

トポロジー最適化における仮想的な物理モデルに基づく最大厚み制約

MAXIMUM THICKNESS CONSTRAINT FOR TOPOLOGY OPTIMIZATION BASED ON A FICTITIOUS PHYSICAL MODEL

酒井 虹太¹⁾, 岡 大将²⁾, 山田 崇恭³⁾

Kota SAKAI, Tomoyuki OKA and Takayuki YAMADA

1) 東京大学大学院工学系研究科 (〒113-0033 東京都文京区弥生 2-11-16 E-mail: sakai-kota786@g.ecc.u-tokyo.ac.jp)

2) 東京大学大学院工学系研究科 (〒113-0033 東京都文京区弥生 2-11-16 E-mail: tomoyuki-oka@g.ecc.u-tokyo.ac.jp)

3) 東京大学大学院工学系研究科 (〒113-0033 東京都文京区弥生 2-11-16 E-mail: t.yamada@mech.t.u-tokyo.ac.jp)

This paper presents a topology optimization method with maximum thickness constraint. A fictitious physical model is introduced to formulate (local) thickness. In this method, geometrical features are treated as in usual physical features, since geometrical features are characterized as solutions of governing equations represented as partial differential equations. In this paper, a topology optimization scheme for a linear elastic system with maximum thickness constraint is formulated, and then a level-set method based on the reaction-diffusion equation is applied to represent boundaries of shapes finely. Furthermore, two-dimensional numerical examples will be provided to validate the proposed method.

Key Words: Structural optimization, Partial differential equation, Topology optimization, Level set method, Geometrical constraint, Thickness constraint

1. 緒言

トポロジー最適化は、ある目的汎関数を最小化するように設計空間内の材料分布を決定し、構造を最適化する手法である。トポロジー最適化は、構造最適化手法の中でも、最適化過程において位相の変更を許容した、最も設計自由度が高い手法として知られている。工学の分野では、Bendsøe and Kikuchi⁽¹⁾による構造問題への展開を起点として、これまでに様々な構造設計問題への応用が報告されている。しかしながら、トポロジー最適化は高い設計自由度を持つ一方で、製造が困難な形状さえも最適構造として出力し得るため、製造可能性の観点から問題が生じている。したがって、実際の設計に応用する場合は設計者の経験に基づき試行錯誤による設計変更が要求されるが、その際、所望の物理的特性は保証されとも限らず、最適性が失われることが示唆される。近年、この問題を解決するために、最適化過程において製造性についての制約を考慮する手法が注目されつつある。とりわ

け、厚みに関する製造要件は重要視されている。一般に、最適構造の部材の最大厚みと最小厚みの差が大きい場合、その構造を標準的な大量生産プロセスに組み込むことは難しくなる。例えば、鋳造を用いる場合、製造過程における冷却の観点から厚すぎる構造は避けるべきであり、液体金属の充填を考えると、薄すぎる構造も適していない。また、プレス成形のように厚みがほぼ均一な構造を要求する製造プロセスも多い。以上のように、トポロジー最適化を実際の製造プロセスに応用するためには、構造に対して厚みを制御する必要がある。そのため、本研究では、厚みに関する製造性制約を取り扱う。

構造最適化問題における厚みに関する制約の定式化は様々な文献で議論されている。Allaire et.al.⁽²⁾では、符号付き距離関数に基づき、最小厚み制約、最大厚み制約を課した最適化手法が提案されている。この手法では、最大厚みと最小厚みの両者に対して複雑な定式化が必要であり、統一的に厚みの定義を与えていない。また、Carroll and Guest⁽³⁾では、均一な厚みを持った離散的構造を投影法に基づき最適化する手法が提案されている。しか

