

# 3次元 Helmholtz 方程式に対する CBFM を適用した境界要素法についての基礎的研究

Fundamental study on boundary element method using CBFM for the Helmholtz equation in 3D

池上 明日香<sup>1)</sup>, 新納 和樹<sup>2)</sup>

Asuka IKEGAMI and Kazuki NIINO

1) 京都大学大学院情報学研究科 (〒606-8501 京都市左京区吉田本町, E-mail:ikegami@acs.i.kyoto-u.ac.jp)

2) 京都大学大学院情報学研究科 (〒606-8501 京都市左京区吉田本町, E-mail: niino@i.kyoto-u.ac.jp)

The characteristic basis function method (CBFM) is known as one of methods to accelerate computation of boundary element methods. In the CBFM, boundaries are divided into several cells, and for each cell, a certain number of problems are solved in advance to generate new basis functions called CBFs. The original problem is solved with the CBFs as basis functions. In this paper, we present a fundamental study on the application of the CBFM to the boundary element method for Helmholtz equation in 3D. We made formulation of the CBFM and numerically show that the CBFM can reduce the number of basis functions without loss of accuracy.

**Key Words:** characteristic basis function method, boundary element method, Helmholtz equation

## 1. はじめに

大規模問題に対する境界要素法の計算高速化手法の一つとして, CBFM(Characteristic Basis Function Method) が知られている [1]. CBFM では, まず境界をいくつかのセルに分割し, それぞれのセルについて複数の入射波に対する問題を解く. 次にこのいくつかの問題に対する解ベクトルから新たに線形独立な基底関数を作る. この新たな基底関数を CBF と呼ぶ. そして元の問題をこの CBF を基底関数として解く.

CBF の数は, CBF を生成するために事前に解いた問題の数以下であり, 一般に元の基底関数より少なくなるので, 基底を CBF に取り直すことで計算時間の短縮が望める. これまで Maxwell 方程式を支配方程式とする電磁波散乱問題への CBFM の適用については多く研究がなされてきたが [2-6], Helmholtz 方程式を支配方程式とする問題に対する CBFM の適用については我々の知る限り研究が行われていない. そこで, 本稿では 3次元 Helmholtz 方程式を支配方程式とする transmission 問題への,

CBFM の適用を試みる. 本稿では CBF の生成方法として田中らが示した, 電磁波散乱問題に対して CBFM と Calderon の前処理を施す方法 [7] を Helmholtz 方程式に適用することを提案する. また本来 CBFM は大規模問題を高速に解くための数値解法であるが, 本稿では基礎的研究として CBFM の定式化と小規模な数値計算による定式化の妥当性検証のみを行っている.

本稿の構成は以下の通りである. 2 節で対象とする問題である, 3次元 Helmholtz 方程式の transmission 問題を与え, その定式化と離散化を行う. 次に 3 節で CBFM の定式化を行う. 4 節で具体的な問題についての数値計算結果を示し, 5 節で結論を述べる.

## 2. 対象とする問題と定式化

本節では, 本稿で扱う 3次元 Helmholtz 方程式を支配方程式とする transmission 問題を定義し, この問題に対する境界積分方程式の定式化, 離散化を行う.

### 2.1. 対象とする問題

$\mathbb{R}^3$  において滑らかな境界  $\Gamma$  を持つ有界領域  $\Omega_2$  を考え, その

外部を  $\Omega_1 = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega_2}$  とする。この時、それぞれの領域において Helmholtz 方程式

$$(\Delta + k_i^2)u(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega_i, \quad i = 1, 2$$

を満たす  $u(\mathbf{x})$  を、境界  $\Gamma$  上での境界条件

$$u_1(\mathbf{x}) = u_2(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma$$

$$q_1(\mathbf{x}) = q_2(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma$$

および、 $\Omega_1$  での散乱波  $u^{sca} = u - u^{inc}$  の放射条件のもとで求める。ただし、 $u_i(\mathbf{x})$  は  $\Omega_i$  上の  $u(\mathbf{x})$  の  $\Gamma$  への極限であり、

$$q_i(\mathbf{x}) = \frac{1}{\varepsilon_i} \frac{\partial u_i(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}}$$

である。また  $\varepsilon_i$  は領域  $\Omega_i$  で定義される定数である。 $\mathbf{n}$  は  $\Gamma$  から  $\Omega_1$  に向けた単位法線ベクトル、 $u^{inc}$  は入射波である。

## 2.2. PMCHWT 定式化

この問題に対する PMCHWT 定式化による境界積分方程式は、次のようになる。

$$\sum_{i=1,2} \begin{pmatrix} \mathcal{D}_i & -\varepsilon_i \mathcal{S}_i \\ \frac{1}{\varepsilon_i} \mathcal{N}_i & -\mathcal{D}_i^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(\mathbf{x}) \\ q(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u^{inc}(\mathbf{x}) \\ -\frac{1}{\varepsilon_1} \frac{\partial u^{inc}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}} \end{pmatrix} \quad (1)$$

ここに、 $\mathcal{S}_i, \mathcal{D}_i, \mathcal{D}_i^*, \mathcal{N}_i$  は積分作用素であり、以下の通りである。

$$\mathcal{S}_i v(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} G_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) v(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \quad (2)$$

$$\mathcal{D}_i v(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} \frac{\partial G_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_{\mathbf{y}}} v(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \quad (3)$$

$$\mathcal{D}_i^* v(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} \frac{\partial G_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_{\mathbf{x}}} v(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \quad (4)$$

$$\mathcal{N}_i v(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} \frac{1}{\varepsilon_i} \frac{\partial^2 G_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_{\mathbf{y}} \partial \mathbf{n}_{\mathbf{x}}} v(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \quad (5)$$

