

レーザ干渉計による計測データを用いた 弾性材料の非破壊評価のための トポロジー導関数を用いた欠陥決定解析

An identification of defects using topological derivatives for nondestructive evaluation
of elastic materials with laser interferometry data

中園 昂志¹⁾, 吉川 仁²⁾

Takashi NAKAZONO and Hitoshi YOSHIKAWA

1) 京都大学大学院 情報学研究科 (〒 606-8501 京都市左京区吉田本町, E-mail: nakazono.takashi.54a@st.kyoto-u.ac.jp)

2) 京都大学大学院 情報学研究科 (〒 606-8501 京都市左京区吉田本町, E-mail: yoshikawa.hitoshi.5u@kyoto-u.ac.jp)

Identification of defects using topological derivatives with laser measurement data is considered. In previous studies of an identification of defects in an elastic material using topological derivatives, the topological derivatives are defined with the displacement vectors measured on the surface of the material. However, only the normal component of the particle velocity on the surface is able to be obtained with the actual laser ultrasonic measurement. In this study, topological derivatives are calculated using normal particle velocities on the surface of the material. We solve simple defect identification problems using the proposed topological derivatives. We can show that the defects are determined with sufficient accuracy using the topological derivatives calculated with the normal component of the particle velocity on the surface.

Key Words: NDE, topology derivative, TD-BIEM, laser measurement

1. はじめに

Bonnet による 3 次元散乱波動場におけるトポロジー導関数の定式化⁽¹⁾以降, トポロジー導関数を用いた最適化手法を応用した散乱体決定解析に関する研究が注目されている. 具体的方法としては, 例えば近藤らは周波数域の 3 次元スカラー波動問題に対して, 推定される散乱体の配置をレベルセット法⁽²⁾により再帰的に更新することで正解の散乱体配置を求めている⁽³⁾. また, 時間域のスカラー波動問題についても同様に, 吉川, 寺沢によるレベルセット法を用いた散乱体の決定解析⁽⁴⁾などがある.

本研究では, レーザ超音波計測による波形データを用いた定量的非破壊評価への応用を見越し, 弾性体を対象としたトポロジー導関数を用いた散乱体決定解析を考える. スカラー波動問題における先行研究⁽³⁾⁽⁴⁾と同様に, 弾性体を対象とした動弾性波動問題においてもトポロジー導関数及びレベルセット法を用いた散乱体決定解析手法が適用できることが期待される.

一方で, これまでに提案されている弾性体に対するトポロジー導関数を用いた散乱体決定解析では, 領域の境界上での変位 \mathbf{u} の全ての成分を用いてトポロジー導関数が定義されている⁽¹⁾. 実際のレーザ超音波計測では, 計測対象物表面をレーザ干渉計を用いて計測する. レーザ干渉計は, 機器から照射されるレーザと対象物表面で反射して機器に戻ってくるレーザとの位相差よりレーザ照射点の粒子速度を計測する. 照射点からの散乱レーザ光が多く戻ってくる法線方向の粒子速度については精度良く計測が可能である. 一方で, 粒子速度の水平速度成分の計測は, 同一の計測点でレーザを法線方向と, 法線方向からある一定角度傾けた方向から照射し, 2 つの計測データから水平速度成分を取り出す方法が用いられている. レーザ照射方向が法線方向から少しでも傾くと, 対象物からの散乱レーザ光の受光量が減少し, 安定したレーザ計測が行えないといった問題がある. また, 散乱レーザ光を受光するために照射角度も法線方向から 17° 程度までしか傾けることができず⁽⁵⁾, s/n 比の悪い斜め方向からの計測値から取り出す粒子速度の水平速度成分の信頼度は高くない.

そこで、本研究では実際のレーザ超音波計測で十分な精度で計測可能な材料表面の粒子速度成分のみを用いたトポロジー導関数を定義し、レベルセット法の適用を見据えて、散乱体の決定精度について検証する。なお、本論文では2次元の弾性体を扱うこととする。

2. トポロジー導関数を用いた散乱体決定解析

まずは、Bonnetの研究⁽¹⁾で示された、弾性材料を対象としたトポロジー導関数を用いた散乱体決定解析について記述する。

2.1. 目的汎関数

Fig.1のように、内部に複数の散乱体を持つ2次元の等方弾性体 Ω における初期値境界値問題を考える。 Ω の外部境界を S 、内部の複数の散乱体の占める領域の集合を D 、 D の境界を Γ 、 $\Omega_\Gamma := \Omega \setminus D$ としたときの変位 $\mathbf{u}^\Gamma(\boldsymbol{\xi}, t)$ についての動弾性方程式の初期値境界値問題を $\mathcal{P}(\Gamma)$ とする。

$\mathcal{P}(\Gamma)$:

$$\begin{cases} \Delta^* \mathbf{u}^\Gamma(\boldsymbol{\xi}, t) = \rho \ddot{\mathbf{u}}^\Gamma(\boldsymbol{\xi}, t) & (\boldsymbol{\xi} \in \Omega_\Gamma, t > 0) & (1a) \\ \mathbf{t}[\mathbf{u}^\Gamma](\boldsymbol{\xi}, t) = \mathbf{p}(\boldsymbol{\xi}, t) & (\boldsymbol{\xi} \in S, t > 0) & (1b) \\ \mathbf{t}[\mathbf{u}^\Gamma](\boldsymbol{\xi}, t) = \mathbf{0} & (\boldsymbol{\xi} \in \Gamma, t > 0) & (1c) \\ \mathbf{u}^\Gamma(\boldsymbol{\xi}, 0) = \dot{\mathbf{u}}^\Gamma(\boldsymbol{\xi}, 0) = \mathbf{0} & (\boldsymbol{\xi} \in \Omega_\Gamma) & (1d) \end{cases}$$