し、設計空間を制限する手法を用いているため、最適構造の初期構造依存性が高まる懸念が生じる。

他方、仮想的に物理モデルを考慮することで幾何学的特徴を記述する手法が近年開発されている。Sato et al.⁽⁴⁾では、幾何学的特徴に対する制約を仮想的な物理現象とその物理モデルを利用して定式化する基本的な考え方を提案した。この手法では、トポロジー最適化問題における型成形製造制約について移流拡散方程式を利用した定式化が行われている。仮想的な物理モデルの考え方は、偏微分方程式に基づき、幾何学的特徴量を抽出する手法として、積層造形における粉抜きに関する制約⁽⁵⁾など様々な幾何学的制約に応用されている。特に、Yamada⁽⁶⁾では、仮想的な物理モデルの考え方を発展させ、様々な幾何学的特徴量を統一的に記述できる偏微分方程式系を提案した。本研究では、厚み制約を最適化問題として定式化するために、Yamada⁽⁶⁾により導入された仮想的な物理モデルを用いて、厚みを仮想的な物理モデルに基づいて定義する。仮想的に物理モデルを考えることで、幾何学的特徴量に対して一般的な物理場と同様に取り扱うことが可能となり、幾何学的特徴量についての汎関数に対して感度解析が可能になる。しかしながら、先行研究⁽⁷⁾では、具体的な数値解析アルゴリズムや基盤的な幾何学的制約法の考え方の構築には至っておらず、所望の制約を満たす解が必ずしも得られない課題を持つ。そこで本研究では、厚みに関する幾何学的特徴を扱うための具体的な数値解析アルゴリズムを開発し、様々な設計問題への展開を目指した数理基盤を構築する。具体的には、(局所的な)厚みを仮想的な物理モデルの解に対してのある関数として構成し、厚み制約を考慮したトポロジー最適化問題を定式化する。また、ペナルティ法を用いた無制約問題への置き換えにより、最適化過程において制約違反を許容した、初期構造依存性の低い手法を構築する。

なお、以下では仮想的な物理モデルによる厚みの制御手法の第一歩として、最大厚み制約についてのみ考慮する。

以下、本論文の構成について述べる。2章ではトポロジー最適化の基礎概念について簡単に説明する。3章では、仮想的な物理モデル及び(局所的な)厚みの定式化について述べる。4章では、最大局所厚み制約を伴うトポロジー最適化問題の定式化について記述し、5章ではその数値実装について説明する。6章では数値解析例により、本研究で提案する手法の妥当性について検証する。最後に結言を述べる。

2. レベルセット法に基づくトポロジー最適化

2.1. トポロジー最適化の考え方

構造最適化問題は、固定設計領域 $D \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 2, 3$) 内で与え

られる、ある目的汎関数 $J(\Omega)$ が最小化されるような領域 $\Omega \subset D$ を求める問題である。特に、目的汎関数を剛性や熱伝導特性などの物理的な指標とした場合、構造最適化問題はその物理現象を支配する支配方程式を用いて以下のように定式化される。

$$\inf_{\Omega \in \mathfrak{P}(D)} J[u, \Omega] \quad (1)$$

$$\text{subject to : governing equation (system) for } u. \quad (2)$$

ここで、 $u = u_\Omega$ はある物理現象に則した支配方程式の解を意味する状態変数であり、 $\mathfrak{P}(D)$ は固定設計領域に属する部分集合全体を表すものとする。また、目的汎関数 $\Omega \mapsto J[u, \Omega]$ は通常の変分問題とは異なり、領域 Ω を変数に持つ点に注意する。

トポロジー最適化問題では、領域 $\Omega \subset D$ を D 内の関数として表現するために以下のように表される特性関数 $\chi_\Omega \in L^\infty(D; \{0, 1\})$ を用いる。

$$\chi_\Omega(x) = \begin{cases} 1, & x \in \bar{\Omega}, \\ 0, & x \in D \setminus \bar{\Omega}. \end{cases} \quad (3)$$

ここで、構造最適化問題 (1)-(2) は次のように置き換えられる。

$$\inf_{\chi_\Omega \in L^\infty(D; \{0, 1\})} J[u, \chi_\Omega] \quad (4)$$

$$\text{subject to : governing equation (system) for } u. \quad (5)$$

以上より、特性関数を用いた定式化によって領域 $\Omega \subset D$ は位相の変化が許容される。

2.2. トポロジー最適化の緩和と正則化

トポロジー最適化問題では、最適構造を与える最小化列の(弱)極限が設計空間 $L^\infty(D; \{0, 1\})$ に属さず、一般に、不良設定問題であることが知られている。詳細についてはAllaire⁽⁸⁾を参照されたい。したがって、適切に緩和することによって良設定問題に置き換える必要がある。設計空間の緩和に基づく手法ではBendsøe and Kikuchi⁽¹⁾による均質化設計法が代表的な手法として知られており、その後、密度法⁽⁹⁾に応用されている。また、勾配法と正則化項による摂動を組み合わせたYamada et al.⁽¹⁰⁾によるレベルセット法に基づく手法も考案されている。この手法では、レベルセット関数と呼ばれるスカラー値関数の等位面により材料の形状 $\partial\Omega$ を表現する。特に、正則化項の寄与によって、形状 $\partial\Omega$ を明瞭に表現するだけに留まらず、その幾何学的複雑さも制御可能となる。本研究では、幾何学的な制約条件を取り扱うため、レベルセット法に基づく手法によって形状 $\partial\Omega$ が明確化されるという特徴に注目し、Yamada et al.⁽¹⁰⁾による手法を採用する。

