設計変数に依存する熱輻射境界条件を伴う熱伝導問題に対する成形用金型のトポロジー最適化

TOPOLOGY OPTIMIZATION OF FORMING MOLDS FOR THERMAL CONDUCTIVITY PROBLEMS WITH THERMAL RADIATION BOUNDARY CONDITIONS DEPENDING ON DESIGN VARIABLES

小野寺　周也 [1), 岡　大将 [2), 山田　崇恭 [3)

Shuya ONODERA, Tomoyuki OKA and Takayuki YAMADA

1) 東京大学大学院工学系研究科　(〒 113-8656　東京都文京区弥生 2-11-16,　E-mail: shuya-onodera@g.ecc.u-tokyo.ac.jp)
2) 東京大学大学院工学系研究科　(〒 113-8656　東京都文京区弥生 2-11-16,　E-mail: tomoyuki-oka@g.ecc.u-tokyo.ac.jp)
3) 東京大学大学院工学系研究科　(〒 113-8656　東京都文京区弥生 2-11-16,　E-mail: t.yamada@mech.t.u-tokyo.ac.jp)

This paper presents a method for topology optimization that incorporates thermal radiation boundary conditions dependent on design variables. The design of mechanical structures involving thermal radiation is briefly described, along with the associated problems. We consider thermal radiation boundary conditions on partial boundaries of material domains that vary with design variables. During the optimization process, Partial Differential Equations (PDEs) expressing geometric features with high thermal radiation is introduced, and solutions are employed to numerically extract the boundaries. Therefore, a mathematical model is formulated to approximate the view factor, which relates the contribution of macro geometry to thermal radiation. Furthermore, a method for solving the governing equations is developed, leveraging the proposed method. Although we deal with nonlinear problems due to thermal radiation boundary conditions, the design sensitivity concerning the direction of descent of the objective functional can be determined by identifying the adjoint equations as in linear problems. In this study, the Finite Element Method (FEM) is used to solve PDEs of the heat transfer problem, and the level set functions are updated. Numerical examples in two and three dimensions are presented to verify the effectiveness and practicality of the proposed method.

Key Words : Partial differential equation, Optimized design, Topology optimization, Level set method, Thermal radiation problem

1. 緒言

工業炉や宇宙機などの熱輻射による熱伝達の影響が大きい環境で使用される機械構造物の機械的性能は温度による影響を大きく受ける．そのため，設計者は部品表面や内部における温度分布が適切になるように機械構造物を設計する必要がある．機械構造物の設計過程は，構想設計，基本設計，詳細設計の 3 つに分けられる．まず，構想設計では仕様を満たす構造案が比較検討され，製品ライフサイクルコストの大部分が決定される．次に，基本設計では構想設計で検討した構造に対して，組立図の作成や詳細な解析が行われる．そして，詳細設計では構造物の製作するための部品図が作られる．現在は製品の少量多品種化が進み，設計者は構想設計を短時間で行う必要性が高まっている．しかしながら，要求される設計基準が緻密になるほど，短時間で素性の良い構想設計案を見い出すことが難しい．このような設計課題を解決するために，熱輻射を適切に考慮可能な数理モデルや数値解析手法の研究が多数報告されている．例えば，燃焼プロセス内での輻射熱伝達の数理モデルに関する研究 (1) や，溶融ガラス表

2023 年 9 月 14 日受付，2023 年 11 月 2 日受理

面からの熱輻射を表現する数理モデルに関する研究[2]がある．さらに，熱輻射を考慮した数値解析に基づくガラス徐怜炉の熱設計法[3]が提案されているが，熱輻射条件の数値解析アルゴリズムの計算コストが高く，複数の設計案を短時間で解析して比較検討することが難しい．Furkan ら[4]は，計算コストが高い熱輻射条件の評価において，形態係数の近似解析法を提案している．しかしながら，いずれの方法においても，熱輻射条件を考慮しながら所望の熱伝導特性を持つ形状設計法の提案には至っていない．

他方，設計者の経験や力学的考察による試行錯誤に頼らずに，数学と力学的根拠に立脚して自動的に形状設計案を創出する方法論があり，構造最適化と呼ばれている．構造最適化は設計課題に対して要求される物理特性を最大化，あるいは最小化する形状を自動的に設計する方法論であり，設計自由度の観点から，寸法最適化，形状最適化，トポロジー最適化の3つに大別される．その中でも，トポロジー最適化は最も設計自由度の高い構造最適化法として注目を集めている．そこで，構想設計にトポロジー最適化を導入することで短時間で素性の良い設計案を創出できる可能性が高いと考えられる．構造問題への展開方法の報告[5]を起点として，電磁波問題[6, 7]，音響問題[8, 9]など数多くの設計問題への展開が報告されている．

熱伝導問題においては，トポロジー最適化の研究の初期から報告例が多く，主に熱コンプライアンス最小化問題への適用例が多い．Allaire ら[10]や Haslinger ら[11]は2材料の分布問題に対して緩和問題における適切性とその数値解析手法について述べている．そして，Gersborg ら[12]は有限体積法を用いた方法論を提案している．近年の報告例としては，材料定数に温度依存性を持つ熱伝導問題[13]，複数材料の熱拡散最大化[14]が挙げられる．これらの報告例の多くは，均質化設計法や密度法に基づく方法論である．そのため，これらの方法論では，構造と空孔の中間状態を表現するグレースケールを含む構造を許容し，構造と空孔の境界を定義できない課題を持つ．その結果，構造と空孔の境界上において，陽に境界条件を与える必要がある熱輻射条件を含む設計問題に直接適用することが困難である．

このような課題を抜本的に解決する手段として，レベルセット法[15]に基づく形状最適化[16]もしくはトポロジー最適化[17, 18]等を適用する方法が提案されている．レベルセット法に基づく方法では，レベルセット関数と呼ばれるスカラー関数の等位面により境界形状を表現するため，明瞭な境界形状を定義できる特徴を有する．そのため，陽に境界条件に与える必要がある熱伝達境界条件を含む設計問題への適用が可能[19, 20]になる．しかしながら，先行研究においては，いずれも設計変数に依存するが，一様な係数を持つ境界条件を前提とする設計法の提案である．そのため，係数が設計変数に影響を受けるような熱輻射条件を含む設計問題への展開ができない．

そこで，本研究では，構想設計に適用可能な，熱輻射条件を含む熱伝導問題に対するトポロジー最適化法を構築し，熱輻射による熱伝達を考慮可能な最適設計法を提案する．一般に，トポロジー最適化は，熱輻射条件のように構造の幾何学的特徴を考慮することが困難である．本研究では，幾何学的特徴を考慮したトポロジー最適化法[21]の考え方を用いる．この考え方は，熱伝導方程式や弾性方程式による力学的特徴の評価と同様に，仮想的な偏微分方程式を用いて幾何学的特徴を評価する方法である．これまでに，積層造形の幾何学的要件を考慮した設計法[22]，型成形における型抜き方向を考慮した設計法[23]，部材の局所厚み制約を満たす研究[24]が挙げられる．計算コストが低い仮想的な偏微分方程式に基づいて境界条件を決定し，熱輻射境界条件を伴う熱伝導問題を解くことができれば，トポロジー最適化を構想設計段階において適用できる可能性が高まると考えられる．

以下，本論文の構成について述べる．2章では，熱輻射を伴う機械構造物の熱設計問題の定式化について述べる．3章では，レベルセット法に基づくトポロジー最適化手法について概略を述べる．4章では，体積制約を考慮した温度分布最小化問題を定式化する．5章では，熱輻射境界の近似解法を提案する．6章では，トポロジー最適化アルゴリズムと具体的な数値実装法について提案する．7章では，数値解析例により，本研究で提案する方法論の妥当性と有効性の検証を行う．

2. 熱輻射を伴う機械構造物の熱設計問題の定式化

物体間の伝熱は熱伝導，対流熱伝達，熱輻射の3つの形態がある．流体の影響が小さい高温環境下では，熱輻射による熱伝達が支配的となる．本研究では，熱輻射が支配的な環境下における機械構造物の形状設計問題について考察する．熱輻射が支配的な機械構造物の例として工業炉や宇宙機が挙げられる．これらの機械構造物においては，温度分布や変形量の最小化，放熱最大化などの設計課題がある．上記の設計を行う場合，輻射率，形態係数，物体間の温度差を適切に考慮する必要がある．この内，輻射率は材質やミクロ構造，形態係数はマクロ構造により決定される．また，マクロ構造は幾何学的特徴により評価することができ，適切な幾何学的特徴を持つ機械構造物を設計することが重要である．そこで，本研究では，構想設計において熱輻射影響が支配的な形状設計問題を扱うため，特に形態係数に着目した設計法について述べる．なお，設計論の構築として応用範囲の広い工業炉を対象として議論を行うが，最適化対象と周囲構造物の温度差が大きく，熱輻射影響が支配的な機械構造物の設計問題に対して，広く展開可能であることを注記する．