ただし  $\mathcal{D}_i, \mathcal{D}_i^*$  内の積分は、必要な時には Cauchy の主値積分を表し、 $\mathcal{N}_i$  内の積分は発散積分の有限部分を表すとする。また、 $\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_{\mathbf{x}}}, \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_{\mathbf{y}}}$  はそれぞれ  $\Gamma$  上の  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  における法線微分を表す。さらに、 $G_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  は 3 次元 Helmholtz 方程式の基本解であり、次のように表される。

$$G_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\exp(ik_i |\mathbf{x} - \mathbf{y}|)}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{y}|}$$

ここで  $i$  は虚数単位である。

## 2.3. 境界積分方程式の離散化

2.2 節で得た境界積分方程式 (1) を、区分線形基底を用いた Galerkin 法により離散化し、線形方程式を得る。以下では、境界  $\Gamma$  を節点数  $N$  の三角形メッシュで近似し、その上で定義される区分線形基底を  $\psi_m(\mathbf{x})$  ( $m = 1, 2, \dots, N$ ) とする。また、 $\int_{\psi_m}$  は、 $\psi_m(\mathbf{x})$  の台を積分範囲とする積分を指す。今、 $u(\mathbf{x}), q(\mathbf{x})$  を

$\psi_m(\mathbf{x})$  により近似し、次式を得る。

$$u(\mathbf{x}) \approx \sum_{m=1}^N \alpha_m \psi_m(\mathbf{x})$$

$$q(\mathbf{x}) \approx \sum_{m=1}^N \beta_m \psi_m(\mathbf{x})$$

ここで、 $\alpha_m, \beta_m \in \mathbb{C}$  ( $m = 1, 2, \dots, N$ ) は未知係数である。次に、Galerkin 法による積分作用素 (2)~(5) の離散化を次の式で与える。

$$(\mathcal{S}_i)_{mn} = \int_{\psi_m} \psi_m(\mathbf{x}) \int_{\psi_n} \psi_n(\mathbf{y}) G_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} dS_{\mathbf{x}} \quad (6)$$

$$(\mathcal{D}_i)_{mn} = \int_{\psi_m} \psi_m(\mathbf{x}) \int_{\psi_n} \psi_n(\mathbf{y}) \frac{\partial G_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_{\mathbf{y}}} dS_{\mathbf{y}} dS_{\mathbf{x}} \quad (7)$$

$$(\mathcal{D}_i^*)_{mn} = \int_{\psi_m} \psi_m(\mathbf{x}) \int_{\psi_n} \psi_n(\mathbf{y}) \frac{\partial G_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_{\mathbf{x}}} dS_{\mathbf{y}} dS_{\mathbf{x}} \quad (8)$$

$$(\mathcal{N}_i)_{mn} = \int_{\psi_m} \psi_m(\mathbf{x}) \int_{\psi_n} \psi_n(\mathbf{y}) \frac{\partial^2 G_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_{\mathbf{y}} \partial \mathbf{n}_{\mathbf{x}}} dS_{\mathbf{y}} dS_{\mathbf{x}} \quad (9)$$

また、式 (1) の右辺を次の式で離散化する。

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}^{inc} \end{pmatrix}_m = \int_{\psi_m} u^{inc}(\mathbf{x}) \psi_m(\mathbf{x}) dS_{\mathbf{x}} \quad (10)$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{q}^{inc} \end{pmatrix}_m = \int_{\psi_m} \frac{1}{\varepsilon_1} \frac{\partial u^{inc}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}} \psi_m(\mathbf{x}) dS_{\mathbf{x}} \quad (11)$$

以上の (6)~(11) を用いて、式 (1) から次の線形方程式を得る。

$$\mathbf{A} \mathbf{b} = \mathbf{f} \quad (12)$$

ただし、 $\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{f}$  は以下の通りである。

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1,2} \begin{pmatrix} \mathcal{D}_i & -\varepsilon_i \mathcal{S}_i \\ \frac{1}{\varepsilon_i} \mathcal{N}_i & -\mathcal{D}_i^* \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2N \times 2N}$$

$$\mathbf{b} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N)^T \in \mathbb{C}^{2N}$$

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} -\mathbf{u}^{inc} \\ -\mathbf{q}^{inc} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2N}$$

ここに上付き文字  $T$  は転置を表す。

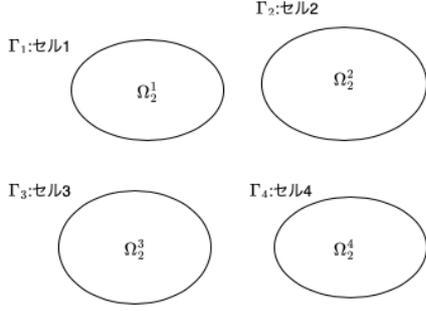
## 3. CBFM の適用

本節では、CBFM の定式化と Calderon の式に基づく前処理の定式化を行う。まず、新たに定義される基底関数 CBF を生成し、続いて式 (12) に CBFM を適用する。最後に、CBFM を適用した式に対して Calderon の式に基づく前処理を行う。

