計算数理工学論文集 Vol. 23 (2023 年 11 月)，論文 No. 05-231124 JASCOME

マイクロポーラ弾性体の考え方に基づいたスライダ-クランク機構のトポロジー最適化

TOPOLOGY OPTIMIZATION FOR SLIDER-CRANK MECHANISMS BASED ON MICROPOLAR ELASTICITY

小夜　結利花 [1)]，山田　崇恭 [2)]

Yurika SAYO and Takayuki YAMADA

1) 東京大学大学院工学系研究科　(〒 113-28656　東京都文京区弥生 2-11-16,　E-mail: sayo-y34@g.ecc.u-tokyo.ac.jp)
2) 東京大学大学院工学系研究科　(〒 113-28656　東京都文京区弥生 2-11-16,　E-mail: t.yamada@mech.t.u-tokyo.ac.jp)

The slider-crank mechanism plays a crucial role in various mechanical systems, converting rotational motion into linear motion and vice versa. This mechanism, comprising multiple links, offers versatility in applications such as creating intricate strokes and incorporating adjustment mechanisms. However, manually designing the part layout and dimensions for desired functionality can be challenging. This study introduces a comprehensive optimization approach to determine the number, dimensions, and link structure within a slider-crank mechanism using topology optimization techniques. The linkage mechanism is represented as a topology-optimizable continuum, utilizing micropolar elasticity with independently definable bending and tensile deformation properties. The topology optimization problem is then formulated to enable the slider to produce the desired stroke curve using the proposed model. The proposed multi-material model is defined by the design variables of the Solid Isotropic Material with Penalization (SIMP) method, and the optimization problem is solved by a gradient-based optimization algorithm. Finally, we validate the effectiveness of this method through numerical examples.

Key Words: Topology optimization, Slider-crank mechanism, Link mechanism, Micropolar elasticity, Mechanism synthesis

1. 緒言

スライダ-クランク機構は，クランクの回転運動からスライダの直線運動への変換、またはその逆の変換を行うリンク機構の一種であり，自動車のエンジンやプレス機，産業ロボットなどの機械システムに広く用いられる．スライダ-クランク機構の中では，3 つの回転ジョイントと 1 つのスライダから構成され，スライダのストローク曲線が正弦曲線となる 4 節リンク型のものが最も一般的である．一方，より多くのリンク・ジョイントから構成される多リンク型のスライダ-クランク機構を用いることで，プレス機におけるスライダの複雑なストローク曲線の生成や正弦波状の動作を行う可変圧縮比エンジンにおけるスライダの上死点位置調整機構の挿入 [1] など，より自由度の高いシステムが設計できる．

多リンク型のスライダ-クランク機構では，リンク・ジョイントの数や連結関係の組み合わせが複数存在し，かつリンクの寸法などの機構定数の数が増えることから，所望の運動を行う機構を試行錯誤的に設計することは簡単ではない．そこで，最適化手法を用いてスライダ-クランク機構を設計する先行研究が行われてきた．例えば，Hsieh と Tsai [2] は 6 節リンクから成るプレス機に対し逐次二次計画法によりリンクの寸法最適化を行うことで目標のストローク曲線の生成を行った．また，小松原と栗林 [3] は 6 節リンクから成る可変圧縮比エンジンに対し最小二乗法を用いてストローク曲線が正弦曲線となる機構変数の探索を行った．しかし，これらの例のように多くの先行研究において，最適化の対象は寸法に限られ，リンク・ジョイントの数と連結関係は規定である．一方，Kang ら [4] はスライダを含むリンク機構について，バネで接続された剛体ブロックから成るリンク機構の近似モデルを用いてリンク・ジョイントの数と連結関係を最適化することでエンドエフェクタの軌道生成を行っているが,

2023 年 10 月 3 日受付，2023 年 10 月 30 日受理

スライダを出力とした軌道生成は行っていない．

また，スライダ-クランク機構における各リンクの構造の設計も，耐久性や仕事効率の点で重要である．Vanpaemal ら [5] は，柔軟マルチボディダイナミクスを基にしたトポロジー最適化により，質量制約下での各リンクの剛性最大化を行っている．しかし，この手法における設計領域は各リンクごとに設定されることから，リンク・ジョイントの数や連結関係，リンクの寸法は規定である．

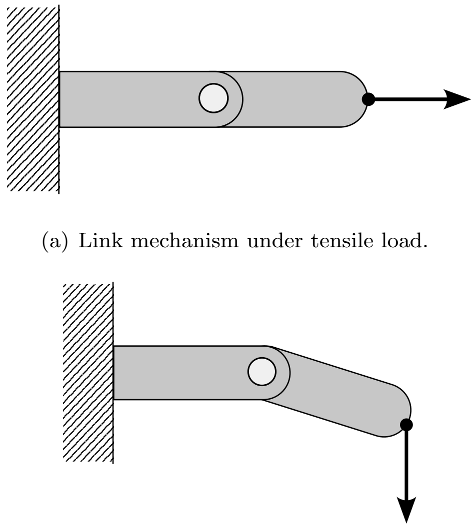
以上のように，スライダ-クランク機構において最適化による目標のスライダのストローク曲線の生成や，性能の向上が行われているが，これらを同時に行う研究はほとんど行われていない．同じストローク曲線を生成する機構が複数存在することから，機構と構造を同時に最適化することで，目標のストローク曲線を生成し，かつより性能の高い設計解が得られると期待できる．そこで本研究では，複数材料トポロジー最適化手法を用いた，スライダ-クランク機構におけるリンク・ジョイントの数や連結関係，リンクの寸法，構造の包括的な設計手法を構築する．なお本研究では特に，1 つのスライダと，数が未知の回転ジョイントから構成される平面スライダ-クランク機構について考える．

複数材料トポロジー最適化では，異なる材料特性をもつ複数材料の最適な材料配置を数値解析により求める．そのため，図 1 のリンク機構の例のように，引張方向には変形せず曲げ方向の力には回転ジョイント部のみが曲がるリンクと回転ジョイントの変形特性を，連続体の 2 材料で表現できれば，リンク機構に複数材料トポロジー最適化手法を適用できると考えられる．そこで先行研究 [6] では，引張特性と曲げ特性を独立に設定可能なマイクロポーラ弾性体 [7] を用いることで，リンク機構をトポロジー最適化可能な連続体で近似し，回転ジョイントのみから成るリンク機構の最適化を行った．本研究では，スライダの運動方向と垂直な並進バネの付加により出力部の自由度を拘束することで，マイクロポーラ弾性体によるリンク機構の近似モデルによるスライダ-クランク機構のトポロジー最適化を行う．

以下，本論文の構成について述べる．2 章では，マイクロポーラ弾性体を用いたリンク機構の連続体近似モデルについて説明する．3 章では，提案モデルを用いたスライダ-クランク機構のトポロジー最適化問題を定式化する．4 章では最適化アルゴリズムについて述べ，5 章では数値解析例による提案手法の妥当性の検証を行う．

2. リンク機構の連続体近似モデル

本章では，マイクロポーラ弾性体を用いたリンク機構の連続体近似モデルについて説明する．マイクロポーラ弾性体は材料の微細構造の特性を考慮した一般化連続体力学の 1 つであり，古典弾性体とは異なり材料の引張特性と曲げ特性を独立に定義することができる．本研究では，マイクロポーラ弾性体のこの特徴を用いることでリンク機構におけるリンクと回転ジョイントの変形特性をトポロジー最適化可能な連続体で表現する．



(a) Link mechanism under tensile load.

