

連成型仮想的物理モデルに基づく 仮想的な異方性拡散方程式を用いた 型成形における幾何学的制約付き最適設計

OPTIMIZATION METHOD WITH GEOMETRIC CONSTRAINT FOR MOLDING USING FICTITIOUS ANISOTROPIC DIFFUSION EQUATION BASED ON COUPLED FICTITIOUS PHYSICAL MODEL

田島 幹大¹⁾, 山田 崇恭²⁾

Mikihiro TAJIMA and Takayuki YAMADA

1) 東京大学大学院工学系研究科 (〒113-8656 文京区弥生 2-11-16, E-mail: tajima-mikihiro8@g.ecc.u-tokyo.ac.jp)

2) 東京大学大学院工学系研究科 (〒113-8656 文京区弥生 2-11-16, E-mail: t.yamada@mech.t.u-tokyo.ac.jp)

This paper focuses on manufacturing the optimal structure obtained by topology optimization using molding techniques, e.g., casting and injection molding. In molding processes, products cannot geometrically be demolded if undercuts and interior voids exist in the structure. Thus, topology optimization that leads to a structure satisfying the geometric constraint for molding is required. In this study, we detect regions that violate the constraint using a fictitious anisotropic diffusion equation. Additionally, based on the concept of a coupled fictitious physical model, which overcomes the convergence problem in the previous formulation method, we formulate the optimization problem. After deriving design sensitivity and an optimization algorithm, we verify the validity of the proposed method through a numerical example.

Key Words: Topology optimization, Level set method, Molding constraint, Geometric constraint, Fictitious physical model, Coupled fictitious physical model

1. 緒言

トポロジー最適化^(1, 2)は、与えられた制約条件の下でデバイスや材料の性能を最大化するために、新たに境界条件が生成されるようなトポロジー変更を許容しながら形状を最適化する手法であり、最も自由度の高い構造最適化手法として知られている。しかし、トポロジー最適化により得られる形状は、幾何学的に複雑な部分形状を持つ場合が多い。故に、得られた最適形状を産業製品へ応用するためには製造可能な形状の自由度が高い製造法が求められる。そのような製造法は近年様々に発展してきているが、各種製造工程において製造困難な部分形状が存在しないように幾何学的制約を考慮した最適形状設計法が必要になる。例えば、積層造形法では支持がなく局所的に宙に浮いた形状があるとき、材料を積み上げることが不可能であるため、そのような幾何学的制約を考慮する必要がある。また、多軸加工機を用いた製造におい

ては、工具が外部から工作物に到達できない部分形状は加工できないため、そのような幾何学的制約を考慮する必要がある。その他の製造手法として、鋳造や射出成形に代表される金型を用いる型成形がある。型成形では、液状にした原材料を金型に注入し、冷却および硬化後に型を取り除くことで所望の形状を持つ製品を成形する。しかし、成形した形状と型が干渉する部分(アンダーカット)や中空部分が存在する場合、型を取り除くことができない。したがって、最適形状を製造するためには、それぞれの製造方法に合わせた幾何学的制約を考慮したトポロジー最適化が要求される。

本研究では、幾何学的に複雑な形状を製造できる手法の中でも、短時間で大量生産に優れた型成形での制約に着目する。型制約を考慮したトポロジー最適化に関していくつかの先行研究が挙げられる。Xia et al.⁽³⁾やAllaire et al.⁽⁴⁾は、最適化プロセスを表現するHamilton-Jacobi方程式の速度ベクトルと各々の型の開閉方向ベクトルの内積に着目し

た. Sakai et al.⁽¹⁰⁾ は構造の幾何学的特徴を捉える仮想的な物理場を計算し、同様に開閉方向ベクトルとの内積の関係性から制約に違反する領域を検出した. Sato et al.⁽¹¹⁾ は仮想的な移流拡散方程式を用いて、ある一方向から離型できる領域を定義した. しかし、これらの先行研究で提案された手法では、多方向から離型可能かを考慮する場合、一方向ずつ式を定義し計算する必要がある. 故に、計算時間が多くかかる課題を持つ.

一方、Liu et al.⁽⁵⁾ や Li et al.⁽⁶⁾ は仮想的な熱拡散方程式の温度場を用いて離型不可能な中空部分の検出を行った. さらに、Li et al.⁽⁸⁾ は同様の式を発展させて熱伝導係数のパラメータを変えることで、アンダーカットも検出可能な型制約に違反する領域を定義した. この手法では、離型する二方向を同時に考慮することができるため、計算時間を短縮できる利点がある. しかし、これらの先行研究で提案された式により得られる解は、固定設計領域 (設計対象となる構造物を含む領域) のアスペクト比や大きさに強く依存したり、空洞領域の大きさによって値が変動し閾値を決めるのが困難であったりするため、幾何学的制約に違反する領域を適切に検出できない問題があった. そこで、Yamada et al.⁽¹²⁾ は設計領域全体で仮想的な温度場が 0 か 1 に近い値を取るよう改善した仮想的な拡散方程式を新たに提案した. その結果、固定設計領域の形状の大きさに依存せずに、構造物内部の中空部分を正しく検出可能となった. しかし、Yamada et al.⁽¹²⁾ の提案した式では仮想的な熱が同心円上に拡散するため、型制約に違反するアンダーカットを検出できない.

そこで本研究では、Yamada et al.⁽¹²⁾ の提案した方程式の拡散係数に異方性を持たせた仮想的な異方性拡散方程式を用いて型制約を検出する手法を提案する. 具体的には、型の開閉方向のみ仮想的な熱が拡散するように拡散係数を設定する. その結果、中空部分だけでなくアンダーカット部分にも仮想的な熱が留まり、仮想的な温度分布が正確に型制約に違反する領域を表現できる. また、異方性拡散方程式を用いた最適化問題を Tajima et al.⁽¹³⁾ の提案した連成型仮想的物理モデルに基づいて定式化を行う. 仮想的物理モデル^(9, 10, 11, 12) とは、製造要件を考慮するために導入される仮想的な支配方程式系である. 具体的には、Sato et al.⁽¹¹⁾ が提案した移流拡散方程式や Yamada et al.⁽¹²⁾ の提案した拡散方程式に加えて、本研究で扱う型制約を検出するのに用いる異方性拡散方程式などが仮想的物理モデルに該当する. 従来の仮想的物理モデルの定式化では、幾何学的制約に違反する領域 (以下、制約違反領域) を目的関数として、その関数の値を最小化するように設定することで、制約を考慮した. そして、物理現象を記述する支配方程式系である力学モデルの目的関数と仮想的物理モデルの目的関数を単に線形結合して定式化を行った. しかし、この定式化法では、二つのモデルの状態変数及び目的関数が相互的に最適プロセスに作用しないため、一つの最適形状に収束するのが困難な問題がある.