### 3.1. CBF の生成

CBFM では、まず境界を  $N^{\text{cell}}$  個の互いに交わらない部分集合に分割し（それぞれの部分集合をセルと呼ぶ）、それぞれのセルで新しい基底関数 CBF を生成する。ここで、本稿では境界を分割する際互いに交わらない部分境界をひとつのセルとすることを考え、連続した境界を複数のセルに分割しないこととする。連続する境界を複数のセルに分割する場合、以下で定式化する CBFM では精度の高い数値解が得られないことが知られている [7]。図 1 は境界をセルに分割する模式図である。

$$\Omega_1 = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega_2}$$



$$\Omega_2 = \Omega_2^1 \cup \Omega_2^2 \cup \Omega_2^3 \cup \Omega_2^4$$

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$$

図1 境界の分割方法の例

本稿では CBF を区分線形基底の線形結合で表す.  $n$  番目のセルの  $m$  番目の CBF を  $C_{nm}(\mathbf{x})$  とすると,  $C_{nm}(\mathbf{x})$  は  $n$  番目のセルに含まれる区分線形基底  $\psi_{\nu_{ni}}(\mathbf{x})$  と係数  $c_{nmi}$  を用いて次のように書ける.

$$C_{nm}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N_n} c_{nmi} \psi_{\nu_{ni}}(\mathbf{x})$$

ただし,  $N_n$  は  $n$  番目のセルに含まれる区分線形基底の数であり,  $\nu_{ni}$  は  $n$  番目のセルの  $i$  番目の区分線形基底の, 境界全体における通し番号を表している. 行列  $C_n$  を  $(C_n)_{mi} = c_{nmi}$  とする. 次の線形方程式を複数の入射波について解き, その解の係数を並べた行列に特異値分解など直交化の処理を施すことで  $u, q$  に対する二つの行列,  $C_n^u, C_n^q$  を決定する.

$$\mathbf{A}_{nn} \mathbf{b}_n = \mathbf{f}_n \quad (13)$$

$$\mathbf{A}_{nn} = \sum_{i=1,2} \begin{pmatrix} D_{inn} & -\epsilon_i \mathbf{S}_{inn} \\ \frac{1}{\epsilon_i} \mathbf{N}_{inn} & -D_{inn}^* \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{f}_n = \begin{pmatrix} -\mathbf{u}_n^{inc} \\ -\mathbf{q}_n^{inc} \end{pmatrix}$$

ただし,  $\mathbf{S}_{inn}$  などは式 (6) から式 (9) で定めた行列の部分行列であり,  $n$  番目のセルに含まれる区分線形基底のみからなる部分を表している. また  $\mathbf{f}_n$  は  $\mathbf{f}$  の,  $n$  番目のセルに対応する部分列である. 式 (13) は, 今考えている  $n$  番目のセルを全境界とした場合の線形方程式 (12) に対応する. 本論文では  $C_n$  を決定するための入射波に, 単位球面上に適当な間隔でサンプリングした  $s$  本の平面波を使用する.

$s$  本の入射波に対し同時に解を求める場合, 式 (13) は次のように書ける.

$$\mathbf{A}_n \mathbf{X}_n = \mathbf{F}_n, \quad \mathbf{X}_n, \mathbf{F}_n \in \mathbb{C}^{2N_n \times s} \quad (14)$$

$\mathbf{F}_n$  は  $s$  本の入射波それぞれに対応する, 式 (13) の右辺  $\mathbf{f}_n$  が並んだ行列である. また  $\mathbf{U}_n, \mathbf{Q}_n$  を次のように定める.

$$\mathbf{X}_n = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_n \\ \mathbf{Q}_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U}_n, \mathbf{Q}_n \in \mathbb{C}^{N_n \times s}$$

$\mathbf{U}_n, \mathbf{Q}_n$  は,  $s$  本の入射波に対する線形方程式 (14) を解くことで得られる  $s$  個の解の, 区分線形基底に対する係数の集合である. この得られた各  $s$  本の基底  $\mathbf{U}_n, \mathbf{Q}_n$  は一般に一次従属であるため, 直交化など何らかの操作を施して, CBF の区分線形基底に対する係数の集合,  $C_n^u, C_n^q$  を決定する必要がある.

$C_n^u, C_n^q$  と  $\psi_{\nu_{ni}}(\mathbf{x})$  を用いて,  $n$  番目のセルの  $m$  番目の CBF  $C_{nm}^u(\mathbf{x}), C_{nm}^q(\mathbf{x})$  は次のように表される.

$$C_{nm}^u(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N_n} (C_n^u)_{im} \psi_{\nu_{ni}}(\mathbf{x})$$

$$C_{nm}^q(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N_n} (C_n^q)_{im} \psi_{\nu_{ni}}(\mathbf{x})$$

本稿では,  $C_{nm}^u(\mathbf{x}), C_{nm}^q(\mathbf{x})$  が次の関係を満たすように,  $\mathbf{U}_n, \mathbf{Q}_n$  から  $C_n^u, C_n^q$  を構成する.

$$\int (C_{ni}^u(\mathbf{x}))^* C_{nj}^q(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \begin{cases} a_{ij} (\in \mathbb{R}^+) & (i=j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \quad (15)$$

ただし記号 (\*) は複素共役,  $\mathbb{R}^+$  は正の実数を表す. この要請は  $C_n^u, C_n^q$  がそれぞれ一次独立な基底から成るだけでなく, 互いに式 (15) の意味で双対基底を構成することを意味する.  $C_n^u, C_n^q$  を互いに双対になるように構成することの利点として Calderon の前処理が適用できることが挙げられる (詳細は 3.3 節で述べる).

