計算数理工学論文集 Vol. 22 (2022 年 12 月)，論文 No. 16-221216 JASCOME

半解析的有限要素法を用いた地中に埋設された上水道管中のガイド波の分散解析

DISPERSION ANALYSIS OF GUIDED WAVES IN A WATER PIPE BURIED IN THE GROUND USING SEMI-ANALYTICAL FINITE ELEMENT METHOD

丸山　泰蔵 [1)]，中畑　和之 [2)]

Taizo MARUYAMA and Kazuyuki NAKAHATA

1) 愛媛大学大学院理工学研究科　(〒 790-8577　愛媛大学松山市文京町 3 番，　E-mail: maruyama@cee.ehime-u.ac.jp)
2) 愛媛大学大学院理工学研究科　(〒 790-8577　愛媛大学松山市文京町 3 番，　E-mail: nakahata@cee.ehime-u.ac.jp)

This paper presents a dispersion analysis method for guided waves propagating in a fluid-filled pipe buried in the ground. The proposed method is based on a semi-analytical finite element (SAFE) method in the cylindrical coordinate system, and a radiation condition of the ground is treated exactly. A nonlinear eigenvalue problem has to be solved under the radiation condition, and it is solved numerically using the Sakurai-Sugiura method. The present numerical results almost agree with the conventional numerical solutions obtained by the SAFE with a perfect matching layer.

Key Words : Dispersion Analysis, Guided Waves, Semi-Analytical Finite Element Method

1. はじめに

社会基盤構造物には板，棒，管のような長大構造が使用される場合がある．ガイド波は長大構造物中を低減衰で長手方向に伝搬することが知られており，ガイド波の特性を活かせれば効率的な検査やモニタリングに期待できる．ガイド波は分散性と多重モード性を有するため，ガイド波の特性の把握には分散解析が必要である．ガイド波の伝搬方向のみを解析的に扱う半解析的有限要素法 [(1)]（Semi-Analytical Finite Element Method: SAFE Method）は任意の断面形状や層構造を有する導波路を容易に取り扱える数値解析手法である．多くの場合，SAFE では分散解析が最終的に一般化固有値問題に帰着されるため，LAPACK 等のライブラリによって容易に解くことができる．さらに，左右の固有ベクトルを用いることで，数値微分を行うことなく群速度を計算可能である．これらの利点から近年，SAFE は分散解析に広く用いられている．

パイプラインのように導波路が流体や固体中に埋設されている場合，導波路の外部領域を無限領域としてモデル化する場合が多い．しかしながら，SAFE で無限領域を扱う場合には，通常の FEM と同様に吸収境界の設定等，何らかの処置が必要となる．無限領域での放射条件を厳密に扱う場合，波数と周波数の関係が複雑になり，最終的に帰着される問題は非線形固有値問題となる．例外として，板の周りに流体が存在する場合は 3 次の多項式固有値問題に帰着され，一般化固有値問題に変換できることが報告されている [(2)]．一方，Mazzotti ら [(3)] は一般的な任意断面形状に対する解析方法として SAFE と 2.5 次元境界要素法を組み合わせた方法を報告している．Mazzotti らは Beyn[(4)] の複素平面上における経路積分による方法を用いて非線形固有値問題を解いている．一方，実問題で扱うことの多い軸対称導波路に対する問題では，Perfectly Matched Layer (PML) を用いた定式化 [(5, 6)] や Scaled Bounday FEM (SBFEM) による定式化 [(7)] が報告されているものの，SAFE で放射条件を厳密に取り扱った例は無いと思われる．

本研究では，上水道管のモニタリング技術の開発を見据えて，地中に埋設された円管を対象として軸対称導波路に対する SAFE を用いた分散解析を行う．管の外部は無限に広がる等方性弾性体として放射条件は解析的に取り扱い，最終的に帰着される非線形固有値問題は Sakurai-Sugiura Method[(8)] (SSM) を用いて数値的に解く．

2. 解くべき問題

本研究では時間調和な波動場を考え，時間因子は $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$ とする．ここで，i は虚数単位，ω は角周波数，t は時刻である．

Fig. 1 に示すように，流体で満たされた円管が地中に埋

2022 年 10 月 27 日受付，2022 年 11 月 19 日受理

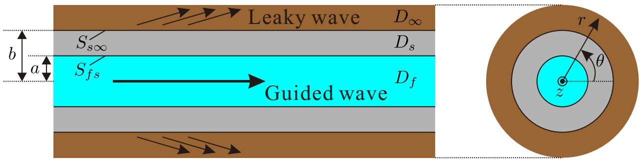

Fig. 1　Fluid-filled pipe buried in the ground.

設されており，長手方向に伝搬するガイド波を考える．円管の長手方向を z，径方向を r，周方向を θ とする円筒座標系 (r,θ,z) によって 3 次元空間中の座標を表す．流体領域 D_f，固体領域 D_s，外部領域 D_∞ は以下のように定義している．

$$D_f = \{(r,\theta,z) \mid r \in [0,a), \theta \in [0,2\pi), z \in (-\infty,\infty)\}$$
$$D_s = \{(r,\theta,z) \mid r \in (a,b), \theta \in [0,2\pi), z \in (-\infty,\infty)\}$$
$$D_\infty = \{(r,\theta,z) \mid r \in (b,\infty), \theta \in [0,2\pi), z \in (-\infty,\infty)\}$$

また，それぞれの領域間の境界は以下のように定義する．

$$S_{fs} = \{(r,\theta,z) \mid r = a, \theta \in [0,2\pi), z \in (-\infty,\infty)\}$$
$$S_{s\infty} = \{(r,\theta,z) \mid r = b, \theta \in [0,2\pi), z \in (-\infty,\infty)\}$$