そこで、連成型仮想的物理モデルでは、制約違反領域内で力学モデルの目的関数が悪化するように材料定数を変化させて定式化を行う. その結果、力学モデルの目的関数のみを最小化するだけで、幾何学的制約を満たした最適形状に収束させることが可能となる. また、支配方程式内で二つのモデルの状態変数が相互作用することも収束性の改善に貢献する.

以下、本論文は次のように構成される. 第 2 章では、Yamada et al.⁽¹⁴⁾ の提案したレベルセット法に基づいたトポロジー最適化について述べる. また、本研究で扱う平均コンプライアンス最小化問題の定式化を行う. 第 3 章では、型成形で考慮しなければならない幾何学的な制約 (型制約) について具体的に述べる. 続いて第 4 章において、第 3 章で述べた型制約を検出する方法として、異方性拡散方程式を用いた仮想的物理モデルを用いる手法を提案し定式化する. 第 5 章では、一般的な仮想的物理モデルの定式化法に基づいた型制約を考慮した平均コンプライアンス最小化問題の定式化及び収束性に関する問題点について述べる. そして、収束性の問題を解決するのに有用である連成型仮想的物理モデルに基づいて最適化問題を定式化する. 第 6 章では、連成型仮想的物理モデルに基づいた最適化問題の目的関数及び支配方程式から、随伴変数法により設計感度を導出する. 第 7 章では、最適化アルゴリズムについて述べる. 第 8 章では、具体的な数値解析例により、本研究で提案した手法の妥当性を検証する. 最後に、第 9 章に結言を記す.

2. レベルセット法に基づいたトポロジー最適化

2.1. 基本的な考え方

レベルセット法に基づくトポロジー最適化について概要を述べる. 設計対象とする構造物を包括する領域 (以下、固定設計領域) を D 、構造領域を Ω とする. Yamada et al.⁽¹⁴⁾ の提案した手法に基づき、レベルセット関数 $\phi(\mathbf{x})$ を以下のように定義する.

$$\begin{cases} 0 < \phi(\mathbf{x}) \leq 1 & \text{if } \mathbf{x} \in \Omega \\ \phi(\mathbf{x}) = 0 & \text{if } \mathbf{x} \in \partial\Omega \\ -1 \leq \phi(\mathbf{x}) < 0 & \text{if } \mathbf{x} \in D \setminus \Omega \end{cases} \quad (1)$$

このとき、材料分布を表す特性関数 χ_ϕ を以下のように定義する.

$$\chi_\phi = \begin{cases} 1 & \text{if } \phi \geq 0 \\ 0 & \text{if } \phi < 0 \end{cases} \quad (2)$$

トポロジー最適化の基本的な考え方は、材料分布を設計変数とし、目的関数 J を最小化 (あるいは最大化) する構造を求める最適化問題として、構造最適化問題を定式化することである. 所望の目的関数を表現する関数 $j(u)$ 及び特性関数 χ_ϕ を用いて構造最適化問題は以下のように定式化される.

$$\min_{\chi_\phi} \quad J[u, \chi_\phi] = \int_D j(u) \chi_\phi d\Omega \quad (3)$$

$$\text{subject to:} \quad \text{Governing equations for } u \quad (4)$$

続いて、レベルセット関数の更新方法について述べる. Yamada et al.⁽¹⁴⁾ は仮想的な時間 t を導入して、レベルセッ

ト関数の変更を時間発展方程式により記述した．この手法に基づき，レベルセット関数の更新を以下の反応拡散方程式で行う．

$$\frac{\partial \phi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = -K \left\{ \frac{J' \int_D d\Omega}{\int_D |J'| d\Omega} - \tau L^2 \nabla^2 \phi(\mathbf{x}, t) \right\} \quad (5)$$

ただし， $K \in \mathbb{R}^+$ は比例定数， $\tau \in \mathbb{R}^+$ は正則化係数， $L \in \mathbb{R}^+$ は代表長さ， J' は設計感度である．正則化係数 τ を調節することにより構造領域の幾何学的な複雑さを制御することが可能となる．詳細は文献⁽¹⁴⁾を参照されたい．

2.2. 平均コンプライアンス最小化問題

本研究では，トポロジー最適化の代表的な適用例として，平均コンプライアンス最小化問題を考える．固定設計領域 D 内部に構造領域 Ω 及び非構造領域 $D \setminus \Omega$ を定義し，構造領域は等方性線形弾性体で構成されるものとする．また，境界 $\Gamma_u \in \partial\Omega$ において，変位場 $\mathbf{u}$ がゼロとなるように完全拘束する境界条件及び境界 $\Gamma_t \in \partial\Omega$ において，表面力 $\mathbf{t}$ を負荷する境界条件を課す．このとき，平面ひずみを仮定した場合の変位場 $\mathbf{u}$ に関する平均コンプライアンス最小化問題の目的関数及び支配方程式は以下のように定式化される．

$$\inf_{\mathbf{u}} J(\mathbf{u}) = \int_{\Gamma_t} \mathbf{t} \cdot \mathbf{u} d\Gamma \quad (6)$$

subject to:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\mathbb{C}\epsilon(\mathbf{u})) = \mathbf{0} & \text{in } \Omega \\ \mathbf{u} = \mathbf{0} & \text{on } \Gamma_u \\ -(\mathbb{C}\epsilon(\mathbf{u})) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t} & \text{on } \Gamma_t \\ -(\mathbb{C}\epsilon(\mathbf{u})) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} & \text{on } \Gamma_N \end{cases} \quad (7)$$

ただし， $\mathbf{n}$ は境界 $\partial\Omega$ の単位法線ベクトルであり， $\Gamma_N = \partial\Omega \setminus (\Gamma_u \cup \Gamma_t)$ である．また， $\epsilon(\mathbf{u})$ 及び $\mathbb{C}$ は平面ひずみ，弾性テンソルであり，以下のように定義される．

$$\epsilon(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^\top) \quad (8)$$

$$\mathbb{C}_{ijkl} = E \left(\frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{1}{2(1+\nu)} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \right) \quad (9)$$

ただし， E はヤング率， ν はポアソン比である．

3. 型成形における幾何学的制約

トポロジー最適化により得られる幾何学的に複雑な部分を含んだ形状の製造に適した手法の一つとして，鋳造や射出成形といった金型を用いる型成形を考える．型成形では，二つの金型を合わせてできた空洞部分に液体状の材料を充填し，凝固させた後に金型を取り外して成形品を取り出すプロセスで製造する．他の積層造形法などの製造方法と比べて型成形は，金型を作成できれば成形品を短時間で大量生産できる利点がある．しかし，図 1(b) に示すように，型を開閉方向に取り外すとき，成形品に突出したアンダーカットや中空部分が存在する場合，離型できず成形品を取り出すことができない．このような幾何学的な制約を型制約と呼ぶ．そのため，アンダーカットや中空部分が存在しない最適形状が得ら