以下に構成法を示す. まず, 行列  $\mathbf{G}_n$  を区分線形基底  $\psi_{\nu_{ni}}(\mathbf{x})$  の Gram 行列とする:

$$(\mathbf{G}_n)_{ij} := \int (\psi_{\nu_{ni}}(\mathbf{x}))^* \psi_{\nu_{nj}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

続いて,  $\mathbf{G}'_n$  を次のように定める.

$$\mathbf{G}'_n := \mathbf{U}_n^H \mathbf{G}_n \mathbf{Q}_n \in \mathbb{C}^{s \times s}$$

$\mathbf{G}'_n$  は  $\mathbf{U}_n, \mathbf{Q}_n$  が表す基底関数  $\varphi_{ni}^u, \varphi_{ni}^q$  の Gram 行列である.

$$(\mathbf{G}'_n)_{ij} = \int (\varphi_{ni}^u(\mathbf{x}))^* \varphi_{nj}^q(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

$$\varphi_{ni}^u(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N (\mathbf{U})_{ji} \psi_{\nu_{nj}}(\mathbf{x})$$

$$\varphi_{ni}^q(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N (\mathbf{Q})_{ji} \psi_{\nu_{nj}}(\mathbf{x})$$

この Gram 行列  $\mathbf{G}'_n$  に特異値分解を適用し, あらかじめ定めた閾値より小さい特異値を無視することにより, エルミート行列

$U_L, V_L \in \mathbb{C}^{s \times N_n^{\text{CBF}}}$  を得る;

$$\mathbf{G}'_n = \begin{pmatrix} U_L & U_S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma_L & \\ & \Sigma_S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_L^H \\ V_S^H \end{pmatrix} \quad (16)$$

$$\approx U_L \Sigma_L V_L^H$$

$\Sigma_L$  は閾値より大きい特異値を対角項にもつ  $N_n^{\text{CBF}} \times N_n^{\text{CBF}}$  の対角行列,  $\Sigma_S$  は閾値より小さい特異値を対角項にもつ対角行列である.

$U_L, V_L$  を用いて,  $C_n^u, C_n^q$  を次のように構成する.

$$C_n^u := U_n U_L \in \mathbb{C}^{N_n \times N_n^{\text{CBF}}}$$

$$C_n^q := Q_n V_L \in \mathbb{C}^{N_n \times N_n^{\text{CBF}}}$$

以上により, CBF  $C_{nm}^u(\mathbf{x}), C_{nm}^q(\mathbf{x})$  の  $\psi_i(\mathbf{x})$  に対する係数の集合  $C_n^u, C_n^q$  が得られた.

$C_{nm}^u(\mathbf{x}), C_{nm}^q(\mathbf{x}), m = 1, 2, \dots, N_n^{\text{CBF}}$  が (15) の関係を満たすことは, 次のようにして確認できる.

$$\begin{aligned} (C_n^u)^H \mathbf{G}_n C_n^q &= U_L^H U_n^H \mathbf{G}_n Q_n V_L \\ &= U_L^H U_L \Sigma_L V_L^H V_L \\ &= \Sigma_L \end{aligned}$$

一方で,  $C_{nm}^u(\mathbf{x}), C_{nm}^q(\mathbf{x})$  は  $\varphi_{ni}^u(\mathbf{x}), \varphi_{ni}^q(\mathbf{x})$  を用いて次のように書けるので,

$$C_{nm}^u(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^s (C^u)_{im} \varphi_{ni}^u(\mathbf{x})$$

$$C_{nm}^q(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^s (C^q)_{im} \varphi_{ni}^q(\mathbf{x})$$

$$\begin{aligned} \left( (C_n^u)^H \mathbf{G}_n C_n^q \right)_{ij} &= \left( U_L^H U_n^H \mathbf{G}_n Q_n V_L \right)_{ij} \\ &= \left( U_L^H \mathbf{G}'_n V_L \right)_{ij} \\ &= \int (C_{ni}^u(\mathbf{x}))^* C_{nj}^q(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \end{aligned}$$

である. 行列  $\mathbf{G}''_n$  を次のように定義すると,

$$\left( \mathbf{G}''_n \right)_{ij} := \int (C_{ni}^u(\mathbf{x}))^* C_{nj}^q(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

$\mathbf{G}''_n$  は対角成分が全て正の対角行列となり,  $C_{nm}^u(\mathbf{x}), C_{nm}^q(\mathbf{x})$  は (15) の関係を満足している.

### 3.2. CBFM を適用した線形方程式

まず,  $C^{uq}, C^{qu}$  を次のように定義する.

$$C^{uq} := \begin{pmatrix} C_1^u & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & C_{N_{\text{cell}}}^u & & & \\ & & & C_1^q & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & C_{N_{\text{cell}}}^q \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2N \times 2N^{\text{CBF}}}$$

$$C^{qu} := \begin{pmatrix} C_1^q & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & C_{N_{\text{cell}}}^q & & & \\ & & & C_1^u & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & C_{N_{\text{cell}}}^u \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2N \times 2N^{\text{CBF}}}$$

ここで,

$$N^{\text{CBF}} = \sum_{i=1}^{N_{\text{cell}}} N_i^{\text{CBF}}$$

である. 次の式により,  $C^{uq}, C^{qu}$  を用いて, 線形方程式 (12) の基底を区分線形基底から CBF に変換する.

$$(C^{qu})^H \mathbf{A} C^{uq} \mathbf{b}_{\text{CBF}} = (C^{qu})^H \mathbf{f} \quad (17)$$

ただし,

$$\begin{aligned} (C^{qu})^H \mathbf{A} C^{uq} &\in \mathbb{C}^{2N^{\text{CBF}} \times 2N^{\text{CBF}}} \\ \mathbf{b}_{\text{CBF}}, (C^{qu})^H \mathbf{f} &\in \mathbb{C}^{2N^{\text{CBF}}} \end{aligned}$$

である.  $\mathbf{b}_{\text{CBF}}$  は線形方程式 (12) の解を CBF を基底として表した時の係数の組であり, 次の式で元の区分線形基底  $\psi_i(\mathbf{x})$  の係数の組  $\mathbf{b}$  を得る.

