

# 初期たわみと軸力変動が非線形 Winkler 基礎上はりの 座屈特性に及ぼす影響

## INFLUENCE OF IMPERFECTIONS ON BUCKLING SOLUTIONS OF AN INFINITE BEAM RESTING ON A NONLINEAR WINKLER FOUNDATION

阿部 和久<sup>1)</sup>, 浜崎 颯汰<sup>2)</sup>

Kazuhisa ABE and Sota HAMAZAKI

1) 新潟大学工学部 (〒 950-2181 新潟市西区五十嵐 2 の町 8050 番地, E-mail:abe@eng.niigata-u.ac.jp)

2) 新潟大学工学部 (〒 950-2181 新潟市西区五十嵐 2 の町 8050 番地, E-mail:t20a093h@mail.cc.niigata-u.ac.jp)

Buckling of an infinite Bernoulli-Euler beam resting on an elastic Winkler foundation characterized by a cubic nonlinearity is studied. Especially, theoretical formulae of the buckling load are derived based on the perturbation method for a beam with initial deflection and variable axial load. First, the snap-through buckling load is obtained for space-harmonic imperfections in both the initial deflection and the axial load. Next, the initial deflection and axial load fluctuation given by stationary random functions are considered. Expectation of the buckling load is described as a function of variance and power spectrum density of these uncertainties. Through buckling analyses, the theoretical buckling load is compared with numerical results. It is shown that the derived solutions can be a good approximation to the present problem.

**Key Words:** perturbation analysis, variable axial load, space-harmonic imperfection, stochastic uncertainty

### 1. はじめに

鉄道のロングレール軌道を管理する際に、座屈の確実な防止が重要となる<sup>(1)</sup>。近年では、左右レールとまくらぎ、およびそれを支持するバラスト道床を模擬した非線形バネから構成される精緻な数値軌道モデル<sup>(2, 3)</sup>を用いて高精度に座屈挙動を評価可能となっており、軌道の初期たわみ(通り変位)や、バラストからまくらぎに作用する拘束力(道床横抵抗力)が座屈強度に及ぼす影響などが数値解析を通して詳細に検討されている。

一方、軌道構造における各種パラメータが座屈強度に及ぼす影響に関する理論的理解は、必ずしも十分に進んではいない。一般に、軌道座屈波形の代表波長はまくらぎ間隔の約 10 倍程度であるため、基本的座屈特性の把握には連続支持ばりの様な比較的簡易な数理モデルの適用が可能である<sup>(4)</sup>。当該モデルの座屈・共振問題に対する高精度・高効率な数値解法がこれまでに多く提案されてきた<sup>(5-10)</sup>が、それらの多くは計算精度や計算効率が議論の中心であり、現象の把握にまでは及んでいない。

道床横抵抗力は軟化型の非線形特性を有するが、このような支持構造下における座屈では、荷重低下を伴う分岐座屈後のつり合い経路上でたわみの局所化が進行する<sup>(4)</sup>。非線形 Winkler 基礎上の無限長ばりを対象とした座屈の局所化過程に関する研究の多くでは摂動解析が採用されており<sup>(11-14)</sup>、後座屈域のつり合い経路と座屈波形とが適切に評価可能となっている。なお、これらの研究では長手方向に均一な構造を対象としており、その下で支持剛性やはりの曲げモーメント-曲率関係などにおける非線形性が変形の局所化に及ぼす影響を検討している。

構造の不均一性を考慮した座屈挙動の検討は、主に有限長構造を対象に行われている。Pierre<sup>(15)</sup>は、2 径間連続支持された柱を対象に、中間に置かれた回転バネの位置の僅かなずれや剛性が局部座屈モードに及ぼす影響について議論している。また、Winkler 基礎の低剛性域の存在が座屈モードの空間分布特性に及ぼす影響については、幾つかの研究事例が報告されている<sup>(16, 17, 18)</sup>。

一方、軸力の空間変動が座屈挙動に及ぼす影響についての検討は少ない。ロングレール軌道の場合、日陰区間の存在などに起因したレールの不均等な移動(ふく進)により軸力変

動が発生する<sup>(19, 20)</sup>。レール軸力の変動は軌道の座屈挙動に大きく影響する<sup>(21)</sup>ため、軸力の空間変動が座屈挙動に及ぼす影響の把握は重要である。Luongo<sup>(22)</sup>は Winkler 基礎上の有限長のはりを対象に、作用する軸力がスパン長程度の波長で変動する場合の座屈・共振問題を扱い、一般化摂動法採用の下に局所モードを導出している。しかし、ロングレール軌道の様にはりの全長に比べて短い波長の軸力変動が座屈挙動に及ぼす影響については検討事例が無い。

構造に内在する不確実性が座屈強度に及ぼす影響についての検討も幾つかなされている。Amazigo ら<sup>(23)</sup>は、軟化型の非線形支持剛性を有する Winkler 基礎上の無限長ばりを対象に、初期たわみ存在下での飛び移り座屈の評価を摂動法に基づき行っている。定常ランダムな初期たわみについても扱われており、飛び移り座屈強度と初期たわみの標準偏差やパワースペクトル密度 (PSD) などの関係式を導出している。Simão ら<sup>(24)</sup>は、有限長柱の座屈問題を対象に、初期たわみや軸回転角などにおける不確実性について、簡単な例に基づき議論している。Abramian ら<sup>(25)</sup>は、有限長 Winkler ばりを対象に、支持剛性の変動が任意関数で与えられる場合における分岐座屈や共振周波数などを摂動法に基づき求めている。また、例題の一つとして、支持剛性が sine 波形状に変動する場合の座屈問題を扱っている。

ロングレールの初期通り変位や道床横抵抗力、レール軸力は、一般にランダムな分布性状を有する。阿部ら<sup>(26)</sup>は、これらの不確実性を考慮した軌道の座屈発生確率の評価を試みている。なお、既往の研究から、道床横抵抗力の非線形性の存在によって軌道の座屈形態が不安定対称分岐座屈で与えられることや、初期通り変位波形を分岐座屈モードで与えた場合、飛び移り座屈強度低下が初期不整振幅に対し鋭敏性を有することなどがわかっている<sup>(2, 23)</sup>。しかし、道床横抵抗力やレール軸力の変動が座屈強度に及ぼす影響については、数値解析結果に基づいた議論<sup>(26)</sup>にとどまり、その背景となる理論的検討は未だ十分になされていない。特に軸力変動と座屈強度との関係については、その分布性状に関する情報が不十分なこともあり、数値解析事例も少ない。また、これらの不確実性が座屈強度にどの様に影響するのかについても、理論的には未解明なままとなっている。

そこで本論文では、軟化型非線形剛性を有する Winkler 基礎上に置かれた無限長 Euler ばりを対象に、初期たわみと軸力変動とが飛び移り座屈挙動に及ぼす影響について、理論的検討を試みる。その際に、文献<sup>(23)</sup>の手法を参考に、摂動法に基づいて飛び移り座屈軸力の近似評価式を導出する。具体的には、まず初期たわみが完全系の分岐座屈モード波形で与えられる場合を対象に、たわみ振幅や軸力変動振幅およびその波長が座屈軸力に及ぼす影響を明らかにする。続いて、初期たわみと軸力変動が定常ランダムな波形で与えられる場合を扱い、座屈軸力とそれらの標準偏差や PSD 特性などとの関係式を導出する。最後に、数値解析を通して導出した摂動解の妥当性について確認する。

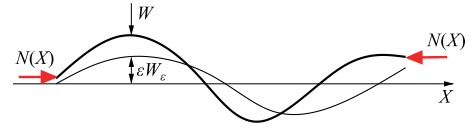


Fig. 1 Initial imperfection and deflection of a beam under axial compression

## 2. 対象とする問題

### 2.1. つり合い式

支持剛性が 3 次関数で与えられた軟化型非線形弾性を有する Winkler 基礎<sup>(11, 23)</sup>上に置かれた無限長 Euler ばりを考える。軸力が空間変動する場合のはりのつり合い式は次式で与えられる。

$$EI \frac{d^4 W}{dX^4} + \frac{d}{dX} \left\{ N(X) \frac{d}{dX} [W(X) + \varepsilon W_\varepsilon(X)] \right\} + k_1 W(X) - k_3 W^3(X) = 0 \quad (1)$$