れるように型制約を考慮したトポロジー最適化の手法が求められる．

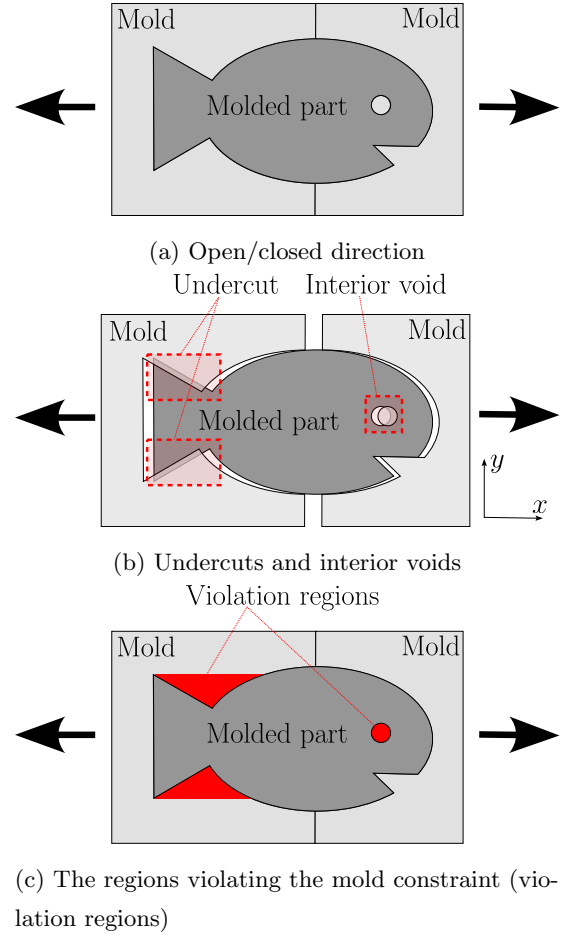


Fig. 1: The geometric constraint for molding. Undercuts and interior voids surrounded by dotted lines cannot be demolded.

4. 異方性拡散方程式を用いた仮想的物理モデル

4.1. 仮想的な異方性拡散方程式の導出

第 3 章での議論に基づいた型制約を満たす最適形状を得るために，図 1(c) のように型を開閉方向に取り除く際にアンダーカットや中空部分に引っかかり除去できない領域を幾何学的制約に違反する領域（以下，制約違反領域）として検出する必要がある．本研究では制約違反領域を検出するために，異方性拡散方程式を用いた仮想的物理モデルを導入する．仮想的物理モデルとは，製造要件や生産工程を考慮した幾何学的制約を表現する仮想的な支配方程式系である．なお，本研究では二次元における幾何学的制約条件を定式化する．また，図 1 のように型の開閉方向と並行な軸を x 軸とする．このとき，型制約を検出する仮想的な異方性拡散方程式を以下のように定義する．

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(L^2 \mathbf{A}_p(\chi) \nabla p) + (1 - \chi)p = 1 - \chi & \text{in } D \\ p = 0 & \text{on } \Gamma_p \\ \nabla p \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{on } \partial D \setminus \Gamma_p \end{cases} \quad (10)$$

ただし, $p \in H^1(D)$ は状態変数, L は代表長さである. $\mathbf{A}_p$ は異方性を持った拡散行列であり, 以下のように定義する.

$$\mathbf{A}_p(\chi) = (\mathbf{A}_{\text{void}} - \mathbf{A}_{\text{mat}})(1 - \chi) + \mathbf{A}_{\text{mat}} \quad (11)$$

$$\mathbf{A}_{\text{void}} = \begin{pmatrix} a_{\text{void},x} & 0 \\ 0 & a_{\text{void},y} \end{pmatrix} \quad (12)$$

$$\mathbf{A}_{\text{mat}} = \begin{pmatrix} a_{\text{mat},x} & 0 \\ 0 & a_{\text{mat},y} \end{pmatrix} \quad (13)$$

式 (10) は, Yamada et al.⁽¹²⁾ の提案した拡散方程式を参考にしており, 固定設計領域の大きさやアスペクト比などに関係なく構造領域の分布のみに依存する特徴を持つ.

この偏微分方程式系の物理的な解釈について考察する. 状態変数 p を仮想的な温度場と捉える. このとき, 式 (10) は, 空洞領域 $1 - \chi$ に 1 の大きさを持つ熱源を加えて, 拡散行列 $\mathbf{A}_p$ に従って熱が拡散し, ディリクレ条件 $p = 0$ を課した境界 Γ_p に熱が吸収されるという物理現象を仮想的に表した式を意味する. 式 (10) を用いて制約違反領域を検出するために, 式 (11) で定義された拡散行列 $\mathbf{A}_p$ におけるパラメータの値を以下の二つの条件を満たすように定める.

1. 空洞領域において, 型を取り外す x 軸方向の拡散係数 $a_{\text{void},x}$ を y 軸方向の拡散係数 $a_{\text{void},y}$ より十分に大きい値に設定する ($a_{\text{void},x} \gg a_{\text{void},y}$)
2. 構造領域において, 拡散係数 $a_{\text{mat},x}$, $a_{\text{mat},y}$ を十分に小さい値に設定する ($a_{\text{mat},x} \ll 1, a_{\text{mat},y} \ll 1$)

条件 1 により, 空洞領域に与えられた熱は $(1, 0)$ 及び $(-1, 0)$ 方向に拡散するため, 型を開閉方向に取り除くという操作を表現できる. また, 境界 Γ_p に向かって熱が異方的に拡散する間に構造領域が存在する場合, 条件 2 から構造領域内では拡散係数が著しく低下するため熱が拡散できずに留まる. 故に, 条件 2 により, 型が干渉するアンダーカットや中空部分を表現できる. したがって, 仮想的な温度場 p の分布は型制約における制約違反領域近傍で正の値を持ち, それ以外の領域では 0 に近い値を持つ. 本研究では, 制約違反領域 $G(p, \chi)$ を以下のように定義する.

$$G(p, \chi) = \mathcal{S}(p; x_0, \beta)(1 - \chi) \quad (14)$$

ただし, $\mathcal{S}$ は以下のように定義されるシグモイド関数である.

$$\mathcal{S}(x; x_0, \beta) = \frac{\exp(\beta(x - x_0))}{\exp(\beta(x - x_0)) + 1} \quad (15)$$

パラメータ β を十分大きな値に設定することで, 閾値 x_0 より p が大きいとき $G(p, \chi)$ は 1 となり, x_0 より p が小さいとき $G(p, \chi)$ は 0 となる. 本研究では, $x_0 = 0.25$, $\beta = 50$ に固定する.