$$\mathbf{b} = C^{uq} \mathbf{b}_{\text{CBF}} \quad (18)$$

$(C^{qu})^H \mathbf{A} C^{uq}$  の成分は, 次のように書き下すことができる.

$$\begin{aligned} (C^{qu})^H \mathbf{A} C^{uq} &= \sum_{i=1,2} \begin{pmatrix} D_i^{qu} & -\varepsilon_i S_i^{qq} \\ \frac{1}{\varepsilon_i} N_i^{uu} & -D_i^{*uq} \end{pmatrix} \\ (S_i^{qq})_{mn} &= \int (\hat{C}_m^q(\mathbf{x}))^* \int \hat{C}_n^q(\mathbf{y}) G_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS_y dS_x \\ (D_i^{qu})_{mn} &= \int (\hat{C}_m^q(\mathbf{x}))^* \int \hat{C}_n^u(\mathbf{y}) \frac{\partial G_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_y} dS_y dS_x \\ (D_i^{*uq})_{mn} &= \int (\hat{C}_m^u(\mathbf{x}))^* \int \hat{C}_n^q(\mathbf{y}) \frac{\partial G_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_x} dS_y dS_x \\ (N_i^{uu})_{mn} &= \int (\hat{C}_m^u(\mathbf{x}))^* \int \hat{C}_n^u(\mathbf{y}) \frac{\partial^2 G_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_y \partial \mathbf{n}_x} dS_y dS_x \end{aligned}$$

これは, 行列  $\mathbf{A}$  で積分作用素の離散化に用いている基底を, 区分線形基底  $\psi_i(\mathbf{x})$  から CBF  $\hat{C}_i^u(\mathbf{x}), \hat{C}_i^q(\mathbf{x})$  に取り替えたものであると理解できる. ただし,  $\hat{C}_i^u(\mathbf{x}), \hat{C}_i^q(\mathbf{x})$  は, 境界を  $N^{\text{cell}}$  個に分割したそれぞれのセルで生成した  $C_{ni}^u(\mathbf{x}), C_{ni}^q(\mathbf{x})$  に, 新たに境界全体にわたって通し番号を与えたものである.

### 3.3. Calderon の前処理

積分作用素 (2)~(5) は, 次の Calderon の式を満たすことが知られている [8].

$$\begin{pmatrix} \mathcal{D}_i & -\mathcal{S}_i \\ \mathcal{N}_i & -\mathcal{D}_i^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{D}_i & -\mathcal{S}_i \\ \mathcal{N}_i & -\mathcal{D}_i^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\mathcal{I}}{4} & \\ & \frac{\mathcal{I}}{4} \end{pmatrix} \quad (19)$$

ここで,  $\mathcal{I}$  は単位作用素とする. 今, (19) の性質により,

$$\mathbf{A}_{quuq} (\mathbf{G}_{quuq})^{-1} \mathbf{A}_{quuq} (\mathbf{G}_{quuq})^{-1} \quad (20)$$

は良条件な行列になると考えられる. ここに,  $\mathbf{A}_{quuq}$ ,  $\mathbf{G}_{quuq}$  は

$$\mathbf{A}_{quuq} = (\mathbf{C}^{qu})^H \mathbf{A} \mathbf{C}^{uq}$$

$$\mathbf{G}_{quuq} = \begin{pmatrix} \int (\hat{C}_i^q(\mathbf{x}))^* \hat{C}_j^u(\mathbf{x}) dS_x & \\ & \int (\hat{C}_i^u(\mathbf{x}))^* \hat{C}_j^q(\mathbf{x}) dS_x \end{pmatrix}$$

である. 今, セル同士は互いに交わらない境界であるから  $\mathbf{G}_{quuq}$  は各セルの Gram 行列を対角要素に持つブロック対角行列

$$\mathbf{G}_{quuq} = \begin{pmatrix} \int (C_{1i}^q(\mathbf{x}))^* C_{1j}^u(\mathbf{x}) dS_x & & & \\ & \ddots & & \\ & & \int (C_{1i}^u(\mathbf{x}))^* C_{1j}^q(\mathbf{x}) dS_x & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (\mathbf{G}_1'')^H & & & \\ & \ddots & & \\ & & (\mathbf{G}_{N_{\text{cell}}}'' )^H & \\ & & & \mathbf{G}_1'' \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \mathbf{G}_{N_{\text{cell}}}'' \end{pmatrix}$$

となる.  $\mathbf{G}_n''$  は対角行列であったので,  $\mathbf{G}_{quuq}$  も対角行列である. さらに, 式 (20) は  $\mathbf{A}_{quuq} (\mathbf{G}_{quuq})^{-1}$  の二乗の形になっているため  $\mathbf{A}_{quuq} (\mathbf{G}_{quuq})^{-1}$  も良条件な行列であると考えられる. 以上より, 式 (17) に次のような前処理を施すと数値計算をする上で反復回数の削減が見込める.

$$(\mathbf{C}^{qu})^H \mathbf{A} \mathbf{C}^{uq} (\mathbf{G}_{quuq})^{-1} \mathbf{y} = (\mathbf{C}^{qu})^H \mathbf{f} \quad (21)$$

$$\mathbf{b}_{\text{CBF}} = (\mathbf{G}_{quuq})^{-1} \mathbf{y}$$

## 4. 数値計算

本節では, 式 (12) を素朴に解いた場合と, Calderon の前処理を施した CBFM の式 (21) を解いた場合とで結果を比較する.