ここで、Fig.1 に示す様に  $X$  ははり長手方向座標、 $W$  は水平面内たわみ、 $W_\varepsilon$  は初期たわみ波形を与える関数、 $\varepsilon$  はその振幅パラメータ、 $EI$  ははりの曲げ剛性、 $k_1$ 、 $k_3$  は Winkler 基礎の剛性に関する係数である。また、 $N$  ははりに作用する圧縮軸力である。

式 (1) の軸力  $N$  を、次式の様に一定成分と変動成分とに分けて表記する。

$$N(X) = N_0(\nu + \mu g(X)), \quad N_0 = 2\sqrt{k_1 EI} \quad (2)$$

ここで、 $N_0$  は軸力変動の無い完全系の分岐座屈軸力、 $\nu$  は軸力パラメータ、 $g(X)$  は軸力変動成分を与える関数、 $\mu$  はその振幅パラメータである。なお、軸力変動成分は平均値がゼロであり、載荷過程で不変とする。

式 (2) を式 (1) に代入し、さらに以下の様な変数変換を導入する。

$$x = \left( \frac{k_1}{EI} \right)^{1/4} X, \quad w = \sqrt{\frac{k_3}{k_1}} W, \quad w_\varepsilon = \sqrt{\frac{k_3}{k_1}} W_\varepsilon \quad (3)$$

すると次の無次元化されたつり合い方程式を得る。

$$w^{(4)} + 2 \left\{ (\nu + \mu g) w' \right\}' + w - w^3 = -2 \left\{ (\nu + \mu g) \varepsilon w_\varepsilon' \right\}' \approx -2\nu \varepsilon w_\varepsilon'' \quad (4)$$

ここで、 $(\cdot)' = d(\cdot)/dx$ 、 $(\cdot)^{(4)} = d^4(\cdot)/dx^4$  である。また、軸力変動成分と初期たわみ振幅に関する各パラメータ  $\mu$ 、 $\varepsilon$  は微小量とし、右辺における  $\mu\varepsilon$  を含む項は無視した。

### 2.2. 一定軸力の場合の分岐座屈モード

軸力一定 ( $\mu=0$ ) で、且つ初期たわみが無い ( $\varepsilon=0$ ) 完全系の分岐座屈に関する方程式は次式で与えられる。

$$L(w) = 0, \quad L(\cdot) := (\cdot)^{(4)} + 2\nu(\cdot)'' + (\cdot) \quad (5)$$

ここで、 $L(\cdot)$  は式 (5) 第 2 式で定義された微分作用素である。式 (5) において  $w = e^{ikx}$  ( $i^2 = -1$ ) と置くと、軸力パラメータ  $\nu$  と波数  $k$  について次の関係式を得る。

$$\nu = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{k^2} + k^2 \right) \quad (6)$$

式 (6) で  $\nu$  の最小値を与える分岐座屈軸力パラメータは  $\nu_{cr} = 1$  であり、それに対応する分岐座屈モードは波数  $k = 1$  の調和関数で与えられる。

### 3. 初期たわみと軸力が周期変動する場合

本節では、式 (4) の  $w_\varepsilon$  が分岐座屈モード  $\sin x$  で与えられる場合について考える。また軸力変動成分については、次式に示す波数  $\kappa$  の周期関数を対象とする。

$$g(x) = \cos \kappa x \quad (7)$$

式 (4) の解を次の摂動展開より求めるものとする。

$$\begin{aligned} w(x) &= \sum_{m=1}^{\infty} \delta^m w_m(x), & w_m(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n w_{mn}(x), \\ \nu \varepsilon &= \sum_{m=1}^{\infty} \delta^m B_m, & B_m &= \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n B_{mn}, \\ w_{10}(x) &= \sin x \end{aligned} \quad (8)$$

ここで、 $\delta$  は  $w$  の振幅に関するパラメータ、 $w_{mn}(x)$  と  $B_{mn}$  は以降で求める未知関数と未知係数である。その際に、 $\kappa = 2$  の場合と、それ以外とに分け、各々に対し摂動解を求める。

#### 3.1. $\kappa = 2$ の場合

$w_\varepsilon = \sin x$  の下、式 (7)、(8) を式 (4) に代入する。その結果を  $\delta^m$  ( $m = 1, 2, \dots$ ) の項毎にまとめると、 $\delta$  の項より次式を得る。

$$L(w_1) + 2\mu(\cos 2x \cdot w_1') = 2B_1 \sin x \quad (9)$$

$w_1, B_1$  を式 (8) に従い  $\mu$  についてさらに展開すると、 $\delta\mu^0$  に関する項より次の方程式を得る。

$$L(w_{10}) = 2B_{10} \sin x \quad (10)$$

式 (10) より、係数  $B_{10}$  は次式のとおり定まる。

$$B_{10} = 1 - \nu \quad (11)$$

また  $\delta\mu$  に関する項は次式で与えられる。

$$L(w_{11}) = (2B_{11} + 1) \sin x + 3 \sin 3x \quad (12)$$

式 (12) に対し  $w_{10}$  と他の  $w_{mn}$  との直交性を要求する<sup>(23)</sup> と、 $w_{11}$  と  $B_{11}$  が次式により求められる。

$$w_{11} = \frac{3}{2(41 - 9\nu)} \sin 3x, \quad B_{11} = -\frac{1}{2} \quad (13)$$

次に  $\delta^2$  の項について考える。当該項より次の方程式を得る。

$$L(w_2) + 2\mu(\cos 2x \cdot w_2') = 2B_2 \sin x \quad (14)$$

この式は基本的に式 (9) に等しい。よって、 $w_{20}$  は  $C \cdot w_{10}$  ( $C$  は定数) で与えられ、 $w_{10}$  との直交性より  $C = 0$  を得る。すると結局  $w_2(x) = 0$ ,  $B_2 = 0$  となる。

続いて  $\delta^3$  の項について考える。 $\delta^3\mu^0$  に関する項より、次の方程式を得る。

$$L(w_{30}) = \left( 2B_{30} + \frac{3}{4} \right) \sin x - \frac{1}{4} \sin 3x \quad (15)$$

$w_{10}$  との直交条件の下、 $w_{30}, B_{30}$  が 3 次式のとおり求められる。

$$w_{30} = \frac{-1}{8(41 - 9\nu)} \sin 3x, \quad B_{30} = -\frac{3}{8} \quad (16)$$

また  $\delta^3\mu$  に関する項より次の方程式を得る。

$$\begin{aligned} L(w_{31}) &= \left( 2B_{31} + \frac{3}{41 - 9\nu} \right) \sin x \\ &+ \frac{3}{4(41 - 9\nu)} (-3 \sin 3x + 2 \sin 5x) \end{aligned} \quad (17)$$

$w_{10}$  との直交条件より次式を得る。

$$\begin{aligned} w_{31} &= -\frac{9}{256(41 - 9\nu)} \sin 3x + \frac{1}{384(41 - 9\nu)} \sin 5x, \\ B_{31} &= -\frac{3}{2(41 - 9\nu)} \end{aligned} \quad (18)$$

式 (11)、(13)、(16) および (18) より、 $\nu\varepsilon$  は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \nu\varepsilon &= \delta \left( 1 - \frac{\mu}{2} - \nu \right) - \delta^3 \left\{ \frac{3}{8} + \frac{3\mu}{2(41 - 9\nu)} \right\} + \dots \\ &\approx \delta \left( 1 - \frac{\mu}{2} - \nu \right) - \frac{3}{8} \delta^3 \end{aligned} \quad (19)$$