(b) Link mechanism under bending load.

Fig. 1　Deformation characteristics of the link mechanism.

2.1. マイクロポーラ弾性体

古典弾性体では，変位 $\boldsymbol{u}$ のみにより物体の変形を定義するのに対し，マイクロポーラ弾性体では変位 $\boldsymbol{u}$ に加え各物質点における微視的な回転量を表すマイクロ回転 $\boldsymbol{\phi}$ を考慮した上で物質点間の相互作用や材料特性を定義する．このとき，物体の変形を特徴づけるひずみテンソル $\boldsymbol{\epsilon}$，曲率テンソル $\boldsymbol{\chi}$ は，以下のように定義される．

$$\epsilon_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + e_{ijk}\phi_k \tag{1}$$

$$\chi_{ij} = \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j} \tag{2}$$

ここで，e_{ijk} は 3 次の交代テンソルである．

マイクロポーラ弾性体の物質点の周りには，応力 $\boldsymbol{\sigma}$ に加え偶応力 $\boldsymbol{\tau}$ が発生し，以下の関係式で表される．

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\epsilon_{kl} \tag{3}$$

$$\tau_{ij} = B_{ijkl}\chi_{kl} \tag{4}$$

ここで，C_{ijkl}，B_{ijkl} は弾性テンソルであり，二次元問題の場合には以下の式で定義される．

$$C_{ijkl} = \lambda_M\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu_M\delta_{il}\delta_{jk} + (\mu_M + \kappa_M)\delta_{ik}\delta_{jl} \tag{5}$$

$$B_{ijl} = \gamma_M\delta_{ik}\delta_{jl} \tag{6}$$

δ_{ij} はクロネッカーのデルタを示す．λ_M，μ_M，κ_M，γ_M は弾性係数であり，ヤング率 E_M，ポアソン比 ν_M，特性長さ l_M，連成数 N_M の 4 つの材料定数と以下のような関係を持

つ [8] [9].

$$E_M = \frac{(2\mu_M + \kappa_M)(3\lambda_M + 2\mu_M + \kappa_M)}{2\lambda_M + 2\mu_M + \kappa_M} \tag{7}$$

$$\nu_M = \frac{\lambda_M}{2\lambda_M + 2\mu_M + \kappa_M} \tag{8}$$

$$l_M = \sqrt{\frac{\gamma_M}{4\mu_M + 2\kappa_M}} \tag{9}$$

$$N_M = \sqrt{\frac{\kappa_M}{2\mu_M + 2\kappa_M}} \tag{10}$$

特性長さ l_M の大小は，4 つの弾性係数のうち，偶応力の構成式に含まれる γ_M のみに影響を与える．そのため，特性長さは引張特性には影響せず，曲げ特性のみに影響を与える．連成数 N_M が 0 に近づくとマイクロポーラ弾性体は古典弾性体に，1 に近づくと偶応力理論に一致する．偶応力理論では，マイクロ回転 $\boldsymbol{\phi}$ が巨視的な回転量と一致する．

体積力及び体積偶力がないと仮定すると，マイクロポーラ弾性体における応力と偶応力の平衡方程式は以下のように表される．

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} = 0 \\ \dfrac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} + e_{ikl}\sigma_{kl} = 0 \end{cases} \tag{11}$$

また，応力，偶応力に関するノイマン境界条件はそれぞれ以下のように与えられる．

$$\sigma_{ji} n_j = \bar{f}_i \qquad \text{on } \Gamma_f \tag{12}$$

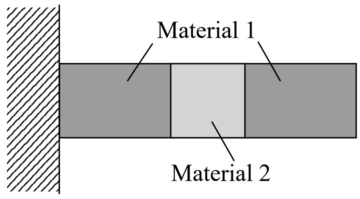
$$\tau_{ji} n_j = \bar{m}_i \qquad \text{on } \Gamma_m \tag{13}$$

ここで，$\boldsymbol{n}$ は境界面の単位法線ベクトルを，$\bar{\boldsymbol{f}}$ と $\bar{\boldsymbol{m}}$ はそれぞれ境界力，境界偶力をそれぞれ表す．

2.2. マイクロポーラ弾性体によるリンク機構の変形特性の表現

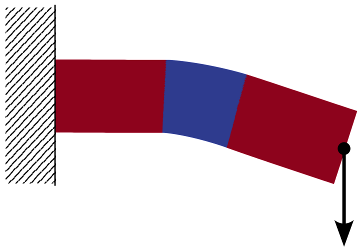
本研究では，連成数 N_M を 1 に近い値としたとき，同じヤング率 E_M とポアソン比 ν_M をもち，材料の曲げ特性を変化させる特性長さ l_M の大小を変えた 2 材料を用いることで，リンク機構のリンクと回転ジョイントの変形特性を近似的に表現する．本節では，2 節リンク機構の例を用いて，マイクロポーラ弾性体を用いたリンク機構の連続体近似モデルがリンク機構の変形特性を模擬できることを確認する．

図 1 は，検証の対象とする壁に接続された 2 節リンク機構であり，曲げ方向に荷重をかけた際には回転ジョイントのみが曲がり，引張方向に荷重をかけた際には伸びないという特性をもつ．この 2 節リンク機構を，図 2(a) のように 2 材料のマイクロポーラ弾性体から成る片持ち梁に置き換える．なお，材料 1 には特性長さ l_M が大きく曲がりにくいリンクに相当する材料を、材料 2 には特性長さ l_M が小さく曲がりやすい回転ジョイントに相当する材料を配置する．このときの変形の様子を図 2(b)(c) に示す．赤の材料がリンクに相当する材料 1，青の材料がジョイントに相当する材料 2 である．2 つの材料は曲げ方向のみ変形特性が異なるため，引張方向に力を加えた際には 2 つの材料が一様に伸び，曲げ方向に力を加えた際には回転ジョイントに相当する材料 2 が大きく曲がる，リンク機構に近い変形をすることが確認できる．よって本研究では，マイクロポーラ弾性体において特性長さ l_M を変化させた 2 材料モデルをリンク機構を近似したモデルとして扱う．



(a) Cantilever beam consisting of two materials.

(b) Micropolar elasticiy model under tensile load.



(c) Micropolar elasticiy model under bending load.