2.3. 反応拡散方程式を用いたレベルセット法に基づく手法

Yamada et al.⁽¹⁰⁾によるレベルセット法に基づく手法について記述する。そこで、以下を満たすレベルセット関数 $\phi : D \rightarrow \mathbb{R}$

を導入する.

$$\begin{cases} \phi(x) > 0, & x \in \Omega, \\ \phi(x) = 0, & x \in \partial\Omega, \\ \phi(x) < 0, & x \in D \setminus \bar{\Omega}. \end{cases} \quad (6)$$

さらに, レベルセット関数 $\phi: D \rightarrow \mathbb{R}$ を用いることによって, 特性関数 $\chi_\Omega \in L^\infty(D; \{0, 1\})$ は以下のように置き換えられる.

$$\chi_\phi(x) := \chi_{[\phi \geq 0]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } \phi(x) \geq 0, \\ 0 & \text{if } \phi(x) < 0. \end{cases} \quad (7)$$

すなわち, レベルセット関数を適切に更新することによって最適構造 $\Omega \subset D$ が得られ, 結果として, 最適化問題 (4)-(5) は次のようにレベルセット関数 $\phi: D \rightarrow \mathbb{R}$ を用いて定式化される.

$$\inf_{\phi \in H^1(D)} J[u, \chi_\phi] \quad (8)$$

$$\text{subject to: governing equation system for } u. \quad (9)$$

ここで, $\phi \in H^1(D)$ は以下の反応拡散方程式の解を表す.

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = C J' + \tau \nabla^2 \phi \quad \text{in } D \times \mathbb{R}_+. \quad (10)$$

ただし, $u = u_\phi$ とし, $C \in \mathbb{R}_+$ は正規化定数, $\tau \in \mathbb{R}_+$ は正則化係数とする. また, J' はトポロジー導関数^(11, 12)を表し, トポロジー導関数は領域に微小な介在物を導入した際に目的汎関数の変化量を介在物の体積で割った差分商を用いて定義される. ここで, (10) の右辺第二項は, レベルセット関数を正則化する項であり, 正則化定数 τ の大きさによって, 得られる形状の幾何学的複雑さを制御できる特徴を持つ.

3. 最大局所厚み制約の定式化

3.1. 幾何学的特徴量に関する仮想的な物理モデル

仮想的な物理モデルの考え方は, 幾何学的特徴量のある偏微分方程式の解を用いて構成することであり, 一般的な物理的特徴量と同様に, 幾何学的特徴量を制約汎関数として構造最適化問題に導入可能となる. 本研究では, Yamada⁽⁶⁾にて提案されている幾何学的特徴量を抽出可能な偏微分方程式系を利用して局所厚み制約を定式化する. そこで, 以下の仮想的な物理モデルを表す偏微分方程式系を考える.

$$\begin{cases} -\text{div}(a \nabla s_i - \mathbf{e}_i \chi_E) + s_i(1 - \chi_E) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^d, \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} s_i(x) = 0. \end{cases} \quad (11)$$

ここで, $i = 1, 2, \dots, d$, $\mathbf{e}_i = \{0, \dots, 0, \overset{(i)}{1}, 0, \dots, 0\} \in \mathbb{R}^d$ とする. また, $s_i \in H^1(\mathbb{R}^d)$ は状態変数, $a \in \mathbb{R}_+$ は十分に小さい拡散係数とし, 領域 $E \subset \mathbb{R}^d$ に対する特性関数 $\chi_E \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$

を以下のように定める.

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in \bar{E}, \\ 0, & x \in \mathbb{R}^d \setminus \bar{E}. \end{cases} \quad (12)$$

式 (11) の解が持つ性質を考察するため, 以下の対応する弱形式を考える.

$$\int_{\mathbb{R}^d} a \nabla s_i \cdot \nabla t_i + s_i t_i (1 - \chi_E) \, dx = \int_{\partial E} \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{n} t_i \, d\sigma. \quad (13)$$

ここで, \mathbf{n} は ∂E 上における外向き法線ベクトル, $t_i \in H^1(\Omega)$ は試験関数とする. このとき, 境界形状 ∂E の外側近傍に注目すると, 拡散係数 $a \in \mathbb{R}_+$ が十分に小さい定数であるため, 各 i に対して s_i と $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{n}$ が深く関連していることが示唆される. 実際, 状態場のなすベクトル $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ の向きが外向き法線と一致することについて厳密な証明が行われている⁽¹³⁾. したがって, 方程式 (11) の解を用いることで, 曲率をはじめとした幾何学的特徴量が構成可能になり, 様々な幾何学的制約を伴う最適化問題に対して (11) を用いた定式化が期待される.