式 (19) において、軸力パラメータ  $\nu$  を変位振幅パラメータ  $\delta$  の関数と見なし  $d\nu/d\delta = 0$  の条件を課すと、飛び移り座屈発生時の軸力パラメータ  $\tilde{\nu}$  と  $\delta$  との関係として次式を得る。

$$\delta = \frac{2\sqrt{2}}{3} \sqrt{1 - \frac{\mu}{2} - \tilde{\nu}} \quad (20)$$

式 (20) を (19) に代入して  $\delta$  を消去すると次式を得る。

$$\tilde{\nu}\varepsilon = \frac{4\sqrt{2}}{9} \left( 1 - \frac{\mu}{2} - \tilde{\nu} \right)^{3/2} \quad (21)$$

これを  $\tilde{\nu}$  について解くと、次の近似式を得る。

$$\begin{aligned} \tilde{\nu} &\approx 1 - \frac{\mu}{2} - \left\{ \frac{9}{4\sqrt{2}} \left( 1 - \frac{\mu}{2} \right) \varepsilon \right\}^{2/3} \\ &\approx 1 - \frac{\mu}{2} - \left( \frac{9\varepsilon}{4\sqrt{2}} \right)^{2/3} \end{aligned} \quad (22)$$

式 (22) において  $\varepsilon = 0$  とおくと分岐座屈軸力を得るが、それが軸力変動振幅  $\mu$  に比例して低下することがわかる。また、初期たわみの存在により座屈形態は飛び移り座屈に移行することとなるが、その際の座屈軸力低下は  $\varepsilon^{2/3}$  に比例しており、僅かな初期たわみの存在により座屈強度が急減少するいわゆる初期不整鋭敏性を有することが確認できる。当該の初期不整鋭敏性については文献 (23, 27) で示されている。

なお、本論文では式 (1) に示した様な 3 次の非線形性を対象とした。一方、我国では道床横抵抗力に対し次の近似式<sup>(28)</sup> が提案されている。

$$f = f_0 \frac{w}{a + |w|} \quad (23)$$

ここで、 $f$  は道床横抵抗力、 $f_0$  はその終局値 (最終道床横抵抗力)、 $a$  は正の定数である。式 (23) の  $f$  はたわみ  $w$  に関し

て奇関数で与えられるが、これは  $w = 0$  の近傍で次式の様に近似できる。

$$f \approx \frac{f_0}{a} \left( w - \frac{1}{a} w|w| \right) \quad (24)$$

式 (24) の様に、非線形項が  $w|w|$  で与えられる場合、初期不整鋭敏性は  $\varepsilon^{1/2}$  で与えられる (2)。

### 3.2. $\kappa \neq 2$ の場合

$\delta\mu^0$  の項より、 $\kappa = 2$  の場合と同じく式 (11) を得る。また、 $\delta\mu$  の項より、次の方程式を得る。

$$L(w_{11}) = 2B_{11} \sin x + (\kappa - 1) \sin(\kappa - 1)x + (\kappa + 1) \sin(\kappa + 1)x \quad (25)$$

$\kappa \neq 2$  の場合、式 (25) 右辺で  $\sin x$  に関する項は第 1 項目のみとなる。したがって、 $w_{11}$  と  $w_{10} = \sin x$  との直交性から  $B_{11} = 0$  を得る。また、 $w_{11}$  は次式で与えられる。

$$w_{11} = \frac{\kappa - 1}{Z(\kappa - 1)} \sin(\kappa - 1)x + \frac{\kappa + 1}{Z(\kappa + 1)} \sin(\kappa + 1)x, \quad (26)$$

$$Z(\kappa) := (\kappa^2 - 1)^2$$

$\delta\mu^2$  の項より、次の方程式を得る。

$$L(w_{12}) = \left\{ 2B_{12} + \frac{(\kappa - 1)^2}{Z(\kappa - 1)} + \frac{(\kappa + 1)^2}{Z(\kappa + 1)} \right\} \sin x$$

$$+ \frac{(2\kappa - 1)(\kappa - 1)^2}{Z(\kappa - 1)} \sin(2\kappa - 1)x \quad (27)$$

$$+ \frac{(2\kappa + 1)(\kappa + 1)^2}{Z(\kappa + 1)} \sin(2\kappa + 1)x$$

式 (27) を解くと、 $w_{12}$ 、 $B_{12}$  は次式で与えられる。

$$w_{12} = \frac{(2\kappa - 1)(\kappa - 1)^2}{Z(\kappa - 1)Z(2\kappa - 1)} \sin(2\kappa - 1)x$$

$$+ \frac{(2\kappa + 1)(\kappa + 1)^2}{Z(\kappa + 1)Z(2\kappa + 1)} \sin(2\kappa + 1)x, \quad (28)$$

$$B_{12} = -\frac{(\kappa - 1)^2}{2Z(\kappa - 1)} - \frac{(\kappa + 1)^2}{2Z(\kappa + 1)}$$

$\delta^2$  に関する項については、 $\kappa = 2$  の場合と同様にゼロとなる。また、 $\delta^3\mu^0$  の項に関する方程式についても式 (15) に一致し、 $w_{30}$ 、 $B_{30}$  は式 (16) で与えられる。

すると、 $\nu\varepsilon$  の近似式は次式により与えられる。

$$\nu\varepsilon \approx \delta \left\{ 1 - \frac{\mu^2}{2} \left[ \frac{(\kappa - 1)^2}{Z(\kappa - 1)} + \frac{(\kappa + 1)^2}{Z(\kappa + 1)} \right] - \nu \right\} - \frac{3}{8} \delta^3 \quad (29)$$

式 (29) より、**3.1** と同様にして飛び移り座屈軸力の近似式を求めると次式を得る。

$$\tilde{v} \approx 1 - \frac{\mu^2}{2} \left\{ \frac{(\kappa - 1)^2}{[(\kappa - 1)^2 - 1]^2} + \frac{(\kappa + 1)^2}{[(\kappa + 1)^2 - 1]^2} \right\} - \left( \frac{9\varepsilon}{4\sqrt{2}} \right)^{2/3} \quad (30)$$

式 (30) より、 $\kappa \neq 2$  の場合の分岐座屈軸力は  $\mu^2$  に比例して低下することがわかる。なお、式 (30) で  $\kappa \rightarrow 2$  とすると、 $\tilde{v}$  は  $-\infty$  を与え、式 (22) を与え得ない。よって、当該式は  $\kappa = 2$  の近傍では適切な近似を与えないものと考えられる。また、右辺 3 項目の初期たわみに対する鋭敏性は式 (22) に一致しており、その効果は軸力変動と独立である。

## 4. 初期たわみと軸力変動とが定常ランダムな場合

### 4.1. たわみの積分方程式

まず、式 (4) におけるたわみの 3 次の項  $w^3$  に対し等価線形化を施し  $\tau^2 w$  と近似する (23)。ここで  $\tau$  は定数であり、その最適値については後程決定する。また、 $w_\varepsilon$  と  $g$  は互いに無相関且つ定常ランダムな波形で与えられ、次式をみたすものとする。

$$E_g(g) = 0, \quad E_g(g^2) = 1, \quad (31)$$

$$E_\varepsilon(w_\varepsilon) = 0, \quad E_\varepsilon(w_\varepsilon^2) = 1$$

ここで、 $E_g(\cdot)$  と  $E_\varepsilon(\cdot)$  は、それぞれ  $g$  と  $w_\varepsilon$  に関する数学的期待値のことである。

式 (4) における  $\mu$  と  $\varepsilon$  を各ランダム波形の標準偏差  $\sigma_g$  と  $\sigma_\varepsilon$  に置き換え、軸力パラメータを  $\nu = 1 - \Delta^2/2$  ( $\Delta \ll 1$ ) と表すと、つり合い式は次の方程式で与えられる。

$$w^{(4)} + (2 - \Delta^2)w'' + 2\sigma_g(g \cdot w')' + (1 - \tau^2)w = -2\nu\sigma_\varepsilon w_\varepsilon'' \quad (32)$$