ここに、 Δ^* は弾性方程式の微分作用素、 \mathbf{t} はトラクションであり、それぞれ

$$(\Delta^* \mathbf{u})_i = C_{ijkl} u_{l,kj} \quad (2)$$

$$\mathbf{t}[\mathbf{u}]_i = C_{ijkl} u_{l,k} n_j \quad (3)$$

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (4)$$

である。また、 \mathbf{p} は既知ベクトル、 \mathbf{n} は境界上の外向き単位法線ベクトル、 λ, μ はラメ定数、 ρ は弾性体の密度、 δ_{ij} はクロネッカーのデルタ、 $(\cdot)_{,i}$ は空間座標による微分 $\frac{\partial}{\partial \xi_i}$ である。

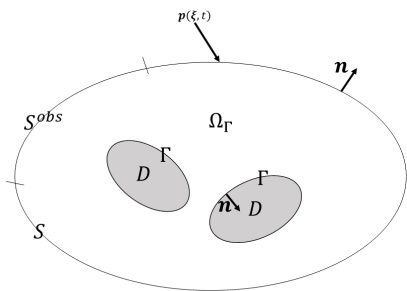


Fig. 1 初期値境界値問題 $\mathcal{P}(\Gamma)$

ここで、散乱体の配置 Γ によって求まる次の目的汎関数 $J(\Omega_\Gamma)$ を導入する。

$$J(\Omega_\Gamma) := \int_0^T \int_{S^{\text{obs}}} \varphi(\mathbf{u}^\Gamma(\boldsymbol{\xi}, t), \boldsymbol{\xi}, t) dl(\boldsymbol{\xi}) dt \quad (5)$$

$$\varphi(\mathbf{w}, \boldsymbol{\xi}, t) := |\mathbf{w} - \mathbf{u}^{\text{true}}(\boldsymbol{\xi}, t)|^2 \quad (6)$$

ここに、 \mathbf{u}^{true} は正解の散乱体配置 Γ_{true} での初期値境界値問題 $\mathcal{P}(\Gamma_{\text{true}})$ の解であり、 Ω の境界の一部 $S^{\text{obs}} \subset S$ で計測できているとする。

導入した目的汎関数 $J(\Omega_\Gamma)$ を最小とする散乱体配置 Γ を求めることで、散乱体の数、位置、形状を決定する逆解析を考える。トポロジー導関数を用いた散乱体決定解析では、散乱体配置 Γ に加えて、Fig.2のように、中心 \mathbf{x}^0 、半径 ϵ の微小な円形散乱体 D_ϵ が追加された問題 $\mathcal{P}(\Gamma_\epsilon)$ を考える。ここに、 $\Gamma_\epsilon = \Gamma + \partial D_\epsilon$ である。トポロジー導関数 $\mathcal{T}(\mathbf{x}^0)$ を

$$\mathcal{T}(\mathbf{x}^0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi \epsilon^2} \{J(\Omega_{\Gamma_\epsilon}) - J(\Omega_\Gamma)\} \quad (7)$$

と定義する。点 \mathbf{x}^0 が正解の散乱体の配置の内点であれば、目的汎関数 J は小さくなる。つまり、トポロジー導関数 $\mathcal{T}(\mathbf{x}^0)$ は負になるはずである。この考えに基づき、値が負となるトポロジー導関数を持つ点とその点でのトポロジー導関数の値の分布を用いて散乱体の数、位置、形状を推定する。

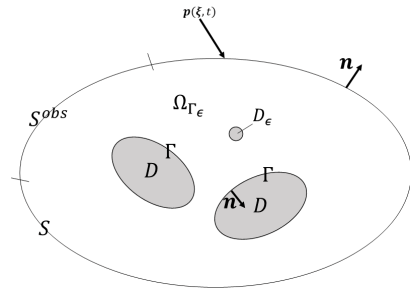


Fig. 2 微小な円形散乱体 D_ϵ が追加された初期値境界値問題 $\mathcal{P}(\Gamma_\epsilon)$

2.2. トポロジー導関数

初期値境界値問題 $\mathcal{P}(\Gamma)$ の随伴問題 $\hat{\mathcal{P}}(\Gamma)$ を以下で定める。

$\hat{\mathcal{P}}(\Gamma)$:

$$\begin{cases} \Delta^* \hat{\mathbf{u}}^\Gamma(\boldsymbol{\xi}, t) = \rho \ddot{\hat{\mathbf{u}}^\Gamma}(\boldsymbol{\xi}, t) & (\boldsymbol{\xi} \in \Omega_\Gamma, t > 0) & (8a) \\ \mathbf{t}[\hat{\mathbf{u}}^\Gamma](\boldsymbol{\xi}, t) & & \\ = \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{w}}(\mathbf{u}^\Gamma(\boldsymbol{\xi}, T-t), \boldsymbol{\xi}, T-t) & (\boldsymbol{\xi} \in S^{\text{obs}}, t > 0) & (8b) \\ \mathbf{t}[\hat{\mathbf{u}}^\Gamma](\boldsymbol{\xi}, t) = \mathbf{0} & (\boldsymbol{\xi} \in S \setminus S^{\text{obs}}, t > 0) & (8c) \\ \mathbf{t}[\hat{\mathbf{u}}^\Gamma](\boldsymbol{\xi}, t) = \mathbf{0} & (\boldsymbol{\xi} \in \Gamma, t > 0) & (8d) \\ \hat{\mathbf{u}}^\Gamma(\boldsymbol{\xi}, 0) = \dot{\hat{\mathbf{u}}^\Gamma}(\boldsymbol{\xi}, 0) = \mathbf{0} & (\boldsymbol{\xi} \in \Omega_\Gamma) & (8e) \end{cases}$$