3.2. 局所的な厚みの定式化

本研究では前節に基づき, 以下の量を (局所的な) 厚み $h_s \in L^2(E)$ として発見的に導入する.

$$h_s(x) = \frac{2}{\sqrt{a \nabla \cdot \mathbf{s}(x)}} \quad \text{for a.e. } x \in E. \quad (14)$$

式 (14) は, 一次元の場合や円環のような単純な二次元形状の場合, 直感的な意味での厚みに対応することが数値的に確認できる. 詳細については付録を参照されたい.

3.3. 最大局所厚み制約

本研究では, (14) を用いて, 以下のペナルティ汎関数 $G_1: H^1(\mathbb{R}^d)^d \rightarrow \mathbb{R}$ を最小化することによって最大厚み制約を表現する.

$$G_1(\mathbf{s}) = \int_E \max\{h_s(x)/h^* - 1, 0\} \, dx \quad (15)$$

$$=: \int_E R(h_s(x)/h^* - 1) \, dx \quad (16)$$

$$=: \int_E g_s(x) \, dx. \quad (17)$$

ここで, $h^* \in \mathbb{R}_+$ は目標厚みとする. このとき, $G_1(\mathbf{s}) = 0$ が満たされるならば, 領域 E 全域において $h_s(x) < h^*$ が成り立ち, 最大厚み制約が満たされることを意味する. また, 領域 $\mathbb{R}^d \setminus E$ では, $h_s(x)/h^* - 1 < 0$ が成り立つことが分かっており, 以下が成り立つ.

$$G_1(\mathbf{s}) = \int_{\mathbb{R}^d} \max\{h_s(x)/h^* - 1, 0\} \, dx \quad (18)$$

4. 最大局所厚み制約付きトポロジー最適化の定式化

4.1. 定式化

本研究では、固定設計領域 $D \subset \mathbb{R}^d$ の内部において、均質な等方性線形弾性方程式系に対するトポロジー最適化問題について考察する。ここでは、仮想的な物理モデルにおいて導入された領域 $E \subset \mathbb{R}^d$ は領域 $[\chi_\phi = 1] := \{x \in D : \chi_\phi(x) = 1\}$ とする。拘束条件は ∂D 上の一部の境界 Γ_u で完全拘束、一部の境界 Γ_t で静的な表面力 $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^d$ が負荷されているとし、 $\Gamma_u \cap \Gamma_t = \emptyset$ とする。このとき、変位場を $\mathbf{u} = \mathbf{u}_\phi \in H_{\Gamma_u}^1(D)^d$ とすると、最大局所厚み制約を伴う平均コンプライアンス最小化問題は以下のように定式化される。

$$\inf_{\phi \in H^1(D)} J[\mathbf{u}, \chi_\phi] = \int_{\Gamma_t} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \, d\sigma \quad (19)$$

subject to:

$$G_1(\mathbf{s}) = 0, \quad (20)$$

$$G_2(\phi) := \int_D \chi_\phi \, dx - G_{\max} \leq 0, \quad (21)$$

$$\int_D \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \mathbb{D}\chi_\phi : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, dx = \int_{\Gamma_t} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\sigma, \quad (22)$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} a \nabla s_i \cdot \nabla t_i + s_i t_i (1 - \chi_\phi) \, dx = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{e}_i \cdot \nabla t_i \chi_\phi \, dx. \quad (23)$$

ここで、(22) は (13) において右辺にガウスの発散定理を適用して導かれる。また、 $\mathbf{v} \in H_{\Gamma_u}^1(D)$ は変位場に対するテスト関数、 $G_{\max} \in \mathbb{R}_+$ は許容される体積の上限値、 $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)$ はひずみテンソル、 $H_{\Gamma_u}^1(\Omega)^d$ は次に示す関数空間とする。

$$H_{\Gamma_u}^1(D)^d := \{\mathbf{u} \in H^1(D)^d, \mathbf{u} = 0 \text{ on } \Gamma_u\}. \quad (24)$$

弾性テンソル $\mathbb{D} \in \mathbb{R}^{d^4}$ は縦弾性係数 $\hat{E} \in \mathbb{R}$ とポアソン比 $\nu \in \mathbb{R}$ を用いて以下のように与えられるものとする。

$$\mathbb{D}_{ijkl} = \frac{\nu \hat{E}}{(1+\nu)(1-2\nu)} \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{\hat{E}}{2(1+\nu)} \delta_{ik} \delta_{jl}. \quad (25)$$

ここで、 δ_{ij} はクロネッカーのデルタを表す。

4.2. 感度解析

本研究では、設計感度としてトポロジー導関数を用いる。平均コンプライアンス最小化問題に対するトポロジー導関数は以下のように表される⁽¹⁴⁾。

$$J'(x) = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(x)) : \mathbb{A}\chi_\phi(x) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(x)) \quad \text{for a.e. } x \in D. \quad (26)$$