文献 (23) では軸力変動が考慮されておらず、定常ランダムな成分とたわみ  $w$  との積がつり合い式中に現れない。そのため、つり合い式を直接 Fourier 変換して  $w$  の Fourier 変換を求め、 $w$  の PSD を介してその標準偏差  $\sigma_w$  を評価している。一方、式 (32) の解  $w$  の場合は、 $g$  との積が含まれているため、同様の手続きを採ることができない。そこで、次の積分方程式を介して  $w$  を表現することとする。

$$w(x) = -2\nu\sigma_\varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} w^*(x, \xi) w_\varepsilon''(\xi) d\xi$$

$$- 2\sigma_g \int_{-\infty}^{\infty} w^*(x, \xi) (g(\xi) w'(\xi))' d\xi \quad (33)$$

ここで、 $(\cdot)' = d(\cdot)/d\xi$  であり、 $w^*$  は次式をみたす基本解である。

$$\frac{d^4 w^*}{d\xi^4} + (2 - \Delta^2) \frac{d^2 w^*}{d\xi^2} + (1 - \tau^2) w^* = \delta(\xi - x) \quad (34)$$

なお、 $\delta(\xi - x)$  はデルタ関数である。

### 4.2. たわみの漸近展開

$w(x)$  を  $\sigma_g$  に関して次の様に漸近展開する。

$$w(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \sigma_g^m w_m(x) \quad (35)$$

式 (35) を式 (33) に代入し  $\sigma_g^m$  ( $m = 0, 1, \dots$ ) 毎にまとめると、 $\sigma_g^0$  と  $\sigma_g$  の項よりそれぞれ次式を得る。

$$w_0(x) = -2\nu\sigma_\varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} w^*(x, \xi) w_\varepsilon''(\xi) d\xi, \quad (36)$$

$$w_1(x) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} w^*(x, \xi) g(\xi) w_0'(\xi) d\xi$$

式 (35)、(36) より、 $w(x)$  の近似式が次式により与えられる。

$$w(x) \approx -2\nu\sigma_\varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} w^*(x, \xi) w_\varepsilon''(\xi) d\xi$$

$$- 4\nu\sigma_\varepsilon \sigma_g \int_{-\infty}^{\infty} w_g^*(x, \xi) w_\varepsilon''(\xi) d\xi, \quad (37)$$

$$w_g^*(x, \xi) := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial w^*}{\partial \zeta}(x, \zeta) \frac{\partial w^*}{\partial \zeta}(\zeta, \xi) g(\zeta) d\zeta$$

### 4.3. たわみの PSD の導出

式 (37) の積分区間を  $(-\ell, \ell)$  に設定して求めた関数を次の  $w_\ell$  で定義する.

$$w_\ell(x) := -2\nu\sigma_\varepsilon \int_{-\ell}^{\ell} w^*(x, \xi) w''_\varepsilon(\xi) d\xi - 4\nu\sigma_\varepsilon\sigma_g \int_{-\ell}^{\ell} \hat{w}_g^*(x, \xi) w''_\varepsilon(\xi) d\xi \quad (38)$$

$w_\ell$  の Fourier 変換  $\hat{w}_\ell$  は次式で与えられる.

$$\hat{w}_\ell(k) = -2\nu\sigma_\varepsilon \int_{-\ell}^{\ell} \hat{w}^*(k, \xi) w''_\varepsilon(\xi) d\xi - 4\nu\sigma_\varepsilon\sigma_g \int_{-\ell}^{\ell} \hat{w}_g^*(k, \xi) w''_\varepsilon(\xi) d\xi \quad (39)$$

なお,  $\hat{w}_g^*$  は次式により表すことができる.

$$\hat{w}_g^*(k, \xi) = \frac{-ik}{A(k)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik\zeta} g(\zeta) \frac{\partial w^*}{\partial \zeta}(\zeta, \xi) d\zeta, \quad (40)$$

$$A(k) := k^4 - (2 - \Delta^2)k^2 + (1 - \tau^2)$$

$w$  の PSD を  $S_w$  と置くと, それは次式より求めることができる.

$$S_w(k) = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \frac{1}{2\ell} E_g(|\hat{w}_\ell(k)|^2) \quad (41)$$

また, 式 (39) 右辺第 1 項目の積分は,  $\ell \rightarrow \infty$  の極限において次式で与えられる.

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} \int_{-\ell}^{\ell} \hat{w}^*(k, \xi) w''_\varepsilon(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ik\xi}}{A(k)} w''_\varepsilon(\xi) d\xi = \frac{-k^2}{A(k)} \lim_{\ell \rightarrow \infty} \hat{w}_{\ell\varepsilon}(k), \quad (42)$$

$$\hat{w}_{\ell\varepsilon}(k) := \int_{-\ell}^{\ell} w_\varepsilon(\xi) e^{-ik\xi} d\xi$$

すると, 式 (39) より  $|\hat{w}_\ell|^2$  の  $g$  に関する期待値は次式によって求められる.

$$E_g(|\hat{w}_\ell|^2) = 4\nu^2\sigma_\varepsilon^2 \frac{k^4}{A^2(k)} |\hat{w}_{\ell\varepsilon}(k)|^2 + 16\nu^2\sigma_\varepsilon^2\sigma_g^2 \iint_{-\ell}^{\ell} E_g(\hat{w}_g^*(k, \xi) \hat{w}_g^*(k, x)) w''_\varepsilon(\xi) w''_\varepsilon(x) d\xi dx \quad (43)$$

ここで,  $(\bar{\cdot})$  は複素共役である.

式 (43) において,  $E_g(\hat{w}_g^* \hat{w}_g^*)$  の項は次の様に表記することができる.

$$E_g(\hat{w}_g^*(k, \xi) \hat{w}_g^*(k, x)) = \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{k^2}{A^2(k)} e^{-ik(\zeta-\eta)} \frac{\partial w^*}{\partial \zeta}(\zeta, \xi) \frac{\partial w^*}{\partial \eta}(\eta, x) \times E_g(g(\zeta)g(\eta)) d\zeta d\eta \quad (44)$$

ここで,  $E_g(g(\zeta)g(\eta))$  は  $g(x)$  の自己相関関数  $R_g(\zeta - \eta)$  を与える. また  $w^*$  は,  $\hat{w}^*$  の逆 Fourier 変換により次式の様に表すことができる.

$$w^*(x, \xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik(x-\xi)}}{A(k)} dk \quad (45)$$

これらの関係を式 (44) に代入すると, 多少の計算の後, 次式を得る.

$$E_g(\hat{w}_g^*(k, \xi) \hat{w}_g^*(k, x)) = \frac{k^2}{2\pi A^2(k)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\kappa^2}{A^2(\kappa)} S_g(\kappa - k) e^{i\kappa(x-\xi)} d\kappa \quad (46)$$

ここで,  $S_g$  は  $g$  の PSD であり, 次式で与えられる.

$$S_g(k) = \int_{-\infty}^{\infty} R_g(x) e^{-ikx} dx \quad (47)$$

式 (46) を (43) に代入すると,  $E_g(|\hat{w}_\ell|^2)$  は次式により与えられる.

$$E_g(|\hat{w}_\ell|^2) = 4\nu^2\sigma_\varepsilon^2 \frac{k^4}{A^2(k)} |\hat{w}_{\ell\varepsilon}(k)|^2 + 16\nu^2\sigma_\varepsilon^2\sigma_g^2 \frac{k^2}{2\pi A^2(k)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\kappa^6}{A^2(\kappa)} S_g(\kappa - k) |\hat{w}_{\ell\varepsilon}(\kappa)|^2 d\kappa \quad (48)$$

すると式 (41) より, たわみの PSD が次式で与えられる.

$$S_w(k) = 4\nu^2\sigma_\varepsilon^2 \frac{k^4}{A^2(k)} S_\varepsilon(k) + 16\nu^2\sigma_\varepsilon^2\sigma_g^2 \frac{k^2}{2\pi A^2(k)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\kappa^6}{A^2(\kappa)} S_g(\kappa - k) S_\varepsilon(\kappa) d\kappa \quad (49)$$

ここで,  $S_\varepsilon$  は初期たわみ  $w_\varepsilon$  の PSD である.