流体領域 D_f では音圧 p が次の Helmholtz 方程式を満足すると仮定する．

$$\nabla^2 p(\boldsymbol{x}) + \frac{\omega^2}{c_f^2} p(\boldsymbol{x}) = 0 \qquad \text{for } \boldsymbol{x} \in D_f \tag{1}$$

ここで，c_f は流体中の音速である．一方，固体領域 D_s では，次の運動方程式，構成則，ひずみ–変位関係を仮定する．

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}) + \rho_s(r)\omega^2 \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0} \qquad \text{for } \boldsymbol{x} \in D_s \tag{2}$$
$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{C}(r) : \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{x}) \qquad \text{for } \boldsymbol{x} \in D_s \tag{3}$$
$$\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\left\{\nabla \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) + (\nabla \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}))^{\mathrm{T}}\right\} \qquad \text{for } \boldsymbol{x} \in D_s \tag{4}$$

ここで，$\boldsymbol{\sigma}$，$\boldsymbol{\epsilon}$，$\boldsymbol{u}$ はそれぞれ応力，ひずみ，変位であり，上付き T は転置を示している．また，$\mathbf{C}$ は弾性係数テンソル，ρ_s は密度であり，本研究では軸対称導波路を想定するため，r にのみ依存するものとする．外部領域 D_∞ では，固体領域 D_s と同様の基礎式 (2)–(4) を仮定するが，弾性係数テンソル $\mathbf{C}$，密度 ρ_s は定数とする．

流体–固体界面 S_{fs} では，摩擦を無視し，法線方向の変位と応力の連続条件を考慮して次の境界条件を仮定する．

$$t_z^{(s)} = t_\theta^{(s)} = 0 \qquad \text{on } S_{fs} \tag{5}$$
$$t_r^{(s)} = -p^{(f)} \qquad \text{on } S_{fs} \tag{6}$$
$$\omega^2 u_r^{(s)} = \frac{1}{\rho_f} q^{(f)} \qquad \text{on } S_{fs} \tag{7}$$

ここで，ρ_f は流体の密度，$q = \partial p/\partial r$ であり，上付き添字はそれぞれの領域から S_{fs} に極限移行した物理量であることを示している．また，$\boldsymbol{t}$ は表面力であり，r 方向の単位ベクトル $\mathbf{e}_r$ を用いて次のように定義している．

$$\boldsymbol{t} = \mathbf{e}_r \cdot \boldsymbol{\sigma}$$

一方，固体–外部領域界面 $S_{s\infty}$ では，完全接合と仮定して変位と表面力の連続条件を考慮する．

$$\boldsymbol{u}^{(s)} = \boldsymbol{u}^{(\infty)} \qquad \text{on } S_{s\infty} \tag{8}$$
$$\boldsymbol{t}^{(s)} = \boldsymbol{t}^{(\infty)} \qquad \text{on } S_{s\infty} \tag{9}$$

外部領域 D_∞ では，$r \to \infty$ に対する次の放射条件を仮定する．

$$\frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}}\left(r\frac{\partial}{\partial r} + z\frac{\partial}{\partial z}\right)\boldsymbol{u}_\varphi^{(\infty)} - \mathrm{i}k_\varphi \boldsymbol{u}_\varphi^{(\infty)} = o\left(r^{-1}\right) \tag{10}$$
$$\boldsymbol{u}_\varphi^{(\infty)} = o\left(r^0\right) \tag{11}$$

ここで，$(\varphi = L \text{ or } T)$ であり，$k_\varphi = \omega/c_\varphi$ である．c_L，c_T はそれぞれ縦波，横波の伝搬速度，$\boldsymbol{u}_L$，$\boldsymbol{u}_T$ はそれぞれ変位の縦波成分，横波成分を表している．

以上によって表される領域中を z 方向に伝搬するガイド波の分散関係を求めることが本論文で解くべき問題である．

3. 半解析的有限要素法の定式化

3.1. 流体で満たされた円管に対する定式化

重み関数 $\tilde{\psi}(\boldsymbol{x})$ を用いて重み付き残差法を適用すると，流体領域，固体領域それぞれに対して次式が得られる．

$$\int_{S_{fs}} \tilde{\psi}(\boldsymbol{x}) q(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}S_x - \int_{D_f} \nabla\tilde{\psi}(\boldsymbol{x}) \cdot \nabla p(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}D_x + \frac{\omega^2}{c_f^2}\int_{D_f} \tilde{\psi}(\boldsymbol{x}) p(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}D_x = 0 \tag{12}$$

$$\int_{S_{s\infty}} \tilde{\psi}(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{t}(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}S_x - \int_{S_{fs}} \tilde{\psi}(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{t}(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}S_x - \int_{D_s} \nabla\tilde{\psi}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}D_x + \omega^2 \int_{D_s} \tilde{\psi}(\boldsymbol{x}) \rho_s(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}D_x = \boldsymbol{0} \tag{13}$$

式 (1)–(4) より，流体中の音圧 p，固体中の変位 $\boldsymbol{u}$ は次のように表すことができる [1]．

$$p(\boldsymbol{x}) = P(r) \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n\theta + \xi z)} \tag{14}$$
$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{U}(r) \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n\theta + \xi z)} \tag{15}$$

ここで，$n \in \mathbb{Z}$ は θ 方向の次数，$\xi \in \mathbb{C}$ は z 方向の波数である．音圧勾配 q，表面力 $\boldsymbol{t}$ も同様に次のように表わせる．

$$q(\boldsymbol{x}) = Q(r) \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n\theta + \xi z)} \tag{16}$$
$$\boldsymbol{t}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{T}(r) \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n\theta + \xi z)} \tag{17}$$

