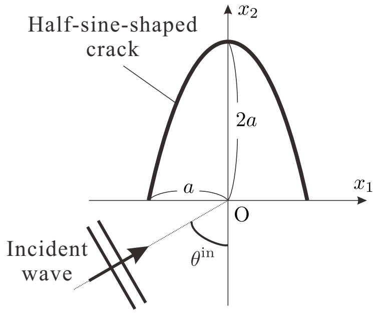

Fig. 2 Elastic wave scattering by a half-sine-shaped crack.

ここで，X^* は次式で定義している．

$$\mathrm{X}^* := \mathbf{v}^{*;\mathrm{H}}\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \omega}(\omega^*)[\mathbf{u}^*]$$

X^* は固有周波数と左右固有ベクトルから求められるため，固定した ω^* に対して定数である．そのため，固有モード振幅 α は左固有ベクトルと加振項の内積，固有周波数からの離調によって求められる．

5. 数値解析例

き裂に対する散乱解析結果と式 (22) による固有モード振幅の結果を比較して，本摂動解析の妥当性を確かめる．数値解析モデルは Fig. 2 に示す幅と高さが $2a$ の半周期正弦関数型き裂による入射平面波の散乱問題とした．Poisson 比 $\nu = 0.3$ として，入射平面波は次式で与えた．

$$\boldsymbol{u}^{\rm in} = u_0 \boldsymbol{d}_\varphi \exp\left(\mathrm{i}k_\varphi \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}\right) \tag{23}$$

ここで，u_0 は変位振幅，$\boldsymbol{p}$ は伝搬方向ベクトル，$\boldsymbol{d}_\varphi$ ($\varphi = \mathrm{L}$ or T) は振動方向ベクトルであり，$\boldsymbol{d}_\mathrm{L} = \boldsymbol{p}$，$\boldsymbol{d}_\mathrm{T}\cdot\boldsymbol{p} = 0$ である．また，Fig. 2 中の $\theta^{\rm in}$ は入射角であり，$\boldsymbol{p} = (\sin\theta^{\rm in}, \cos\theta^{\rm in})$ とした．この解析モデルは，著者らの既往の研究 [10, 11] においてき裂面の接触を考慮した場合に分調波共振が確認されたモデルであり，共振とその励振の特性を調べることも目的として採用した．

次式で表される幅 a あたりの入射エネルギーで正規化された散乱エネルギーを Fig. 3(a)，(b) に示す．

$$E^{\rm sc} = \frac{\mathrm{i}}{2au_0\sigma_0}\int_S \left\{[\boldsymbol{u}^{\rm sc}](\boldsymbol{x})\cdot\overline{\boldsymbol{t}^{\rm sc}(\boldsymbol{x})} - \overline{[\boldsymbol{u}^{\rm sc}](\boldsymbol{x})}\cdot\boldsymbol{t}^{\rm sc}(\boldsymbol{x})\right\}\mathrm{d}S(\boldsymbol{x})$$

ここで，σ_0 は次式で表される入射波の応力振幅である．

$$\sigma_0 = \begin{cases} u_0(\lambda+2\mu)k_\mathrm{L} & (\varphi = \mathrm{L}) \\ u_0\mu k_\mathrm{T} & (\varphi = \mathrm{T}) \end{cases}$$

Fig. 3(a)，(b) はそれぞれ縦波入射，横波入射の場合である．一方，Fig. 3(c) には SSM で求めた固有周波数を示す．図中の破線は SSM における積分経路（固有周波数の探索領域）を示している．Fig. 3(a)，(b) の散乱エネルギーは様々な入射角 $\theta^{\rm in}$ に対して示しているが，Fig. 3(c) の固有周波数の実部付近の周波数でいずれかの $\theta^{\rm in}$ がピークを取っている場合が多い．また，実部が最も小さい固有周波数に対応するピークは立ち上がりが急峻になっている．この固有周波数の減衰