### 4.4. たわみの分散の評価

たわみの分散  $\sigma_w^2$  を自己相関関数  $R_w$  を介して次式より求める.

$$\sigma_w^2 = R_w(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_w(k) dk = \frac{4\nu^2\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k^4}{A^2(k)} S_\varepsilon(k) dk + \frac{16\nu^2\sigma_\varepsilon^2\sigma_g^2}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{k^2}{A^2(k)} \frac{\kappa^6}{A^2(\kappa)} S_g(\kappa - k) S_\varepsilon(\kappa) d\kappa dk \quad (50)$$

式 (50) の具体的計算の前に  $\tau$  の値を求めておく. Winkler 基礎に蓄えられるひずみエネルギーの等価条件より,  $\tau$  の最適値を次の  $w$  に関する期待値で定めるものとする<sup>(23)</sup>.

$$E_w(w^4) = \tau^2 \sigma_w^2 \quad (51)$$

$w$  が分散  $\sigma_w^2$ , 期待値ゼロの正規分布で与えられるものと仮定すると,  $E_w(w^4) = 3\sigma_w^4$  を得る. したがって,  $\tau^2$  の最適値は次式で与えられる.

$$\tau^2 = 3\sigma_w^2 \quad (52)$$

式 (50) 右辺第 1 項目の積分を  $I_1$  と置くと, それは式 (40) の  $A(k)$  に式 (52) を代入することで次式により与えられる.

$$I_1 = 2 \int_0^{\infty} \frac{k^4 S_\varepsilon(k) dk}{\{(k^2 - 1)^2 + \Delta^2(k^2 - 1) + \Delta^2 - 3\sigma_w^2\}^2} \quad (53)$$

ここで,  $k^2 - 1 = s$  と置換すると, 次式を得る.

$$I_1 = \int_{-1}^{\infty} \frac{(s+1)^{3/2} S_\varepsilon(k(s)) ds}{\{s^2 + \Delta^2 s + \Delta^2 - 3\sigma_w^2\}^2} \approx \frac{1}{(\Delta^2 - 3\sigma_w^2)^2} \int_{-1}^{\infty} \frac{(s+1)^{3/2} S_\varepsilon(k(s)) ds}{\left(\frac{s^2}{\Delta^2 - 3\sigma_w^2} + 1\right)^2} \quad (54)$$

ここで、 $0 < \Delta^2 - 3\sigma_w^2 \ll 1$  と仮定すると、 $1/\{s^2/(\Delta^2 - 3\sigma_w^2) + 1\}^2$  は  $s = 0$  の近傍で急激に増大し、それ以外では非常に小さな値をとる。したがって、式 (54) の  $I_1$  はさらに次式により近似評価できる<sup>(23)</sup>。

$$I_1 \approx \frac{S_\varepsilon(1)}{(\Delta^2 - 3\sigma_w^2)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds}{\left(\frac{s^2}{\Delta^2 - 3\sigma_w^2} + 1\right)^2} \quad (55)$$

$$= \frac{\pi S_\varepsilon(1)}{2(\Delta^2 - 3\sigma_w^2)^{3/2}}$$

同様の手順で式 (50) 右辺第 2 項目の積分  $I_2$  を近似評価すると次式を得る。

$$I_2 \approx \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \frac{S_\varepsilon(1)}{2(\Delta^2 - 3\sigma_w^2)^3} [S_g(0) + S_g(2)] \quad (56)$$

式 (55), (56) を式 (50) に代入すると、 $\sigma_w^2$  の近似式を得る。

$$\sigma_w^2 \approx \sigma_\varepsilon^2 S_\varepsilon(1) \left\{ \frac{1}{(\Delta^2 - 3\sigma_w^2)^{3/2}} + \frac{\sigma_g^2 [S_g(0) + S_g(2)]}{2(\Delta^2 - 3\sigma_w^2)^3} \right\} \quad (57)$$

ここで、 $\nu^2 \approx 1$  とした。

#### 4.5. 飛び移り座屈軸力パラメータ $\tilde{\nu}$ の導出

式 (57) は次式の様に表すことができる。

$$\sigma_w^2 = \frac{\alpha}{y} + \frac{\alpha\beta}{y^2}, \quad (58)$$

$$y = \{2(1 - \nu) - 3\sigma_w^2\}^{3/2},$$

$$\alpha = \sigma_\varepsilon^2 S_\varepsilon(1), \quad \beta = \frac{1}{2} \sigma_g^2 [S_g(0) + S_g(2)]$$

なお、 $\Delta^2$  を  $2(1 - \nu)$  に戻した。式 (58) を  $y$  について解き  $\beta\sigma_w^2 \ll \alpha$  と仮定すると、次の近似式を得る。

$$y \approx \frac{\alpha}{\sigma_w^2} + \beta \quad (59)$$

以下の計算では、簡単のため  $\sigma_w^2 = p$  と置く。式 (58) 第 2 式と式 (59) より次の関係式を得る。

$$2(1 - \nu) = 3p + \left(\frac{\alpha}{p}\right)^{2/3} + \frac{2}{3}\beta \left(\frac{p}{\alpha}\right)^{1/3} \quad (60)$$

式 (60) を  $p$  で微分し、飛び移り座屈条件 ( $dv/dp = 0$ ) を課すと次式を得る。

$$3 - \frac{2}{3}\alpha^{2/3}p^{-5/3} + \frac{2}{9}\beta\alpha^{-1/3}p^{-2/3} = 0 \quad (61)$$

$p$  を次の様に  $\beta$  のべき級数展開で表すものとする。

$$p = p_0 + p_1\beta + \dots \quad (62)$$

ここで、 $p_n$  ( $n = 0, 1, \dots$ ) は展開係数である。式 (62) を (61) に代入し  $p_n$  を求めると、 $p$  に対して次の近似式を得る。

$$p \approx \left(\frac{2}{9}\right)^{3/5} \alpha^{2/5} - \frac{1}{5} \left(\frac{2}{9}\right)^{6/5} \alpha^{-1/5} \beta \quad (63)$$

式 (63) を (60) に代入して  $\nu$  について解くと、以下の飛び移り座屈軸力パラメータ  $\tilde{\nu}$  の近似式が得られる。

$$\tilde{\nu} \approx 1 - 5 \cdot 2^{-7/5} \cdot 3^{-1/5} \alpha^{2/5} - \frac{2}{5} \left(\frac{2}{9}\right) \alpha^{-1/5} \beta \quad (64)$$

$$\approx 1 - 1.52\alpha^{2/5} - 0.296\alpha^{-1/5}\beta$$

式 (58) のとおり、 $\alpha$  と  $\beta$  はそれぞれ  $\sigma_w^2$  と  $\sigma_g^2$  に比例する。よって、式 (64) で  $\beta = 0$  ( $\sigma_g = 0$ ) と置き軸力変動の無い状態に設定すると、座屈荷重は初期たわみの標準偏差  $\sigma_w$  の 4/5 乗に比例し、それに対して僅かな鋭敏性を有することがわかる。さらに  $\alpha$  は  $S_\varepsilon(1)$  に比例しており、座屈軸力低下において波数 1 の初期たわみが支配的となることを示唆している。

なお、ここでの定式過程では  $0 < \beta\sigma_w^2 \ll \alpha$  を前提としているため、 $\beta$  一定の下では  $\sigma_\varepsilon \rightarrow 0$  において右辺 3 項目が評価不能となる。それでも、一定の  $\sigma_\varepsilon$  の下で、座屈強度が軸力変動の分散  $\sigma_g^2$  に比例して低下することが理解できる。また、 $\beta$  は  $S_g(0) + S_g(2)$  にも比例するため、座屈荷重低下はそれに依存する。このことは、軸力変動に波数  $k = 0$  および  $k = 2$  (完全系における分岐座屈モードの 1/2 の波長) の成分が多く含まれる程、座屈荷重がより大きく低下することを示唆している。