重み関数 $\tilde{\psi}(\boldsymbol{x})$ は $\tilde{\psi}(\boldsymbol{x}) = \psi(r)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n\theta + \xi z)}$ と設定すると，式 (12)，(13) は次のように変形できる．

$$\int_0^a \left[(\mathcal{E}_r - \mathrm{i}n\mathcal{E}_\theta - \mathrm{i}\xi\mathcal{E}_z)\psi(r)\right]^{\mathrm{T}} \left[(\mathcal{E}_r + \mathrm{i}n\mathcal{E}_\theta + \mathrm{i}\xi\mathcal{E}_z) P(r)\right] r\mathrm{d}r - \frac{\omega^2}{c_f^2}\int_0^a \psi(r) P(r) r\mathrm{d}r - a\psi(a)Q(a) = 0 \tag{18}$$

$$\int_a^b \left[(\mathcal{D}_r - \mathrm{i}n\mathcal{D}_\theta - \mathrm{i}\xi\mathcal{D}_z)\psi(r)\right]^{\mathrm{T}} \boldsymbol{C}(r) \times \left[(\mathcal{D}_r + \mathrm{i}n\mathcal{D}_\theta + \mathrm{i}\xi\mathcal{D}_z)\boldsymbol{U}(r)\right] r\mathrm{d}r - \omega^2 \int_a^b \psi(r)\rho_s(r)\boldsymbol{U}(r) r\mathrm{d}r - \left[b\psi(b)\boldsymbol{T}(b) - a\psi(a)\boldsymbol{T}(a)\right] = \boldsymbol{0} \tag{19}$$

ここで，$\boldsymbol{C}$ は弾性定数テンソル $\mathbf{C}$ を Voigt 表記 (6×6 行列) で表したものである．また，$\mathcal{E}_r$，$\mathcal{E}_\theta$，$\mathcal{E}_z$，$\mathcal{D}_r$，$\mathcal{D}_\theta$，$\mathcal{D}_z$ は微分演算子を含む行列であり次のように定義している．

$$\mathcal{E}_r = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{E}_\theta = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{r} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{E}_z = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{D}_r = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 & 0 \\ \frac{1}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial r} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{D}_\theta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{r} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{D}_z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

式 (18)，(19) に対して境界条件 (5)–(9)，放射条件 (10)，(11) を考慮すると次のように変形できる．

$$\int_0^a \left[\left(\mathcal{E}_r - \mathrm{i}n\mathcal{E}_\theta - \mathrm{i}\xi\mathcal{E}_z\right)\psi(r)\right]^{\mathrm{T}} \left[\left(\mathcal{E}_r + \mathrm{i}n\mathcal{E}_\theta + \mathrm{i}\xi\mathcal{E}_z\right)P(r)\right] r\mathrm{d}r - \frac{\omega^2}{c_f^2}\int_0^a \psi(r)P(r)r\mathrm{d}r - a\psi(a)\rho_f\omega^2 U_r(a) = 0 \quad (20)$$

$$\int_a^b \left[\left(\mathcal{D}_r - \mathrm{i}n\mathcal{D}_\theta - \mathrm{i}\xi\mathcal{D}_z\right)\psi(r)\right]^{\mathrm{T}} \boldsymbol{C}(r) \times \left[\left(\mathcal{D}_r + \mathrm{i}n\mathcal{D}_\theta + \mathrm{i}\xi\mathcal{D}_z\right)\boldsymbol{U}(r)\right] r\mathrm{d}r - \omega^2\int_a^b \psi(r)\rho_s(r)\boldsymbol{U}(r)r\mathrm{d}r - \left[b\psi(b)\boldsymbol{W}(b,\xi,\omega)\boldsymbol{U}(b) + a\psi(a)P(a)\mathbf{e}_r\right] = \mathbf{0} \quad (21)$$

ここで，$\boldsymbol{W}$ は外部領域 D_∞ の放射条件を考慮した変位から表面力への変換行列であり，次小節で詳細の説明を行う．

3.2. 外部領域における放射条件の処理

外部領域 D_∞ を等方性弾性体とすると，変位場はポテンシャル関数 ϕ，$\boldsymbol{\psi}$ を用いて次式で表される．

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \nabla\phi(\boldsymbol{x}) + \nabla \times \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x}) \quad (22)$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x}) = 0 \quad (23)$$

ポテンシャル関数 ϕ，$\boldsymbol{\psi}$ は Helmholtz 方程式を満たすため，円筒座標系の θ，z に関する因子を $\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta+\mathrm{i}\xi z}$ であると仮定すれば，放射条件を満たす解は次のように表される．

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \Phi H_n^{(1)}(\eta_L r)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta+\mathrm{i}\xi z} \quad (24)$$

$$\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\Psi} H_n^{(1)}(\eta_T r)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta+\mathrm{i}\xi z} \quad (25)$$