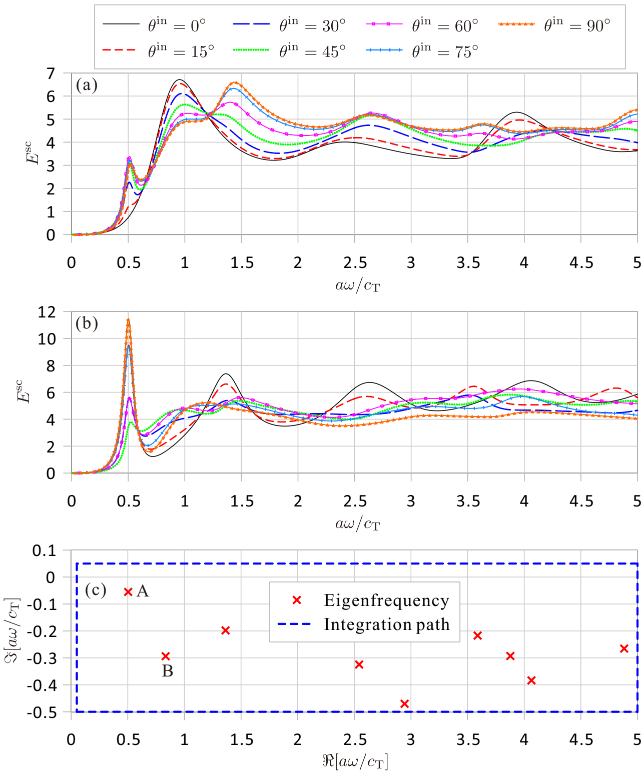

Fig. 3 Scattering energy by (a) longitudinal incidence and (b) transverse incidence for various frequencies when the analysis model is given by Fig. 2 with $\nu = 0.3$. The eigenfrequencies obtained by the SSM are plotted in (c).

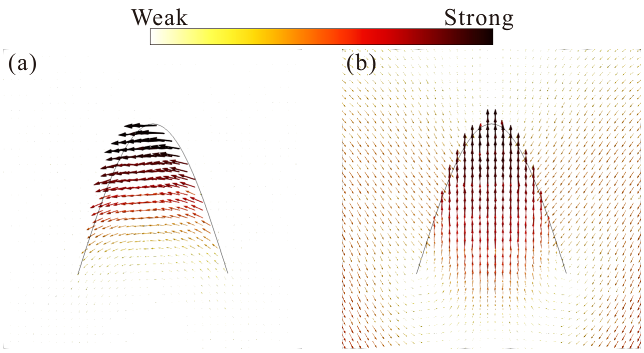

Fig. 4 Displacement fields in modal vibration of eigenfrequencies (a) A and (b) B shown in Fig. 3(c).

に対応する虚部の絶対値が小さいことと関係していると予想される．

Fig. 3(c) に示した A，B の 2 つの固有周波数に対応する固有モードでのある時刻の変位場をそれぞれ Fig. 4(a)，(b) に示す．Fig. 4(a) より，A の固有モードはき裂で隔てられた部分が左右に曲げ振動するような挙動である．一方，Fig. 4(b) より，B の固有モードはき裂で隔てられた部分が上下に伸び縮みするような挙動である．

入射周波数を固有周波数に近い実数としたときの式 (22) で表される固有モード振幅を調べる．次式で表される正規化した固有モード振幅の絶対値と入射角，周波数との関係を

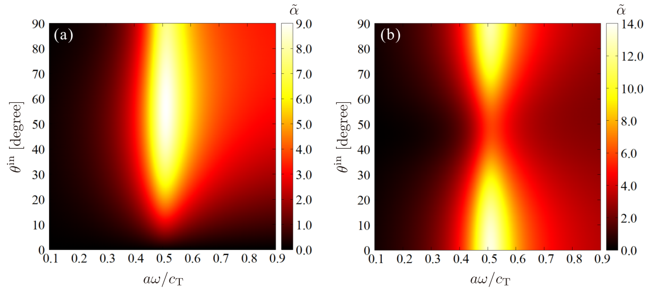

Fig. 5　Absolute value of modal amplitude for eigenfrequency A when (a) longitudinal and (b) transverse incidence.

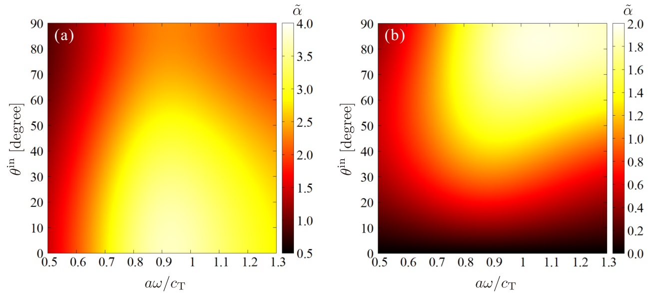

Fig. 6　Absolute value of modal amplitude for eigenfrequency B when (a) longitudinal and (b) transverse incidence.