#### 5. 分岐座屈軸力の周期変動軸力波長依存性に関する検証

本節以降では数値計算を通して、**3.**, **4.** で導出した座屈軸力評価式の妥当性について検討する。まず、初期たわみが無く、軸力が式 (7) にしたがって周期変動する場合の分岐座屈軸力について調べる。その際に、以下に示す無限長構造の固有値問題を数値的に解く。

##### 5.1. 固有値問題の導出

式 (4) を線形化 ( $w^3$  の項を無視) し、さらに  $\varepsilon = 0$  と置き、式 (7) を代入すると次式を得る。

$$L(w) + 2\mu(w' \cos \kappa x)' = 0 \quad (65)$$

式 (65) の様に  $w$  にかかる係数 (軸力) が周期変動する場合の解を次式で与える<sup>(29)</sup>。

$$w(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} w_n e^{iz_n x}, \quad z_n := n\kappa + \gamma \quad (66)$$

ここで、 $w_n$  は展開係数である。なお、 $0 \leq \gamma < \kappa$  とする。

式 (66) を (65) に代入すると、各  $n$  に対して次の方程式を得る。

$$(z_n^4 - 2\nu z_n^2 + 1)w_n - \mu z_n (z_{n-1}w_{n-1} + z_{n+1}w_{n+1}) = 0, \quad (n \in \mathbb{Z}) \quad (67)$$

この式は、所定の  $\mu$  と波数  $\kappa$  の下で、 $\gamma$  と  $\nu$  を変数に持つ。そこで、 $\gamma$  を上述の範囲内で走査し、各  $\gamma$  に対する最小固有値  $\nu(\gamma)$  を求めた。さらに  $\nu(\gamma)$  の最小値を  $\gamma$  について求め、これを分岐座屈軸力とした。なお、式 (67) は無限次元の固有値問題を与える。以下の解析では固有値の収束性を確認の上、展開項数を  $\pm 20$  項までで打ち切った。

##### 5.2. 解析結果

$\mu = 0.5$  と設定して、軸力の変動波数  $\kappa$  と分岐座屈軸力  $\nu_{cr}$  との関係を求めた結果を Fig.2 に示す。ちなみに、日陰に起因する軸力変動は当該問題の解析結果<sup>(20)</sup> より平均軸力の 25%程度と考えられ、ここでは他の変動要因も考慮してそれに比べて大きめの値に設定している。なお、Fig.2 には  $\varepsilon = 0$  の下で式 (22) ( $\kappa = 2$ ) と式 (30) ( $\kappa = 1$ ) より求めた  $\nu_{cr}$  の値

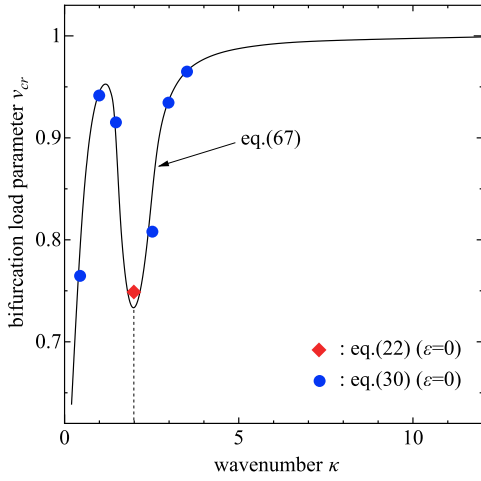


Fig. 2 Relationship between the wavenumber  $\kappa$  and the bifurcation load parameter ( $\mu = 0.5$ )

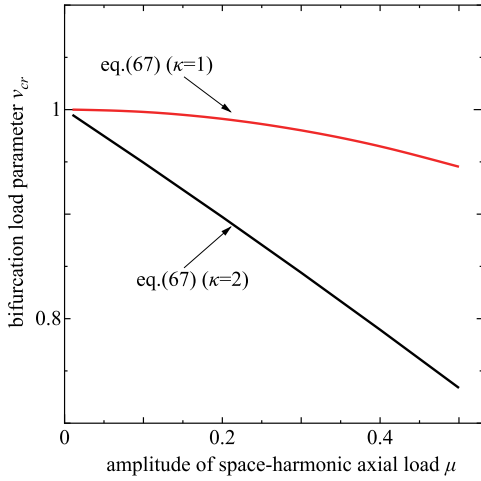


Fig. 3 Relationship between the amplitude of axial load and the bifurcation load parameter

を、 $\kappa = 0.5$  から  $3.5$  までの範囲で  $0.5$  間隔でプロットした。前述のとおり、 $\kappa = 2$  近傍で式 (30) の近似精度が低下するため、 $\kappa = 2.5$  において多少の差異が認められるものの、広い範囲で摂動解と数値解との良好な一致が認められ、摂動解の妥当性が確認できる。

$\kappa = 0$  の近傍で分岐座屈軸力が低下している。これは、変動波長が座屈モード波長に比べ十分に長い場合 (波数  $\kappa$  が十分に小さい場合)、軸力が平均値  $\nu_{cr}$  より高い区間において先行して座屈が発生するためである。

また、 $\kappa = 2$  前後の変動波数において座屈軸力が大きく低下している。式 (22) に示したとおり、 $\kappa = 2$  では座屈軸力パラメータ  $\nu_{cr}$  が  $\mu$  に比例して低下する。一方、 $\kappa \neq 2$  では式 (30) の様に  $\mu^2$  に比例する。そのため、比較的小さな  $\mu$  の下では  $\kappa = 2$  における軸力低下が他に比べ顕著になったと考えられる。そこで、 $\kappa = 1$  と  $\kappa = 2$  の場合を対象に、 $\mu$  と  $\nu_{cr}$  との関係を表 (67) の固有値問題より求めたものを Fig.3 に示す。この図より、 $\kappa = 2$  では  $\nu_{cr}$  の低下が  $\mu$  に対し線形的である一方、 $\kappa = 1$  の場合の低下は 2 次関数的であり、前者の

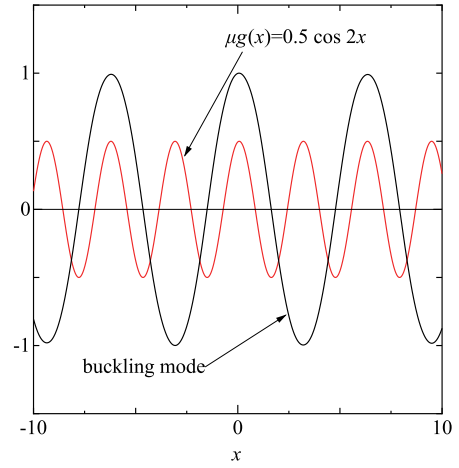


Fig. 4 Buckling mode and space-harmonic component of axial load

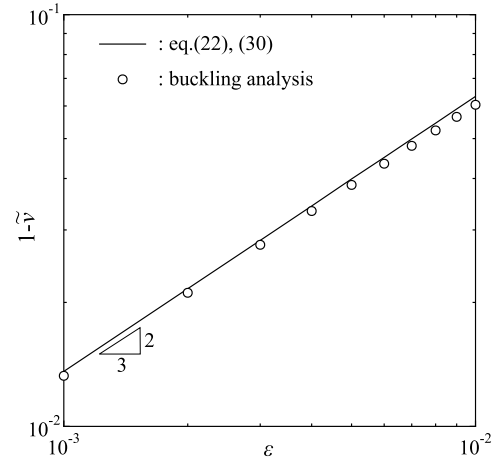


Fig. 5 Relationship between the amplitude of initial deflection  $\varepsilon$  and the buckling load reduction  $1 - \bar{\nu}$