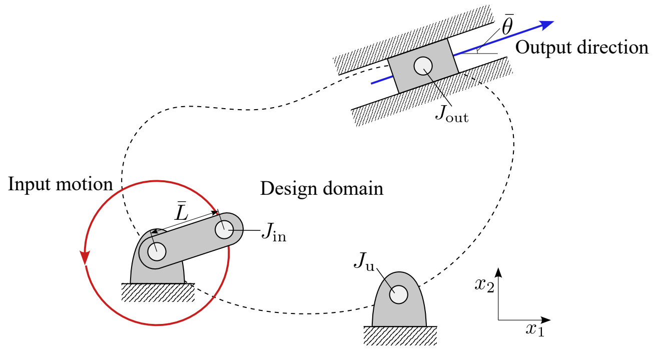
Fig. 2 Deformation characteristics of the micropolar elasticity model.

3. スライダ-クランク機構のトポロジー最適化問題

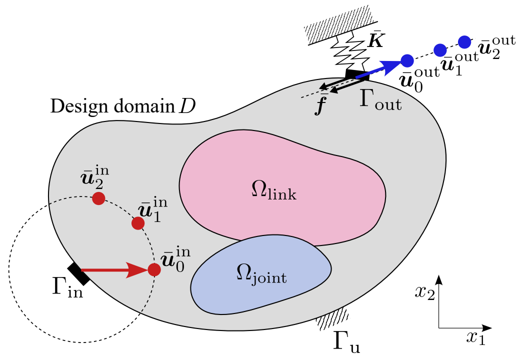
3.1. 定式化

本研究で扱うスライダ-クランク機構の最適化問題を図 3(a) に示す．設計の対称とする機構は 1 つの固定されたジョイント，入力の回転運動が与えられる長さ $\bar{L}$ のクランク，x_1 方向から角度 $\bar{\theta}$ だけ回転した方向の並進運動が出力されるスライダと，その間を接続する数と構造が未知のリンクから成る．本研究では，モデルは線形であると仮定するため，スライダのストローク曲線は正弦曲線に限られる．そこで，角度 $\bar{\theta}$ 方向に振幅 $\bar{A}$，位相 $\bar{\alpha}$ の正弦波運動を行う機構をトポロジー最適化によって設計する．

図 3(a) のスライダ-クランク機構の最適化問題を，連続体



(a) Problem definition to synthesize a linkage mechanism.



(b) Design domain for topology optimization of a linkage mechanism.

Fig. 3　Problem definition.

近似モデルの境界値問題に置き換えたものが図 3(b) である．設計領域 D 内においてリンク材料，ジョイント材料が占める領域をそれぞれ Ω_{link}，Ω_{joint} とし，これらの分布により図 3(a) における未知のリンクの配置，構造を示す．また，固定リンク，入力のクランク，出力のスライダはそれぞれ境界条件によって表現される．境界 Γ_{u} は，図 3(a) において固定されたジョイント J_{u} を示し，変位 0 のディリクレ条件を与える．また，境界 Γ_{in} は，入力のクランクの一端であるジョイント J_{in} を示す．クランクの回転運動を表現するため，1 回転するときの時間を T ステップに分割し，各時刻 t で以下の強制変位 $\bar{\boldsymbol{u}}_t^{\mathrm{in}}$ を与える．

$$\bar{\boldsymbol{u}}_t^{\mathrm{in}} = \begin{pmatrix} \bar{L}\cos\frac{t}{2\pi} \\ \bar{L}\sin\frac{t}{2\pi} \end{pmatrix} \quad t \in \{0, 1, ..., T-1\} \tag{14}$$

境界 Γ_{out} は出力のスライダのジョイント J_{out} を示し，式 (14) で定義された各時刻の入力の変位に対し，目標の変位 $\bar{\boldsymbol{u}}_t^{\mathrm{out}}$ を以下のように定義する．

$$\bar{\boldsymbol{u}}_t^{\mathrm{out}} = \boldsymbol{R}_{\bar{\theta}} \begin{pmatrix} \bar{A}\sin\left(\frac{t}{2\pi} + \bar{\alpha}\right) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{15}$$

ここで，$\boldsymbol{R}_{\bar{\theta}}$ は以下の式で定義される 2 階の回転テンソルである．

$$\boldsymbol{R}_{\bar{\theta}} = \begin{pmatrix} \cos\bar{\theta} & -\sin\bar{\theta} \\ \sin\bar{\theta} & \cos\bar{\theta} \end{pmatrix} \tag{16}$$

さらに，Γ_{out} はスライダを表すため，角度 $\bar{\theta}$ 方向のみに変位が許容される必要がある．そこで，角度 $\bar{\theta}$ と垂直な方向の変位に対する，十分に強いバネ剛性 $\bar{k}$ の並進バネをつけることにより拘束を表現する．このとき，バネの剛性行列は以下のように定義できる．

$$\bar{\boldsymbol{K}} = \boldsymbol{R}_{\bar{\theta}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \bar{k} \end{pmatrix} \boldsymbol{R}_{\bar{\theta}}^T \tag{17}$$

境界 Γ_{out} の変位と目標変位 $\bar{\boldsymbol{u}}_t^{\mathrm{out}}$ との誤差を最小化することで目標軌道を生成するが，Pederson [10] がコンプライアントメカニズムにおける経路生成問題において示したように，中間密度領域のない構造を得るためには出力部への外力の負荷が必要である．また，出力部への外力の負荷下での目標軌道の生成は，リンク機構の自由度の冗長を避けることにも有効である [11]．そこで，境界 Γ_{out} に対し以下のスライダの運動方向の外力を与える．

$$\bar{\boldsymbol{f}}_m = (-1)^m \boldsymbol{R}_{\bar{\theta}} \begin{pmatrix} \bar{f}_0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{18}$$

ここで，$\bar{f}_0$ は外力の大きさを表す定数であり，初期構造において入力部 Γ_{in} への強制変位による変位場に対し影響を与える値に設定する．また，$m \in 0, 1$ は荷重の方向を表す．角度 $\bar{\theta}$ 方向と逆方向の 2 つの荷重に対し誤差関数を最小化することで，荷重のない場合でも目標のストローク曲線をとるようにする．よって，スライダの変位の誤差関数は以下のように設定される．

$$F_{\mathrm{all}}^{\mathrm{path}} = \sum_{m=0}^{1} \sum_{t=0}^{T-1} F_{m,t}^{\mathrm{path}} \tag{19}$$

$$F_{m,t}^{\mathrm{path}} = \frac{1}{|\Gamma_{\mathrm{out}}|} \int_{\Gamma_{\mathrm{out}}} \left(u_i - \bar{u}_{t,i}^{\mathrm{out}}\right)^2 d\Gamma \tag{20}$$