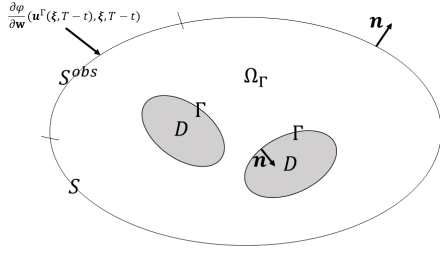


Fig. 3 随伴問題 $\hat{\mathcal{P}}(\Gamma)$

このとき、トポロジー導関数 $\mathcal{T}(\mathbf{x}^0)$ は元の問題 $\mathcal{P}(\Gamma)$ の解 \mathbf{u}^Γ 、及び随伴問題 $\hat{\mathcal{P}}(\Gamma)$ の解 $\hat{\mathbf{u}}^\Gamma$ により、

$$\mathcal{T}(\mathbf{x}^0) = \left(A_{ijkl} \sigma[\hat{\mathbf{u}}^\Gamma]_{ij} * \sigma[\mathbf{u}^\Gamma]_{kl} + \rho \hat{u}_k^\Gamma * \dot{u}_k^\Gamma \right) (\mathbf{x}^0, T) \quad (9)$$

で求まる⁽¹⁾⁽⁶⁾。ここに、

$$\sigma[\mathbf{w}]_{ij} = C_{ijkl} w_{l,k} \quad (10)$$

$$A_{ijkl} = -\frac{1-\nu}{2\mu(1+\nu)} \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{1-\nu}{\mu} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (11)$$

であり、 $(*)$ は時間についての畳み込み、 ν はポアソン比である。

3. 計測可能なレーザー超音波計測データを用いたトポロジー導関数による散乱体決定解析

3.1. 計測可能なレーザー超音波計測データを用いたトポロジー導関数

随伴問題の境界条件 (8b) 式右辺は

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{w}}(\mathbf{u}^\Gamma(\boldsymbol{\xi}, T-t), \boldsymbol{\xi}, T-t) \\ & = 2 \left(\mathbf{u}^\Gamma(\boldsymbol{\xi}, T-t) - \mathbf{u}^{\text{true}}(\boldsymbol{\xi}, T-t) \right) \end{aligned} \quad (12)$$

である。一方で、レーザー干渉計を用いたレーザー超音波計測で十分な精度で測定できるのは対象物表面の法線方向の粒子速度 $\dot{u}^{\text{obs}}(\boldsymbol{\xi}, t) = \dot{\mathbf{u}}^{\text{true}}(\boldsymbol{\xi}, t) \cdot \mathbf{n}(\boldsymbol{\xi})$ であり、接線方向の成分は精度よく計測できない。そのため、(8b) 式はこのままの形で計算することはできない。

そこで、目的汎関数を次のように計測可能な法線成分 \dot{u}^{obs} で構成する。

$$\tilde{J}(\Omega_\Gamma) := \int_0^T \int_{S^{\text{obs}}} \tilde{\varphi}(\dot{\mathbf{u}}^\Gamma(\boldsymbol{\xi}, t), \boldsymbol{\xi}, t) d\boldsymbol{\xi} dt \quad (13)$$

$$\tilde{\varphi}(\mathbf{w}, \boldsymbol{\xi}, t) := \left\{ \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}(\boldsymbol{\xi}) - \dot{u}^{\text{obs}}(\boldsymbol{\xi}, T-t) \right\}^2 \quad (14)$$

このとき、(8b) 式及び随伴問題は次のようになる。

$$\begin{aligned} & t[\hat{\mathbf{u}}^\Gamma](\boldsymbol{\xi}, t) \\ & = \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \mathbf{w}}(\dot{\mathbf{u}}^\Gamma(\boldsymbol{\xi}, T-t), \boldsymbol{\xi}, T-t) \\ & = 2 \left\{ \dot{\mathbf{u}}^\Gamma(\boldsymbol{\xi}, T-t) \cdot \mathbf{n}(\boldsymbol{\xi}) - \dot{u}^{\text{obs}}(\boldsymbol{\xi}, T-t) \right\} \mathbf{n}(\boldsymbol{\xi}) \end{aligned} \quad (8b')$$