4.2. 数値例

数値例により, 領域 $G(p, \chi)$ の分布が適切に型制約に違反する領域を表現できているかどうかを検証する. 固定設計領域 D と構造領域 Ω 及び境界条件を図 2 のように定める. 式 (11) において, 代表長さを 1.0 に設定する. これらの問題設定のも

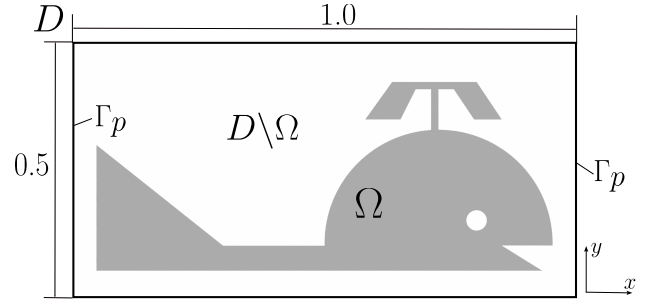


Fig. 2: Problem setting and boundary conditions.

と, 式 (11) 内の拡散係数を変化させて有限要素解析を行った結果, 図 3 のような制約違反領域 $G(p, \chi)$ の分布が得られた. 図 3a や 3b のように $a_{\text{void},x}$ 以外の拡散係数の値が十分小さい場合, 制約違反領域が正確に検出できていない箇所が見られる. 一方, 図 3c や 3d のように十分小さい値に設定することで, 所望の分布が得られた. 図 3d の方が図 3c よりも正確に制約違反領域を検出できるが, 拡散行列内の係数の値の差が大きい場合計算が不安定になる可能性があるため, 図 3c での拡散係数の設定 ($a_{\text{void},x} = 1.0$, $a_{\text{void},y} = 1.0 \times 10^{-3}$, $a_{\text{mat},x} = 1.0 \times 10^{-3}$, $a_{\text{mat},y} = 1.0 \times 10^{-5}$) を採用する.

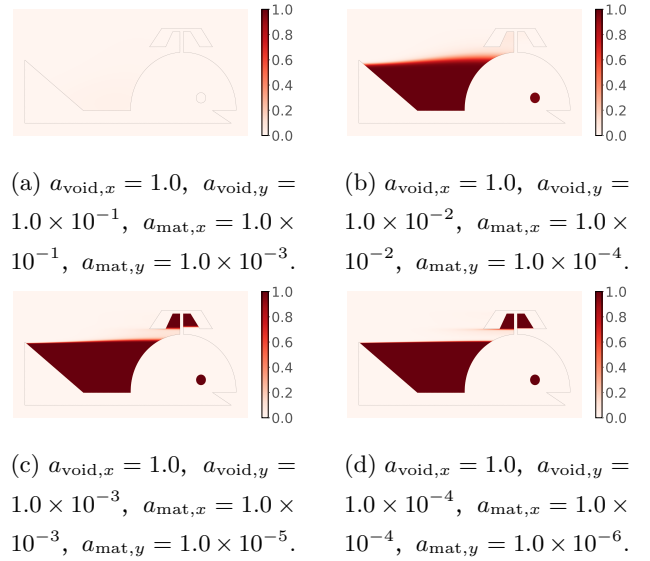


Fig. 3: The regions $G(p, \chi)$ that violate geometric constraint at each diffusion coefficient in Eq. (11).

5. 連成型仮想的物理モデルに基づく最適化問題の定式化

5.1. 仮想的物理モデルにおける一般的な定式化及び問題点

具体的な問題設定として, 型制約を考慮した平均コンプライアンス問題を最適化問題として定式化する. 従来の仮想的物理モデルの定式化法^(9, 10, 11, 12)に基づいた場合, 制約違反領域 $G(p, \chi_\phi)$ を目的関数として以下のように最適化問題を設定する.

$$\inf_{\chi_\phi} \int_D G(p, \chi_\phi) d\Omega \quad (16)$$

$$\text{subject to: } \text{Governing equation for } p \quad (\text{Eq. (10)}) \quad (17)$$

このとき、目的関数 $J(\mathbf{u})$ と $G(p, \chi_\phi)$ は線形結合されて一つの目的関数として定式化される。また、最適形状の面積が閾値 $V_{\max}$ を超過しないように体積制約を課す。このとき、型制約付き平均コンプライアンス最小化問題は以下のように定式化される。

$$\inf_{\chi_\phi} J(\mathbf{u}) + \mu G(p, \chi_\phi) \quad (18)$$

subject to:

$$\begin{cases} G_v(\chi_\phi) = \int_D \chi_\phi d\Omega - V_{\max} \leq 0 \\ -\operatorname{div}(\mathbb{C}\epsilon(\mathbf{u})) = \mathbf{0} & \text{in } \Omega \\ \mathbf{u} = \mathbf{0} & \text{on } \Gamma_u \\ -(\mathbb{C}\epsilon(\mathbf{u})) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t} & \text{on } \Gamma_t \\ -(\mathbb{C}\epsilon(\mathbf{u})) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} & \text{on } \Gamma_N \\ -\operatorname{div}(L^2 \mathbf{A}_p(\chi_\phi) \nabla p) + (1 - \chi_\phi)p = 1 - \chi_\phi & \text{in } D \\ p = 0 & \text{on } \Gamma_p \\ \nabla p \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{on } \partial D \setminus \Gamma_p \end{cases} \quad (19)$$

ただし、 $\mu \in \mathbb{R}^+$ は重み係数である。 $\epsilon(\mathbf{u})$ 及び $\mathbb{C}$ はそれぞれひずみテンソル及び弾性テンソルであり、式 (8)、式 (9) と同じである。

しかし、この定式化法では収束性が悪く一つの最適形状が得られない可能性がある。なぜなら、状態変数 $\mathbf{u}$ と p が互いに独立しているため、目的関数 $J(\mathbf{u})$ と $G(p, \chi_\phi)$ が相互作用しないからである。その結果、平均コンプライアンスを最小化する目的と型制約を違反する領域を除去する目的が衝突し、解が収束しない可能性がある。

5.2. 連成型仮想的物理モデルによる定式化

収束性の問題を解決するために、Tajima et al.⁽¹³⁾ の提案した連成型仮想的物理モデルの考えに基づいた定式化を行う。以後、平均コンプライアンス最小化問題などの現実の物理現象を表現する支配方程式系を力学モデルとする。連成型仮想的物理モデルでは、仮想的物理モデルにより検出された制約違反領域内で、力学モデル内の材料定数を力学モデルの目的関数 $J(\mathbf{u})$ を悪化させるように変化させることで、二つのモデルを連成する。

本研究で考える最適化問題に、このモデルを適用することを考える。図 3 より、制約違反領域 $G(p, \chi)$ は空洞領域に分布しており、構造領域の材料定数に影響を与えることができない。そこで、以下のように定義する仮想的なフィルタリング方程式により、領域 $G(p, \chi)$ を構造領域まで拡張させる。

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(L^2 a_q \nabla q) + q = G(p, \chi)(1 - \chi) & \text{in } D \\ \nabla q \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{on } \partial D \end{cases} \quad (20)$$

ただし、 $q \in H^1(D)$ は仮想的なフィルタリングによる拡張領域を表す状態変数、 $a_q \in \mathbb{R}^+$ は拡散係数、 L は代表長さである。

続いて、本研究で扱う平均コンプライアンス最小化問題において、目的関数 $J(\mathbf{u})$ に影響を与えるヤング率を、連成型仮想的物理モデルの考えに基づき変化させる材料定数として

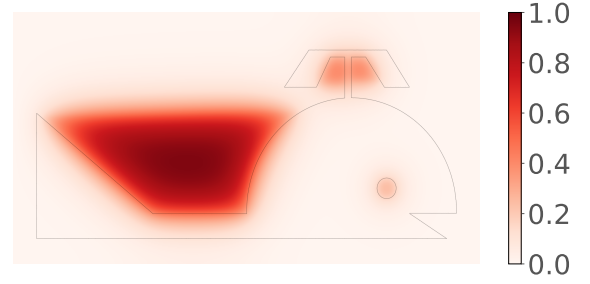


Fig. 4: The distribution of the state variable q of the fictitious filtering equation.