2.1. 工業炉の熱設計問題

工業炉には熱処理炉，焼成炉，成形炉などがあり，加熱対象物を断熱壁で囲む構造が一般的である．熱処理炉や焼成炉では製品となる対象物を炉内に配置し，周囲の熱源で温度を制御する．一方，成形炉では型などの加熱対象物を温度制御し，その型を通じて製品となる樹脂やガラスの温度を間接的に制御する．工業炉において問題設定や定式化の考え方は共

通しており，温度制御が重要である．

本論文では，図 1 に示すような成形炉の型を対象として取り扱う．成形炉は型 (Mold)，ヒーター (Heater)，断熱材 (Insulation) で構成される．ヒーターと型が接触する面は，加熱面と呼ばれる．型の上には成形対象物 (Object)，例えばガラスなどが配置される．ここで，加熱源となるヒーターと成形対象物の位置は規定されるものとする．成形対象物と型が接触する面は成形面と呼ばれ，成形面の温度分布は製品の品質に大きな影響を及ぼす．そのため，成形面の目標温度と実温度の差異を最小化することは成形炉の設計における重要な課題である．例えば，成形面内における温度勾配は，成形対象がガラスの場合，成形される製品が歪む欠点の原因になる．

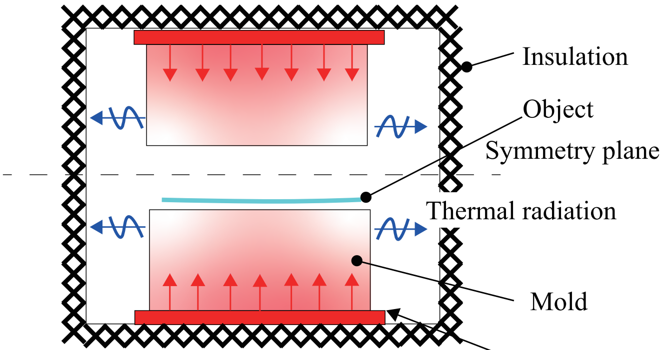


Fig. 1: Diagram of molding furnace model.

2.2. 支配方程式

成形炉の設計において，ヒーターや断熱材の形状は規定され，変更する余地が少ない場合が多い．そこで，本研究では調整可能な要素である型の形状設計に焦点を当てる．この場合，型内部の熱伝導問題を考える必要がある．ここで，型は熱伝導率が均質な等方性線形弾性体で構成されると仮定し，定常状態について考える．構造により占められている領域（以下，構造領域）を $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^d$，空間次元 $d = 2, 3$ とし，加熱面 Γ_t において温度 T_{t} で温度規定し，側面 Γ_h において熱輻射境界条件が適用され，周囲構造の参照温度 T_{amb} が与えられるものとする．既定の形状に対して順問題を解く場合，型内部の温度場に対する支配方程式は次のようになる．

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\,(\kappa \nabla T) = 0 & \text{in } \Omega_1, \\ T = T_{\mathrm{t}} & \text{on } \Gamma_t, \\ -\kappa \nabla T \cdot n = 0 & \text{on } \Gamma_o, \\ -\kappa \nabla T \cdot n = g\,(T) & \text{on } \Gamma_h. \end{cases} \tag{1}$$

ここで，$T \in H^1(\Omega_1)$ は温度，κ は熱伝導率，n は外向き単位法線ベクトルを表す．熱輻射境界条件 $g\,(T)$ は $g\,(T) = \sigma_s \varepsilon_e F \left(T^{d+1} - T_{\mathrm{amb}}^{d+1}\right)$ であり，σ_s はステファンボルツマン定数，ε_e は輻射率，F は形態係数とする．以降，熱輻射に関する係数をまとめて，$h = \sigma_s \varepsilon_e F$ として表す．また，成形炉では上下の型が対称に配置され，型の形状および温度が同一であるため，対称境界条件として成形面 Γ_o は断熱境界条件としている．

3. レベルセット法に基づくトポロジー最適化

支配方程式を設計の対象とする構造物が配置し得る領域（以降，固定設計領域）D に拡張して，構造領域 Ω_1 の構造最適化について考える．固定設計領域 D は構造領域 Ω_1 および，物体により占められていない領域（以下，空孔領域）Ω_0 により構成される．構造最適化問題は，目的汎関数 J を最大化あるいは最小化する構造領域 Ω_1 の集合 (以降，形状) を求める問題であり，目的汎関数は一般的な物体の物理特性，例えば剛性，熱伝導特性などを考慮することが多い．そのため，構造最適化問題は，物理特性を表現する支配方程式を満たすことを前提として最適な形状を求める問題と言える．特に，レベルセット法に基づくトポロジー最適化問題では次のような最小化問題として定式化される．

$$\inf_{\phi \in \mathcal{U}_{\mathrm{ad}}} \left\{ J(\phi) := \int_D j_1(x, \chi_\phi, u_\phi, \nabla u_\phi)\,\mathrm{d}x \right. \\ \left. + \int_{\partial D} j_2(x, u_\phi, \nabla u_\phi)\,\mathrm{d}\sigma \right\}. \tag{2}$$

ここで，$\mathcal{U}_{\mathrm{ad}} \subset H^1(D; [-1, 1])$ は制約条件を満たす関数空間を表す．また，レベルセット関数 $\phi \in H^1(D)$ 及び，$\chi_\phi \in L^\infty(D\colon \{0, 1\})$ は

$$\phi(x) \begin{cases} < 0, & x \in \Omega_0, \\ = 0, & x \in \partial\Omega_0 \cap \partial\Omega_1, \\ > 0, & x \in \Omega_1, \end{cases} \tag{3}$$

$$\chi_\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } \phi(x) \geq 0, \\ 0 & \text{if } \phi(x) < 0 \end{cases} \tag{4}$$

として与えられるものとする．なお, u_ϕ は状態変数, $j_i(u_\phi)$ $(i = 1, 2)$ は所望の目的汎関数を表現する関数を表す．トポロジー最適化問題では，特性関数 $\chi_\phi \in L^\infty(D; \{0, 1\})$ を用いて形状表現を行うため，Ω_1 のトポロジーの変更が許容される．本研究では，最適化された構造を探索する過程を，式 (5) の反応拡散方程式に基づいたレベルセット関数 ϕ の時間発展問題として扱う．

$$\partial_t \phi - \tau \Delta \phi + J'(\phi) = 0 \quad \text{in } D \times (0, +\infty). \tag{5}$$

ただし，$\tau > 0$ は得られる形状設計解の幾何学的複雑さを制御する正則化パラメータ (以降，正則化係数) を表す．詳細については文献 [18, 25] を参照されたい．

4. 最適設計問題の定式化

本研究では，型の形状設計について扱う．型を設計可能な固定設計領域 D 内において，構造領域 Ω_1 のトポロジー最適化問題を考える．成形面 Γ_o および加熱面 Γ_t は固定設計領域の境界 ∂D に設定される．熱輻射境界 Γ_h は，固定設計領

域内部における構造領域の境界 $\partial\Omega_1$ の中で，熱輻射の寄与度が大きい境界 (以降，$\Gamma_h(\phi)$) に設定される．構造が変化する毎に境界条件の位置も変化するため，$\Gamma_h(\phi)$ は設計変数であるレベルセット関数の値に依存して決定される境界条件となる．

次に，目的汎関数を定式化する．前述のように，型の成形面における温度分布が成形物の品質に大きな影響を与えるため，型の形状設計問題は，成形面の温度分布規定問題として次のように定式化する．

$$\begin{aligned}&\inf_{\phi\in H^1(D;[-1,1])}\left\{J(\phi):=\int_{\Gamma_o}\left(T_\phi(x)-\tilde{T}\right)^2\,\mathrm{d}\sigma\right\}\\&\text{subject to}\quad G(\phi)=\int_D\chi_\phi(x)\,\mathrm{d}x-G_{\max}\le 0.\end{aligned}\tag{6}$$

ここで，成形面 Γ_o における目標温度を $\tilde{T}$ とし，T_ϕ は ϕ を固定した際の式 (1) の解とする．そして許容される体積の上限値を $G_{\max}$ で表す．型の熱容量が小さいほど、非定常加熱時に必要な加熱量は少ないため，体積制約 $G(\phi)$ を用いて熱容量を一定以下に抑える制約を負荷している．