Fig. 5，6 に示す．

$$\tilde{\alpha} = \left|\frac{\alpha}{u_0}\right| \max_{\boldsymbol{x}\in S} |[\boldsymbol{u}^*](\boldsymbol{x})|$$

Fig. 5，6 では，Fig. 4 に示した固有モードを励振するのに適切だと思われる入射波の種類，入射角で，固有周波数付近において $\tilde{\alpha}$ が大きな値を取ると期待される．Fig. 5(a)，(b) はそれぞれ縦波入射，横波入射の場合の結果である．縦横どちらの入射波に対しても A の固有周波数 $a\omega^*/c_T = 0.503 - 0.055i$ 付近の周波数にピークが存在することがわかる．一方，入射角については挙動が異なり，縦波入射の場合は $\theta^{in} = 0°$ のとき $\tilde{\alpha} = 0$ であり，$\theta^{in} = 60°$ あたりで $\tilde{\alpha}$ がピークを取っている．横波入射の場合は，$\theta^{in} = 0°$，$90°$ で $\tilde{\alpha}$ が大きな値を取り，$\theta^{in} = 50°$ 付近で値が小さくなっている．

Fig. 6 より，B の固有周波数の場合は A の場合と比較して，$\tilde{\alpha}$ の値が小さく，値の変化が緩やかであることがわかる．縦波入射の場合は $\theta^{in} = 0°$ のときに $\tilde{\alpha}$ がピークを取っている．一方，横波入射の場合は $\theta^{in} = 0°$ のとき $\tilde{\alpha} = 0$ であり，$\theta^{in} = 80°$ あたりで $\tilde{\alpha}$ がピークを取っている．

Fig. 3 で見られた虚部の絶対値が小さい固有周波数に対応するピークの立ち上がりが急峻になる傾向は，式 (22) 中の $1/(\omega - \omega^*)$ による影響だと理解でき，Fig. 5，6 とも整合している．また，入射波の種類や入射角に対する A，B の固有モード振幅に対する挙動はそれぞれ Fig. 4(a)，(b) に示される固有モードと整合している．

摂動法による固有モードのみのき裂開口変位 (PM) と境界要素法によって求めたき裂開口変位 (BEM) の比較を Fig. 7

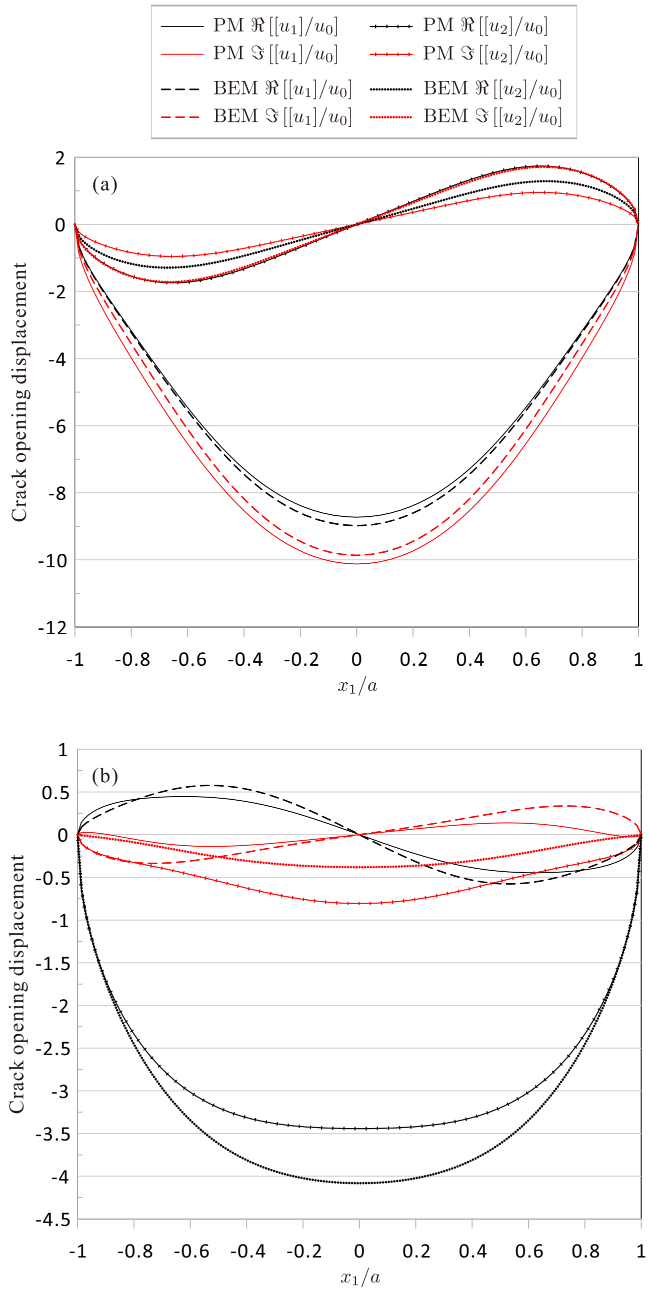

Fig. 7　Comparison of crack opening displacement between perturbation method (PM) and boundary element method (BEM) (a) when $\omega = \Re[\omega^*]$ for case A and transverse incidence with $\theta^{in} = 0°$ and (b) when $\omega = \Re[\omega^*]$ for case B and longitudinal incidence with $\theta^{in} = 0°$.