### 4.1. 境界が単一の球の場合

まず, 境界が単一の球体である場合について数値計算を行う. ここでは境界の分割は行わず, 球体全体がひとつのセルであるとして CBFM を適用する.

#### 4.1.1. 問題設定

境界  $\Gamma$  を, 原点を中心とする直径 1 の球とする.  $k_1 = 0.25\pi$ ,  $k_2 = \sqrt{\varepsilon_r} k_1$  とし, 様々な  $\varepsilon_r$  に対して数値計算を行った. 離散化に用いる区分線形基底の数  $N$  は  $N = 913$  とした. また, サンプリングする入射波の間隔は, 特に記述が無ければ  $\theta$  方向に  $N_\theta = 6$  分割,  $\phi$  方向に  $N_\phi = 12$  分割し,  $s = 72$  とした.  $s$  本の平面波の伝播方向  $(\theta, \phi)$  は

$$(\theta, \phi) = \left( \frac{\pi}{N_\theta} n_\theta, \frac{2\pi}{N_\phi} n_\phi \right)$$

$$(n_\theta = 0, 1, \dots, N_\theta - 1, n_\phi = 0, 1, \dots, N_\phi - 1)$$

である.

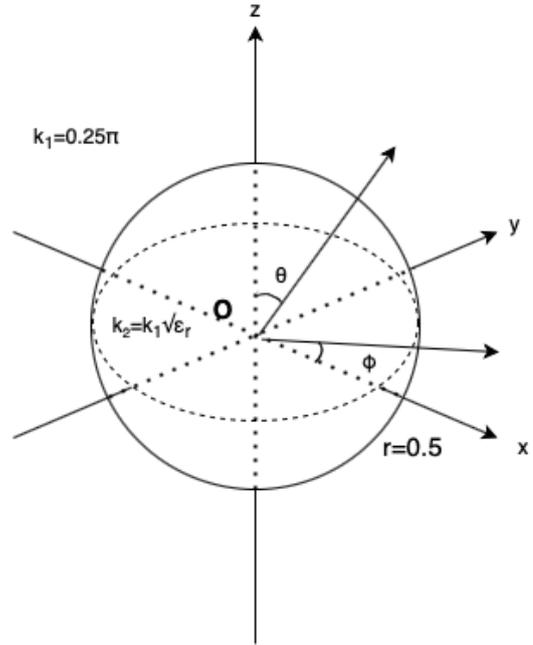


図 2 問題設定

図 2 に問題設定を示す. 線形方程式の反復解法には GMRES を用い, 許容誤差を  $10^{-10}$  とした. また, 簡単のため行列の計算には高速多重極法などの高速化を用いず全ての要素を直接計算した. 計算精度の検証にあたっては, CBFM を用いた境界要素法による数値解 (式 (17), (18) の

解  $\mathbf{b}$ ) を  $\mathbf{a}$ , 区分線形基底を用いた従来の境界要素法の数値解 (式 (12) の解  $\mathbf{b}$ ) を  $\mathbf{a}_t$  として, 以下の式で与えられる相対誤差を用いた。ただし, 記号  $\|\cdot\|_2$  は  $l^2$  ノルムを表す。

$$\eta = \frac{\|\mathbf{a} - \mathbf{a}_t\|_2}{\|\mathbf{a}_t\|_2} \quad (22)$$

全ての検証は, 伝播方向が  $(\theta, \phi) = (\frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{10})$  である平面波を入射波とする問題で行った。

#### 4.1.2. 妥当性の検証

上記の問題設定で実験を行う前に, 計算手法の妥当性を検証する。具体的には, サンプル数を増やしたとき, それに伴って CBFM を用いた場合とそうでない場合の計算結果の相対誤差が減少していくかを確認する。サンプル数  $s$  は表 1 の通りである。また, GMRES の許容誤差を  $10^{-15}$  とし, 式 (16) において使用する特異値は, 最大特異値との比が  $10^{-15}$  以上のものとした。

図 3 は縦軸を相対誤差, 横軸をサンプル数としたグラフである。このグラフから, サンプル数の増加に従って相対誤差が減少していることがわかる。このことから, 計算手法の妥当性が確認できた。また, いずれの  $\varepsilon_r$  についてもある程度サンプル数を増やすと相対誤差に変化が見られなくなっているが, これは解を表現するために十分な数の CBF があるため, これ以上 CBF の数を増やしても数値解の精度に影響を与えないためだと考えられる。

表 1 サンプルングに用いた  $N_\theta, N_\phi$  とサンプル数  $s$

$N_\theta$	$N_\phi$	$s$
2	4	8
3	6	18
4	8	32
5	10	50
6	12	72
7	14	98
8	16	128
9	18	162

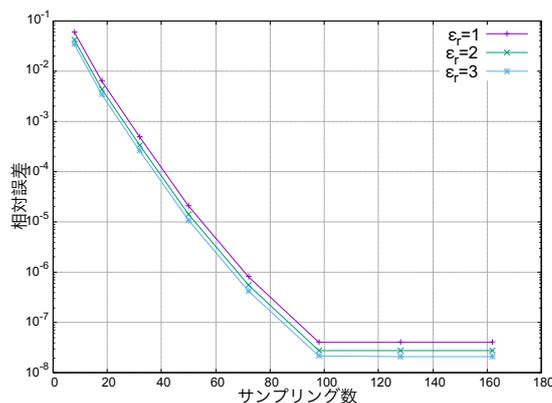


図 3 サンプル数と相対誤差

#### 4.1.3. 計算精度の検証

CBFM を用いた場合の計算精度について検証する。図 4 は  $\varepsilon_r = 1, 2, 3$  の場合の, 式 (16) における特異値を, 最大値  $\sigma_M$  で正規化し大きいものから順に並べたグラフである。横軸が特異値を大きいものから降順に並べた番号, 縦軸が最大特異値で正規化された特異値の大きさを表している。このグラフから,  $\varepsilon_r$  の値によらず, 最大特異値で正規化された特異値はその大きさごとにグループを形成していることがわかる。値が大きい順に数えて  $i$  番目のグループに含まれる特異値の数は  $i$  次の 3 次元球面調和関数の空間の次元と一致している。以後の検証では, 図 4 において上から 4 番目までのグループに含まれる 25 個までの特異値を CBF の生成に用いることにする。