$\tilde{\mathcal{P}}(\Gamma)$:

$$\begin{cases} \Delta^* \hat{\mathbf{u}}^\Gamma(\boldsymbol{\xi}, t) = \rho \ddot{\mathbf{u}}^\Gamma(\boldsymbol{\xi}, t) & (\boldsymbol{\xi} \in \Omega_\Gamma, t > 0) & (15a) \\ t[\hat{\mathbf{u}}^\Gamma](\boldsymbol{\xi}, t) & & \\ = \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \mathbf{w}}(\dot{\mathbf{u}}^\Gamma(\boldsymbol{\xi}, T-t), \boldsymbol{\xi}, T-t) & (\boldsymbol{\xi} \in S^{\text{obs}}, t > 0) & (15b) \\ t[\hat{\mathbf{u}}^\Gamma](\boldsymbol{\xi}, t) = \mathbf{0} & (\boldsymbol{\xi} \in S \setminus S^{\text{obs}}, t > 0) & (15c) \\ t[\hat{\mathbf{u}}^\Gamma](\boldsymbol{\xi}, t) = \mathbf{0} & (\boldsymbol{\xi} \in \Gamma, t > 0) & (15d) \\ \hat{\mathbf{u}}^\Gamma(\boldsymbol{\xi}, 0) = \dot{\mathbf{u}}^\Gamma(\boldsymbol{\xi}, 0) = \mathbf{0} & (\boldsymbol{\xi} \in \Omega_\Gamma) & (15e) \end{cases}$$

元の問題 $\mathcal{P}(\Gamma)$ の解 \mathbf{u}^Γ 、及び改良された随伴問題 $\tilde{\mathcal{P}}(\Gamma)$ の解 $\hat{\mathbf{u}}^\Gamma$ を用いて、レーザー超音波計測データを直接用いるために改良されたトポロジー導関数

$$\tilde{\mathcal{T}}(\mathbf{x}^0) = \left(A_{ijkl} \sigma[\hat{\mathbf{u}}^\Gamma]_{ij} * \sigma[\dot{\mathbf{u}}^\Gamma]_{kl} + \rho \hat{u}_k^\Gamma * \dot{u}_k^\Gamma \right) (\mathbf{x}^0, T) \quad (16)$$

が得られる。

3.2. 比較対象とするトポロジー導関数

粒子速度の法線成分のみで導いたトポロジー導関数との比較対象として対象物表面の粒子速度 $\dot{\mathbf{u}}^{\text{true}}$ の法線成分と接線成分両方を用いるトポロジー導関数 $\check{\mathcal{T}}(\mathbf{x}^0)$ を導入する。そこで、目的汎関数を次のように変更する。

$$\check{J}(\Omega_\Gamma) := \int_0^T \int_{S^{\text{obs}}} \check{\varphi}(\dot{\mathbf{u}}^\Gamma(\boldsymbol{\xi}, t), \boldsymbol{\xi}, t) d\boldsymbol{\xi} dt \quad (17)$$

$$\check{\varphi}(\mathbf{w}, \boldsymbol{\xi}, t) := |\mathbf{w} - \dot{\mathbf{u}}^{\text{true}}(\boldsymbol{\xi}, t)|^2 \quad (18)$$

このとき、(8b) 式及び随伴問題は次のようになる。

$$\begin{aligned} & t[\check{\mathbf{u}}^\Gamma](\boldsymbol{\xi}, t) \\ & = \frac{\partial \check{\varphi}}{\partial \mathbf{w}}(\dot{\mathbf{u}}^\Gamma(\boldsymbol{\xi}, T-t), \boldsymbol{\xi}, T-t) \\ & = 2 \left\{ \dot{\mathbf{u}}^\Gamma(\boldsymbol{\xi}, T-t) - \dot{\mathbf{u}}^{\text{true}}(\boldsymbol{\xi}, T-t) \right\} \end{aligned} \quad (8b'')$$

$\check{\mathcal{P}}(\Gamma)$:

$$\begin{cases} \Delta^* \check{\mathbf{u}}^\Gamma(\boldsymbol{\xi}, t) = \rho \ddot{\mathbf{u}}^\Gamma(\boldsymbol{\xi}, t) & (\boldsymbol{\xi} \in \Omega_\Gamma, t > 0) & (19a) \\ t[\check{\mathbf{u}}^\Gamma](\boldsymbol{\xi}, t) & & \\ = \frac{\partial \check{\varphi}}{\partial \mathbf{w}}(\dot{\mathbf{u}}^\Gamma(\boldsymbol{\xi}, T-t), \boldsymbol{\xi}, T-t) & (\boldsymbol{\xi} \in S^{\text{obs}}, t > 0) & (19b) \\ t[\check{\mathbf{u}}^\Gamma](\boldsymbol{\xi}, t) = \mathbf{0} & (\boldsymbol{\xi} \in S \setminus S^{\text{obs}}, t > 0) & (19c) \\ t[\check{\mathbf{u}}^\Gamma](\boldsymbol{\xi}, t) = \mathbf{0} & (\boldsymbol{\xi} \in \Gamma, t > 0) & (19d) \\ \check{\mathbf{u}}^\Gamma(\boldsymbol{\xi}, 0) = \dot{\mathbf{u}}^\Gamma(\boldsymbol{\xi}, 0) = \mathbf{0} & (\boldsymbol{\xi} \in \Omega_\Gamma) & (19e) \end{cases}$$

元の問題 $\mathcal{P}(\Gamma)$ の解 \mathbf{u}^Γ 、及び随伴問題 $\check{\mathcal{P}}(\Gamma)$ の解 $\check{\mathbf{u}}^\Gamma$ を用いて比較対象のトポロジー導関数

$$\check{\mathcal{T}}(\mathbf{x}^0) = \left(A_{ijkl} \sigma[\check{\mathbf{u}}^\Gamma]_{ij} * \sigma[\dot{\mathbf{u}}^\Gamma]_{kl} + \rho \check{u}_k^\Gamma * \dot{u}_k^\Gamma \right) (\mathbf{x}^0, T) \quad (20)$$