ここで，$\eta_\varphi = \sqrt{k_\varphi^2 - \xi^2}$, ($\varphi = L$ or T)，$H_n^{(1)}$ は n 次の第一種 Hankel 関数，Φ と $\boldsymbol{\Psi}$ は任意振幅である．式 (24)，(25) を式 (22) に代入し，式 (23) を用いて Ψ_z を消去すると，以下の $\boldsymbol{U}$，$\boldsymbol{T}$ の表現が得られる．

$$\begin{aligned} U_r(r) = {} & \Phi\left\{\frac{n}{r}H_n^{(1)}(\eta_L r) - \eta_L H_{n+1}^{(1)}(\eta_L r)\right\} \\ & - \Psi_r \frac{n}{\xi r}\left\{\frac{n+1}{r}H_n^{(1)}(\eta_T r) - \eta_T H_{n+1}^{(1)}(\eta_T r)\right\} \\ & - \Psi_\theta\left(\mathrm{i}\xi + \frac{\mathrm{i}n^2}{\xi r^2}\right)H_n^{(1)}(\eta_T r) \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} U_\theta(r) = {} & \Phi\frac{\mathrm{i}n}{r}H_n^{(1)}(\eta_L r) + \Psi_r\frac{\mathrm{i}}{\xi}\left(k_T^2 - \frac{n^2-1}{r^2}\right)H_n^{(1)}(\eta_T r) \\ & + \Psi_\theta\frac{n}{\xi r}\left\{\frac{n-1}{r}H_n^{(1)}(\eta_T r) - \eta_T H_{n+1}^{(1)}(\eta_T r)\right\} \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} U_z(r) = {} & \Phi\mathrm{i}\xi H_n^{(1)}(\eta_L r) - \Psi_r\frac{\mathrm{i}n}{r}H_n^{(1)}(\eta_T r) \\ & + \Psi_\theta\left\{\frac{n+1}{r}H_n^{(1)}(\eta_T r) - \eta_T H_{n+1}^{(1)}(\eta_T r)\right\} \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} T_r(r) = {} & \Phi\left[\left\{2\mu\left(\frac{n(n-1)}{r^2} + \xi^2\right) - \rho_s\omega^2\right\}H_n^{(1)}(\eta_L r) + \frac{2\mu\eta_L}{r}H_{n+1}^{(1)}(\eta_L r)\right] \\ & + \Psi_r\frac{2n\mu}{\xi r}\left[\left\{k_T^2 - \xi^2 - \frac{(n+1)(n-2)}{r^2}\right\}H_n^{(1)}(\eta_T r) - \frac{\eta_T}{r}H_{n+1}^{(1)}(\eta_T r)\right] \\ & + \Psi_\theta\frac{2\mathrm{i}\mu}{\xi r}\left[-n\left\{\frac{n(n-2)}{r^2} + \xi^2\right\}H_n^{(1)}(\eta_T r) + \eta_T r\left(\frac{n^2}{r^2} + \xi^2\right)H_{n+1}^{(1)}(\eta_T r)\right] \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} T_\theta(r) = {} & \Phi\frac{2\mathrm{i}n\mu}{r}\left\{\frac{n-1}{r}H_n^{(1)}(\eta_L r) - \eta_L H_{n+1}^{(1)}(\eta_L r)\right\} \\ & + \Psi_r\frac{\mathrm{i}\mu}{\xi r}\left[\left\{k_T^2(n-1) - \frac{(n+1)(2n^2-4n+3)}{r^2}\right\}H_n^{(1)}(\eta_T r) + \eta_T r\left(\frac{2n^2-1}{r^2} - k_T^2\right)H_{n+1}^{(1)}(\eta_T r)\right] \\ & + \Psi_\theta\frac{\mu}{\xi r}\left[\left\{\frac{n(2n^2-4n+3)}{r^2} + n\left(2\xi^2 - k_T^2\right)\right\}H_n^{(1)}(\eta_T r) + \frac{4n\eta_T}{r}H_{n+1}^{(1)}(\eta_T r)\right] \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} T_z(r) = {} & \Phi 2\mathrm{i}\mu\left\{\frac{n\xi}{r}H_n^{(1)}(\eta_L r) - \xi\eta_L H_{n+1}^{(1)}(\eta_L r)\right\} \\ & + \Psi_r\frac{2\mathrm{i}n\mu}{r}\left\{-\frac{n}{r}H_n^{(1)}(\eta_T r) + \eta_T H_{n+1}^{(1)}(\eta_T r)\right\} \\ & + \Psi_\theta\mu\left(\frac{2n^2-1}{r^2} + 2\xi^2 - k_T^2\right)H_n^{(1)}(\eta_T r) \end{aligned} \quad (31)$$

ここで，λ，μ は Lamé 定数である．式 (26)–(31) より，$\boldsymbol{U}$，$\boldsymbol{T}$ は次のように表せる．

$$\boldsymbol{U}(r) = \mathbf{H}_u(r,\xi,\omega)\begin{Bmatrix} \Phi \\ \Psi_r \\ \Psi_\theta \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{T}(r) = \mathbf{H}_t(r,\xi,\omega)\begin{Bmatrix} \Phi \\ \Psi_r \\ \Psi_\theta \end{Bmatrix}$$

したがって，表面力と変位の関係は次のように得られる．

$$\boldsymbol{T}(r) = \boldsymbol{W}(r,\xi,\omega)\boldsymbol{U}(r) \quad (32)$$

$$\boldsymbol{W}(r,\xi,\omega) = \mathbf{H}_t(r,\xi,\omega)\left[\mathbf{H}_u(r,\xi,\omega)\right]^{-1} \quad (33)$$

変位から表面力への変換行列 $\boldsymbol{W}$ の陽な表現は複雑であるが，数値的に計算することは容易である．

3.3. 離散化

式 (20)，(21) 中の積分区間を分割し，未知量 P，$\boldsymbol{U}$ を形状関数 ϕ_i によって次のように離散近似する．

$$P(r) \simeq \sum_{j=1}^{N_f} P_j \phi_j(r) \tag{34}$$

$$\boldsymbol{U}(r) \simeq \sum_{j=N_f}^{N} (\boldsymbol{U})_j \phi_j(r) \tag{35}$$

ここで，N_f は $[0,a]$ の区間の節点数，N は総接点数であり，節点は $r=0$ から $r=b$ まで順番に配置する．そのため，第 1 節点は $r=0$，第 N_f 節点は $r=a$，第 N 節点は $r=b$ に対応している．さらに，重み関数を $\psi=\phi_i$ とすると，次の離散化された方程式が得られる．