5. 熱輻射境界の近似解法

熱輻射を考慮した熱伝導問題のトポロジー最適化において，熱輻射境界条件の適切な考慮が重要である．一般的な熱輻射問題 [26] を解く場合，モンテカルロ法やヘミキューブ法を用いて計算することが多い．しかしながら，オイラー座標系による形状表現の場合，形状変更の度に逐次要素分割が必要となるため，計算コストが高い．そのため，トポロジー最適化を利用した構想設計において，実用的な時間で設計案を得ることが困難である．そこで，熱輻射境界の数値計算において計算コストを削減できる形態係数の近似解法を提案する．

5.1. 熱輻射境界条件に関する幾何学的特徴を評価する数理モデルの定式化

形態係数は熱を授受する 2 面間の幾何学的位置関係を表現している．本研究では，幾何学的特徴に着目し，簡易的に幾何学的特徴を評価する数理モデルを提案する．熱伝達問題に関する先行研究 [19, 20] では，固定設計領域内部の構造境界な一律で条件を付与しているが，本研究では固定設計領域内部の構造境界を 2 通りに区別して取り扱う．具体的には，熱輻射における形態係数の数理モデルを提案し，形態係数の大小を区別した境界条件とする．

まず，形態係数の近似方法を定義する．モンテカルロ法などを用いて形態係数を計算する場合，輻射熱量を分割して独立した放射光子と見なし，光子の挙動について乱数を用いて解析し，放射熱の到達率を得る．本研究では，光子の放射方向を任意の座標軸並行になるように近似することで計算コストを削減する．特に，本研究では固定設計領域内に存在する構造間の温度差よりも，構造と周囲との温度差が大きいため，設計領域内部における構造間の熱輻射計算は無視できると仮定する．図 2(a) に示す型形状を考える場合は，(a) の青線がレベルセット関数のゼロ等位面であり，構造境界 $\partial\Omega_1$ である．そして，構造領域 Ω_1 内部で閉じた境界や，周囲構造がある Γ_{amb} に面していない領域は熱輻射寄与度が小さいと判断する．そのため，(b) において赤線が抽出する対象となる．このような境界を抽出するためには，(c) で示すスカラー場を有する仮想的な支配方程式を定式化し，赤線で示す境界を判別できれば良い．本研究では，領域全体に仮想的な熱が生じ，Γ_{amb} ではディリクレ境界が付与される問題を考える．ここでは，空洞領域 Ω_0 には，構造領域 Ω_1 と比較して大きな拡散係数を与える．そして，空洞領域 Ω_0 における拡散係数の指向性を考慮することで，輻射方向を表現できる．その結果，周囲構造 Γ_{amb} に連結し，面する空洞領域 Ω_0 では，スカラー値が 0 となり，(c) における白色領域を表現でき，構造領域 Ω_1 及び周囲構造 Γ_{amb} に面しない空洞領域 Ω_0 では，スカラー値が 1 となり，(c) における青色領域を表現できると考える．

このような条件を満たす仮想的な場 p_ϕ を与える偏微分方程式を式 (7) に示す．

$$\begin{cases}-\mathrm{div}(A_\phi\nabla p_\phi)+p_\phi=1 & \text{in}\quad D,\\ p_\phi=0 & \text{on}\quad \Gamma_{\mathrm{amb}},\\ \nabla p_\phi\cdot n=0 & \text{on}\quad \partial D\setminus\Gamma_{\mathrm{amb}}.\end{cases}\tag{7}$$

ここで，$A_\phi := (a_{ij}-\varepsilon)(1-\chi_\phi)+\varepsilon$ とする．座標軸方向 $i,j=1,2,3$ において，a_{ij} は空孔領域における x_{ij} 方向の拡散係数，ε は構造領域の拡散係数を表す．本論文全体を通じて，式 (7) を境界抽出方程式と呼ぶ．式 (7) の解 p_ϕ は熱輻射境界より内部で $p_\phi=1$ となり Γ_{amb} 上で $p_\phi=0$ となるような数値的に滑らかな関数であり，熱輻射寄与の大きい境界において勾配を持つため，その値域に注目して境界抽出を行う．抽出した領域のみ形態係数 $F=1$ とし，それ以外の領域は周囲構造と対面せず，熱の授受が生じないため断熱境界条件としている．本研究では，熱輻射境界を付与する $\Gamma_h(\phi)$ と比較して周囲構造が大きく，かつ周囲構造の輻射面は座標軸に平行であり，生成される構造の境界も概ね座標軸に平行であると仮定する．なお，基本設計以降においては，本手法で抽出した境界上で，モンテカルロ法を適用することにより精度の高い計算が期待できると考える．

6. 数値実装法

6.1. 最適化アルゴリズム

本研究では, 次に示すアルゴリズムに従って最適化を行う．

ステップ 1. 初期レベルセット関数 ϕ_0 を付与する．

ステップ 2. 有限要素法を用いて境界抽出方程式 (7) を計算し，p_ϕ の値域から熱輻射境界 $\Gamma_h(\phi)$ を抽出する．

ステップ 3. 有限要素法を用いて支配方程式 (8) を計算し，状態変数 T_ϕ を求める．

ステップ 4. 目的汎関数 $J(\phi)$ 及び体積制約汎関数 $G(\phi)$ を計算し，収束条件を満たせば最適化を終了する．ここで，体積制約汎関数 $G(\phi)$ は拡張ラグランジュ未定乗数法を用いて無制約最適化問題に置き換えて更新を行う．

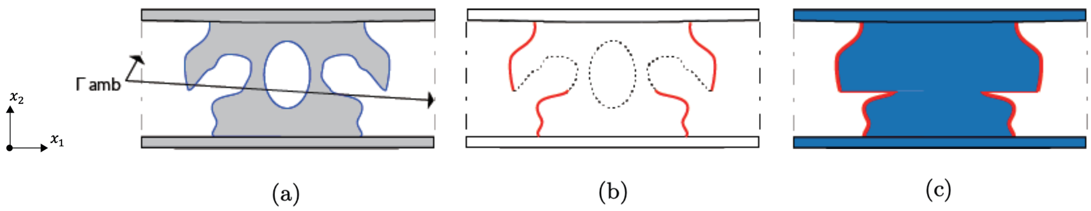


Fig. 2: Image of two-dimensional boundary extraction. (a) Material distribution. (b) Boundaries with large contribution of thermal radiation. (c) Solution p_ϕ.

ステップ 5. 有限要素法を用いて随伴方程式 (9) を計算し，状態変数 T_ϕ に対する随伴変数を S_ϕ として設計感度 $J'(\phi)$ を求める．

ステップ 6. 反応拡散方程式 (5) を用いてレベルセット関数 ϕ を更新し，ステップ 2 に戻る．

式 (5) を解くにあたり，$\partial_t\phi = \{\phi(x,(i+1)\Delta t)-\phi(x,i\Delta t)\}/\Delta t$, として時間差分を取る．ただし，$i \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ として扱い，$\Delta t = 0.25$ とする．

以上の手続きにより最適化された構造の候補を与える $\Omega_1 = [\chi = 1]$ が得られる．なお，最適化における有限要素解析には汎用有限要素解析ソフトウエア FreeFEM++ [27]，境界抽出方程式の数値実験には汎用有限要素解析ソフトウェア COMSOL を用いている．また，使用するソフトウェアに制約はないことを注記する．

6.2. 感度解析

本研究で扱う熱伝導問題の支配方程式を固定設計領域 D に拡張すると以下のようになる．

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\,(\kappa_\phi \nabla T_\phi) = 0 & \text{in } D, \\ T_\phi = T_{\mathrm{t}} & \text{on } \Gamma_t, \\ -\kappa_\phi \nabla T_\phi \cdot n = 0 & \text{on } \Gamma_o, \\ -\kappa_\phi \nabla T_\phi \cdot n = g\,(T_\phi) & \text{on } \Gamma_h(\phi). \end{cases} \tag{8}$$

ここで，熱伝導率 κ_ϕ は，$\kappa_\phi = \alpha\chi_\phi + \beta(1-\chi_\phi)$ である．なお，構造領域 Ω_1 の熱伝導率 α，空孔領域 Ω_0 の熱伝導 β は $\alpha > \beta > 0$ の大小関係を持つ．本研究では，随伴変数法を用いて感度解析を行う．随伴変数 S_ϕ は，以下の随伴方程式を満たす．

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\,(\kappa_\phi \nabla S_\phi) = 0 & \text{in } D, \\ S_\phi = 0 & \text{on } \Gamma_t, \\ -\kappa_\phi \nabla S_\phi \cdot n = -2(T_\phi - \tilde{T}) & \text{on } \Gamma_o, \\ -\kappa_\phi \nabla S_\phi \cdot n = g'(T_\phi) S_\phi & \text{on } \Gamma_h(\phi). \end{cases} \tag{9}$$