さらに，リンク機構として適切な設計解を得るためには，リンク機構の自由度が不足し回転ジョイントが駆動しない状態を避ける必要がある．境界条件の設定上，自由度が不足した場合においても強制変位によりクランクは回転するが，運動はジョイント部の回転ではなくリンク部の弾性変形により実現される．よって，リンク部の弾性変形を抑制するために，以下に示すリンク部のひずみエネルギーを最小化することで，自由度の不足の無い機構を生成する．

$$F^{\mathrm{eg}}_{\mathrm{all}} = \sum_{m=0}^{1} \sum_{t=0}^{T-1} F^{\mathrm{eg}}_{m,t} \tag{21}$$

$$\begin{aligned} F^{\mathrm{eg}}_{m,t} = \frac{1}{|\Omega_{\mathrm{link}}|} \int_{\Omega_{\mathrm{link}}} & (C_{ijkl}\epsilon_{kl}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\phi})\epsilon_{ij}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\phi}) \\ & + B_{ijkl}\chi_{kl}(\boldsymbol{\phi})\chi_{ij}(\boldsymbol{\phi}))\, d\Omega \end{aligned} \tag{22}$$

以上より，リンク機構の連続体近似モデルを用いたスライダ-クランク機構のトポロジー最適化問題は，以下のようにまとめられる．

$$\min_{\boldsymbol{\xi}} \quad F = \omega^{\mathrm{path}} F^{\mathrm{path}}_{\mathrm{all}} + \omega^{\mathrm{eg}} F^{\mathrm{path}}_{\mathrm{all}} \tag{23}$$

$$\text{subject to} \quad G^{\mathrm{link}} = \frac{\int_D \rho^{\mathrm{link}} d\Omega}{\int_D d\Omega} - V^{\mathrm{link}}_{\max} \leq 0 \tag{24}$$

$$G^{\mathrm{joint}} = \frac{\int_D \rho^{\mathrm{joint}} d\Omega}{\int_D d\Omega} - V^{\mathrm{joint}}_{\max} \leq 0 \tag{25}$$

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} = 0 & \\ -\dfrac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} - e_{ikl}\sigma_{kl} = 0 & \\ u_i = \bar{u}^{\mathrm{in}}_{t,i} & \text{on } \Gamma_{\mathrm{in}} \\ u_i = 0 & \text{on } \Gamma_{\mathrm{u}} \\ \sigma_{ji}n_j = -\bar{K}_{ij}u_j + \bar{f}_{m,i} & \text{on } \Gamma_{\mathrm{out}} \end{cases} \tag{26}$$

ここで，ω^{path} と ω^{eg} は 2 つの目的関数の重み係数を，$\boldsymbol{\xi}$ は次節にて後述する材料分布を表すための設計変数を示す．式 (24)(25) はそれぞれリンク材料，ジョイント材料に対し，$V^{\mathrm{link}}_{\max}$，$V^{\mathrm{joint}}_{\max}$ を上限値とした体積制約であり，ρ^{link}，ρ^{joint} はそれぞれリンク材料，ジョイント材料の密度を示す．リンク機構に近い構造を得るために，ジョイント材料の体積の上限値は十分に小さく設定する．

3.2. SIMP 法に基づく設計変数の定義

本研究で扱う問題設定では，設計空間はリンク材料の領域 Ω_{link}，ジョイント材料の領域 Ω_{joint}，空洞部の 3 つの領域に分けられる．そこで，SIMP (Solid Isotropic Material with Penalization) 法 [12] における 2 材料モデルの材料分布の補間方法を用いて，これら 3 つの領域を定義する．このとき，各物質点における弾性テンソルは，2 つの設計変数 ξ_1，ξ_2 を用いて以下のように定義される．

$$C_{ijkl} = (\xi_1)^p \left\{ (\xi_2)^p C^{\mathrm{link}}_{ijkl} + (1-\xi_2)^p C^{\mathrm{joint}}_{ijkl} \right\} \tag{27}$$

$$B_{ijkl} = (\xi_1)^p \left\{ (\xi_2)^p B^{\mathrm{link}}_{ijkl} + (1-\xi_2)^p B^{\mathrm{joint}}_{ijkl} \right\} \tag{28}$$

ここで，C^{link}_{ijkl}，B^{link}_{ijkl}，$C^{\mathrm{joint}}_{ijkl}$，$B^{\mathrm{joint}}_{ijkl}$ はそれぞれリンク材料，ジョイント材料における弾性テンソルである．p は中間密度領域に対するペナルティ係数であり，本研究では $p = 3$ を用いる．

また，リンク材料，ジョイント材料の密度 ρ^{link}，ρ^{joint} を以下のように定義する．

$$\rho^{\mathrm{link}} = \xi_1 \xi_2 \tag{29}$$

$$\rho^{\mathrm{joint}} = \xi_1 (1 - \xi_2) \tag{30}$$

各設計変数の範囲は以下の通りである．

$$0 < \xi_{\min} \leq \xi_1 \leq 1 \tag{31}$$

$$0 \leq \xi_2 \leq 1 \tag{32}$$

ここで，ξ_1 の下限値 $\xi_{\min}$ は弾性テンソルを常に正則にするために設定され，本研究では $\xi_{\min} = 10^{-3}$ とする．

3.3. 感度解析

本研究では，勾配に基づく最適化アルゴリズムである MMA (The Method of Moving Asymptotes) [13] を用いて式 (23)-(26) のトポロジー最適化問題を解く．そのため，目的関数 F および不等式制約関数 G^{link}，G^{joint} に対する設計感度の導出が必要となる．

まず，随伴変数法を用いて目的関数 F に対する設計感度を求める．最適化問題 (23)-(26) は，各時刻，各外力方向において異なる拘束条件を持つことから，随伴方程式を複数回解く必要がある．そこで，随伴方程式を解く回数を最小限にするため，式 (23) の目的関数 F を同じ境界条件下での目的関数 $F_{m,t}$ の和の形に書き換える．

$$F = \sum_{m=0}^{1} \sum_{t=0}^{T-1} F_{m,t} \tag{33}$$

$$F_{m,t} = \omega^{\mathrm{path}} F^{\mathrm{path}}_{m,t} + \omega^{\mathrm{eg}} F^{\mathrm{eg}}_{m,t} \tag{34}$$

このとき，設計変数 $\xi_n (n \in 1, 2)$ の目的関数 F に対する感度は以下の通り分解できる．

$$\frac{\partial F}{\partial \xi_i} = \sum_{m=0}^{1} \sum_{t=0}^{T-1} \frac{\partial F_{m,t}}{\partial \xi_i} \tag{35}$$