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{K}_1^f + \xi^2 \mathbf{K}_3^f - \omega^2 \mathbf{M}^f & -\omega^2 \boldsymbol{\Delta}^f \\ \hline -\boldsymbol{\Delta}^s & \begin{array}{c} \mathbf{K}_1^s + \mathrm{i}\xi \left\{ \mathbf{K}_2^s - (\mathbf{K}_2^s)^{\mathrm{H}} \right\} \\ +\xi^2 \mathbf{K}_3^s - \omega^2 \mathbf{M}^s \\ -\mathbf{W}(\xi,\omega) \end{array} \end{array}\right] \times \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{P} \\ \mathbf{U} \end{array} \right\} = \mathbf{0} \tag{36}$$

ここで，上付き H は共役転置である．式 (36) の各小行列の次元は $N_s = N - N_f + 1$ とすると，左上が $N_f \times N_f$，右上が $N_f \times 3N_s$，左下が $3N_s \times N_f$，右下が $3N_s \times 3N_s$ である．ベクトル $\mathbf{P}$，$\mathbf{U}$ の次元はそれぞれ N_f，$3N_s$ であり，次のように定義している．

$$\mathbf{P} = \left\{ P_1, P_2, \cdots, P_{N_f} \right\}^{\mathrm{T}} \tag{37}$$

$$\mathbf{U} = \left\{ (U_r)_{N_f}, (U_\theta)_{N_f}, (U_z)_{N_f}, (U_r)_{N_f+1}, \cdots, (U_z)_N \right\}^{\mathrm{T}} \tag{38}$$

式 (36) 中の各行列は次のように表される．

$$\left(\mathbf{K}_1^f\right)_{ij} = \int_0^a \left[\frac{\mathrm{d}\phi_i(r)}{\mathrm{d}r} \frac{\mathrm{d}\phi_j(r)}{\mathrm{d}r} + \frac{n^2}{r^2} \phi_i(r) \phi_j(r) \right] r \mathrm{d}r \tag{39}$$

$$\left(\mathbf{K}_3^f\right)_{ij} = \int_0^a \phi_i(r) \phi_j(r) r \mathrm{d}r \tag{40}$$

$$\left(\mathbf{M}^f\right)_{ij} = \frac{1}{c_f^2} \int_0^a \phi_i(r) \phi_j(r) r \mathrm{d}r \tag{41}$$

$$\left(\boldsymbol{\Delta}^f\right)_{ij} = \delta_{iN_a} \delta_{j1} a \rho_f \tag{42}$$

$$(\mathbf{K}_1^s)_{[3i-2:3i,3j-2:3j]} = \int_a^b \left[\mathbf{D}_1(\phi_I(r), r, n)\right]^{\mathrm{H}} \boldsymbol{C}(r) \mathbf{D}_1(\phi_J(r), r, n) r \mathrm{d}r \tag{43}$$

$$(\mathbf{K}_2^s)_{[3i-2:3i,3j-2:3j]} = \int_a^b \left[\mathbf{D}_1(\phi_I(r), r, n)\right]^{\mathrm{H}} \boldsymbol{C}(r) \mathbf{D}_2(\phi_J(r)) r \mathrm{d}r \tag{44}$$

$$(\mathbf{K}_3^s)_{[3i-2:3i,3j-2:3j]} = \int_a^b \left[\mathbf{D}_2(\phi_I^u(r))\right]^{\mathrm{H}} \boldsymbol{C}(r) \mathbf{D}_2(\phi_J^u(r)) r \mathrm{d}r \tag{45}$$

$$(\mathbf{M}^s)_{[3i-2:3i,3j-2:3j]} = \int_a^b \rho_s(r) \phi_I^u(r) \phi_J^u(r) r \mathrm{d}r \mathbf{I}_3 \tag{46}$$

$$(\boldsymbol{\Delta}^s)_{ij} = \delta_{i1} \delta_{jN_f} a \tag{47}$$

$$(\mathbf{W}(\xi,\omega))_{[3i-2:3i,3j-2:3j]} = \delta_{iN_s} \delta_{jN_s} b \boldsymbol{W}(b,\xi,\omega) \tag{48}$$

ここで，$I = N_f + i - 1$，$J = N_f + j - 1$ であり，$\mathbf{I}_3$ は 3×3 の単位行列，δ_{ij} は Kronecker のデルタである．式 (43)–(45) に含まれる行列関数 $\mathbf{D}_1$，$\mathbf{D}_2$ は以下で定義している．

$$\mathbf{D}_1(\phi(r), r, n) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi(r)}{\partial r} & 0 & 0 \\ \frac{\phi(r)}{r} & \frac{\mathrm{i}n\phi(r)}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\mathrm{i}n\phi(r)}{r} \\ 0 & 0 & \frac{\partial \phi(r)}{\partial r} \\ \frac{\mathrm{i}n\phi(r)}{r} & \frac{\partial \phi(r)}{\partial r} - \frac{\phi(r)}{r} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}_2(\phi(r)) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \phi(r) \\ 0 & \phi(r) & 0 \\ \phi(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

式 (36) において $\{\mathbf{P}^{\mathrm{T}}, \mathbf{U}^{\mathrm{T}}\}^{\mathrm{T}} \neq \mathbf{0}$ となる解がガイド波の解であり，その存在条件を求めることが分散解析である．