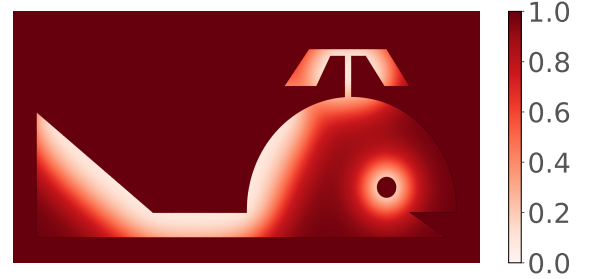


Fig. 5: Fictitious Young's modulus $E_f(q, \chi)$.

選択する。そして、拡張領域 q と構造領域 Ω の共通部分 $q\chi$ を連成型仮想的物理モデルの定式化に用いる新たな制約違反領域として再定義し、その領域内でヤング率を低下させることで荷重 $\mathbf{t}$ を加えたときの変位 $\mathbf{u}$ を増大させる。その結果、平均コンプライアンス $J(\mathbf{u})$ が増加すなわち悪化する。以上より、制約違反領域 $q\chi$ 内でヤング率を低下させた仮想的なヤング率 $E_f(q, \chi)$ を以下のように定義する。

$$E_f(q, \chi) = E \left(1 - \frac{2}{\pi} \arctan(\gamma q\chi) \right) \quad (21)$$

ただし、 E は元々の材料のヤング率、 $\gamma \in \mathbb{R}^+$ はヤング率を下げる度合いを調整するパラメータである。

数値例により、仮想的なヤング率が所望な分布をとっているかを確認した。問題設定及び境界条件として図 2 のような分布を考えた。式 (20) において、拡散係数 a_q 及び代表長さ L をそれぞれ 1.0×10^{-3} 、 1.0 に設定した。このとき、図 4 のような仮想的な拡張領域 q の分布が得られた。また、式 (21) において、ヤング率 E を 1.0 、パラメータ γ を 20 に設定した。その結果、図 5 のような仮想的ヤング率 $E_f(q, \chi)$ の分布が得られた。図 4 から、領域 $G(p, \chi)$ がフィルタリング方程式により構造領域まで拡張されている。さらに図 5 から、制約違反領域 $q\chi$ 内でヤング率が低下しており、所望な分布をしていることが確認できる。

以上の式 (20)、(21) を用いて、連成型仮想的物理モデルに

基づいた最適化問題は以下のように定式化される。

$$\inf_{\chi_\phi} J(\mathbf{u}) \quad (22)$$

subject to:

$$\begin{cases} G_v(\chi_\phi) = \int_D \chi_\phi d\Omega - V_{\max} \leq 0 & \text{in } \Omega \\ -\operatorname{div}(\mathbb{C}(q, \chi_\phi)\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u})) = \mathbf{0} & \text{on } \Gamma_u \\ \mathbf{u} = \mathbf{0} & \text{on } \Gamma_t \\ -(\mathbb{C}(q, \chi_\phi)\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u})) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t} & \text{on } \Gamma_t \\ -(\mathbb{C}(q, \chi_\phi)\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u})) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} & \text{on } \Gamma_N \\ -\operatorname{div}(L^2 \mathbf{A}_p(\chi_\phi) \nabla p) + (1 - \chi_\phi)p = 1 - \chi_\phi & \text{in } D \\ p = 0 & \text{on } \Gamma_p \\ \nabla p \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{on } \partial D \setminus \Gamma_p \\ -\operatorname{div}(L^2 a_q \nabla q) + q = G(p, \chi_\phi)(1 - \chi_\phi) & \text{in } D \\ \nabla q \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{on } \partial D \end{cases} \quad (23)$$

ただし、 $\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u})$ 及び $\mathbb{C}(q, \chi_\phi)$ はそれぞれひずみテンソル及び弾性テンソルである。ひずみテンソルは式 (8) と同等であるが、弾性テンソルは式 (9) から以下のように再定義される。

$$E_f(q, \chi_\phi) = E \left(1 - \frac{2}{\pi} \arctan(\gamma q \chi_\phi) \right) \quad (24)$$

$$\mathbb{C}_{ijkl}(q, \chi_\phi) = E_f(q, \chi_\phi) \left(\frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{1}{2(1+\nu)} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \right) \quad (25)$$

式 (9) と式 (25) の違いはヤング率 E が仮想的ヤング率 $E_f(q, \chi_\phi)$ に置き換わっている点である。これにより、弾性テンソルを含む力学モデルが仮想的物理モデルの状態変数 q の影響を受けるため、二つのモデルが相互作用することができる。加えて、式 (22) のように力学モデルの目的関数のみを考慮するだけで、剛性を低下させた領域すなわち領域 $G(p, \chi_\phi)$ の減少に間接的に影響を与える。以上の連成型仮想的物理モデルに基づいた最適化問題の定式化により、収束性が改善される。

6. 感度設計

式 (22), (23) のように連成型仮想的物理モデルにより定式化された最適化問題に対して随伴変数法に基づいた感度設計を行い、密度感度を求めて設計感度とする。平均コンプライアンス問題は自己随伴問題として知られており、状態変数 $\mathbf{u}$ に対応する随伴変数を $\mathbf{v}$ としたとき、 $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ が成り立つ。フィルタリング方程式 (20) の状態変数 q に対応する随伴変数を λ_q とする。このとき、式 (20) の随伴方程式は以下のように導出される。

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(L^2 a_q \nabla \lambda_q) + \lambda_q \\ = - \left(\frac{\partial \mathbb{C}(q, \chi_\phi)}{\partial q} \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) \right) \cdot \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}) & \text{in } D \\ \nabla \lambda_q \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{on } \partial D \end{cases} \quad (26)$$

また、仮想的な異方性拡散方程式 (10) の状態変数 p に対応する随伴変数を λ_p とする。このとき、式 (10) の随伴方程式

は以下のように導出される。

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(L^2 \mathbf{A}_p \nabla \lambda_p) + (1 - \chi_\phi) \lambda_p \\ = \lambda_q \frac{\partial G(p, \chi_\phi)}{\partial p} (1 - \chi_\phi) & \text{in } D \\ \lambda_p = 0 & \text{on } \Gamma_p \\ \nabla \lambda_p \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{on } \partial D \setminus \Gamma_p \end{cases} \quad (27)$$