停留条件を用いることで，各時刻，各外力方向下での解くべき随伴方程式は以下の通り導かれる．

$$\begin{aligned} & \int_D \left\{ C_{ijkl}\epsilon_{kl}(\tilde{\boldsymbol{v}},\tilde{\boldsymbol{\psi}})\epsilon_{ij}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\psi}) + B_{ijkl}\chi_{kl}(\tilde{\boldsymbol{\psi}})\chi_{ij}(\boldsymbol{\psi}) \right\} d\Omega \\ & = -\int_{\Gamma_{\mathrm{out}}} \bar{K}_{ij} v_i \tilde{v}_j d\Gamma + \frac{2\omega^{\mathrm{path}}}{|\Gamma_{\mathrm{out}}|} \int_{\Gamma_{\mathrm{out}}} \left(u_i - \bar{u}^{\mathrm{out}}_{t,i} \right) \tilde{v}_i d\Gamma \\ & + \frac{2\omega^{\mathrm{eg}}}{|\Omega_{\mathrm{link}}|} \int_{\Omega_{\mathrm{link}}} \left\{ C_{ijkl}\epsilon_{kl}(\tilde{\boldsymbol{v}},\tilde{\boldsymbol{\psi}})\epsilon_{ij}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\phi}) + B_{ijkl}\chi_{kl}(\tilde{\boldsymbol{\psi}})\chi_{ij}(\boldsymbol{\phi}) \right\} d\Omega \end{aligned} \tag{36}$$

ここで，$\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{\psi}$ はそれぞれ変位，マイクロ回転に対応する随伴変数を，$\tilde{\boldsymbol{v}}$，$\tilde{\boldsymbol{\psi}}$ は試験関数をそれぞれ表す．時刻 t，外力方向 m における目的関数に対する設計変数 ξ_n の感度は，随伴方程式 (36) の解 $\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{\psi}$ を用いて以下のように導かれる．

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_{m,t}}{\partial \xi_n} &= \frac{\partial C_{ijkl}}{\partial \xi_n}\epsilon_{kl}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\phi})\left\{\epsilon_{ij}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\psi}) - \frac{\omega^{\mathrm{eg}}\rho^{\mathrm{link}}}{|\Omega_{\mathrm{link}}|}\epsilon_{ij}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\phi})\right\} \\ &\quad + \frac{\partial B_{ijkl}}{\partial \xi_n}\chi_{kl}(\boldsymbol{\phi})\left\{\chi_{ij}(\boldsymbol{\psi}) - \frac{\omega^{\mathrm{eg}}\rho^{\mathrm{link}}}{|\Omega_{\mathrm{link}}|}\chi_{ij}(\boldsymbol{\phi})\right\}\end{aligned} \tag{37}$$

なお，各弾性テンソルに対する設計変数の偏微分は式 (27)(28) より以下のように求められる，

$$\frac{\partial C_{ijkl}}{\partial \xi_1} = p\,(\xi_1)^{p-1}\left\{(\xi_2)^p\, C_{ijkl}^{\mathrm{link}} + (1-\xi_2)^p\, C_{ijkl}^{\mathrm{joint}}\right\} \tag{38}$$

$$\frac{\partial B_{ijkl}}{\partial \xi_1} = p\,(\xi_1)^{p-1}\left\{(\xi_2)^p\, B_{ijkl}^{\mathrm{link}} + (1-\xi_2)^p\, B_{ijkl}^{\mathrm{joint}}\right\} \tag{39}$$

$$\frac{\partial C_{ijkl}}{\partial \xi_2} = p\,(\xi_1)^{p}\left\{(\xi_2)^{p-1}\, C_{ijkl}^{\mathrm{link}} - (1-\xi_2)^{p-1}\, C_{ijkl}^{\mathrm{joint}}\right\} \tag{40}$$

$$\frac{\partial B_{ijkl}}{\partial \xi_2} = p\,(\xi_1)^{p}\left\{(\xi_2)^{p-1}\, B_{ijkl}^{\mathrm{link}} - (1-\xi_2)^{p-1}\, B_{ijkl}^{\mathrm{joint}}\right\} \tag{41}$$

次に，体積制約に対する設計感度はそれぞれ以下の通りとなる．

$$\frac{\partial G^{\mathrm{link}}}{\xi_1} = \frac{\xi_2}{\int_D d\Omega} \tag{42}$$

$$\frac{\partial G^{\mathrm{joint}}}{\xi_1} = \frac{1-\xi_2}{\int_D d\Omega} \tag{43}$$

$$\frac{\partial G^{\mathrm{link}}}{\xi_2} = \frac{\xi_1}{\int_D d\Omega} \tag{44}$$

$$\frac{\partial G^{\mathrm{joint}}}{\xi_2} = -\frac{\xi_1}{\int_D d\Omega} \tag{45}$$

4. 数値実装法

4.1. 感度の平均化とフィルタリング

最適化の安定性のため，式 (35) で求められる目的関数に対する設計感度について，以下のようにステップごとの平均化を行う．

$$\overline{\frac{\partial F}{\partial \xi_i}} = (1-c)\overline{\frac{\partial F}{\partial \xi_i}}^{\mathrm{old}} + c\frac{\partial F}{\partial \xi_i} \tag{46}$$

ここで，$\overline{\frac{\partial F}{\partial \xi_i}}^{\mathrm{old}}$ は最適化の 1 ステップ前における平均化された設計感度である．c は減衰率を表す定数であり，$0 < c < 1$ の範囲で指定される．

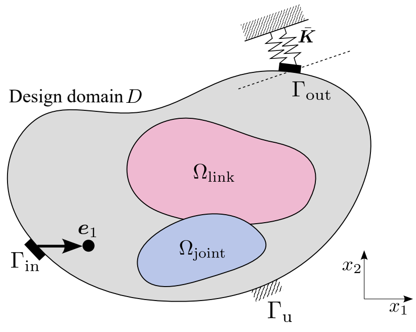
また，密度法におけるメッシュ依存性の問題を回避するため，平均化された設計感度にヘルムホルツ型偏微分方程式によるフィルタリング [14] を適用する．

4.2. 重ね合わせの原理を用いた状態場の計算

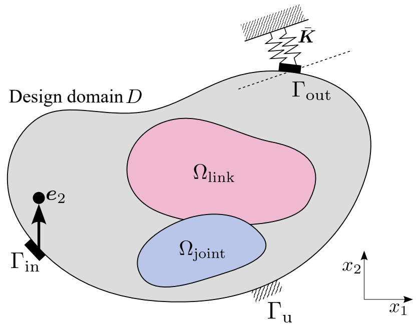
本研究では，材料の線形性を仮定しているため，状態場 $\boldsymbol{U} = \{\boldsymbol{u},\boldsymbol{\phi}\}$ の算出に重ね合わせの原理を用いることができる．図 (a)，(b)，(c) の境界条件下で算出される状態場をそれぞれ $\boldsymbol{U}^{\mathrm{disp1}}$，$\boldsymbol{U}^{\mathrm{disp2}}$，$\boldsymbol{U}^{\mathrm{trac}}$ とすると，時刻 t，外力方向 m での状態場は以下の式で求められる．

$$\boldsymbol{U}_{t,m} = \bar{u}_{t,1}^{\mathrm{in}}\boldsymbol{U}^{\mathrm{disp1}} + \bar{u}_{t,2}^{\mathrm{in}}\boldsymbol{U}^{\mathrm{disp2}} + (-1)^m\boldsymbol{U}^{\mathrm{trac}} \tag{47}$$

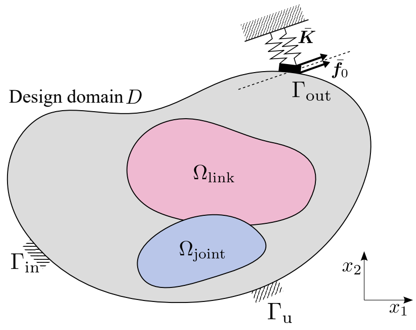
重ね合わせの原理の適用により，最適化の 1 ステップあたりに解く支配方程式の数を減らすことができる．



(a) Design domain for calculating $\boldsymbol{U}^{\mathrm{disp1}}$.