3.4. エネルギー速度

式 (36) で表される固有値問題を解けば，固有値からはガイド波の ξ，ω，n 関係，固有ベクトルからは変位と音圧の分布を求めることができる．一方，位相速度は得られた ω と ξ から直ちに求められるものの，実際の伝搬速度は位相速度と異なる．ガイド波は分散性を有するため，その波束は群速度もしくはエネルギー速度で伝搬する．粘性や漏洩が無い場合には群速度とエネルギー速度とは厳密に一致するが，そうでない場合には群速度は複素数となり物理的意味が不明確となる．そのため，本研究ではエネルギー速度を考慮する．

エネルギー速度 c_e は次の式で定義される [(1)]．

$$c_e = \frac{\frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \int_R F_z \mathrm{d}S \mathrm{d}t}{\frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \int_R (E_K + E_P) \mathrm{d}S \mathrm{d}t} \tag{49}$$

ここで，積分領域 R は外部領域を除く導波路断面であり，

$$R = \{(r,\theta,z) \mid r \in [0,b], \theta \in [0,2\pi), z = 0\}$$

である．また，F_z は z 方向のエネルギー流束密度，E_K は運動エネルギー密度，E_P はポテンシャルエネルギー密度である．そのため，エネルギー速度 c_e はガイド波による z 方向へのエネルギーの移動率を意味している．式 (49) は SAFE の定式化で用いた行列関数を用いて次のように表される．

$$c_e = \frac{c_{e;\mathrm{numer}}}{c_{e;\mathrm{denom}}} \tag{50}$$

$$c_{e;\mathrm{numer}} = \frac{2}{\rho_f \omega} \Re\left[\mathbf{P}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{H}} \left(\xi \mathbf{K}_3^f \right) \mathbf{P}_{\mathrm{R}} \right] + 2\omega \Im \left[\mathbf{U}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{H}} \left\{ \xi (\mathbf{K}_2^s)^{\mathrm{H}} + \mathrm{i}\xi \mathbf{K}_3^s \right\} \mathbf{U}_{\mathrm{R}} \right]$$

$$c_{e;\mathrm{denom}} = \frac{1}{\rho_f \omega^2} \Re\left[\mathbf{P}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{H}} \left(\mathbf{K}_1^f + \xi\bar{\xi} \mathbf{K}_3^f \omega^2 \mathbf{M}^f \right) \mathbf{P}_{\mathrm{R}} \right] + \Re\left[\mathbf{U}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{H}} \left(\mathbf{K}_1^s + \mathrm{i}\xi \mathbf{K}_2^s - \mathrm{i}\bar{\xi} (\mathbf{K}_2^s)^{\mathrm{H}} + \xi\bar{\xi} \mathbf{K}_3^s + \omega^2 \mathbf{M}^s \right) \mathbf{U}_{\mathrm{R}} \right]$$

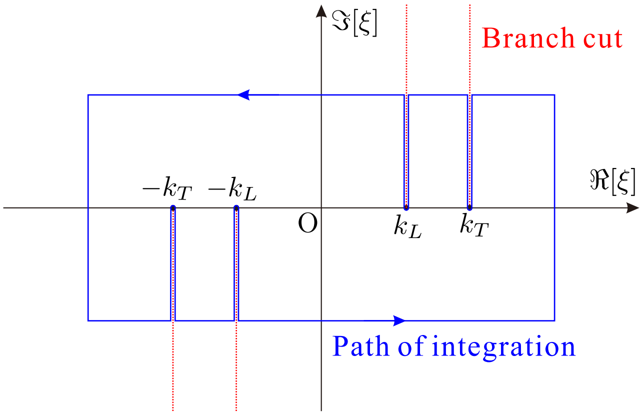

Fig. 2　Path of integration for Sakurai-Sugiura method.

ここで，$\Re[\,]$，$\Im[\,]$ はそれぞれ実部，虚部を表しており，$\overline{(\,)}$ は複素共役を表している．また，$\mathbf{P}_{\mathrm{R}}$，$\mathbf{U}_{\mathrm{R}}$ は右固有ベクトルのそれぞれ $\mathbf{P}$，$\mathbf{U}$ 部分を表している．式 (50) を用いれば，固有値問題 (36) を解いた後，単純な行列計算のみでエネルギー速度を計算できる．

4. ガイド波分散解析の数値的取り扱い

前節で示したように，式 (36) で表される固有値問題を解けば，ガイド波の ξ，ω，n 関係，そのときの変位，音圧分布が得られ，式 (50) からエネルギー速度を求められる．本節では，固有値問題 (36) を数値的に解く手順について説明する．

流体中の音圧 p は式 (14) によって表されるため，音圧の $r \to 0$ の極限値が θ に依存せず一意に定まる必要がある．そこで，次の条件を課す．

$$\lim_{r \to 0} P(r) = 0, \qquad (n \geq 1)$$

従って，$n \geq 1$ の場合は，$P_1 = 0$ として，式 (36) の 1 行目，1 列目を取り除いて以下の固有値解析を行う．

式 (36) の係数行列は，水道管の形状の情報と材料定数，及び ξ，ω，n を含んでいる．そのため，水道管の形状の情報と材料定数を既知量として与え，ω と n を固定して，$\{\mathbf{P}^{\mathrm{T}}, \mathbf{U}^{\mathrm{T}}\}^{\mathrm{T}} \neq \mathbf{0}$ となり得る ξ を探す固有値問題を解くこととする．その場合，式 (36) 中の $\mathbf{W}$ は ξ に関する非線形関数であるため，解くべき問題は非線形固有値問題である．本研究では SSM[8] を用いて非線形固有値問題を解く．なお，$\mathbf{W}$ は式 (33) 中の逆行列を数値的に計算して求める．

SSM は固有値に対応する変数に関する複素平面上での閉区間の経路積分を用いて，その閉区間で囲まれた領域内の固有値を求めることができる．このとき，対象とする行列関数は固有値を探す領域内で解析関数でなければならない．式 (36) 中の $\mathbf{W}$ は η_φ に起因して分岐カットを有するため，分岐カットを回避するように積分経路を選択する．Fig. 2 に分岐カットと本研究で用いた積分経路を示す．赤い破線が分岐カットであり，青い実線が積分経路である．

以上より，SSM を用いて固有値問題 (36) を解けば，固定された ω と n に対する ξ，$\mathbf{P}_{\mathrm{R}}$，$\mathbf{U}_{\mathrm{R}}$ が得られる．その後，これらを式 (50) に代入することでエネルギー速度を計算する．

Table 1　Material constants.