表 2 は, 4 次までの球面調和関数の数に相当する, 大きい順に 25 番までの特異値を用いて CBF を生成した場合の, CBFM を用いない場合の結果との相対誤差  $\eta$  を示した表である。いずれの  $\varepsilon_r$  についても相対誤差  $10^{-5}$  程度の精度で解が求まっている。

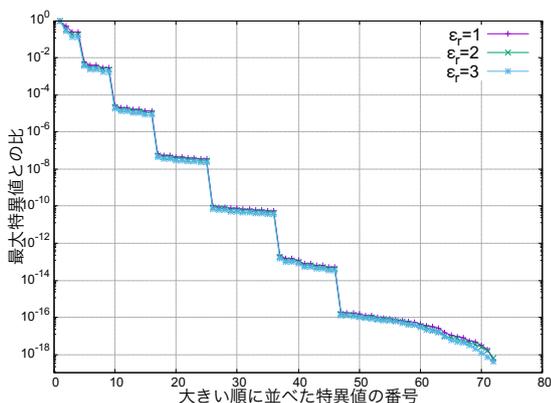


図4 最大特異値で正規化された特異値の大きさの分布

表3 図5における計算の条件

	計算手法	$\epsilon_r$
Calc1	Original	1
Calc2	Original	2
Calc3	Original	3
Calc4	CBFM&Calderon	1
Calc5	CBFM&Calderon	2
Calc6	CBFM&Calderon	3
Calc7	CBFM	1
Calc8	CBFM	2
Calc9	CBFM	3

表2 25番までの特異値でCBFを生成した場合の相対誤差

$\epsilon_r$	相対誤差
1	3.090e-5
2	2.117e-5
3	1.615e-5

#### 4.1.4. 反復回数の検証

元の境界要素法の式(12)とCalderonの前処理を施したCBFMの式(21)を計算し、反復回数を比較する。また、Calderonの前処理による効果を検証するため、Calderonの前処理を行わないCBFMの式(17)についても計算し比較を行う。

図5は、表3に示すそれぞれの場合についてのGMRESの反復回数を表すグラフであり、横軸が反復回数、縦軸が残差ノルムである。表3の計算手法の欄は、'Original'が元の境界要素法の式(12)、'CBFM&Calderon'がCBFMとCalderonの前処理を行う式(21)、'CBFM'がCalderonの前処理を行わないCBFMの式(17)を計算したことを表している。

図5から、CBFMを用いた場合、(12)を解いた場合よりも顕著に反復回数が少なくなっていることがわかる。また、Calderonの前処理を行うことで、さらに少ない反復回数で収束していることがわかる。

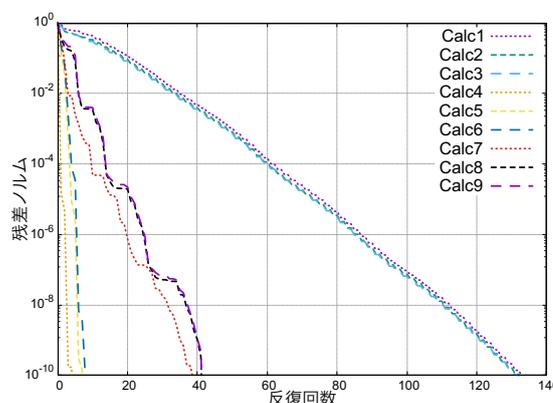


図5 反復回数

## 4.2. 境界が複数の球の場合

次に、領域が複数の球体である場合について数値計算を行う。ここでは、各球体を一つのセルとしてCBFを生成する。

### 4.2.1. 問題設定

直径1の球が、中心間距離1.5で $x, y$ 軸方向に2つずつ、計4つ並んだものを領域 $\Omega_2$ とする。各球面をひとつのセルとし、 $N^{\text{cell}} = 4$ でCBFMを適用する。また $\epsilon_r = 3$ とし、 $k_i$ や入射波は前小節と同様であるとする。ひとつの球に含まれる区分線形基底の数を前小節と同様913とし、 $\Gamma$ 全体に含まれる区分線形基底の数を $N = 913 \times 4 = 3652$ とした。線形方程式の反復解法にはGMRESを用い、許容誤差を $10^{-10}$ とした。また計算精度の検証にあたっては前

節同様 CBFM を用いた境界要素法の数値解と従来の境界要素法の数値解の相対誤差 (式 (22)) を用いた。

#### 4.2.2. 計算精度の検証

CBFM を用いた場合の計算精度について検証する。図 6 は入射波のサンプリング数ごとの、CBF の生成に用いた特異値の数と相対誤差のグラフである。横軸が CBF の生成に用いた特異値の数であり、縦軸が相対誤差である。またそれぞれのグラフは入射波のサンプリング数を 50, 72, 98(表 3) とした場合のものである。特異値の数を増やすほど相対誤差が小さくなるが、ある程度まで増やすとほとんど相対誤差の減少が見られなくなっている。また、サンプリング数を大きくするほど相対誤差の減少が特異値の数より大きくした場合でも見られることがわかる。