ここで 4 階テンソル \mathbb{A} は以下のように表される。

$$\mathbb{A}_{ijkl} = \frac{3(1-\nu)}{2(1+\nu)(7-5\nu)} \times \left\{ \frac{-(1-14\nu+15\nu^2)\hat{E}}{(1-2\nu)^2} \delta_{ij} \delta_{kl} + 5\hat{E}(\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{ij} \delta_{kl}) \right\}. \quad (27)$$

ペナルティ汎関数 $G_1 : H^1(\mathbb{R}^d)^d \rightarrow \mathbb{R}$ に対するトポロジー導関数については随伴変数法により求めることができ、対応する随

伴方程式は以下のように表される。

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^d} a \nabla s_i^* \cdot \nabla t_i^* + (1 - \chi_\phi) s_i^* t_i^* \, dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial g_s}{\partial s_i} t_i^* + \frac{\partial g_s}{\partial \nabla s_i} \cdot \nabla t_i^* \, dx. \end{aligned} \quad (28)$$

ただし、 $s_i^* \in H^1(\mathbb{R}^d)$ は随伴変数とし、 $t_i^* \in H^1(\mathbb{R}^d)$ はテスト関数とする。また、トポロジー導関数 G_1' は、Amstutz^(12, Proposition 2.1) における $\delta a - \delta l + \delta J_1 + \delta J_2$ に対応し、 $\delta a = -\sum_{i=1}^d s_i s_i^*$, $\delta l = \sum_{i=1}^d \mathbf{e}_i \cdot \nabla s_i$, $\delta J_1 = \delta J_2 = 0$ を代入すると G_1' は以下のように表される。

$$G_1'(x) = - \sum_{i=1}^d (\mathbf{e}_i \cdot \nabla s_i^* + s_i s_i^*) \quad \text{for a.e. } x \in \mathbb{R}^d. \quad (29)$$

したがって、(25), (26), (28) を用いて反応項を構成した反応拡散方程式 (10) を用いてレベルセット関数を更新することで、最適構造 $[\chi_\phi = 1] \subset D$ について考察することができる。なお、汎関数 G_1 はペナルティ法、汎関数 G_2 は拡張ラグランジュ法に基づき、無制約問題として扱われる。

5. 数値実装法

5.1. 最適化アルゴリズム

本研究では、以下の手順で最適化計算を行う。

- step 1.** 初期レベルセット関数を設定する。
- step 2.** 有限要素法を用いて変位場 \mathbf{u} 及び仮想的な物理場 \mathbf{s} を求める。
- step 3.** 目的汎関数 J 及び制約汎関数 G_i ($i = 1, 2$) を計算し、全ての制約条件を満たし、目的汎関数が更新されない場合、最適化を終了する。
- step 4.** 有限要素法を用いて随伴場 s_i^* を求め、トポロジー導関数を計算する。
- step 5.** 反応拡散方程式を解いてレベルセット関数の更新を行う。

有限要素法による数値解析では汎用有限要素解析ソフトウェア FreeFEM++⁽¹⁵⁾ を用いる。

5.2. 変位場の近似解法

方程式 (13) と対応する強形式 (11) を比較すると、 $-\mathbb{D}\chi_\phi \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ が $\Gamma_N := \partial D \setminus (\Gamma_u \cup \Gamma_t)$ 上で陰的に課されていることが分かる。しかし、特性関数 $\chi_\phi \in L^\infty(D)$ によって斉次 Neumann 境界条件が必ずしも Γ_N 上で課されるとは限らず、領域 $[\chi_\phi = 0]$ において、有限要素法を用いる場合、最適化の反復毎に境界形状に沿うような有限要素メッシュの再生成が必要となり、計算コストの問題が生じる。本研究では、Ersatz material approach⁽¹⁶⁾ による変位場の近似解法を用いる。具体的には、以下のように固

定設計領域 D 全体に拡張された弾性テンソル $\tilde{\mathbb{D}}$ を用いる.

$$\tilde{\mathbb{D}} := \{(1 - \delta)H_\varepsilon(\phi) + \delta\} \mathbb{D}. \quad (30)$$

ここで, $\delta \in \mathbb{R}_+$ は 1 より小さい定数とし, 領域 $D \setminus \bar{\Omega}$ 上でのヤング率が $\delta \hat{E}$ となるように定める. 本研究では $\delta = 0.001$ とする. また, $H_\varepsilon(\phi)$ は以下で与えられる特性関数 $\chi_\phi \in L^\infty(D)$ の近似関数とする.

$$H_\varepsilon(\phi) := \begin{cases} 0 & \text{if } \phi < -\varepsilon, \\ \frac{1}{2} + \frac{15}{16} \frac{\phi}{\varepsilon} - \frac{5}{8} \left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right)^3 + \frac{3}{16} \left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right)^5 & \text{if } -\varepsilon \leq \phi < \varepsilon, \\ 1 & \text{if } \phi \geq \varepsilon. \end{cases} \quad (31)$$

ただし, $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ は十分に小さい定数とする. このとき, 固定設計領域 D における全境界 ∂D 上で常に境界条件が指定され, 有限要素メッシュを再生成することなしに有限要素解析が可能になる.