	L-wave velocity [m/s]	T-wave velocity [m/s]	Density [kg/m^3]
Water	1480	-	1000
Steel	5960	3260	7932
Soil	1540	300	2000

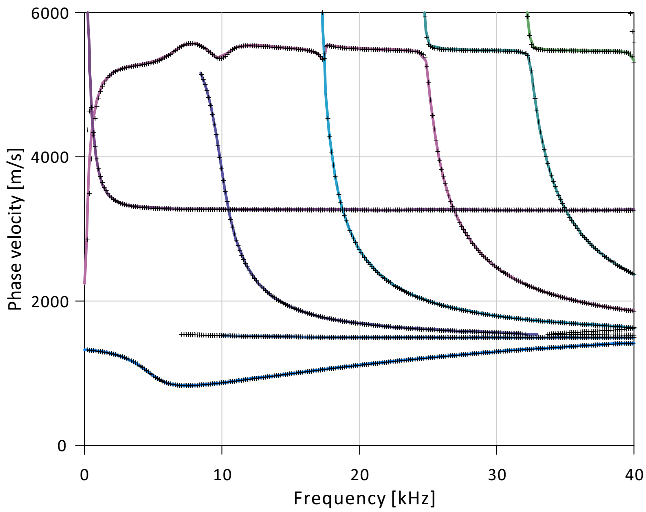

Fig. 3　Comparison of phase velocity dispersion curves between the present work and reference[6] when $n = 0$. Symbols + denote the present solutions, and solid lines denote the reference solutions.

5. 数値解析例

まず本手法の妥当性を示すため，Duan and Kirby[6] による解との比較を行う．流体領域 D_f は水，固体領域 D_s は鋼，外部領域 D_∞ は土だと想定して Table 1 の材料定数を用いた．管の寸法は $a = 101.36$mm，$b = 109.54$mm とした．本手法では θ，z 方向を解析的に扱うため，r 方向についてのみ 2 次要素で流体領域を 30 要素，固体領域を 4 要素に分割した．以上の計算条件は Duan and Kirby の計算条件と同じである．Fig. 3 に $n = 0$ の場合の位相速度分散曲線の計算結果を示す．位相速度 c_p は $c_p = \omega/\Re[\xi]$ として計算した．Fig. 3 より，両手法において概ね同様の解が得られていることがわかる．若干の違いが見られるのは，Duan and Kirby は PML を用いて計算しているため，その影響だと考えられる．

次に，流体-固体の連成の影響や外部領域の影響を調べるために，それぞれの領域を除去した場合との比較を行う．管の寸法は $a = b$ として，それぞれの領域に対して Fig. 3 と同様に Table 1 の材料定数を用いた．Fig. 4 には $n = 0$ としたときの外部領域が存在しない場合のエネルギー速度分散曲線の比較を示す．Fig. 4 上部に示すように，Water bar は剛体壁

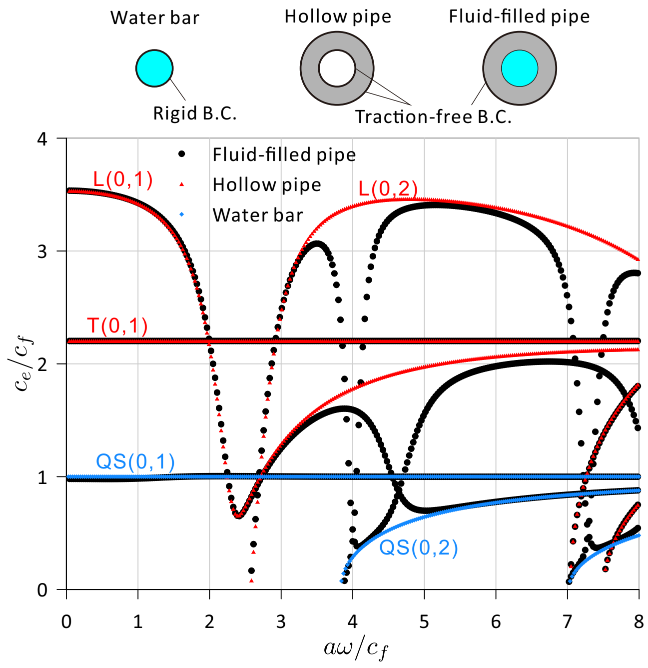

Fig. 4 Comparison of energy velocity dispersion curves among water bar, hollow pipe, and fluid-filled pipe when $n = 0$.