以上より，

$$J'(\phi) \approx -\chi_\phi \nabla T_\phi \cdot \nabla S_\phi \tag{10}$$

として近似設計感度が構成される．感度の導出過程は付録を参照頂きたい．

6.3. オイラー座標系に基づく近似解法

構造領域 Ω_1 の形状はオイラー座標系により表現されており，最適化の過程における反復計算毎に，有限要素の生成が必要となる．計算コストの観点から，Ersatz material approach[16] による近似解法を適用する．すなわち，空洞領域 Ω_0 は相対的に小さい熱伝導率を持つ構造材料と仮定し，その界面近傍では滑らかに分布する材料特性を持つと仮定する．具体的には，有限要素解析において，次に示す拡張した熱伝導率

$$\begin{aligned} \kappa_\phi(x) &= \alpha\tilde{H}(\phi(x)) + \beta(1-\tilde{H}(\phi(x))) \\ &= \begin{cases} \alpha, & x \in \Omega_1, \\ \beta, & x \in \Omega_0 \end{cases} \end{aligned} \tag{11}$$

を用いて温度場に対する支配方程式を固定設計領域 に対して拡張する．ここで，

ヘビサイド関数は以下の式 (12) を用いる．

$$\tilde{H}(\phi) := \begin{cases} 0 & \text{if} \quad \phi < -\epsilon_u, \\ \frac{1}{2} + \left(\frac{15}{16}\phi - \frac{5}{8}\phi^3 + \frac{3}{16}\phi^5\right) & \text{if} \quad -\varepsilon_u \le \phi \le \epsilon_u, \\ 1 & \text{if} \quad \epsilon_u < \phi. \end{cases} \tag{12}$$

ただし，ϵ_u は近似ヘビサイド関数 $\tilde{H}$ の遷移幅を与える微小パラメータである．

6.4. 状態方程式と随伴方程式の近似解法

本研究では，式 (7) に基づいて境界条件を付与し，近似的な数値解析を行う．固定設計領域 D の内部に熱輻射境界条件を与える場合は p_ϕ の分布に合わせて境界を与える．この方法の基本的な考え方は，以下の式 (13) に示すように，ディラックのデルタ関数 $\delta_{p=y}(p_\phi)$ を用いて，境界積分を固定設計領域における領域積分への置き換えに基づく．

$$\int_{\Gamma_h(\phi)} \xi(x)\mathrm{d}\sigma = \int_D \xi(x)\delta_{p=y}(p_\phi)\mathrm{d}x \quad \text{for} \quad \xi \in L^1(\bar{D}). \tag{13}$$

また，デルタ関数の中央値は $y = (p_l + p_u)/2$，閾値は p_l，p_u とする．ここで，先行研究 [28] より，

$$\delta_{p=y}(p_\phi) = \nabla H(p_\phi) \cdot N \tag{14}$$

として表現し，N は $\Gamma_h(\phi)$ 上の外向き法線ベクトルを表す．そして，$H(p_\phi)$ は，以下の式 (15) に示すように，$p_\phi < p_l$ の領域で正の微小値 $\epsilon_h > 0$，$p_u < p_\phi$ の領域で 1 をとり，p_l から p_u の区間 $[p_l < p_\phi < p_u]$ において連続的に分布する，近

似されたヘビサイド関数である．

$$
H(p_\phi) := \begin{cases} \epsilon_h & \text{if} \quad p_\phi < p_l, \\ \frac{1}{2} + \left(\frac{15}{16}p_\phi - \frac{5}{8}p_\phi^3 + \frac{3}{16}p_\phi^5\right) & \text{if} \quad p_l \le p_\phi \le p_u, \\ 1 & \text{if} \quad p_u < p_\phi. \end{cases} \tag{15}
$$

このとき，先行研究 (19) より式 (14) を用いて式 (8) を

$$
\int_D \kappa_\phi(x)\nabla u(x)\cdot\nabla\tilde{v}(x)\,\mathrm{d}x \approx -\int_D g(u(x)+T_\mathrm{t})(x)\tilde{v}(x)\frac{\mathrm{d}H(p_\phi(x))}{\mathrm{d}p_\phi(x)}|\nabla p_\phi(x)|\,\mathrm{d}x \quad \text{for all } \tilde{v}\in H^1(D) \tag{16}
$$

として近似し，式 (9) を

$$
\int_D \kappa_\phi(x)\nabla v(x)\cdot\nabla\psi(x)\,\mathrm{d}x \approx -\int_D g'(u(x)+T_\mathrm{t})v(x)\psi(x)\frac{\mathrm{d}H(p_\phi(x))}{\mathrm{d}p_\phi(x)}|\nabla p_\phi(x)|\,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_o} 2(u(x)+T_\mathrm{t}-\tilde{T})\psi(x)\,\mathrm{d}\sigma \quad \text{for all } \psi\in H^1(D) \tag{17}
$$

として近似する．式 (16)，式 (17) を弱形式で取り扱うため，$u = u_\phi = T_\phi - T_t \in V := \{u \in H^1(D)\cap L^{d+2}(\Gamma_h(\phi))\colon u = 0 \text{ on } \Gamma_t\}$, $v = S_\phi$ とする．本研究では, 熱輻射境界条件における非線形項は最適化における 1 ステップ前の支配方程式の解 T_old を用いて，$g(T_\phi) = h(T_\phi^{d+1} - T_\mathrm{amb}^{d+1}) \approx h(T_\mathrm{old}^{d}T_\phi - T_\mathrm{amb}^{d+1})$, $g'(T_\phi) = h(d+1)T_\phi^d \approx h(d+1)T_\mathrm{old}^{d-1}T_\phi$ として近似する．なお，初回の計算における初期温度 T_old を周囲参照温度としている．式 (16)，式 (17) を用いることで，p_ϕ の勾配が零でない $[p_l < p_\phi < p_u]$ においてヘビサイド関数を付与し，状態方程式と随伴方程式を解く際に自動的に熱輻射境界を付与できる．その結果，設計変数に依存する境界条件の取り扱いが期待される．

7. 数値解析例

本研究で提唱する方法の妥当性と有効性を数値解析例により検証する．問題設定は図 1 における，下部の型を対象とし，図 3 に型の設計モデルを示す．図 3 において，(a) が 2 次元のモデル，(b) が 3 次元のモデルである．はじめに，適当な形状に対して境界抽出方程式を適用し，抽出する境界の妥当性を確認する．次に，提案するアルゴリズムに則り，設計変数依存を考慮した最適化を行う．

7.1. 境界抽出方程式の数値実験

適当な形状を対象に境界抽出方程式を適用して，所望の境界を抽出できることを検証する．

7.1.1. 2 次元問題への適用

数値実験の対象モデルを図 4 に示す．ここで，(a) は適当な材料分布を持つ構造とする．灰色の領域が構造領域 $[\chi_\phi = 1]$，白色の領域が空孔領域 $[\chi_\phi = 0]$ に対応する．熱輻射寄与の大きい境界を識別するために，周囲構造が配置される x_1 方向の

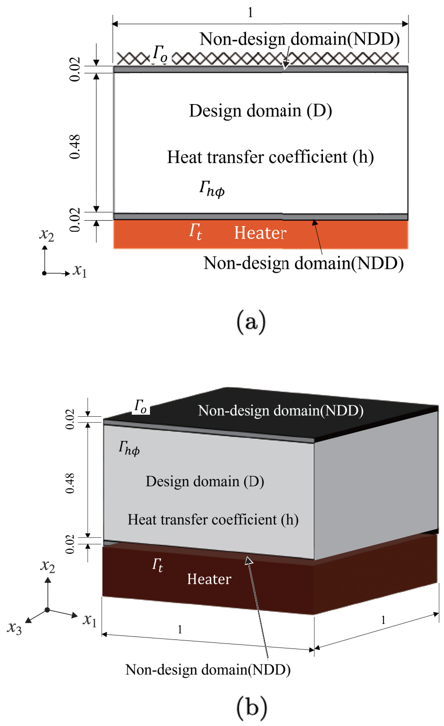


Fig. 3: Design domain and boundary conditions. (a) Two-dimensional problem. (b) Three-dimensional problem.