以上の導出された随伴変数 λ_p , λ_q を用いて密度感度は以下のように導出される。

$$\begin{aligned} J' = & \left((\mathbb{C}(q, \chi_\phi)\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u})) \cdot \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}) + \left(\frac{\partial \mathbb{C}(q, \chi_\phi)}{\partial \phi} \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) \right) \cdot \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}) \right) \chi_\phi \\ & + \left(L^2 \frac{\partial \mathbf{A}_p(\chi_\phi)}{\partial \phi} \nabla p \right) \cdot \nabla \lambda_p - (p - 1) \lambda_p \chi_\phi \\ & + 2 \lambda_q G(p, \chi_\phi) \chi_\phi \end{aligned} \quad (28)$$

7. 最適化アルゴリズム

最適化アルゴリズムについて議論する。体積制約は拡張ラグランジュ法により考慮される。解析は有限要素法 (FEM) に基づき、以下のステップで反復計算される。

- step 0:** レベルセット関数 ϕ 及び固定設計領域 D の設定
- step 1:** FEM を用いた支配方程式の計算 (式 (23))
- step 2:** 目的関数の算出 (式 (22)), 十分な反復計算を行い設計感度が十分小さい値になった場合終了
- step 3:** FEM を用いた随伴方程式の計算 (式 (26), (27))
- step 4:** 設計感度の算出 (式 (28))
- step 5:** 体積制約におけるラグランジュ変数の更新
- step 6:** レベルセット関数の更新 (式 (5))
- step 7:** step1 に戻る

なお、有限要素解析は偏微分方程式を数値的に解析可能なオープンソースソフトウェアである FreeFEM++ を用いた。

8. 数値解析例

8.1. 問題設定① (固定設計領域の長軸方向と x 軸方向を一致させた場合)

数値解析例により、本手法の妥当性を検証する。図 6 に示すように、 $2\text{m} \times 1\text{m}$ の矩形型の固定設計領域及び境界条件を定める。レベルセット関数 ϕ の初期値は固定設計領域内の全てで $\phi = 1$ とする。型を取り外す x 軸方向を固定設計領域の長軸方向とし、境界 Γ_p を固定設計領域の短軸両辺とする。また、構造領域 Ω はヤング率 210GPa 、ポアソン比 0.3 の平面ひずみを仮定した等方性線形弾性体で占められているものと仮定する。メッシュの分割数は 150×75 とし、三角形メッシュで等間隔に分割する。加えて、境界 Γ_t において表面力 $\mathbf{t} = (t_x, t_y) = (0\text{N}, -1\text{N})$ を加え、境界 Γ_u において構造を完全拘束する。代表長さ L は 2.0 に設定する。また、式 (5) において、パラメータを $K = 1$, $\tau = 5 \times 10^{-5}$ に設定する。式 (11) において、拡散係数をそれぞれ $a_{\text{void},x} = 1.0$, $a_{\text{void},y} = 1.0 \times 10^{-3}$, $a_{\text{mat},x} = 1.0 \times 10^{-3}$, $a_{\text{mat},y} = 1.0 \times 10^{-5}$ とする。式 (20) では、拡散係数 a_q を 1.0×10^{-1} に設定する。

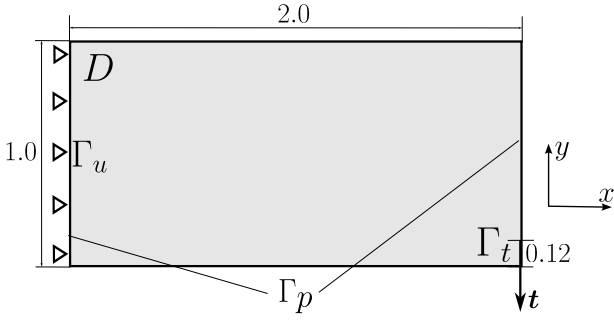


Fig. 6: Problem setting and boundary conditions. The size of the fixed design domain is in meters.

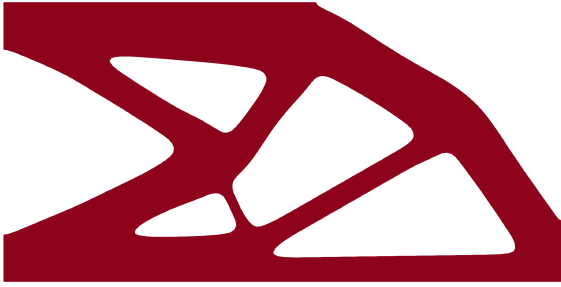


Fig. 7: Optimal structure obtained after 500 steps without the molding constraint.

体積制約は、最適形状の面積 V が最終的に固定設計領域の面積 V_{init} の 50% 以下になるように V_{max} の閾値を定める。

なお、最適化計算において、構造領域は反復計算ごとに変化するため、メッシュの再定義が必要となるが多大な計算コストがかかる。故に、Allaire et al.⁽¹⁵⁾ の提案した Ersatz material approach による近似解法を用いる。この手法では、空洞領域 $D \setminus \Omega$ は相対的に小さいヤング率に設定された構造材料と仮定し、構造領域と空洞領域の境界近傍はヘビサイド関数を用いた滑らかな分布を持つ材料特性であると仮定する。これらの仮定のもと、有限要素の再定義を行わずに近似的に解析する。今回の数値解析では、空洞領域におけるヤング率の相対値を 1×10^{-4} 、ヘビサイド関数の遷移幅を 0.5 に設定した。

8.2. 数値解析結果① (固定設計領域の長軸方向と x 軸方向を一致させた場合)

まず、式 (21) におけるヤング率を下げる度合いを表すパラメータ γ を 0 に設定し、型制約を考慮せずに 500 ステップ反復計算を行った。その結果、図 7 に示すような最適形状が得られた。図 7 より、幾何学的制約を課さない場合構造領域により閉じられた空洞領域が存在し、型制約に違反している。図 8 に、型制約に違反する領域 $G(p, \chi_\phi)$ の分布を示す。図 8 から、適切に型制約を満たさない領域を検出できている。

次に、式 (21) 内のパラメータ γ を 20 に設定し、型制約を考慮して 500 ステップ反復計算を行った。その結果、図 9 のような最適形状が得られた。図 9 より、 x 軸方向から型を取り除くことができる形状をしており、型制約が満たされていることが確認できる。



Fig. 8: The regions $G(p)$ that violate the molding constraint when the constraint is not considered.