に囲まれた水の棒，Hollow pipe は表面力フリーの境界に囲まれた鋼の管である．また，Fluid-filled pipe は流体で満たされた管であるが，外部領域が存在せずに表面力フリーの境界条件を与えた場合である．Fig. 4 には伝搬モードのみを示しており，群速度とエネルギー速度は厳密に一致する．Hollow pipe の低次のモードには文献 [1] に倣って Longitudinal モードに $\mathrm{L}(n,m)$，Torsional モードに $\mathrm{T}(n,m)$ のラベルを付けている．Water bar の低次のモードには Quasi-Scholte の意味で $\mathrm{QS}(n,m)$ のラベルを付けている．ここで，m は伝搬モードとして存在できる周波数の小さい順に 1 から番号を与えている．Fig. 4 より，$a\omega/c_f < 3$ では若干のずれはあるものの，Fluid-filled pipe においても $\mathrm{T}(0,1)$，$\mathrm{L}(0,1)$，$\mathrm{QS}(0,1)$ と同様のモードが存在していることがわかる．一方，$a\omega/c_f > 3$ では，Fluid-filled pipe の分散曲線は L モードと QS モードを遷移し合うこと，T モードは遷移しないことがわかる．$\mathrm{T}(0,m)$ モードは θ 方向変位 u_θ のみ発生するため，流体の影響を受けない．

Fig. 5 には地中に埋設された満水管に対する $n = 0$ の場合のエネルギー速度分散曲線を示す．ここで，プロットしている記号の色は $a\Im[\xi]$ に対応しており，値が大きいほど減衰が大きいことを意味している．Fig. 5 より，外部領域の影響として，減衰が発生していること，$a\omega/c_f = 2$ 付近と $a\omega/c_f = 7$ 付近に小さいエネルギー速度のモードが現れていることが見て取れる．固体領域から外部領域へのエネルギーの流出が減衰として作用するため，QS モードに近い部分では比較的減衰が小さくなっている様子がわかる．

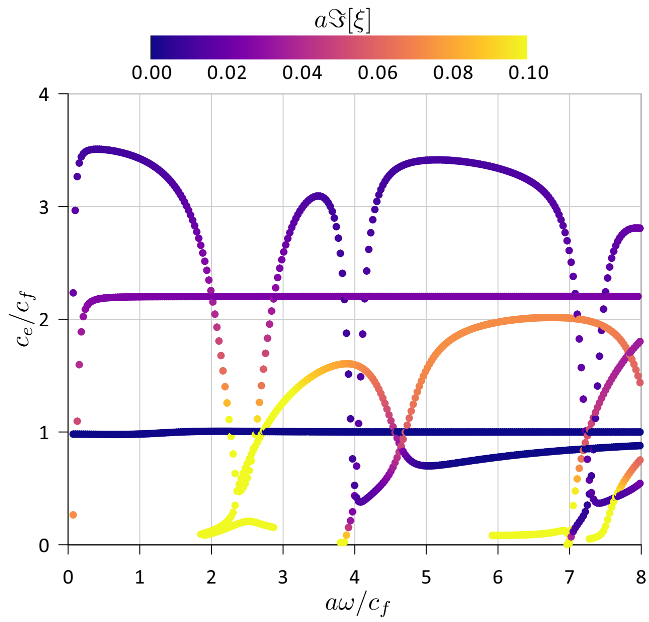

Fig. 5 Energy velocity dispersion curves for fluid-filled pipe buried in the ground when $n = 0$.

6. おわりに

本研究では，地中に埋設された上水道管を伝搬する音波を対象として，地中へのエネルギー漏洩を考慮したときの流体で満たされた円管中のガイド波の分散解析を行った．数値解析手法には SAFE を用い，外部領域での放射条件を厳密に満足するように解析解を境界条件として与えた．得られる固有値問題は非線形固有値問題となるため，SSM によって固有値を求めた．数値解析結果からは，PML を用いた場合と若干の相違が確認され，放射条件を厳密に扱っている本手法の方が適切な解であると判断される．

計算コストについて，本手法は，SSM を用いた固有値解析に必要となる経路積分の計算コストが周波数の増大と共に増大する．一方，PML によって近似的に放射条件を扱った場合 [5, 6] は一般化固有値問題を解くため，直接法を用いれば同様の計算コスト増大は無いと思われる．

上水道管中の音波計測に適した条件を調べ，モニタリング方法を開発することが今後の課題である．そのために本解析手法を用いて，遠方での受信が期待できる低減衰のガイド波のモードの特性把握を行い，そのモードの変位，音圧分布から適切な計測方法の設計を行う予定である．

謝辞： 本研究は JSPS 科研費 (22K14318) の助成を受けたものです．この場をお借りして感謝申し上げます．

参考文献

(1) J. Rose: Ultrasonic Guided Waves in Solid Media, (2014), Cambridge University Press.

(2) T. Hayashi and D. Inoue: Calculation of leaky Lamb waves with a semi-analytical finite element method, *Ultrasonics*, **54**(2014), pp. 1460–1469.

(3) M. Mazzotti, I. Bartoli, A. Marzani, and E. Viola: A coupled SAFE-2.5D BEM approach for the dispersion analysis of damped leaky guided waves in embedded waveguides of arbitrary cross-section, *Ultrasonics*, **53**(2014), pp. 1227–1241.

(4) W.-J. Beyn: An integral method for solving nonlinear eigenvalue problems, *Linear Algebra and its Applications*, **436**(2012), pp. 3839–3863.

(5) W. Duan, R. Kirby, P. Mudge, and T.-H. Gan: A one dimensional numerical approach for computing the eigenmodes of elastic waves in buried pipelines, *Journal of Sound and Vibration*, **384**(2016), pp. 177–193.

(6) W. Duan and R. Kirby: Guided wave propagation in buried and immersed fluid-filled pipes: Application of the semi analytic finite element method, *Computers & Structures*, **212**(2019), pp. 236–247.

(7) H. Gravenkamp, C. Birk, and C. Song: Computation of dispersion curves for embedded waveguides using a dashpot boundary condition, *The Journal of the Acoustical Society of America*, **135**(2014), pp. 1127–1138.

(8) S. Yokota and T. Sakurai: A projection method for nonlinear eigenvalue problems using contour integrals, *JSIAM Letters*, **5**(2013), pp. 41–44.