拡散係数を構造同士の拡散係数よりも大きくする．次に，座標軸方向 $i, j = 1, 2$ において，$a_{11} = 1\times10^1$, $a_{22} = 1\times10^{-1}$, $a_{12} = a_{21} = 0$, $\varepsilon = 1\times10^{-4}$ とする．このとき，式 (7) の解 p_ϕ は，図 4 (b) のようになり，青色の領域が熱輻射境界より内部, 白色の領域が熱輻射境界より外部を表す．そして，図 4(b) における $[0.1 < p_\phi < 0.5] := \{x \in D : p_l < p_\phi(x) < p_u\}$ を熱輻射境界と定義すると，図 4 (c) の青線で示す通り，Γ_amb に面する熱輻射境界条件を課す領域が抽出できる．本研究では，構造の外形近傍を抽出するために p_ϕ が零近傍の値域を設定している．

7.1.2. 3 次元問題への適用

3 次元の場合，熱輻射の寄与度が大きい面が 4 面となるため，x_1 方向と x_3 方向に分けて検討する．まず，$x_1 - x_2$ 平面を $\Gamma_\mathrm{amb}^{x_1-x_2}$, $x_3 - x_2$ 平面を $\Gamma_\mathrm{amb}^{x_3-x_2}$ と定義する．図 5 (a) に，適当な形状の $x_1 - x_3$ 断面を示す．(a) において，灰色の領域が構造領域で，白色の領域が空孔領域である．図 5 において，上下の辺が $\Gamma_\mathrm{amb}^{x_1-x_2}$ であり，左右の辺が $\Gamma_\mathrm{amb}^{x_3-x_2}$ である．3 次元問題では $\Gamma_\mathrm{amb}^{x_1-x_2}$ と $\Gamma_\mathrm{amb}^{x_3-x_2}$ の両方に面している構造最外形を熱輻射境界とする．図 5 (b) に熱輻射影響が大きい境界を赤線，熱輻射影響が小さい境界を黒い点線で示す．このような境界を抽出するためには，境界抽出方程式を解き，(c), (d) における赤線で示す境界を抽出する．その境界の共通部分が (b) の赤線となり，3 次元問題で求めたい熱輻射境界である．

数値実験モデルとして図 6 (a) の構造を適用する．灰色の領域が構造領域で，それ以外は空孔領域である．ここで，

座標軸方向 $i,j = 1,2,3$ において，図 6 (b) に示すように x_1 方向の拡散を大きくした解を $p_{\phi 1}$ とし，$a_{11} = 1 \times 10^1$，$a_{22} = a_{33} = 1\times 10^{-1}$, $a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0$, $\varepsilon = 1\times 10^{-4}$ とした．ただし，$p_\phi = 0$ on $\Gamma_{\mathrm{amb}}^{x_3-x_2}$ とする．次に，図 6 (c) に示すように x_3 方向の拡散を大きくした解を $p_{\phi 2}$ とし，$a_{33} = 1\times 10^1$，$a_{11} = a_{22} = 1 \times 10^{-1}$，$a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0$，$\varepsilon = 1 \times 10^{-4}$ とした．ただし，$p_\phi = 0$ on $\Gamma_{\mathrm{amb}}^{x_1-x_2}$ とする．このとき，式 (7) の解 p_ϕ は，図 6 (b)，(c) のようになり，青色の領域が所望の熱輻射境界より内部, 白色の領域が外部を表す．図 6 (d), (e) では，図 6 (b)，(c) における $[0.1 < p_\phi < 0.5]$ を青線，それ以外を白色で示している．そして，適切な値域で抽出し，$p_\phi = p_{\phi 1} p_{\phi 2}$ とすると，図 6 (f) に示すように，3 次元でも必要とする熱輻射の寄与度が大きい境界を抽出できる．

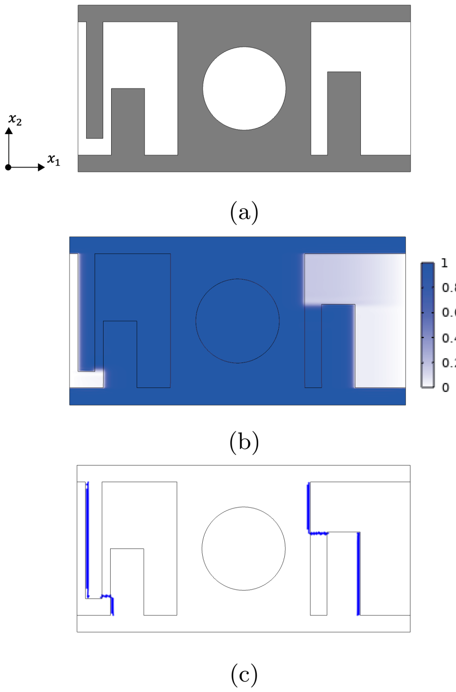


Fig. 4: Result of two-dimensional boundary extraction equation. (a) Material distribution. (b) Solution p_ϕ. (c) Extracted boundaries.

7.2. 設計変数依存を考慮したトポロジー最適化

数値解析例により，本研究で提唱する方法の有効性と妥当性を検証する．問題設定は，図 3 (a), (b) に示すように成形面 Γ_o，加熱面 Γ_t を含む領域を非設計領域とし，その間の矩形領域を固定設計領域とする．非設計領域には常に材料が配置され，固定設計領域内の材料分布が最適化されるものとする．なお，初期構造として全領域に材料が配置されるものとする．

7.2.1. 2 次元問題への適用

図 3 (a) に示すように，成形面 Γ_o，加熱面 Γ_t を含む $1\,\mathrm{m} \times 0.02\,\mathrm{m}$ の領域を非設計領域とし，$1\,\mathrm{m} \times 0.48\,\mathrm{m}$ の矩形領域を固定設計領域とした 2 次元問題に適用する．まず，加熱面 Γ_t を温度規定 $T_t = 700$ K, 固定設計領域内部の熱輻射寄与の高

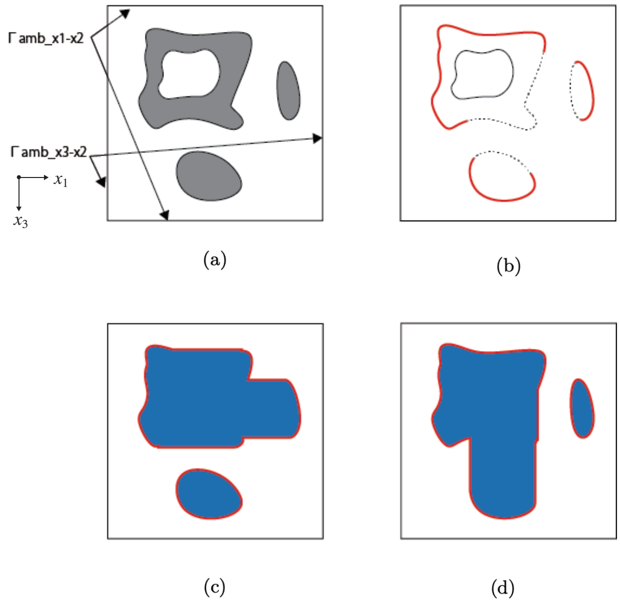


Fig. 5: Image of three-dimensional boundary extraction. (a) Cross-sectional design domain. (b) Boundaries with large contribution of thermal radiation. (c) Solution $p_{\phi 1}$. (d) Solution $p_{\phi 2}$.

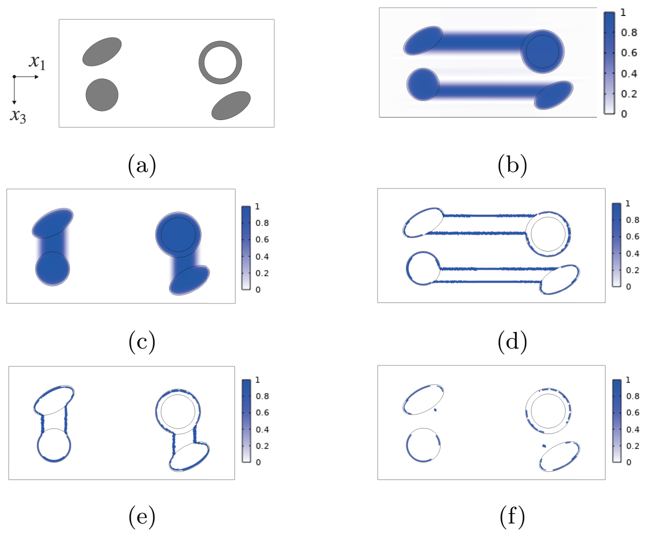
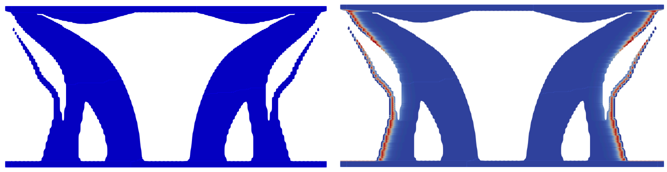


Fig. 6: Result of three-dimensional boundary extraction equation. (a) Material distribution. (b) Solution $p_{\phi 1}$. (c) Solution $p_{\phi 2}$. (d) $[0.1 < p_{\phi_1} < 0.5]$. (e) $[0.1 < p_{\phi_2} < 0.5]$. (f) Extracted boundaries.