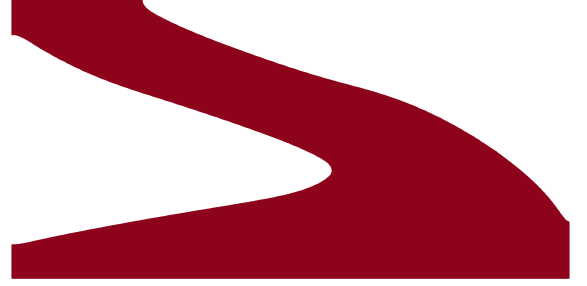


Fig. 9: Optimal structure obtained after 500 steps with the molding constraint.

加えて、制約の有無による平均コンプライアンス $J(\mathbf{u})$ 、面積比 V/V_{init} 及び型制約に違反する領域 $G(p, \chi_\phi)$ のステップごとの変化を調べた。図 10、図 11 及び図 12 はそれぞれ平均コンプライアンス、面積比及び領域 $G(p, \chi_\phi)$ の面積分の値の変化を示す。これらの図から、連成型仮想的物理モデルに基づいた定式化によりそれぞれの値が収束している。図 10 より、反復回数が 50~75 で制約ありの場合、一時的に平均コンプライアンスが振動している箇所が見られる。これは一時的に制約に違反する解になった後、大域的に性能の高い安定解に移行する過程であることに起因する。また、反復回数が 75~100 付近で制約ありの場合、平均コンプライアンスの値が下がった後、少し大きい値で収束している。これは図 11 からステップ数 75~100 付近で最適形状がわずかに体積制約に違反しており、その制約を満たすために微小に平均コンプライアンスが大きい形状に変化したからである。加えて、図 12 から、制約を考慮した場合 $G(p, \chi_\phi)$ の値が限りなく 0 に近い値をとっており、最終的な最適形状 (Fig. 9) が幾何学的制約を満たしていることが確認できる。

8.3. 問題設定② (固定設計領域の短軸方向と x 軸方向を一致させた場合)

続いて、図 13 のような問題設定及び境界条件を考える。問題設定①との違いは、型を取り外す x 軸方向を固定設計領域の短軸方向とし、境界 Γ_p を固定設計領域の長軸両辺とする。その他のパラメータの値及び条件は全て問題設定①と同等に設定する。

8.4. 数値解析結果② (固定設計領域の短軸方向と x 軸方向を一致させた場合)

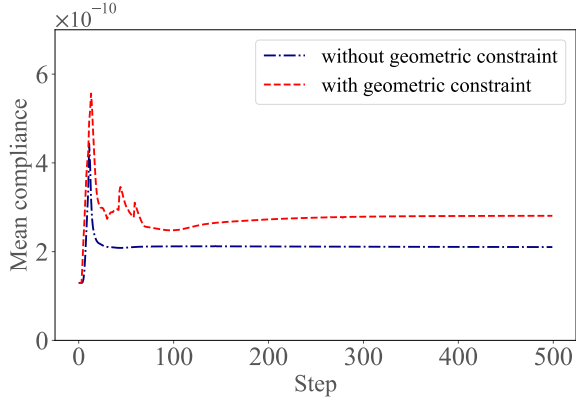


Fig. 10: Changes in mean compliance by step with and without the molding constraint.

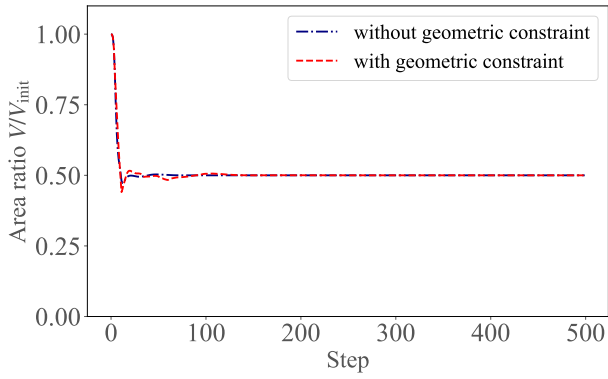


Fig. 11: Changes in area ratio by step with and without the constraint.

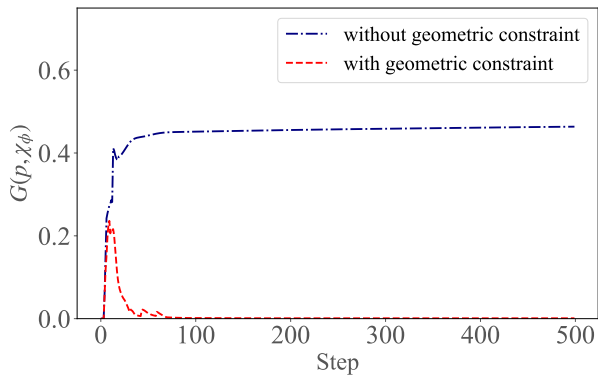


Fig. 12: Changes in regions violating the molding constraint by step with and without the constraint.

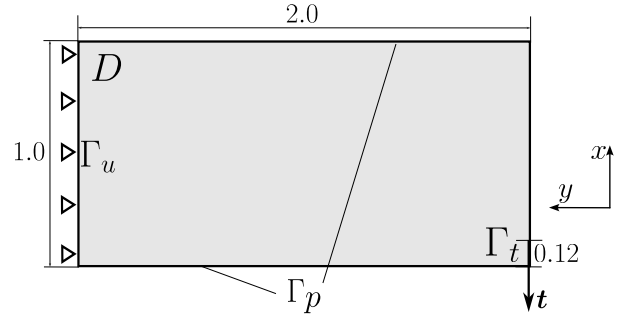


Fig. 13: Problem setting and boundary conditions. The size of the fixed design domain is in meters.



Fig. 14: Optimal structure obtained after 500 steps without the molding constraint.

を一致させた場合)

まず、式 (21) 内のパラメータ γ を 0 に設定し、型制約を考慮しない場合で 500 回繰り返し計算を行った。その結果、図 14 のような最適形状が得られた。型制約に関する境界条件を変更しただけであるため、制約なしの最適形状は図 7 と変化はない。また、図 19 は型制約に違反する領域 $G(p, \chi_\phi)$ の分布を示す。図 19 から、適切に離型時に干渉する部分が検出できている。

次に、式 (21) 内のパラメータ γ を 20 に設定し、型制約を考慮した場合で 500 回繰り返し計算を行った。その結果、図 16 に示すような数値解析結果が得られた。図 16 より、型制約を考慮することにより x 軸方向に離型可能な最適形状が得られた。

最後に、図 17, 18, 19 はそれぞれ、平均コンプライアンス、面積比及び領域 $G_p(p, \chi_\phi)$ のステップごとの変化を示す。



Fig. 15: The regions $G(p)$ that violate the molding constraint when the constraint is not considered.



Fig. 16: Optimal structure obtained after 500 steps with the molding constraint.