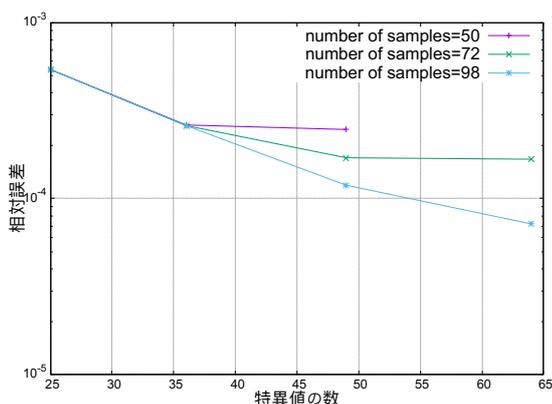


図 6 特異値の数と相対誤差の関係

境界を単一の球としていた前小節と同様の設定であるサンプリング数 72, 使用する特異値を 25 個とした場合, 相対誤差は  $5.398 \times 10^{-4}$  となった。

#### 4.2.3. 反復回数の検証

従来の境界要素法の式 (12) と CBFM と Calderon の前処理を適用した式 (21) について, GMRES の反復回数を比較する。ここで, 入射波のサンプリング数は 72, 使用する特異値の数は 25 とした。図 7 は CBFM と Calderon を適用した式 (21) と従来の式 (12) での反復回数を表すグラフであり, 横軸が反復回数, 縦軸が GMRES の残差ノルムである。CBFM と Calderon の前処理を行うことで, 反復

回数が削減できていることがわかる。

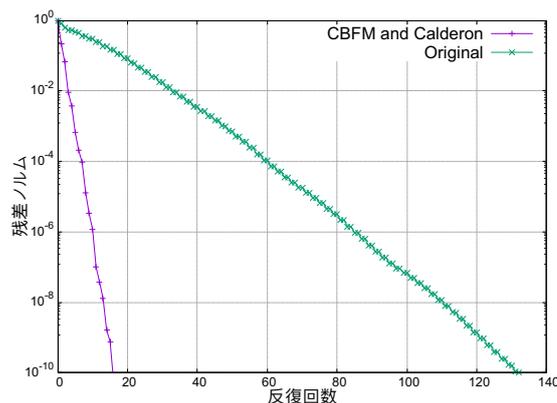


図 7 反復回数

## 5. 結言

本稿では, 3 次元 Helmholtz 方程式に対する境界要素法に CBFM を適用する基礎的研究として, CBFM の定式化といくつかの問題に対する数値計算を行い, CBFM を用いない従来の境界要素法と結果を比較し, 十分な計算精度を保って反復計算の反復回数を短縮できることを示した。とくに提案手法では行列 (15) を特異値分解により直交化することで, この行列が対角行列になるという意味での基底関数の直交性を保ちつつ, 基底関数を支配的なものから順に構成することができる。

一方で, 本来 CBFM は多数の入射方向の入射波に対する散乱問題を同じ CBF で解くことで, 従来法より高速に数値解を求める方法であるが, 本稿では 1 方向入射の問題しか解いておらず, また高速多重極法などの係数行列計算の高速化法を実装できていないため, 計算時間が評価できていない。今後の課題として, 行列の計算に高速化手法を導入し, 大規模問題において提案法の計算時間を検討することが挙げられる。また, 今回は元の基底関数を全て区分線形基底としたが, 区分線形基底以外の基底関数を用いる場合, あるいは複数の種類の基底関数を用いる場合の解析も, 今後の課題である。セルサイズやセル間距離, 各種パラメータの値が CBFM の性能に与える影響の解析や randomized SVD 等を利用することで本手法をさらに高

速化することなども今後の課題として挙げられる。

#### 参考文献

- (1) V. Prakash, and R. Mittra, *Characteristic basis function method: a new technique for efficient solution of method of moments matrix equations*, *Microw. Opt. Techn. Let.*, vol.36, no.2, pp.95-100, 2003.
- (2) R. Mittra and K. Du, *Characteristic basis function method for iterationfree solution of large method of moments problems*, *Progress In Electromagnetics Research B*, vol.6, pp.307-336, Apr. 2008.
- (3) R. Maaskant, R. Mittra, and A. G.Tijhuis, *Fast analysis of large antennas arrays using the characteristic basis function method and the adaptive cross approximation algorithm*, *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol.56, no.11, pp.3440-3451, Nov. 2008.
- (4) E. Garcia, C. Delgado, I. G. Diego, and M. F. Catedra, *An iterative solution for electrically large problems combining the characteristic basis function method and the multilevel fast multipole algorithm*, *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol.56, no.8, pp.2363-2371, Aug. 2008.
- (5) X. Chen, C. Gu, J. Ding, Z. Li, and Z. Niu, *Multilevel Fast Adaptive Cross-Approximation Algorithm With Characteristic Basis Functions*, *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol.63, no.9, pp.3994-4002, Sep. 2015.
- (6) T. Tanaka, Y. Inasawa, Y. Nishioka, H. Miyashita, *Improved primary characteristic basis function method for monostatic radar cross section of specific coordinate plane*, *IEICE Trans. Electron.* vol.99-C, no.1, pp.28-35, Jan. 2016.
- (7) Tai Tanaka, Kazuki Niino, Naoshi Nishimura, *Characteristic Basis Function Method Combined with Calderón Multiplicative Preconditioner for PMCHWT Formulation*, arXiv:2111.11058, 2021.
- (8) Jean-Claude Nédélec, *Acoustic and Electromagnetic Equations : Integral Representations for Harmonic Problems*, Springer, 2001.