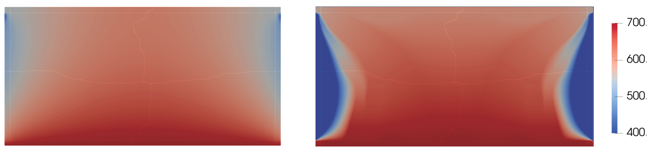
い領域に設計変数に依存した熱輻射境界条件を与える．ここでは，物体領域の熱伝導率を $\alpha = 10$ W/(mK)，空孔領域の熱伝導率を $\beta = 1\times10^{-3}$ W/(mK) とした．また，熱輻射境界条件 $\Gamma_h(\phi)$ の外部参照温度 T_{amb} は $T_{\mathrm{amb}} = 400$ K とし，本研究では，外部参照温度は実構造物の測温値とする．文献 [29] より，2 次元のステファンボルツマン定数は $\sigma_s = 1.92\times10^{-10}$ W/(mK^3)，放射率は $\varepsilon_e = 1$ の場合について考える．また，本研究ではヘビサイド関数 $\tilde{H}$ の遷移幅を $\epsilon_u = 0.1$，ヘビサイド関数 $H(p_\phi)$ における正の微小値を $\epsilon_h = 0.01$，境界抽出における閾値を $p_l = 0.1$，$p_u = 0.5$，デルタ関数の中央値を $y = (p_l + p_u)/2 = 0.3$ とする．目的汎関数の目標温度は $\tilde{T}$ で表す Γ_o の温度分布とし，制約条件は固定設計領域の 50 %以下の体積制約とする．この問題設定により，Γ_o での理想温度分布を満たすような構造が得られる．支配方程式，随伴方程式，境界抽出方程式及び反応拡散方程式を 2 次要素により離散化する．固定設計領域は 6 節点三角要素で分割し，要素数は 80197，節点数は 100090 である．

まず，目的汎関数の一定温度 $\tilde{T}$ を $\tilde{T} = 600$ K，正則化係数 $\tau = 5\times10^{-6}$ の条件下での最適化された構造を図 7 (a) に示す．図 7 (a) において，青色の領域が構造領域 Ω_1，白色の領域が空洞領域 Ω_0 を表す．構造の連結性を持つ明確な構造領域が創出されていることが分かる．図 7 (b) は抽出された構造境界を示しており，赤線が熱輻射境界，青色の領域が構造領域，白色の領域が空洞領域を示している．これにより境界抽出方程式を用いて Γ_{amb} と面する境界だけを識別し，所望の境界が設定できる．図 8 (a) には初期構造における温度分布，図 8 (b) に最適化された構造における温度分布を示す．初期構造では成形面 Γ_o において，中央部の温度が高く，$\Gamma_h(\phi)$ 近傍の温度低下が顕著であるため，目標温度との差異が大きい．しかし，最適化された構造の中央は空孔となり，中央部の温度上昇が抑えられ，$\Gamma_h(\phi)$ 近傍では Γ_t と Γ_o の間に構造を設けることで Γ_o の温度が一様化し，目標温度との差異が小さくなることが確認された．特に，熱輻射境界条件を与える Γ_h では細長い構造が形成され，遮熱効果をもたらす遮熱板のような構造が確認された．図 9 (a) に，目標温度との解析値の差異を表す目的汎関数の収束履歴を示す．目的汎関数に関して，条件 $\{(J(\phi_i) - J(\phi_{i-1}))/J(\phi_{i-1})\} < 0.01$ を 10 回継続して満たすことを収束判断基準としている．なお i は計算ステップであり，138 ステップで収束判断基準を満たした．最適化の初期段階では目的汎関数の振動が確認されるが，形状変化が大きい段階では温度変化も大きく，随伴方程式の外力項の符号変化が目的汎関数の振動を引き起こしていると考えられる．加えて，体積制約汎関数が安定するまでは形状変化が大きく，温度変化が大きいことも目的汎関数の振動に影響していると推測される．60 ステップ以降は体積制約汎関数が目標値に収束し，目的汎関数の振動も減少している．そして，図 9 (b) にステップ間の温度差の絶対値 $|T - T_{\mathrm{old}}|$ を領域内で積分した値の履歴を示す．120 ステップ以降では，ステップ間の温度差が 1K 未満となり，周囲参照温度 400K と比較しても十分に小さく，最適化された構造における線形近似の妥当性が確認できる．これらの結果から，本手法を用いた有効性が示された．



(a) (b)

Fig. 7: (a) Optimized configurations. (b) Extracted boundaries.



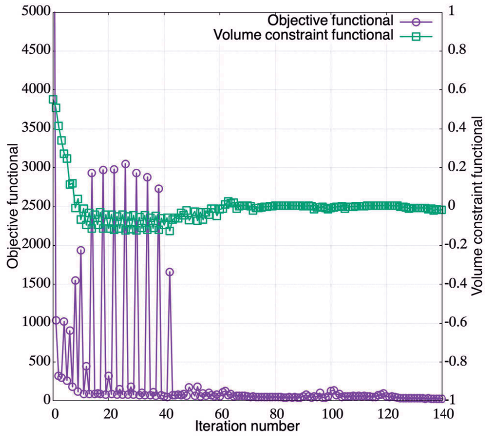
(a) (b)

Fig. 8: (a) Initial temperature distribution. (b) Optimized temperature distribution.

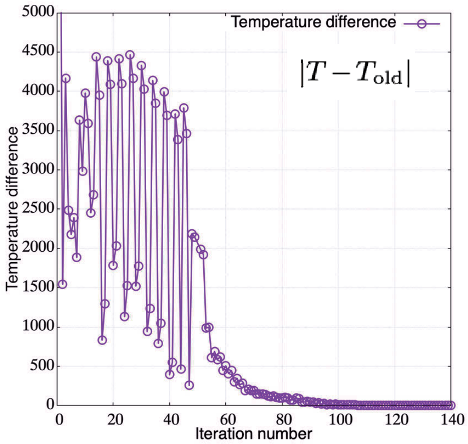
次に，異なる正則化係数 τ を設定し，最適化した結果を図 10 に示す．本研究では正則化係数を (a) では $\tau = 5\times10^{-3}$，(b) では $\tau = 5\times10^{-4}$，(c) では $\tau = 5\times10^{-5}$，(d) では $\tau = 5\times10^{-6}$ と設定した．目的汎関数は (a) では 72.9, (b) では 59.8, (c) では 45.5, (d) では 39.1 となり，正則化係数 τ が小さくなるに連れて，幾何学的に複雑な形状が生成され，目的汎関数値が小さくなる傾向が確認される．これは，式 (5) で示される反応拡散方程式の正則化係数が，構造の周長制約に影響を与えるためである．

7.2.2. 3 次元問題への適用

次に，本提案手法を 3 次元設計問題へ適用し，有効性を検証した．図 3 (b) に示すように，成形面 Γ_o，加熱面 Γ_t を含む $1\times0.02\times0.02$ m の領域を非設計領域とし，$1\times1\times0.48$ m の領域を固定設計領域とする．3 次元のステファンボルツマン定数 σ_s は $\sigma_s = 5.67\times10^{-8}$ W/(m^{2}K^4) の場合を考える．固定設計領域は，10 節点四面体要素で分割し，要素数 300831，節点数 403020 である．他の条件は 6.1 節の 2 次元問題と同じである．目的汎関数を一定温度 $\tilde{T} = 600$ K，正則化係数 $\tau = 5\times10^{-6}$ とした場合の最適化された構造を図 11 に示す．(a) が鳥瞰図, (b) が一部を除去した断面である．2 次元の結果と同様に中央部に空孔が創出され，Γ_o と Γ_t の間は構造が繋がれている．図 11 (c) に抽出した熱輻射境界を示す．構造内部の $\partial\Omega_1$ は含まずに，所望の境界を抽出できていることが分かる．次に図 12 (a) に初期構造の温度分布，(b) に最適化された構造の温度分布を示す．(a) では，領域 Γ_o において，中央部と比較して，Γ_{amb} に近い位置の温度が低い．最適化された構造では Γ_o における中央の温度上昇が抑えられ，Γ_{amb} 近傍の温度低下が抑制されている．そして，図 13 に示す目的汎関数は，98 ステップで収束判断基準を満たした．以

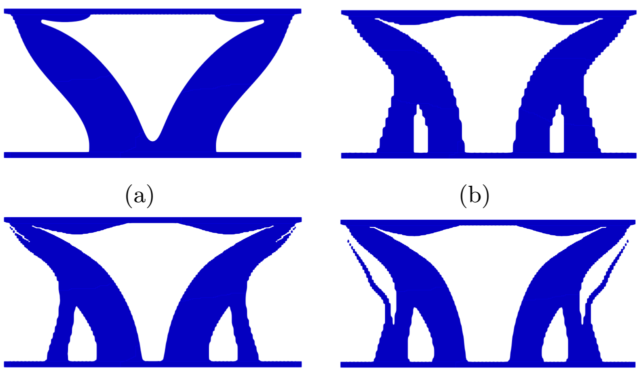


(a)



(b)

Fig. 9: (a) Convergence history of objective functional and volume constraint functional. (b) Temperature difference between iteration.