(b) Design domain for calculating $\boldsymbol{U}^{\mathrm{disp2}}$.



(c) Design domain for calculating $\boldsymbol{U}^{\mathrm{trac}}$.

Fig. 4　Principle of superposition. $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ represent unit vectors in the x_1 and x_2 directions, respectively.

4.3. 最適化アルゴリズム

本研究では，以下の手順に従って最適化問題を解く．

Step 1: 設計変数の初期値を与える．

Step 2: 有限要素法により支配方程式 (26) を解き，基本となる状態場 $\boldsymbol{U}^{\mathrm{disp1}}$，$\boldsymbol{U}^{\mathrm{disp2}}$，$\boldsymbol{U}^{\mathrm{trac}}$ を求める．

Step 3: 時刻 t，荷重方向 m を設定する．

Step 4: 式 (47) により得られる状態場を用いて，時刻 t，外力方向 m における目的関数を求める．

Step 5: 有限要素法により随伴方程式 (36) を解き，時刻 t，外力方向 m における設計感度を求める．

Step 6: 全時刻，全荷重方向の計算を終えるまで Step 3 から Step 5 を繰り返す.

Step 7: 目的関数，体積制約を計算し，収束判定を行う．

Step 8: MMA により設計変数を更新し，Step 2 に戻る．

各計算の実装には，汎用有限要素法解析ソフトウェア FreeFEM++ [15] を用いた．

5. 数値解析例

本章では，式 (23) の最適化問題を対象とした数値解析例を用いて，提案手法の妥当性を検証する．問題設定として，図のような設計領域 D を考える．ヤング率 E_M，ポアソン比 ν_M，適合度 N_M は 2 材料ともにそれぞれ 200[GPa]，0.3，0.99 とし，特性長さはリンク材料では 0.1 [m]，ジョイント材料では 0.001 [m] とする．また，クランクの長さ $\bar{L}$ は 0.25 [m]，スライダの変位を拘束するバネのバネ剛性 $\bar{k}$ は 10^{24} [N/m]，外力の大きさ $\bar{f}_0$ は 10^9 [N]，時刻の分割数 T は 8 とした．目的関数の重み係数 ω^{path}，ω^{eg} はそれぞれ 1，10^{-10} とした．ω^{eg} は初期状態における $10^{-2}\frac{F_{\mathrm{all}}^{\mathrm{path}}}{F_{\mathrm{all}}^{\mathrm{eg}}}$ 程度の値となっている．また，感度の平均化の減衰率 c は 0.1，感度のフィルタリング半径は ξ_1 に対して 0.04，ξ_2 に対して 0.02 とした．リンク材料の体積の最大値 $V_{\max}^{\mathrm{link}}$ は 34%とする．また，ジョイント材料の体積の最大値 $V_{\max}^{\mathrm{joint}}$ は，ジョイント材料がリンク機構の回転ジョイント同様に十分小さくなるよう 1%とする．

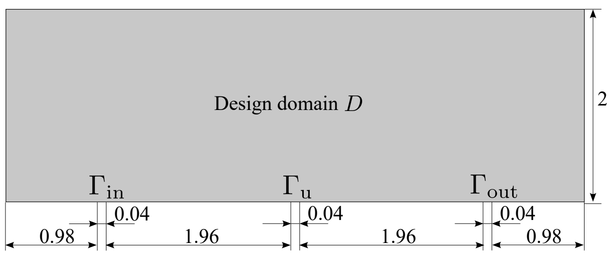


Fig. 5　Problem setting for numerical examples.

表 1 に示すように，スライダの角度 $\bar{\theta}$，ストローク曲線の振幅 $\bar{A}$，位相 $\bar{\alpha}$ を変えた 4 つのケースに対して最適化を行う．各ケースに対して得られた最適構造を図 6 に示す．なお，赤の材料がリンク材料，青の材料がジョイント材料を示す．全てのケースに対する最適構造について，境界 Γ_{in}，Γ_{u}，Γ_{out} がジョイントに相当することを考慮の上，リンク材料とジョイント材料の配置をリンク機構のリンクと回転ジョイントに置き換えることで，図 7 に示す 1 自由度の 6 節リンク機構とみなすことができる．なお，ジョイント材料部に 1 つの有限要素で接続されたヒンジ構造が見られるが，得られた最適構造をもとに機構を設計する際には，ヒンジ構造を含めたジョイント材料が集まる箇所をそれぞれ 1 つのジョイントで置き換えることを想定しているため，本研究ではヒンジ構造の発生は問題としない．図 8 は各ケースの最適構造において，外力の大きさ $f_0 = 0$ としたときのスライダのストローク曲線であるが，全てのケースにおいて制御点に近い曲線を出力できているとわかる．ケース 1 の最適構造における，$f_0 = 0$ の場合の各時刻の変形の様子とマイクロ回転の分布を表 2 に示す．ここで，偶応力理論ではマイクロ回転と巨視的な回転量が一致するため，マイクロ回転の分布より最適構造においてジョイント材料の回転により変形が実現されているとわかる．以上より，提案手法は目標のストローク曲線を生成するスライダ-クランク機構を設計するのに有効であると考えられる．

Table 1　Parameters for each case in the numerical example.

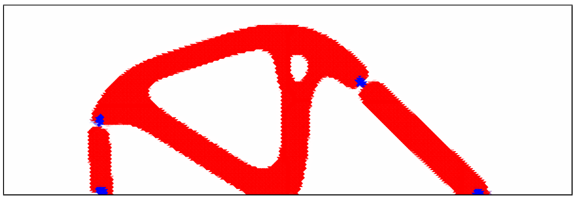
	$\bar{\theta}$ [rad]	$\bar{\alpha}$ [rad]	$\bar{A}$ [m]
Case 1	0	0	0.25
Case 2	$\frac{\pi}{4}$	0	0.25
Case 3	0	$\frac{\pi}{4}$	0.25
Case 4	0	0	0.15

6. 結言

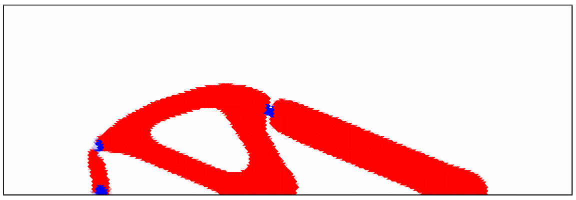
本研究では，マイクロポーラ弾性体によるリンク機構の近似モデルを導入することでスライダ-クランク機構をトポロジー最適化する手法を提案した．得られた成果を以下に示す.

