計算数理工学論文集 Vol. 22 (2022 年 12 月)，論文 No. 14-221216 JASCOME

流体潤滑問題を対象とした レベルセット法に基づくトポロジー最適化

LEVEL SET-BASED TOPOLOGY OPTIMIZATION FOR HYDRODYNAMIC LUBRICATION PROBLEMS

野口　悠暉 [1)]，松島　慶 [2)]，山田　崇恭 [3)]

Yuki NOGUCHI, Kei MATSUSHIMA and Takayuki YAMADA

1) 東京大学大学院工学系研究科　(〒 113-8656　東京都文京区弥生 2-11-16,　E-mail: noguchi@mech.t.u-tokyo.ac.jp)
2) 東京大学大学院工学系研究科　(〒 113-8656　東京都文京区弥生 2-11-16,　E-mail: matsushima@mech.t.u-tokyo.ac.jp)
3) 東京大学大学院工学系研究科　(〒 113-8656　東京都文京区弥生 2-11-16,　E-mail: t.yamada@mech.t.u-tokyo.ac.jp)

This paper proposes a level set-based topology optimization method for hydrodynamic lubrication problems. In particular, we focus on the optimal design of textures that improves fluid lubrication performance in slide bearings or mechanical seals. First, we explain the fluid lubrication problem based on the Reynolds equation. Next, an optimization problem for topology optimization is formulated, in which the load-carrying capacity is set as an objective function and the structural design of the texture is set as a design variable. Then, we introduce a level set-based topology optimization method based on the reaction-diffusion equation. The design sensitivity is derived based on the concept of the topological derivative. After explaining some notes about numerical implementation, we show numerical examples to show the validity of our method.

Key Words: Hydrodynamic lubrication, Topology optimization, Level set method, Topological derivative

1. 緒言

相対運動を示す二面の間に水や潤滑油といった流体を介在させて摩擦を軽減する流体潤滑は，自動車や工作機械等の様々な機械製品に欠かせないすべり軸受や，超精密加工機に用いられるすべり案内の動作原理として知られている (1)．特に，相対速度によって潤滑膜内に圧力を発生させる流体動圧軸受は，転がり軸受と比べて高精度の運動が実現できるため，高回転数かつ高精度の動作が求められるハードディスク等の精密機器への応用が見られる．

流体動圧軸受では，摩擦特性の向上のために摩擦表面にディンプルや溝形状のようなテクスチャ構造が導入されることが多い．このようなテクスチャ構造は潤滑膜内の圧力分布に影響を及ぼし，テクスチャ構造の導入によって摩擦係数が低減されることや (2) 耐荷重能が向上することが報告されている (3)．この他にも，流体潤滑状態にあるテクスチャ構造は，流体機械において作動流体の漏出を防ぐメカニカルシールや，研磨加工においてスラリーを保持する役割を持つ研磨パッドにも施されており，所望のトライボロジー特性を実現するためにテクスチャ構造を設計する取り組みが盛んに行われている．

従来，このような機械要素のテクスチャ構造には，スパイラル溝やヘリングボーン溝といった単純な幾何学的形状に基づくものが用いられてきた．他方，近年では，構造物の最適な形状を数理的最適化手法に基づき同定する，構造最適化法を用いたテクスチャ構造の設計例も報告されている．構造最適化法は寸法最適化，形状最適化，トポロジー最適化に分類されるが，流体潤滑問題におけるテクスチャ構造の最適設計においては，主に寸法最適化や形状最適化の研究例が報告されている．例えば，Shen and Khonsari(4) は，テクスチャの形状を複数の直線を用いて表現し，耐荷重能の向上を目的に逐次二次計画法を用いて直線間の寸法を設計変数とした最適化を行っている．Zhirong et al. (5) は，レベルセット法に基づく形状最適化を行い，すべり軸受の耐荷重能の向上を目的にテクスチャ構造の最適化を行なっている．しかし，これらの研究例はあくまで寸法最適化・形状最適化に基づいている

2022 年 10 月 27 日受付，2022 年 11 月 10 日受理

ため，最適化計算の過程におけるテクスチャ構造設計案の抜本的な変更が許容されないという問題がある．

この問題を解決するためには，構造最適化法の中でも最も設計自由度が高く，最適化過程において構造物に孔を導入する等の形態の変化をも許容する，トポロジー最適化法の導入が有効であると考えられる．これまでに流体潤滑問題を対象にトポロジー最適化法を導入した例は，僅かではあるものの報告されている．例えば，Wasseem et al. (6, 7) は，微小なテクスチャ構造が持つ所望の巨視的な特性を実現するために，均質化法による評価と密度法に基づくトポロジー最適化法を組み合わせたテクスチャ構造の最適設計法を提案している．Meng et al. (8) は，フェーズフィールド法の概念に基づくトポロジー最適化を行い，高い耐荷重能を示しつつ，潤滑膜の漏出を防ぐメカニカルシールの最適設計を行なっている．しかし，これらの例ではテクスチャ構造の厚みが連続的な分布を取ることが許容されており，テクスチャと非テクスチャ部の中間の厚みを持つ，いわゆるグレースケールを含んだ設計案が創出される可能性がある．このようなテクスチャ構造は，製造性の観点から望ましくないため，Meng et al. (8) の例では，始めにグレースケールを許容するような最適化計算を行った後に，グレースケールを除去する 2 段階の最適化手順が導入されている．しかし，この方法は数値実装が煩雑となる上に，最適解を得るまでの計算時間が多大となるという課題を抱えている．