5.3. 仮想的な物理モデルの近似解法

本研究で導入した仮想的な物理モデルは, 全空間 \mathbb{R}^d 上で与えられており, このままでは有限要素解析が困難である. ここでは, 領域 \mathbb{R}^d の代わりに, 固定設計領域を包含するような十分に大きい有界領域 $\Omega_R \subset \mathbb{R}^d$ に置き換えて以下の仮想的な物理モデルを考える. なお, (13) は外側領域 $[\chi_E = 0]$ において平滑化半径 \sqrt{a} のヘルムホルツフィルターと解釈できるため, 領域 Ω_R は固定設計領域 D より幅 \sqrt{a} だけ大きい領域とすれば, 近似したモデルは十分な精度が期待される.

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a \nabla \tilde{s}_i - \mathbf{e}_i \chi_E) + \tilde{s}_i(1 - \chi_E) = 0 & \text{in } \Omega_R, \\ \tilde{s}_i = 0 & \text{on } \partial \Omega_R. \end{cases} \quad (32)$$

ここで, $\tilde{s}_i \in H^1(\Omega_R)$ は近似的な解を意味する.

5.4. 局所厚み制約の平滑化

3.3 節の (16) で導入したランプ関数 R は原点において通常の意味での可微分性が得られないため, その導関数が不連続となる. 本研究では, 不連続関数を取り扱うことを前提としていない有限要素法を利用するため, 数値実装上では以下のように近似ランプ関数 $\tilde{R}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を導入する.

$$\tilde{R}(x) = \frac{x + \sqrt{x^2 + \eta}}{2}. \quad (33)$$

ここで, $\eta \in \mathbb{R}_+$ は十分に小さい定数で, 本研究では $\eta = 0.01$ とする. さらに, ペナルティ汎関数 G_1 は仮想的な物理モデルの状態場 \mathbf{s} に対する発散 $\nabla \cdot \mathbf{s}$ の逆数によって定義されるが, $\nabla \cdot \mathbf{s}$ は ∂E 上において不連続に変化し, 符号が入れ替わる特徴を持つため, 有限要素法を用いて連続関数により状態場 \mathbf{s} を近似する本手法においては数値的な特異点となる可能性がある. よっ

て, 以下のように値域を $[0, 1]$ に制限した近似ペナルティ汎関数 $\tilde{G}_1: H^1(\Omega_R)^d \rightarrow \mathbb{R}$ を用いる.

$$\begin{aligned} \tilde{G}_1(\mathbf{s}) &= \int_E \tilde{g}_s(x) \, dx \\ &= \int_E 1 - \tilde{R} \left(1 - w \tilde{R} \left(\psi \left(\frac{h^* \sqrt{a} \nabla \cdot \mathbf{s}}{2} - 1 \right) \right) \right) \, dx, \end{aligned} \quad (34)$$

$$\psi(x) := \sum_{i=1}^n (-x)^i. \quad (36)$$

ここで, $w \in \mathbb{R}_+$ であり, $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ は関数 $-x/(1+x): (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$ の $x=0$ における n 次のテイラー展開である. なお, 制約違反の領域のみを抽出するためには, $x > 0$ において $\psi < 0$ を満たすことが望ましく, n は奇数とすべきである. 本研究では $n = 5$ を用いる.

6. 数値解析例

本節では, 提案手法に対する妥当性を評価する. 問題設定は MBB Beam と呼ばれる設計モデルを取り扱い, 詳細は Fig.6 に示すように, 固定設計領域 D は 1.8×1 の矩形領域とし, 領域 Ω_R は固定設計領域 D を幅 0.2 で囲むような矩形領域とする. 力学的条件は, 固定設計領域 D の下辺中央部 Γ_t に下向き単位表面力 \mathbf{f} を作用させ, 左辺下部境界 Γ_u を完全拘束し, 右辺下部境界 Γ_w をローラー支持とする. 最大体積は固定設計領域に対して 30% とし, 正則化定数は $\tau = 3.0 \times 10^{-5}$ とする. なお, 局所厚み制約と体積制約の設定に依存して, 正則化定数を適切な値とする必要がある.