- 引張特性と曲げ特性を独立に定義可能なマイクロポーラ弾性体の 2 材料モデルを用いることで，リンク機構をトポロジー最適化可能な連続体で近似する考え方を提案した．
- 提案モデルを用いてスライダが目標のストローク曲線をとるようなスライダ-クランク機構を設計するためのトポロジー最適化問題を定式化した．スライダを表す出力部の境界に運動方向と垂直な並進バネを付加することで，出力のスライダに対する自由度の拘束を行った．目的関数には，出力変位の誤差関数とリンク材料のひずみエネルギーの重み付き和を用いた．
- SIMP 法に基づいて提案モデルの材料分布を表す設計変数を設定し，その最適化アルゴリズムを構築した．
- 本手法による数値解析例を示し，方法論の妥当性を検討した．スライダの角度，ストローク曲線の振幅，位相の異なる目標軌道に対して，自由度が適切な値をもつスライダ-クランク機構を最適化により得られることが確認できた．

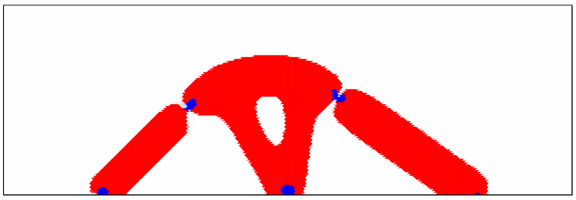
本研究では，モデルの線形性の仮定を行ったため，得られるスライダのストローク曲線は正弦曲線に限定されたが，今後



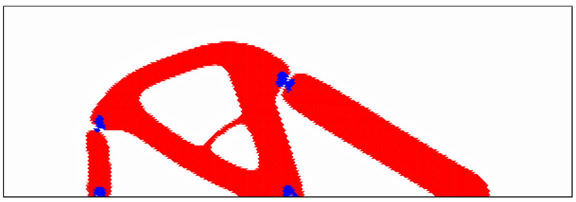
(a) Case 1.



(b) Case 2.



(c) Case 3.



(d) Case 4.

Fig. 6　Optimal distribution.

非線形解析に基づき最適化を行うことでより複雑なストローク曲線を出力する機構を設計できると期待できる．また，本研究では 1 つの固定ノード，1 つのスライダという問題設定に対し数値解析例を示したが，ロス機構のような複数のスライダを持つ機構に対する最適化問題への拡張も考えられる．なお，本研究で得られた最適構造におけるリンク材料は古典弾性体とは異なる変形特性を持つマイクロポーラ弾性体材料であるため，実際の設計で用いた場合の挙動の変化について今後更なる研究が必要であると考えられる．

7. 謝辞

本研究の一部は，JST 創発的研究支援事業（JPMJFR202J）の支援を受けました．

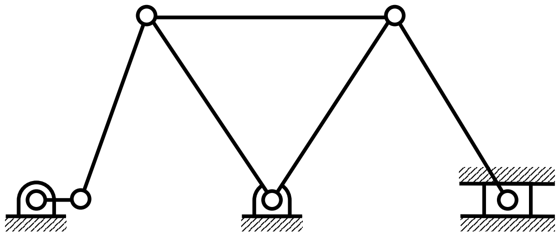


Fig. 7　Kinematic diagram of optimal distribution for Cases 1–4.

参考文献

(1) Moteki, K., Aoyama, S., Ushijima, K., Hiyoshi, R., Takemura, S., Fujimoto, H., and Arai, T.: A study of a variable compression ratio system with a multi-link mechanism, SAE Technical Paper, **2003-01-0921**(2003)

(2) Hsieh, W. H., and Tsai, C. H. : On a novel press system with six links for precision deep drawing, Mechanism and Machine Theory, **46.2**(2011), pp. 239–252.

(3) 小松原 英範，栗林 定友：新しい可変圧縮比エンジン機構の研究・開発（第 1 報，可変圧縮比エンジン機構の基本特性および設計），日本機械学会論文集，**84.860**(2018), 17-00372.

(4) Kang, S. W., and Kim, Y. Y.: Unified topology and joint types optimization of general planar linkage mechanisms, Structural and Multidisciplinary Optimization, **57.5**(2018), pp. 1955–1983.

(5) Vanpaemal, S., Asrih, K., Vermaut, M., and Naets, F.: Topology optimization for dynamic flexible multibody systems using the Flexible Natural Coordinates Formulation, Mechanism and Machine Theory, **185**(2023), 105344.

(6) 小夜 結利花，山田 崇恭： トポロジー最適化とマイクロポーラ弾性体の考え方に基づくリンク機構の構想設計法， 日本機械学会論文集， DOI: https://doi.org/10.1299/transjsme.23-00082

(7) Eringen, A. C.: Linear theory of micropolar elasticity, Journal of Mathematics and Mechanics, **15.6**(1966), pp. 909–923.

(8) Gauthier, R.D., and Jahsman, W.E.: A quest for micropolar elastic constants, Journal of Applied Mechanics, **2.2**(1975), pp. 369–374.

(9) Lakes, R.: Experimental methods for study of Cosserat elastic solids and other generalized elastic continua, In: Mühlhaus, H. (ed.) Continuum models for materials with microstructure, (1995), Wiley, New York, Ch.1, pp. 1–25.

(10) Pederson, C. B. W., Buhl, T., and Sigmund, O.: Topology synthesis of large-displacement compliant mechanisms, International Journal for Numerical Methods in Engineering, **50.12**(2001), pp. 2683–2705.