が得られる。

4. 数値計算結果

各初期値境界値問題は区分一定の空間内挿関数、区分線形の時間内挿関数を用いて離散化を行い、時間域の境界積分方程式法⁽⁷⁾により解を求める。

4.1. 数値解析例 1

4.1.1. 問題設定

4点 $O(0,0)$, $A(0,1)$, $B(1,1)$, $C(1,0)$ を頂点とする正方形の2次元等方弾性体 (Fig.4) を考える。この弾性体は中心

(0.5, 0.5), 半径 0.1 の円形の空洞を持つ. この空洞を未知として, 弾性体表面の粒子速度の法線成分から空洞の配置 $\Gamma^{\text{true}} = \{\xi | (\xi_1 - 0.5)^2 + (\xi_2 - 0.5)^2 = 0.1^2\}$ を決定する問題を考える. 材料定数はそれぞれ, $\lambda = 2, \mu = 1, \rho = 1$ とする. 入力として下辺の中心に次のトラクション

$$\begin{aligned} t[\mathbf{u}](\xi, t) &= \mathbf{p}(\xi, t) \\ &= \begin{cases} -\delta(\xi_1 - 0.5)\delta(\xi_2)\sin(4\pi t) \mathbf{n}(x_1, x_2) & (0 < t < 1) \\ \mathbf{0} & (\text{otherwise}) \end{cases} \end{aligned}$$

を入射し, 時刻 $t = 2$ まで, 計測範囲 $S^{\text{obs}} = S$ (4 辺全て) で計測を行った. 時間域の境界要素法において, 時間増分 $\Delta t = 0.02$, 境界要素サイズ $\Delta x = 0.02$ とした. 散乱体決定解析においては, 内部に散乱体が存在しない状態, すなわち, $\Gamma = \emptyset$ とし, 弾性体の内点 (49 × 49 個の格子点) でのトポロジー導関数を計算した.

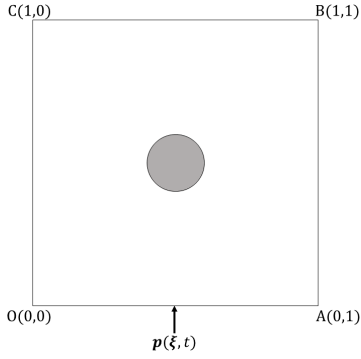


Fig. 4 例 1: 中心に円形空洞を持つ 2 次元等方弾性体

4.1.2. 数値計算結果

計算された内点でのトポロジー導関数の等高線を Fig.5~6 に示す. なお, これらのトポロジー導関数の値は最も小さな値となるトポロジー導関数の値で正規化されたものである.

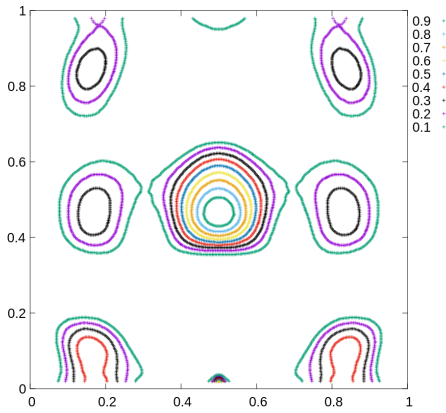


Fig. 5 例 1: 中心に円形空洞を持つ弾性体における粒子速度の法線成分のみを用いたトポロジー導関数の等高線

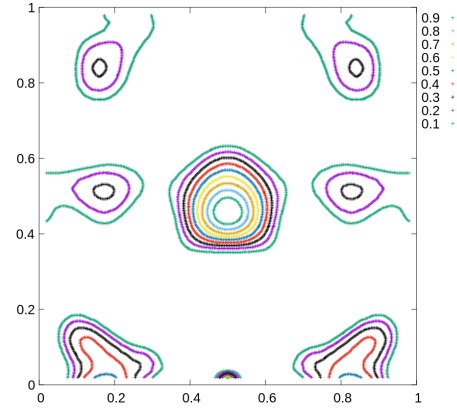


Fig. 6 例 1: 中心に円形空洞を持つ弾性体における粒子速度の法線成分・接線成分両方を用いたトポロジー導関数の等高線

Fig.5 より, 計測される粒子速度の法線成分 u^{obs} を用いたトポロジー導関数による散乱体決定解析においても, 正解の散乱体位置でトポロジー導関数は符号が負で絶対値の大きな値となって分布しており, 正しく散乱体の情報を推定できていることがわかる. また, Fig.6 との比較により, 対象物表面の粒子速度の接線成分は散乱体の決定にほぼ関係していないことがわかった.

4.2. 数値解析例 2

4.2.1. 問題設定

4 点 $O(0, 0), A(0, 1), B(1, 1), C(1, 0)$ を頂点とする正方形の 2 次元等方弾性体 (Fig.7) を考える. この弾性体は中心がそれぞれ (0.3, 0.5), (0.7, 0.5), 半径がそれぞれ 0.04, 0.06 の 2 つの円形の空洞を持つ. この空洞を未知として, 弾性体表面の粒子速度の法線成分から空洞の配置 $\Gamma^{\text{true}} = \{\xi | (\xi_1 - 0.3)^2 + (\xi_2 - 0.5)^2 = 0.04^2\} \cup \{\xi | (\xi_1 - 0.7)^2 + (\xi_2 - 0.5)^2 = 0.06^2\}$ を決定する問題を考える. 材料定数はそれぞれ, $\lambda = 2, \mu = 1, \rho = 1$ とする. 入力として下辺の 3 点 $(x_1, x_2) = (0.2, 0), (0.5, 0), (0.8, 0)$ に次のトラクション

$$\begin{aligned} t[\mathbf{u}](\xi, t) &= \mathbf{p}(\xi, t) \\ &= \begin{cases} -\delta(\xi_1 - x_1)\delta(\xi_2 - x_2)\sin(4\pi t) \mathbf{n}(x_1, x_2) & (0 < t < 1) \\ \mathbf{0} & (\text{otherwise}) \end{cases} \end{aligned}$$