に示す．摂動法によるき裂開口変位は次式で求めた．

$$[\boldsymbol{u}] = \alpha[\boldsymbol{u}^*]$$

Fig. 7(a) は A の場合の $\omega = \Re[\omega^*]$ のときの $\theta^{in} = 0°$ で横波入射した際のき裂開口変位を示している．Fig. 7(a) より，$[u_2]/u_0$ はあまり一致していないが，$[u_1]/u_0$ は概ねよく一致していることがわかる．Fig. 4(a) に示すように，A の場合は横揺れが支配的であり，$[u_1]/u_0$ が大きい値を取っているため，良好な結果であると考えられる．一方，Fig. 7(b) は B の場合の $\omega = \Re[\omega^*]$ のときの $\theta^{in} = 0°$ で縦波入射した際のき

裂開口変位を示している．Fig. 7(b) より，$[u_1]/u_0$，$[u_2]/u_0$ ともに乖離が比較的大きい．しかしながら，傾向はよく一致していると思われる．Fig. 3(c) に示すように A の場合は $|\Im[\omega^*]|$ が B の場合よりも小さく，Fig. 7 で示した境界要素法の解において固有モード成分が支配的であると考えられる．このことが A の場合は摂動法と境界要素法の解が比較的よく一致した原因だと思われる．しかしながら，比較的 $|\Im[\omega^*]|$ が大きい B の場合でも，固有モードを励振しやすい設定においては Fig. 7(b) に示すようにモード振幅をある程度推定できることがわかった．

6. おわりに

本研究では，境界要素法によって求めた開領域の固有周波数とそのときの固有モードを実周波数での加振問題に応用するため，摂動解析を行った．摂動法の適用によって，固有周波数と左右固有ベクトル，及び加振項からどの程度のモード振幅が励振されるかを近似的に求めることができた．提案した定式化では，固有周波数と左右固有ベクトルを一度求めれば，加振項を変化させるだけでモード振幅が計算できるため，様々な加振を検討する際に順解析を実施するよりも高速に計算可能である．

今後の課題として，複数の固有周波数が近接する場合の検討が挙げられる．また，非破壊検査を想定したモデルでのモード振幅を最大化する加振（超音波入射）方法の設計，医療イメージングでの流体中のバブルの励振等，種々の加振問題への応用を検討する予定である．

参考文献

(1) L. W. Schmerr Jr.: Fundamentals of Ultrasonic Nondestructive Evaluation: A Modeling Approach 2nd ed., Springer Cham, (2014).

(2) I. Yu. Solodov, J. Bai, S. Bekgulyan, and G. Busse: A Local Defect Resonance to Enhance Acoustic Wave-Defect Interaction in Ultrasonic Nondestructive Evaluation, *Applied Physics Letters*, **99**(2011), No.211911.

(3) A. W. Leissa and M. S. Qatu: Vibration of Continuous Systems, About McGraw Hill Professional, (2011).

(4) P. T. Leung, S. Y. Liu, and K. Young: Completeness and orthogonality of quasinormal modes in leaky optical cavities, *Physical Review A*, **49**(1994), pp.3057–3067.

(5) C. Sauvan, J. P. Hugonin, I. S. Maksymov, and P. Lalanne: Theory of the Spontaneous Optical Emission of Nanosize Photonic and Plasmon Resonators, *Physical Review Letters*, **110**(2013), No.237401.

(6) C. Sauvan, T. Wu, R. Zarouf, E. A. Muljarov, and P. Lalanne: Normalization, orthogonality, and completeness of quasinormal modes of open systems: the case of electromagnetism, *Optics Express*, **30**(2022), No.6846.

(7) A. H. Nayfeh and D. T. Mook: Nonlinear Oscillations, Wiley-VCH, (1995).

(8) J. C. Araujo-Cabarcas and C. Engström: On spurious solutions in finite element approximations of resonances in open systems, *Computers and Mathematics with Applications*, **74**(2017), pp.2385-2402.

(9) J. Asakura, T. Sakurai, H. Tadano, T. Ikegami, and K. Kimura: A numerical method for nonlinear eigenvalue problems using contour integrals, *JSIAM Letters*, **1**(2009), pp.52–55.

(10) T. Maruyama, T. Saitoh, and S. Hirose: Numerical study on sub-harmonic generation due to interior and surface breaking cracks with contact boundary conditions using time-domain boundary element method, *International Journal of Solids and Structures*, **126–127**(2017), pp.74–89.

(11) T. Maruyama: Harmonic balance-boundary element and continuation methods for steady-state wave scattering by interior and surface-breaking cracks with contact acoustic nonlinearity, *International Journal of Solids and Structures*, **210–211**(2021), pp.310–324.