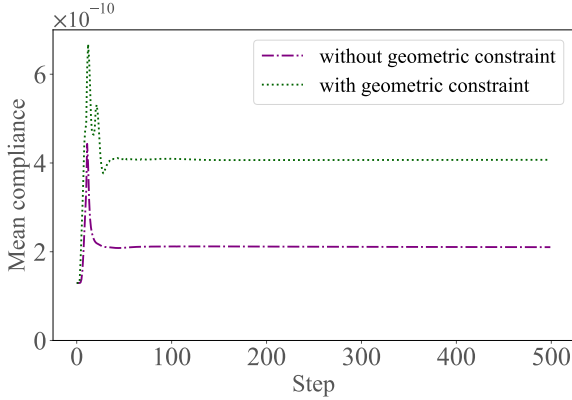


Fig. 17: Changes in mean compliance by step with and without the molding constraint.

これらの図から、制約の有無にかかわらずそれぞれの値が一定の値に収束している。加えて、図 18 から体積制約が満たされていること、及び図 19 から制約付きの最適形状が型制約を満たしていることが確認できる。

9. 結言

本論文では、鋳造や射出成形に代表される型成形における幾何学的制約 (型制約) を考慮したトポロジー最適化に着目した。そして、型制約に違反する領域を仮想的な異方性拡散方程式を用いて検出した。また、連成型仮想的物理モデルに基づいて定式化及び感度解析をし、具体的な数値解析を行っ

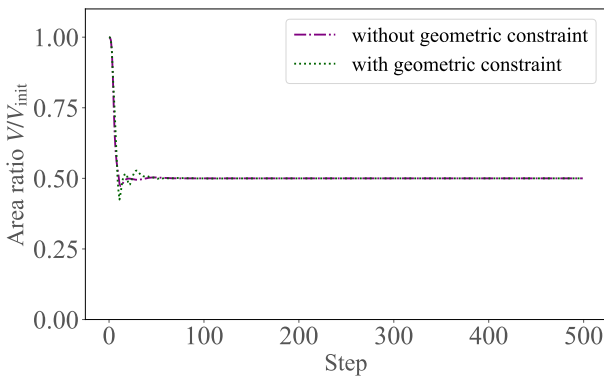


Fig. 18: Changes in area ratio by step with and without the constraint.

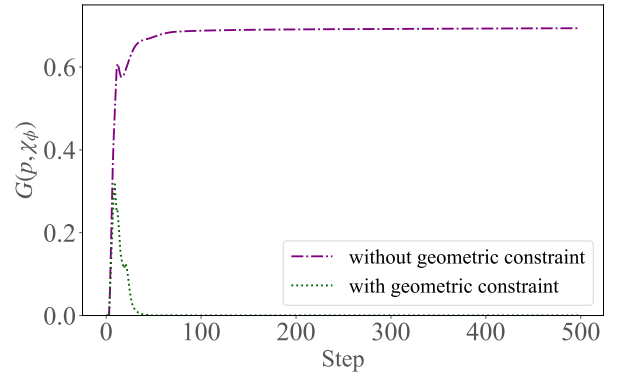


Fig. 19: Changes in regions violating the molding constraint by step with and without the constraint.

た。以下に結果をまとめる。

1. 型成形における幾何学的制約に違反する領域を仮想的な異方性拡散方程式を用いて定式化した。
2. 連成型仮想的物理モデルに基づいて、型制約を考慮した平均コンプライアンス最小化問題を具体例として定式化した。
3. 本研究で扱う最適化問題の感度設計及び最適化アルゴリズムを導出した。
4. 数値解析例として、型制約を考慮した二次元の等方性線形弾性体の平均コンプライアンス最小化問題を考え、提案手法の妥当性を検証した。

なお、本研究では一つの離型方向における制約を取り扱った。将来的には、複数の異方性拡散方程式を導入することで二回以上の離型段階を踏んだ場合の幾何学的制約を考慮できる可能性が挙げられる。

謝辞

本研究は科研費 23H03800 の助成を受けました。

参考文献

- (1) Bendsøe, M. P., and Kikuchi, N.: Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method, *Computer methods in applied mechanics and engineering*, **71**(2)(1988), pp. 197–224.
- (2) Suzuki, K., and Kikuchi, N.: A homogenization method for shape and topology optimization, *Computer methods in applied mechanics and engineering*, **93**(3)(1991), pp. 291–318.
- (3) Xia, Q., Shi, T., Wang, M. Y., and Liu, S.: A level set based method for the optimization of cast part, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, **41**(2010), pp. 735–747.
- (4) Allaire, G., Jouve, F., and Michailidis, G.: Molding direction constraints in structural optimization via a level-set method, *Variational Analysis and Aerospace Engi-*

neering: Mathematical Challenges for the Aerospace of the Future, (2016), pp. 1-39.

level-set method, Journal of Computational Physics, **194.1**(2004), pp. 363–393.

- (5) Liu, S., Li, Q., Chen, W., Tong, L., and Cheng, G.: An identification method for enclosed voids restriction in manufacturability design for additive manufacturing structures, Frontiers of Mechanical Engineering, **10**(2015), pp. 126–137.
- (6) Li, Q., Chen, W., Liu, S., and Tong, L.: Structural topology optimization considering connectivity constraint, Structural and Multidisciplinary Optimization, **54**(2016), pp. 971–984.
- (7) Wang, C., Xu, B., Meng, Q., Rong, J., and Zhao, Y.: Topology optimization of cast parts considering parting surface position, Advances in Engineering Software, **149**(2020), p. 102886.
- (8) Li, Q., Chen, W., Liu, S., and Fan, H.: Topology optimization design of cast parts based on virtual temperature method, Computer-Aided Design, **94**(2018), pp. 28–40.
- (9) Yamada, T., Geometric shape features extraction using a steady state partial differential equation system, Journal of Computational Design and Engineering, Volume **6**, Issue **4**(2019), pp. 647–656.
- (10) 酒井虹太, 野口悠暉, 山田崇恭: 幾何学的特徴量に対する偏微分方程式を用いた型成形製造制約の数値モデルとトポロジー最適化への展開, 日本計算工学会論文集, **2021**(2021) p. 20210018–20210018.
- (11) Sato, Y., Yamada, T., Izui, K., and Nishiwaki, S.: Manufacturability evaluation for molded parts using fictitious physical models, and its application in topology optimization, The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, **92**(2017), pp. 1391–1409.
- (12) Yamada, T., and Noguchi, Y.: Topology optimization with a closed cavity exclusion constraint for additive manufacturing based on the fictitious physical model approach, Additive Manufacturing, **52**(2022), p. 102630.
- (13) Tajima, M., and Yamada, T.: Topology optimization with geometric constraints for additive manufacturing based on coupled fictitious physical model, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, **417**(2023), p. 116415.
- (14) Yamada, T., Izui, K., Nishiwaki, S., and Takezawa, A.: A topology optimization method based on the level set method incorporating a fictitious interface energy, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, **199.45**(2010), pp. 2876–2891.
- (15) Allaire, G., Jouve, F., and Toader, A. M.: Structural optimization using sensitivity analysis and a