を 1 回ずつ, 計 3 回入射し, 計測範囲 $S^{\text{obs}} = S$ (4 辺全て) で時刻 $t = 2$ まで計測を行った. 時間域の境界要素法において, 時間増分 $\Delta t = 0.02$, 境界要素サイズ $\Delta x = 0.02$ とした. 散乱体決定解析においては, (1) 内部に散乱体が存在しない状態, すなわち, $\Gamma = \emptyset$, (2) 半径が大きい方の空洞については位置・形状が既知, すなわち, $\Gamma = \{\xi | (\xi_1 - 0.7)^2 + (\xi_2 - 0.5)^2 = 0.06^2\}$ の 2 通りにおいて弾性体の内点 (49 × 49 個の格子点) でのトポロジー導関数を計算した.

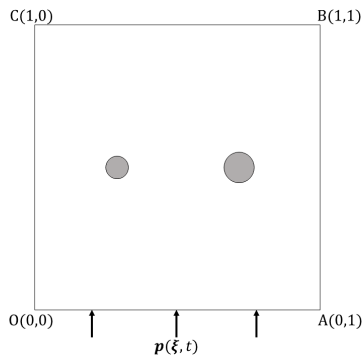


Fig. 7 例 2: 2つの円形の空洞を持つ2次元等方弾性体

4.2.2. 数値計算結果

3回の計測データを用いて計算された内点でのトポロジー導関数を合計した値の等高線を Fig.8~11 に示す. なお, これらのトポロジー導関数の値は最も小さな値となるトポロジー導関数の値で正規化した値である.

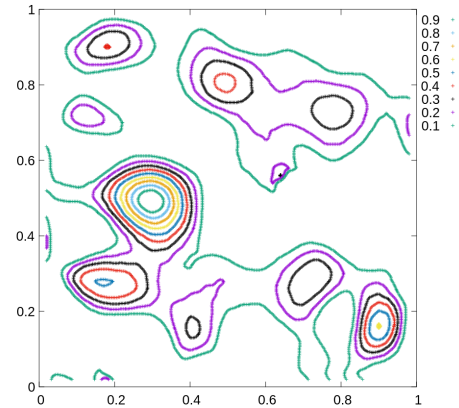


Fig. 10 例 2(2) 2つの空洞を持つ弾性体において, 空洞の1つは既知の場合の粒子速度の法線成分のみを用いたトポロジー導関数の等高線

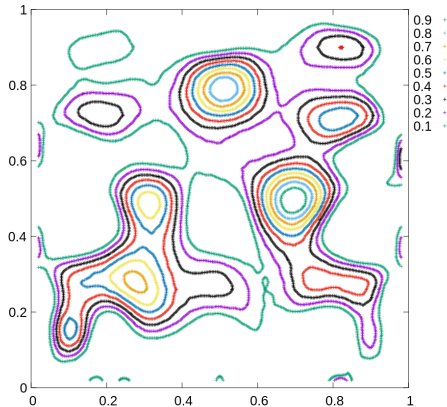


Fig. 8 例 2(1) 2つの空洞を持つ弾性体における, 粒子速度の法線成分のみを用いたトポロジー導関数の等高線

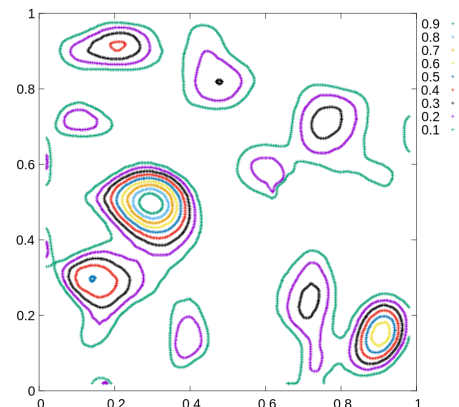


Fig. 11 例 2(2) 2つの空洞を持つ弾性体において, 空洞の1つは既知の場合の粒子速度の法線成分・接線成分両方を用いたトポロジー導関数の等高線

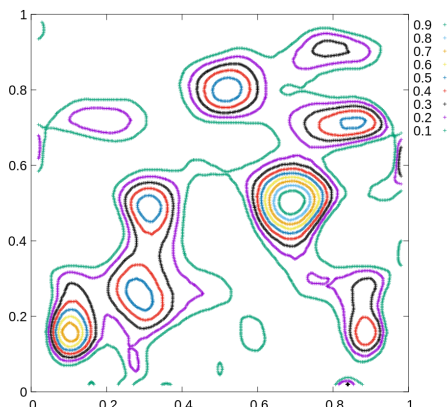


Fig. 9 例 2(1) 2つの空洞を持つ弾性体における, 粒子速度の法線成分・接線成分両方を用いたトポロジー導関数の等高線

Fig.8 では半径が大きい方の散乱体が存在する箇所, Fig.10では未知とした散乱体が存在する箇所トポロジー導関数は符号が負で絶対値の大きな値になっておりレーザ超音波計測データ u^{obs} を用いたトポロジー導関数による散乱体決定解析において一定の精度で散乱体の情報を推定できていることがわかる. また, それぞれ Fig.9, 11 と比較して, 推定の精度は大きくは低下していないことが確認できる.