(11) Nam, S. J., Jang, G. W., and Kim, Y. Y.: The Spring-Connected Rigid Block Model Based Automatic Synthesis of Planar Linkage Mechanisms: Numerical

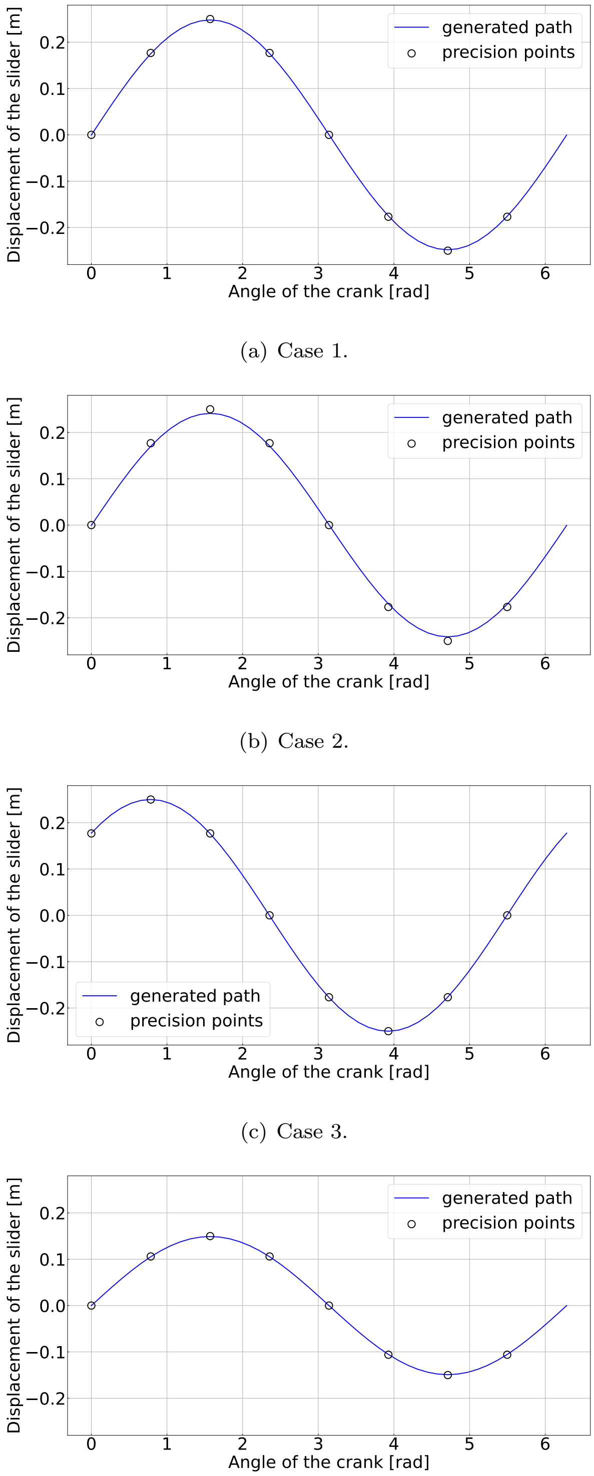
Issues and Remedies, Journal of Mechanical Design, **134.5**(2012), 051002.

(12) Bendøse, M. P., and Sigmund, O.: Material interpolation schemes in topology optimization, Archive of Applied Mechanics, **69**(1999), pp. 635–654.

(13) Svanberg, K.: The method of moving asymptotes—a new method for structural optimization, International Journal for Numerical Methods in Engineering, **24.2**(1987), pp. 359–373.

(14) Lazarov, B. S., and Sigmund, O.: Filters in topology optimization based on Helmholtz-type differential equations, International Journal for Numerical Methods in Engineering, **86.6**(2011), pp. 765–781.

(15) Hecht, F.: New development in freefem++, Journal of Numerical Mathematics, **20.3–4**(2012), pp. 251–265.



(a) Case 1.

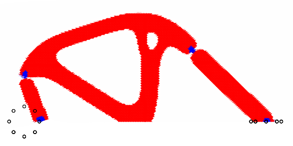
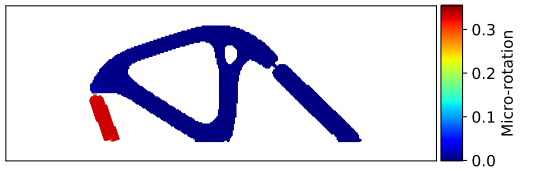
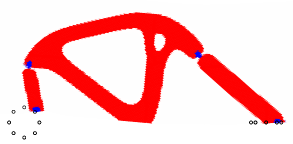
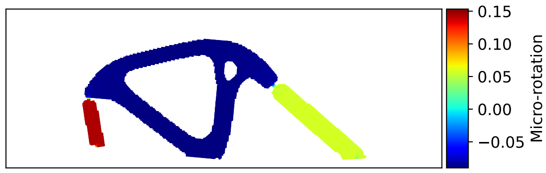
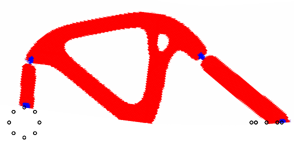
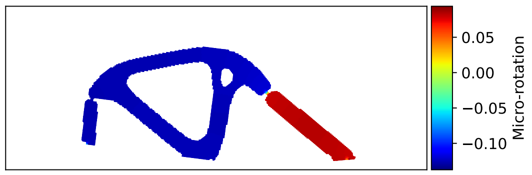
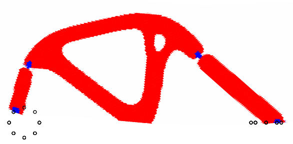
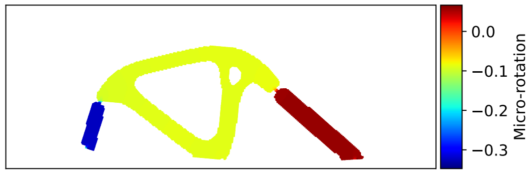
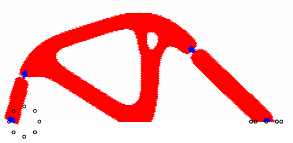
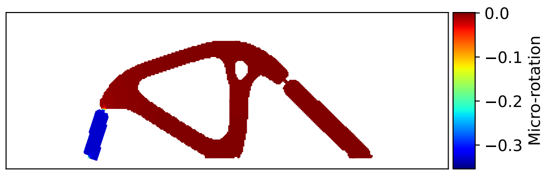
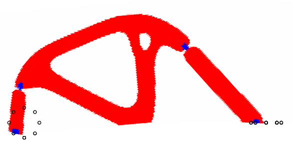
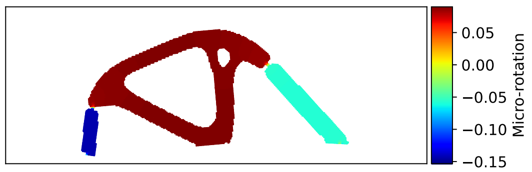
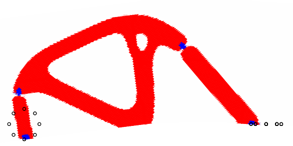
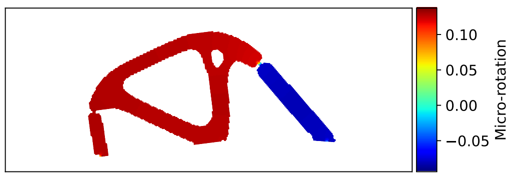
(b) Case 2.

(c) Case 3.

(d) Case 4.

Fig. 8 Stroke curve of slider with optimal structure.

Table 2 Deformation and distribution of micro-rotation in Case 1.

Time	Deformation	Ditribution of micro-rotation
$t=0$		
$t=1$		
$t=2$		
$t=3$		
$t=4$		
$t=5$		
$t=6$		
$t=7$