このとき, 目標厚みをそれぞれ $h^* = 1/20, 2/35$ とすると, 最大厚み制約を考慮した場合における最適構造として Fig.2(b), 2(c) が得られる. また, 最大厚み制約を考慮しない場合における, 最適構造は Fig.2(a) の通りである. ここで, 最大厚み制約を考慮した場合とそうでない場合とで比較すると, Fig.2(a) では太い部材が減少していることが分かり, 厚み制約という目的が達成されていることが確認できる.

7. 結言

本研究では, 仮想的な物理モデルを用いて, (局所的な) 厚みを導入し, 最大厚み制約に対するトポロジー最適化手法を提案した. 本研究で得られた成果を次に示す.

- 仮想的な物理モデルを定式化し, 弱形式を通してその性質を議論した.
- 仮想的な物理モデルの解を用いて (局所的な) 厚みを導入した.
- 仮想的な物理モデルによりトポロジー最適化問題における最大厚み制約を定式化した.

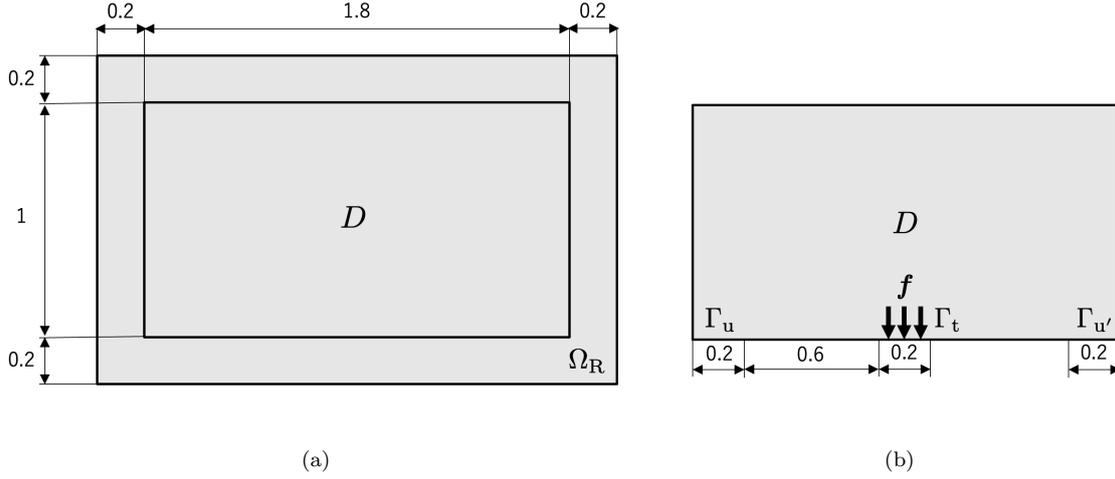
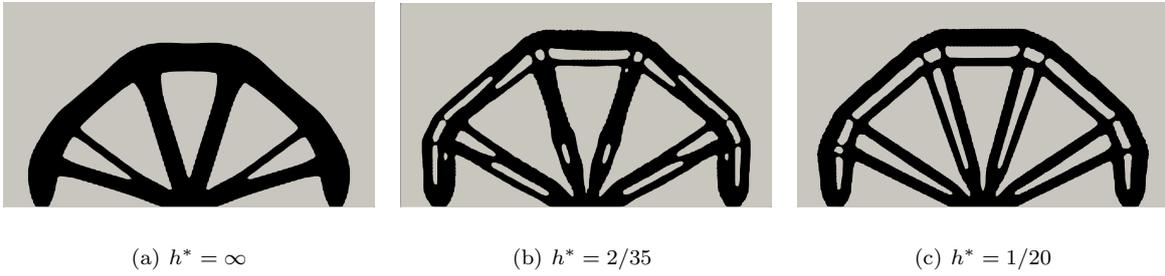


Fig.1 Two-dimensional problem setting: (a) conditions for fictitious physical model, (b) conditions for elastic problem



(a) $h^* = \infty$

(b) $h^* = 2/35$

(c) $h^* = 1/20$

Fig.2 Optimized configurations: (a) Optimal configuration without thickness constraint. (b), (c) Optimal configuration with thickness constraint.

- 最大厚み制約を考慮したトポロジー最適化問題について数値実装法を提案した.
- 二次元平均コンプライアンス最小化問題に提案手法を適用し、方法論の妥当性を検討した.