(a) (b)

(c) (d)

Fig. 10: Dependence of optimized configurations on regularization factor τ. (a) $\tau = 5 \times 10^{-3}$. (b) $\tau = 5 \times 10^{-4}$. (c) $\tau = 5 \times 10^{-5}$. (d) $\tau = 5 \times 10^{-6}$.

上より，3 次元でも本手法を用いた有効性が示された．

8. 結言

本研究では，設計変数に依存する熱輻射境界条件を考慮した熱伝導問題のトポロジー最適化法を提案した．本研究で得られた結果を次に示す．

1. 一般的な機械構造物の熱設計の方法を明示し，熱輻射の影響が支配的な熱伝導問題において，マクロ的な構造は形態係数，ミクロ的な構造は輻射率の影響が大きいことを議論した．
2. 機械構造物の例として，温度制御が難しい成形炉の型における温度場をモデル化し，熱伝導問題を定式化した．
3. 熱輻射境界条件を付与した熱伝導における最適化問題を定式化し，熱輻射による非線形項を含む感度解析を行なった．
4. 形態係数が大きい領域の幾何学的位置関係を表現する偏微分方程式（境界抽出方程式）を提案した．境界抽出方程式に基づいて，設計変数に依存する熱輻射境界の識別方法を提案し，適切な値域を設定することで熱輻射境界を抽出できることを示した．
5. 最適化ステップ毎に境界抽出を行い，非線形項を線形近似したトポロジー最適化法のアルゴリズムを構築し，その数値実装法を提案した．
6. 2 次元および 3 次元のモデルに本手法を適用し，方法論の妥当性と有効性の結果を検討した．その結果，熱伝導だけでは発生しない熱輻射特有の構造を創出できることを確認した．

9. 付録

本文中 6.2 節における，設計感度の導出方法を記す．設計感度 $J'(\phi)$ を導出するために，$u = u_\phi = T_\phi - T_{\mathrm{t}} \in V := \{u \in H^1(D) \cap L^{d+2}(\Gamma_h(\phi))\colon u = 0 \text{ on } \Gamma_t\}$ とし，変数を変換すると式 (8) は以下のようになる．

$$
\begin{cases}
-\mathrm{div}\,(\kappa_\phi \nabla u_\phi) = 0 & \text{in } D, \\
u_\phi = 0 & \text{on } \Gamma_t, \\
-\kappa_\phi \nabla u_\phi \cdot n = 0 & \text{on } \Gamma_o, \\
-\kappa_\phi \nabla u_\phi \cdot n = g\,(u_\phi + T_{\mathrm{t}}) & \text{on } \Gamma_h(\phi).
\end{cases}
\tag{18}
$$

すなわち，式 (8) の弱形式は次のように記述される．

$$
\int_D \kappa_\phi(x) \nabla u_\phi(x) \cdot \nabla \tilde{v}_\phi(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_h(\phi)} g(u_\phi + T_{\mathrm{t}})(x) \tilde{v}_\phi(x)\,\mathrm{d}\sigma = 0 \quad \text{for all } \tilde{v}_\phi \in V. \tag{19}
$$

次に，随伴変数を $\tilde{v}_\phi$ として，以下のラグランジュ関数 $\mathcal{L}(\phi, u_\phi, \tilde{v}_\phi)$

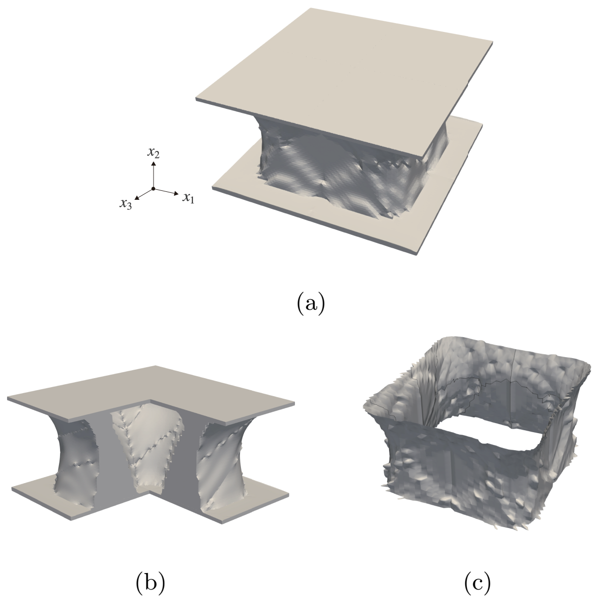


Fig. 11: Optimized configuration. (a) Bird's-eye view. (b) Cross section. (c) Extracted boundaries.

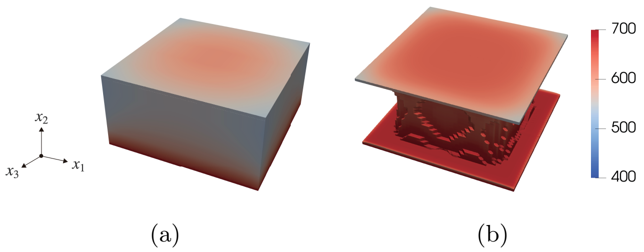


Fig. 12: (a) Initial temperature distribution. (b) Optimized temperature distribution.

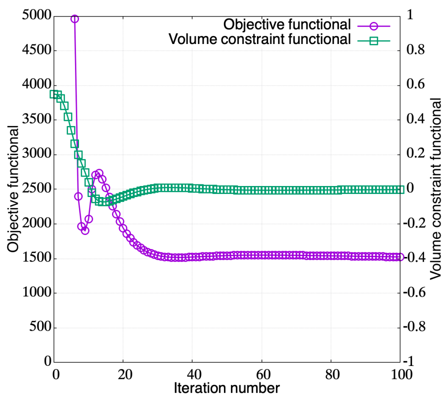


Fig. 13: Convergence history of objective functional and volume constraint functional.

を導入する．

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{L}(\phi, u_\phi, \tilde{v}_\phi) \\
&:= \int_{\Gamma_o} \left(u_\phi(x) + T_\mathrm{t} - \tilde{T} \right)^2 \, \mathrm{d}\sigma \\
&\quad + \int_D \kappa_\phi(x) \nabla u_\phi(x) \cdot \nabla \tilde{v}_\phi(x) \, \mathrm{d}x \\
&\quad + \int_{\Gamma_h(\phi)} h((u_\phi + T_\mathrm{t})^{d+1} - T_\mathrm{amb}^{d+1}) \tilde{v}_\phi(x) \, \mathrm{d}\sigma. \qquad (20)
\end{aligned}
$$

このとき，$\partial_{u_\phi}\mathcal{L}(\phi, u_\phi, \tilde{v}_\phi) = 0$ となる $\tilde{v}_\phi \in V_{\Gamma_t} = \{v \in H^1(D) \colon v = 0 \text{ on } \Gamma_t\}$ を特定すると，$J'(\phi) = \partial_\phi \mathcal{L}(\phi, u_\phi, \tilde{v}_\phi)$ が成り立つ．そこで，$\partial_{u_\phi}\mathcal{L}(\phi, u_\phi, \tilde{v}_\phi) = 0$ となる $\tilde{v}_\phi \in V_{\Gamma_t}$ について考察すると，

$$
\begin{aligned}
&\langle \partial_{u_\phi} \mathcal{L}(\phi, u_\phi, \tilde{v}_\phi), \psi \rangle_{H^1(D)} \\
&= \int_{\Gamma_o} 2(u_\phi(x) + T_\mathrm{t} - \tilde{T}) \psi(x) \, \mathrm{d}\sigma \\
&\quad + \int_D \kappa_\phi(x) \nabla \tilde{v}(x) \cdot \nabla \psi(x) \, \mathrm{d}x \\
&\quad + \int_{\Gamma_h} h(d+1)(u(x) + T_\mathrm{t})^d \, \tilde{v}(x) \psi(x) \, \mathrm{d}\sigma \\
&\quad \text{for all } \ \psi \in H^1(D) \qquad (21)
\end{aligned}
$$

が成り立つ．ここで，$v_\phi \in V_{\Gamma_t}$ を次の方程式，

$$
\begin{aligned}
&\int_D \kappa_\phi(x) \nabla v_\phi(x) \cdot \nabla \psi(x) \, \mathrm{d}x \\
&- \int_{\Gamma_o} 2(u_\phi(x) + T_\mathrm{t} - \tilde{T}) \psi(x) \, \mathrm{d}\sigma \\
&+ \int_{\Gamma_h} h(d+1)(u_\phi(x) + T_\mathrm{t})^d \, v_\phi(x) \psi(x) \, \mathrm{d}\sigma = 0 \qquad (22)
\end{aligned}
$$