Fig.8, 9では共通して点 (0.5, 0.8) 付近でトポロジー導関数が符号が負で絶対値の大きな値になっており, あたかもこの位置に散乱体が存在するかのような推定結果となっている. 法線成分のみを用いている Fig.8では特に, 実際に散乱体が存在する点 (0.7, 0.5) 付近との比率が大きくなっており, 法線成分のみを用いたことによって推定精度が低下したと言える. 一方で Fig.8, 9の点 (0.1, 0.15) 付近に着目すると, 実際に散乱体が存在する点 (0.7, 0.5) 付近との比率は法線成分の

みを用いた Fig.8 の方が小さくなっており、必ずしも全ての点において推定精度が低下するわけではない。

4.3. 数値解析例 3

4.3.1. 問題設定

4.2 節では 2 つの散乱体の中心位置が左右対象な数値例を扱ったが、本節では中心位置が非対称な例を扱う。

4 点 $O(0,0)$, $A(0,1)$, $B(1,1)$, $C(1,0)$ を頂点とする正方形の 2 次元等方弾性体 (Fig.12) を考える。この弾性体は半径がともに 0.05, 中心がそれぞれ $(0.3, 0.5)$, $(0.6, 0.7)$ の 2 つの円形の空洞を持つ。この空洞を未知として、弾性体表面の粒子速度の法線成分から空洞の配置 $\Gamma^{\text{true}} = \{\xi | (\xi_1 - 0.3)^2 + (\xi_2 - 0.5)^2 = 0.05^2\} \cup \{\xi | (\xi_1 - 0.6)^2 + (\xi_2 - 0.7)^2 = 0.05^2\}$ を決定する問題を考える。材料定数はそれぞれ, $\lambda = 2$, $\mu = 1$, $\rho = 1$ とする。入力として上辺及び下辺のそれぞれ 3 点ずつ, 計 6 点 $(x_1, x_2) = (0.2, 0), (0.5, 0), (0.8, 0), (0.2, 1), (0.5, 1), (0.8, 1)$ に次のトラクション

$$t[\mathbf{u}](\xi, t) = \mathbf{p}(\xi, t) = \begin{cases} -\delta(\xi_1 - x_1)\delta(\xi_2 - x_2)\sin(4\pi t) \mathbf{n}(x_1, x_2) & (0 < t < 1) \\ \mathbf{0} & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

を 1 回ずつ, 計 6 回入射し, 計測範囲 $S^{\text{obs}} = S$ (4 辺全て) で時刻 $t = 2$ まで計測を行った。時間域の境界要素法において, 時間増分 $\Delta t = 0.02$, 境界要素サイズ $\Delta x = 0.02$ とした。散乱体決定解析においては, (1) 内部に散乱体が存在しない状態, すなわち, $\Gamma = \emptyset$, (2) 中心が $(0.3, 0.5)$ の空洞については位置・形状が既知, すなわち, $\Gamma = \{\xi | (\xi_1 - 0.3)^2 + (\xi_2 - 0.5)^2 = 0.05^2\}$ の 2 通りにおいて弾性体の内点 (49 × 49 個の格子点) でのトポロジー導関数を計算した。

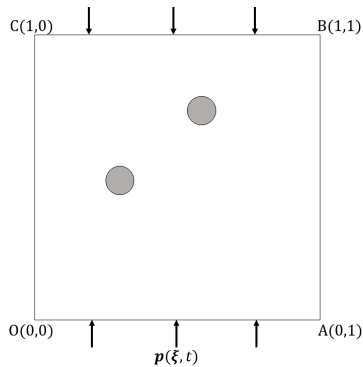


Fig. 12 例 3: 2 つの円形の空洞を持つ 2 次元等方弾性体

4.3.2. 数値計算結果

6 回の計測データを用いて計算された内点でのトポロジー導関数を合計した値の等高線を Fig.13~16 に示す。なお, これらのトポロジー導関数の値は最も小さな値となるトポロジー導関数の値で正規化した値である。