低下量の方が大きいことが確認できる。なお、Fig.2 に示した結果は、4.5. で式 (64) に関連して述べた内容、すなわち軸力変動に波数  $k = 0$  および  $k = 2$  の成分が多く含まれる程、座屈軸力がより大きく低下することと符合している。

分岐座屈軸力が大幅に低下する  $\kappa = 2$  の場合の座屈モード (固有モード) と軸力変動成分  $\mu \cdot g(x) = 0.5 \cos 2x$  とを Fig.4 に示す。座屈モードは、軸力変動の無い完全系のものに近く波長  $2\pi$  (波数  $\kappa = 1$ ) の波形で与えられている。当該モードはスパン長  $\pi$  の両端ヒンジ Winkler ばりの座屈モードに相当する。Fig.4 中に赤線で示した変動軸力成分は、座屈モードのたわみが絶対最大となるスパン中央で最大値をとっており、当該箇所での軸力は  $\nu_{cr} + \mu$  で与えられる。そのため、比較的低い平均軸力  $\nu_{cr}$  の下で座屈を生じ、他の変動波数に比べその値が大きく低下したと解釈することができる。

## 6. Winkler ばりの空間変動が飛び移り座屈軸力に及ぼす影響に関する検証

### 6.1. 解析条件

初期たわみを伴う場合の飛び移り座屈軸力の評価・検証に

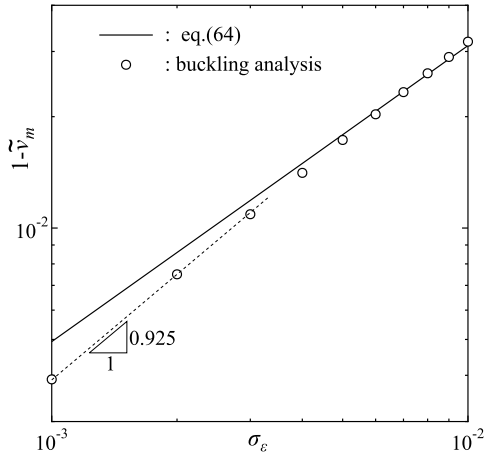


Fig.6 Relationship between  $\sigma_\varepsilon$  and the mean value of buckling load reduction  $1 - \tilde{\nu}_m$

際し、つり合い式 (4) をはり要素により離散化した。その際に、完全系における分岐座屈モード波長が  $2\pi$  であるのに対し、はりの長さを 200 とし、それを 1000 要素で分割した。また、両端は固定条件とした。つり合い経路を弧長増分法<sup>(30)</sup>により求め、飛び移り座屈点を探索した。

### 6.2. 周期変動する初期たわみに対する飛び移り座屈軸力の鋭敏性

式 (22), (30) より、飛び移り座屈軸力の低下は初期たわみ振幅  $\varepsilon$  の  $2/3$  乗に比例するという結論を得た。このことを確認するため、軸力変動の無い条件 ( $\mu = 0$ ) の下、 $\varepsilon$  と座屈軸力パラメータの低下量  $1 - \tilde{\nu}$  との関係の数値解析より求めた。その結果を Fig.5 に示す。なお、式 (22), (30) で  $\mu = 0$  として求めたものも実線で示した。両者の比較的良好一致が認められ、座屈軸力の初期たわみに対する鋭敏性も含め、理論式の妥当性が確認できる。

### 6.3. 定常ランダムな不確実性が飛び移り座屈軸力に及ぼす影響

初期たわみと軸力変動をランダムに設定して座屈解析を行った。その際に、初期たわみ  $w_\varepsilon$  と軸力変動波形  $g$  の自己相関関数  $R(x)$  と PSD  $S(k)$  とを次式で設定した。

$$R(x) = e^{-x/d}, \quad S(k) = \frac{2d}{1+k^2d^2} \quad (68)$$

ここで、 $d$  は相関長であり、以下の解析では初期たわみと軸力変動に対してそれぞれ  $d_\varepsilon = 3$  と  $d_g = 6$  と設定した。これらの値は座屈モード波長の  $1/2$  倍と  $1$  倍に概ね相当する。

ランダムな波形分布は次式により生成した。

$$\{\mathbf{v}\} = [\Phi][\Lambda^{1/2}]\{\boldsymbol{\xi}\} \quad (69)$$

ここで、 $\{\mathbf{v}\}$  は初期たわみの節点値ベクトル、または軸力変動成分の要素ベクトルである。また、 $\{\boldsymbol{\xi}\}$  は期待値ゼロ、標準偏差 1 の正規乱数ベクトル、 $[\Phi]$  と  $[\Lambda^{1/2}]$  は、それぞれ次の固有値問題における固有ベクトル  $\{\phi_i\}$  と固有値  $\lambda_i$  の  $1/2$  乗を縦ベクトルおよび対角成分に持つ行列である。

$$[\mathbf{C}]\{\phi_i\} = \lambda_i\{\phi_i\}, \quad c_{ij} = R(|x_i - x_j|) \quad (70)$$

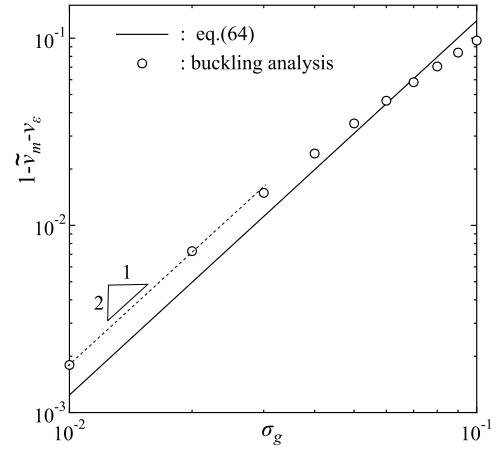


Fig.7 Relationship between  $\sigma_g$  and the mean value of relative buckling load reduction  $1 - \tilde{\nu}_m - \nu_\varepsilon$

式 (69) に基づきランダムな初期たわみと軸力変動を 100 ケース生成し、飛び移り座屈軸力パラメータの平均値  $\tilde{\nu}_m$  を求めた。なお、式 (64) における  $\tilde{\nu}$  が、その導出過程において何を意味するものであるのかは必ずしも明確ではない。ここでは、それを期待値と解釈して数値解析結果と比較する。軸力変動の無い場合 ( $\sigma_g = 0$ ) における初期たわみの標準偏差  $\sigma_\varepsilon$  と  $1 - \tilde{\nu}_m$  との関係をもとに求めた結果を Fig.6 に示す。また、合わせて式 (64) より求めた値も実線で示した。比較的小さい  $\sigma_\varepsilon$  において、数値解より求めた  $1 - \tilde{\nu}_m$  が  $\sigma_\varepsilon$  の  $0.925$  乗に比例しており、理論値である  $4/5=0.8$  乗より幾分か大きくなっている。それでも、 $\sigma_\varepsilon = 10^{-2}$  の付近では、数値解と理論式との比較的良好一致が認められ、式 (64) の妥当性が確認できる。

次に、 $\sigma_\varepsilon = 1 \times 10^{-2}$  に固定して、 $\sigma_g$  を適宜変えて同様の計算を行った。式 (64) で  $\nu_\varepsilon := 1.52\alpha^{2/5}$  とおくと、 $1 - \tilde{\nu}_m - \nu_\varepsilon$  は  $\sigma_\varepsilon$  一定の下で  $\sigma_g^2$  に比例する。そこで、 $1 - \tilde{\nu}_m - \nu_\varepsilon$  を縦軸にとり  $\sigma_g$  との関係をもとに求めた結果を Fig.7 に示す。なお、式 (64) より求めた理論値も実線で表示した。前述のとおり、 $\beta\sigma_w^2 \ll \alpha$  を仮定しており、比較的小さい  $\sigma_\varepsilon$  での近似精度が低下するため値自体には多少の差異が認められるものの、比較的小さい  $\sigma_g$  における  $1 - \tilde{\nu}_m - \nu_\varepsilon$  が概ね  $\sigma_g^2$  に比例しており、この範囲において定性的な一致が確認できる。