の解とすると，$\partial_{u_\phi}\mathcal{L}(\phi, u_\phi, -v_\phi) = 0$，$\partial_{v_\phi}\mathcal{L}(\phi, u_\phi, -v_\phi) = 0$ を満たす．このとき，$T_\phi = u_\phi + T_\mathrm{t}$，$v_\phi = S_\phi$ より，$T_\phi \in H^1(D)$ に対する随伴方程式 (9) が得られる．また，$J(\phi) = \mathcal{L}(\phi, u_\phi, -v_\phi)$ である．そして，$\mathcal{L}(\phi, u_\phi, -v_\phi)$ を ϕ で微分すると，

$$
\begin{aligned}
&\langle J'(\phi), \psi \rangle_{H^1(D)} \\
&= \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_\phi} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_\phi} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}, \psi \right\rangle_{H^1(D)} \\
&= \langle \partial_\phi \mathcal{L}(\phi, u_\phi, -v_\phi), \psi \rangle_{H^1(D)} \\
&= - \lim_{\eta \to 0_+} \int_D \frac{\kappa_{(\phi+\eta\psi)}(x) - \kappa_\phi(x)}{\eta} \nabla u_\phi(x) \cdot \nabla v_\phi(x) \, \mathrm{d}x \quad (23)
\end{aligned}
$$

が形式的に成り立つ．ここで，

$$
\lim_{\eta \to 0_+} \frac{\kappa_{(\phi+\eta\psi)}(x) - \kappa_\phi(x)}{\eta} = \delta(\phi) \qquad (24)
$$

であり，トポロジーの変更を許容するため，係数を C_η，η とし，

$$
\delta(\phi) \approx \frac{C_\eta \chi_{[0 \le \phi \le \eta]}}{\eta} \quad \text{a.e.} \quad \text{in} \quad D, \qquad (25)
$$

$$
\chi_{[0 \le \phi \le \eta]} = \begin{cases} 1 & \text{if } 0 \le \phi \le \eta, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \qquad (26)
$$

としてデルタ関数を表現する．なお，$[0 \le \phi \le \eta] = \{x \in D : 0 \le \phi(x) \le \eta\}$ である．ここで，T_t が定数ならば式 (2) の構造領域でのみ感度を持つように，特性関数 $\chi_\phi \in L^\infty(D; \{0,1\})$ を用いると，文献 [25] より以下が成り立ち，

$$J'(\phi) \approx -\eta\chi_\phi \nabla u_\phi \cdot \nabla v_\phi = -\chi_\phi \nabla T_\phi \cdot \nabla S_\phi \qquad (27)$$

として近似設計感度が構成される．ここでは，簡便化するため，$C_\eta = 1, \eta = 1$ としている．

参考文献

(1) Viskanta, R. and Mengu, C, M.: Radiation heat transfer in combustion systems, Progress in Energy and Combustion Science, **13**(1987), pp. 97–160.

(2) Andre, S. and Degiovanni, A.: A theoretical study of the transient coupled conduction and radiation heat transfer in glass: phonic diffusivity measurements by the flash technique, Journal of Heat and Mass Transfer, **38. 18**(1995), pp. 3401–3412.

(3) Can, A, G. and Melik, B, A. :Numerical analysis of the radiant heating effectiveness of a continuous glass annealing furnace, Applied Thermal Engineering, **204**(2022), 117943.

(4) Furkan, F, S., Hesan, Z., Olindo, I. and Miro, Z.: Fast and accurate ray-casting-based view factor estimation method for complex geometries, Solar Energy Materials and Solar Cells **200**(2019), 109934.

(5) Bendsøe, M.P. and Kikuchi, N.: Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, **71. 2**(1988), pp. 197–224.

(6) Diaz, A.R. and Sigmund, O.: A topology optimization method for design of negative permeability metamaterials, Structural and Multidisciplinary Optimization **141. 2**(2010), pp. 163–177.

(7) Murai, N., Noguchi, Y., Matsushima, K. and Yamada, T.: Multiscale topology optimization of electromagnetic metamaterials using a high-contrast homogenization method, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering **403**(2023), 115728.

(8) Yoon, G., Jensen, J. and Sigmund, O.: Topology optimization of acoustic-structure interaction problems using a mixed finite element formulation, Additive Manufacturing, **70. 9**(2007), pp. 1049–1075.

(9) Lee, J., Kim, Y., Kim, J. and Kang, Y.: Two-dimensional poroelastic acoustical foam shape design for absorption coefficient maximization by topology optimization method, The Journal of the Acoustical Society of America **123. 4**(2008), pp. 2094–2106.

(10) Allaire, G.: Shape optimization by the homogenization method, Springer-Verlag, (2002), pp. 189–257.

(11) Haslinger, J. Hillebrand, A. Karkkainen, T. and Miettinen, M.: Optimization of conducting structures by using the homogenization method, Structural and Multidisciplinary Optimization **24**(2002), pp. 125–140.

(12) Gersborg-H, A. Bendsøe, M. P. and Sigmund, O.: Topology optimization of heat conduction problems using finite volume method, Structural and Multidisciplinary Optimization **31**(2006), pp. 251–259.

(13) Tang, L. Gao, T. Song, L. et al.: Topology optimization of nonlinear heat conduction problems involving large temperature gradient, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, **357**(2019), 112600.

(14) Chen, Y., Ye, L., Zhang, Y., X. and Yang, C.: A multimaterial topology optimization with temperature-dependent thermoelastic properties, Engineering Optimization **54. 12**(2022), pp. 2140–2155.

(15) Osher, S. and Sethian, J.A.: Fronts propagating with Curvature-Dependent Speed: Algorithms based on Hamilton-Jacobi Formulations, Journal of computational Physics, **79**(1988), pp. 12–49.

(16) Allaire, G., Jouve, F. and Toader, A.M.: Structural optimization using sensitivity analysis and a level-set method, Journal of Computational Physics, **194. 1**(2004), pp. 363–393.

(17) 山田 崇恭, 西脇 眞二, 泉井 一浩, 吉村 允孝, 竹澤 晃弘: レベルセット法による形状表現を用いたフェーズフィールド法の考え方に基づくトポロジー最適化, 日本機械学会論文集 A 編, **75. 753**(2009), pp.550–558.

(18) Yamada, T., Izui, K., Nishiwaki, S., and Takezawa, A.: A topology optimization method based on the level set method incorporating a fictitious interface energy, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, **199.45**(2010), pp. 2876–2891.

(19) Yamada, T., Izui, K. and Nishiwaki, S.: Level set-based topology optimization method for maximizing thermal diffusivity in problems including design-dependent effects, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, **133**(2011), pp. 031011-1–031011–9.

(20) 小川竣, 音羽貴史, 山田崇恭: レベルセット法に基づくトポロジー最適化による熱交換性能最大化, 日本計算工学会論文集, **66. 641**(2020), pp. 227–234.

(21) 山田崇恭, 正宗淳, 寺本央, 長谷部高広, 黒田紘敏: 幾何学的特徴量に対する偏微分方程式系に基づく幾何学的特徴制約付きトポロジー最適化 (積層造形における幾何学的特異点を考慮したオーバーハング制約法), 日本機械学会論文集, **85. 877**(2019), 19–00129.

(22) Yamada, T., and Noguchi, Y.: Topology optimization with a closed cavity exclusion constraint for additive

manufacturing based on the fictitious physical model approach, Additive Manufacturing, **52**(2022), 102630.

(23) Sato, Y., Yamada, T., Izui, K. and Nishiwaki, S.: Manufacturability evaluation for molded parts using fictitious physical models, and its application in topology optimization, The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, **92**(2017), pp. 1391–1409.

(24) 酒井虹太, 岡大将, 山田崇恭: トポロジー最適化における仮想的な物理モデルに基づく最大厚み制約, 計算数理工学論文集, **22**(2022), pp. 147–154.

(25) Oka, T. and Yamada, T.: Topology optimization method with nonlinear diffusion, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, **408**(2023), 115940.

(26) 今野 雅, 倉渕 隆, 鎌田 元康: 放射熱伝達解析における形態係数の計算法についての研究, 日本建築学会環境系論文集, **68. 572**(2003), pp. 17–22.

(27) Hecht, F.: New development in FreeFem++, Journal of Numerical Mathematics **20**(2012), pp. 251–265.

(28) Osher, S. and Fedkiw, R.: Level Set Methods And Dynamic Implicit Surface, Springer, (2003), pp. 14–15.

(29) Landsberg, Peter T and De Vos, Alexis.: The Stefan-Boltzmann constant in n-dimensional space, Journal of Physics A: Mathematical and General, **22**(1989), pp. 1073–1084.