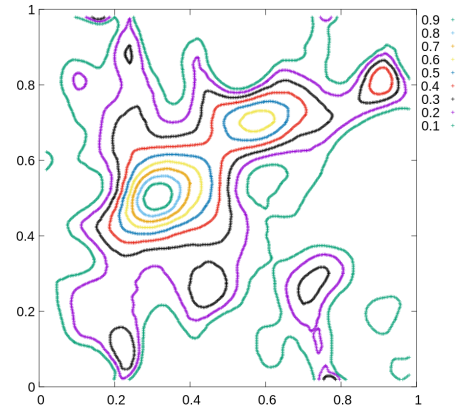


Fig. 13 例 3(1)2 つの空洞を持つ弾性体における, 粒子速度の法線成分のみを用いたトポロジー導関数の等高線

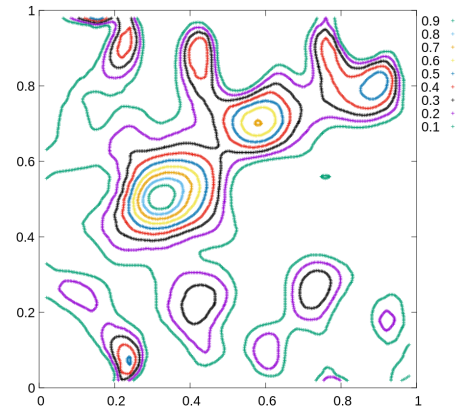


Fig. 14 例 3(1)2 つの空洞を持つ弾性体における, 粒子速度の法線成分・接線成分両方を用いたトポロジー導関数の等高線

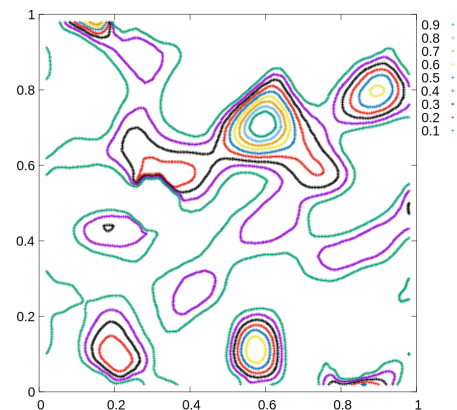


Fig. 15 例 3(2)2 つの空洞を持つ弾性体において, 空洞の 1 つは既知の場合の粒子速度の法線成分のみを用いたトポロジー導関数の等高線

参考文献

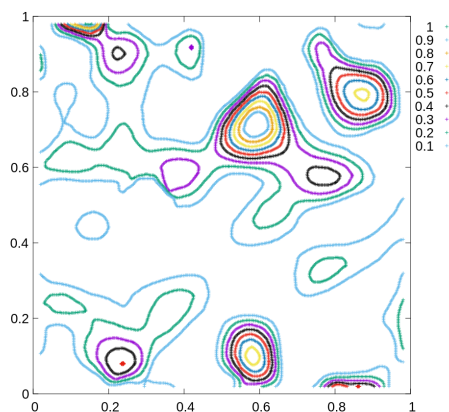


Fig. 16 例 3(2)2つの空洞を持つ弾性体において、空洞の1つは既知の場合の粒子速度の法線成分・接線成分両方を用いたトポロジー導関数の等高線

Fig.13 では中心が (0.3,0.5) の散乱体が存在する箇所で、Fig.15 では未知とした散乱体が存在する箇所でトポロジー導関数は符号が負で絶対値の大きな値になっておりレーザ超音波計測データ u^{obs} を用いたトポロジー導関数による散乱体決定解析において一定の精度で散乱体の情報を推定できていることがわかる。また、それぞれ Fig.14, 16 と比較して、推定の精度は低下していないことが確認できる。

しかしながら、Fig.13, 14 では全く同じ大きさ・形状の散乱体が内部にあるにもかかわらず、中心が (0.3,0.5) の散乱体が存在する箇所と比較して中心 (0.6,0.7) の散乱体が存在する箇所ではトポロジー導関数は絶対値の小さい値となっており、散乱体の大きさ・形状が等しいとしても、弾性体内の位置によってトポロジー導関数の値が変わってしまうことがわかる。

5. 結論

対象物表面の法線方向の粒子速度を用いたトポロジー導関数の精度を簡単な数値例で検証した。今回扱った例では、法線方向・接線方向両方の粒子速度を用いたトポロジー導関数と比較してほとんど遜色ない精度で欠陥の位置の推定を行えることが確認できた。

しかしながら、法線成分のみを用いるもの、法線・接線両方の成分を用いるものを問わず、実際に散乱体が存在しない位置でトポロジー導関数が符号が負で絶対値の大きい値になることがあること、大きさ・形状が等しいとしても、位置によってトポロジー導関数の値が変わってしまうことが確認できた。今後の課題であるレベルセット法の適用を考える上では、これらの性質について留意する必要がある。

また、3次元の弾性波動問題に適用した場合の精度を検証することも今後の課題である。

- (1) Marc Bonnet: *Topological sensitivity for 3D elastodynamic and acoustic inverse scattering in the time domain*, *Comput.Methods Appl.Mech.Engrg.* **195**(2006), pp.5239-5254.
- (2) Takayuki Yamada, Kazuhiro Izui, Shinji Nishiwaki, Akihiro Takezawa: A topology optimization method based on the level set method incorporating a fictitious interface energy, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.199, (2010), pp.2876-pp.2891.
- (3) 近藤豊大, 飯盛浩司, 高橋徹, 松本敏郎: 3次元音響問題におけるレベルセット法と高速多重極境界要素法に基づくインピーダンス境界を有する散乱体のトポロジー最適化, *計算数理工学論文集*, Vol. 14, (2014), pp.19-pp.24.
- (4) 吉川仁・寺沢龍: 3次元スカラー波動問題における時間領域境界積分方程式法を用いたトポロジー最適化による散乱体決定解析, *土木学会論文集 A2(応用力学)*, Vol.71, No.2, (2015), pp.I 71-I 78.
- (5) “三次元光学ユニット LV-3800”, 株式会社 小野測器, (2022), <https://www.onosokki.co.jp/HP-WK/products/keisoku/soundvib/lv3800.htm>, (参照 2022-11-05).
- (6) 田代匡彦・斎藤隆泰・木本和志: トポロジー感度を欠陥検出指標に用いた二次元動弾性時間反転解析とリニアアレイ探傷法への応用, *土木学会論文集 A2(応用力学)*, Vol.76, No.2, (2020), I.15-I.24.
- (7) 小林昭一(編) 波動解析と境界要素法, (2000), 京都大学学術出版会.