以上より、初期たわみと軸力変動とがランダムな場合の飛び移り座屈軸力の期待値が、式 (64) により概ね評価可能であることがわかった。

## 7. おわりに

軟化型の非線形支持剛性を有する Winkler 基礎上に置かれた無限長 Euler ばりの座屈特性について検討した。特に、初期たわみと軸力変動とを伴う場合を対象に、摂動法に基づき座屈評価式を導出した。

まず、初期たわみ形状を完全系の分岐座屈モードに設定した場合について、調和関数で与えられた軸力変動に対する飛び移り座屈軸力を求めた。その結果、軸力変動波長が座屈モード波長の  $1/2$  倍となる場合に、分岐座屈軸力が大きく



低下することがわかった。次に、初期たわみと軸力変動とが定常ランダムな波形で与えられる場合について、それらの標準偏差や PSD と飛び移り座屈軸力(期待値)との関係式を求めた。

最後に、数値解析結果に基づき導出した理論式の妥当性について検証した。その結果、理論式が比較的良好な近似評価を与えることが確認できた。

#### 参考文献

- (1) 鉄道総合技術研究所 編: 鉄道構造物等設計標準・同解説 軌道構造, 11章 ロングレール, 丸善出版, 2012.
- (2) 阿部和久, 水野雄太, 紅露一寛: 通り変位波形におけるバラツキが軌道座屈強度の確率特性に及ぼす影響, 鉄道工学シンポジウム論文集, No.24, pp. 167-174, 2020.
- (3) Lim, N.-H., Park, N.-H. and Kang, Y.-J.: Stability of continuous welded rail track, *Computers and Structures*, Vol.81, pp. 2219-2236, 2003.
- (4) 阿部和久, 田中洋介, 西宮裕騎, 紅露一寛: レール温度座屈時の分岐過程に関する一考察, 鉄道力学論文集, No.13, pp. 7-14, 2009.
- (5) Matsunaga, H.: Vibration and buckling of deep beam-columns on two-parameter elastic foundations, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.228(2), pp. 359-376, 1999.
- (6) Eisenberger, M. and Clastornik, J.: Vibrations and buckling of a beam on a variable Winkler elastic foundation, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.115(2), pp. 233-241, 1987.
- (7) Ghadban, A.A., Al-Rahmani, A.H., Rasheed, H.A. and Albahtiti, M.T.: Buckling of nonprismatic column on varying elastic foundation with arbitrary boundary conditions, *Hindawi, Mathematical Problems in Engineering*, Vol.2017, Article ID 5976098, 2017.
- (8) Clastornik, J., Eisenberger, M., Yankelevsky, D.Z. and Adin, M.A.: Beams on variable Winkler elastic foundation, *Journal of Applied Mechanics*, ASME, Vol.53, pp. 925-928, 1986.
- (9) Huang, Y. and Luo, Q.-Z.: A simple method to determine the critical buckling loads for axially inhomogeneous beams with elastic restraint, *Computers and Mathematics with Applications*, Vol.61, pp. 2510-2517, 2011.
- (10) Mirzabeigy, A., Haghpanahi, M. and Madoliat, R.: A new finite element formulation for buckling and free vibration analysis of Timoshenko beams on variable elastic foundation, *Journal of Solid Mechanics*, Vol.9(2), pp. 276-290, 2017.
- (11) Wadee, M.K., Hunt, G.W. and Whiting, A.I.M.: Asymptotic and Rayleigh-Ritz routes to localized buckling solutions in an elastic instability problem, *Proceedings Royal Society London A*, Vol.453, pp. 2085-2107, 1997.
- (12) Wadee, M.K. and Bassom, A.P.: Characterization of limiting homoclinic behavior in a one-dimensional elastic buckling model, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol.48, pp. 2297-2313, 2000.
- (13) Wadee, M.K., Coman, C.D. and Bassom, A.P.: Solitary wave interaction phenomena in a strut buckling model incorporating restabilization, *Physica D*, Vol.163, pp. 26-48, 2002.
- (14) Coman, C., Bassom, A.P. and Wadee, M.K.: Elastoplastic localized responses in one-dimensional structural models, *Journal of Engineering Mathematics*, Vol.47, pp. 83-100, 2003.
- (15) Pierre, C.: Curve veering and mode localization in a buckling problem, *Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP)*, Vol.40, pp. 758-761, 1989.
- (16) Coman, C.D.: Inhomogeneities and localized buckling patterns, *IMA Journal of Applied Mathematics*, Vol.71, pp. 133-152, 2006.
- (17) Coman, C.D.: Localized elastic buckling: non-linearities versus inhomogeneities, *IMA Journal of Applied Mathematics*, Vol.75, pp. 461-474, 2010.
- (18) Indeitsev, D.A., Kuklin, T.S. and Michalova, Y.A.: Localization in a Bernoulli-Euler beam on an inhomogeneous elastic foundation, *Vestnik St. Petersburg University. Mathematics*, Vol.48(1), pp. 41-48, 2015.
- (19) Zakeri, J.A., Mohammadzadeh, S. and Barati, M.: New definition of nutral temperature in continuous welded railway track curves, *Periodica Polytechnica Civil Engineering*, Vol.61, No.1, pp. 143-147, 2018.
- (20) 高木柚子, 阿部和久, 紅露一寛: 建物の日陰の移動がレール中立温度に及ぼす影響(シンポジウム講演概要), 第26回応用力学シンポジウム, 11006-10-01, 2023.
- (21) Kish, A. and Samavedam, G.: Risk analysis based CWR track buckling safety evaluation, *The Int. Conf. on Innovations in the Design & Assessment of Railway*, Delft. The Netherlands, National Technical Information Service, 1999.
- (22) Luongo, A.: Mode localization in dynamics and buckling of linear imperfect continuous structures, *Nonlinear Dynamics*, Vol.25, pp. 133-156, 2001.
- (23) Amazigo, J.C., Budiansky, B. and Carrier, G.F.: Asymptotic analyses of the buckling of imperfect

- columns on nonlinear elastic foundations, *International Journal of Solids and Structures*, Vol.6, pp. 1341-1356, 1970.
- (24) Simão, P.D., Coelho, A.M.G. and Wadee, M.A.: Buckling of a column with random initial geometrical imperfections, *Proceedings of the European Conference on Steel and Composite Structures - Eurosteel 2014*, Naples (Italy), September 10th-12th, 2014, CD-Rom paper n. 09-590.
- (25) Abramian, A.K., Vakulenko, S.A., Lukichev, D.V. and van Horssen, W.T.: Dynamics and buckling loads for a vibrating damped Euler-Bernoulli beam connected to an inhomogeneous foundation, *Archive of Applied Mechanics*, Vol.91(4), pp. 1291-1308, 2020.
- (26) 阿部和久, 小坂拓斗, 紅露一寛: 種々の不確実性を考慮した軌道座屈発生件数の期待値解析, 第27回鉄道工学シンポジウム論文集, pp. 183-190, 2023.
- (27) 丸山聖司, 阿部和久, 紅露一寛: 軌道水平変位に関する臨界速度の外乱鋭敏性, 土木学会論文集 A2(応用力学), Vol.70(2), I.971-I.980, 2014.
- (28) 宮井 徹: エネルギー法による軌道座屈の数値解析, 鉄道技術研究報告, No.1271, 1984.
- (29) Abe, K., Chida, Y., Quinay, P.E.B. and Koro, K.: Dynamic instability of a wheel moving on a discretely supported infinite rail, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.333(15), pp. 3413-3427, 2014.
- (30) 岩崎英治, 松野純一, 長井正嗣: 弧長法のための一反復解法と弧長自動設定法, 応用力学論文集, Vol.5, pp.207-216, 2002.