8. 謝辞

本研究の一部は、JST 創発的研究支援事業の助成を受けました。この場を借りて御礼申し上げます。

9. 付録

9.1. 仮想的な物理モデルの一次元の場合の解析解

本節では、3節で記述した仮想的な物理モデルに対して、一次元の場合を考え、その解析解を導出して厚みの定式化に関する正当性について記述する。ここでは、領域 E として半径 $h/2$ の一次元球を考える。したがって、対応する特性関数 χ_E は以下のように表される。

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq h/2, \\ 0, & |x| > h/2. \end{cases} \quad (37)$$

また、仮想的な物理モデルは以下のように表される。

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx} \left(a \frac{d}{dx} s_1 - \chi_E \right) + s_1 (1 - \chi_E) = 0 & \text{in } \mathbb{R}, \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} s_1(x) = 0. \end{cases} \quad (38)$$

このとき、(38)の解析解は以下のように表される。

$$s_1(x) = \begin{cases} -(\sqrt{a} + \frac{2a}{h})^{-1} \exp\left(\sqrt{\frac{1}{a}}\left(x + \frac{h}{2}\right)\right), & x < -h/2, \\ 2(\sqrt{ah} + 2a)^{-1}x, & |x| \leq h/2, \\ (\sqrt{a} + \frac{2a}{h})^{-1} \exp\left(\sqrt{\frac{1}{a}}\left(x - \frac{h}{2}\right)\right), & x > h/2. \end{cases} \quad (39)$$

ここで、 $a \in \mathbb{R}_+$ が十分小さいとき、領域 E 内での状態場の傾きは以下の式を満たす。

$$\frac{ds_1}{dx}(x) = 2(\sqrt{ah} + 2a)^{-1} \quad (40)$$

$$\simeq 2(\sqrt{ah})^{-1} \quad \text{for all } x \in \Omega. \quad (41)$$

すなわち、領域 E において状態場 s_1 の傾きは厚み h に反比例し(14)の妥当性が示唆される。

参考文献

- (1) Bendsøe, M.P. and Kikuchi, N.: Generating optimal topologies in structural design using a homogenization

- method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **71** (1988), pp. 197–224.
- (2) Allaire, G., Jouve, F. and Michailidis, G.: Thickness control in structural optimization via a level set method. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, **53** (2016), pp. 1349–1382.
- (3) Carroll, J. D. and Guest, J. K.: Topology optimization of uniform thickness structures using discrete object projection. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, **65** (2022), 271.
- (4) Sato, Y., Yamada, T., Izui, K. and Nishiwaki, S.: Manufacturability evaluation for molded parts using fictitious physical models, and its application in topology optimization, *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, **92** (2017), pp. 1391–1409.
- (5) Yamada, T. and Noguchi, Y.: Topology optimization with a closed cavity exclusion constraint for additive manufacturing based on the fictitious physical model approach, *Additive Manufacturing*, **52** (2022), 102630.
- (6) Yamada, T.: Geometric shape features extraction using a steady state partial differential equation system, *Journal of Computational Design and Engineering*, **6** (2019), pp. 647–656.
- (7) Yamada, T.: Thickness constraints for topology optimization using the fictitious physical model, *Proceedings of the 6th International Conference on Engineering Optimization. EngOpt 2018* (2018), pp. 483–490.
- (8) Allaire, G.: *Shape optimization by the homogenization method*, Springer-Verlag, (2002).
- (9) Bendsøe, M.P. and Sigmund, O.: Material interpolation schemes in topology optimization, *Archive of Applied Mechanics*, **69** (1999), pp. 635–654.
- (10) Yamada, T., Izui, K., Nishiwaki, S. and Takezawa, A.: A topology optimization method based on the level set method incorporating a fictitious interface energy, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **199** (2010), pp. 2876–2891.
- (11) Sokolowski, J. and Zochowski, A.: On the topological derivative in shape optimization, *SIAM Journal on Control and Optimization*, **37** (1999), pp. 1251–1272.
- (12) Amstutz, S. and Andra, H.: A new algorithm for topology optimization using a level-set method, *Journal of Computational Physics*, **216** (2006), pp. 573–588.
- (13) Hasebe, T., Kuroda, H., Teramoto, H., Masamune, J. and Yamada, T.: Construction of normal vector field using the partial differential equations, *Transactions of the Japan Society for Industrial and Applied Mathematics*, **30** (2020), pp. 249–258.
- (14) Otomori, M., Yamada, T., Izui, K. and Nishiwaki, S.: Matlab code for a level set-based topology optimization method using a reaction diffusion equation, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, **51** (2015), pp. 1159–1172.
- (15) Hecht, F.: New development in FreeFem++, *Journal of Numerical Mathematics*, **20** (2012), pp. 251–265.
- (16) Allaire, G., Jouve, F. and Toader, A.M.: Structural optimization using sensitivity analysis and a level-set method, *Journal of Computational Physics*, **194** (2004), pp. 363–393.