そこで本研究では，流体潤滑問題を対象としたレベルセット法に基づくトポロジー最適化法を構築する．本研究では，Yamada et al. (9) が提案したレベルセット法に基づくトポロジー最適化法を導入する．この手法では，レベルセット関数と呼ばれる関数の等値面を用いて構造物の輪郭を明確に表現するため，前述のグレースケールの問題が存在しない．流体潤滑問題を対象にレベルセット法に基づくトポロジー最適化法を展開することで，所定の厚みを有するテクスチャ構造の最適構造設計案を効率的に創出できる．

本論文の次章以降の内容は，以下の通りである．まず，2 章では，本研究で対象とする流体潤滑問題をレイノルズ方程式に基づき定式化する．3 章では，テクスチャ構造を対象とした最適化問題を設定する．4 章では，レベルセット法に基づくトポロジー最適化法 (9) の概要を述べ，5 章では，最適化に必要な設計指針となる設計感度をトポロジー導関数の概念に基づき導出する．6 章では，レイノルズ方程式の数値解法及び最適化計算の数値実装に関する事柄を述べ，7 章では，数値解析例を示す．ここでは，本研究で導出したトポロジー導関数の妥当性を検証した上で，テクスチャの示す耐荷重能を最大化するようなテクスチャ構造の最適設計を行う．最後に，8 章では本研究の結言を述べる．

2．流体潤滑問題の定式化

図 1 は，本論文で対象とする流体潤滑問題のジオメトリ及び境界条件の設定を表す．すべり速度 $\boldsymbol{U}$ で移動する平板と，面内に周期的な形状を持つテクスチャが施された構造が相対

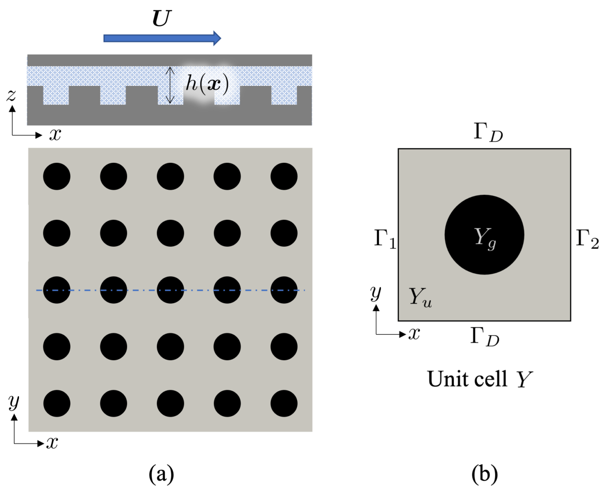

Fig. 1 Geometry setting and boundary conditions. (a) Cross sectional views in the $x-z$ and $x-y$ planes. (b) Unit cell Y. Black color represents textured region, whereas gray color represents non-textured region.

しており，その間を液体の潤滑膜が占めるような流体潤滑問題を考える．このような状況は，流体軸受やメカニカルシールの摩擦面の近傍で見られ，テクスチャ構造に依存した流体の圧力分布が，摩耗特性等に大きな影響を与えることが知られている．図 1(a) は，対象とする系の断面図を示す．下部は $x-y$ 面における断面図を示し，上部は一点鎖線が示す区間における $x-z$ 面における断面を示す．$h(\boldsymbol{x})$ は潤滑膜の膜厚を示し，テクスチャ構造に対応して空間分布を示す．

ここで，膜厚が十分に小さく，潤滑膜が非圧縮性ニュートン流体とみなせる上に，2 つの面の間の流れが層流である場合，流体の挙動は，図 1(a) 下部に示す $x-y$ 面内で成り立つレイノルズ方程式によってモデリングできる．さらに，テクスチャが面内に無限に配列されており，すべり速度 $\boldsymbol{U}$ が $+x$ 方向を向いているという状況を仮定すると，(b) に示すユニットセル Y を対象とした流体解析が可能となる．以下では，ユニットセル Y に着目した境界値問題の定式化を行う．

ユニットセル Y には，テクスチャ領域 Y_g とテクスチャが施されていない非テクスチャ領域 Y_u が存在する．これらの領域に対応し，膜厚 h は以下のように表される．

$$h = \begin{cases} h_m, & \text{in } \; Y_u \\ h_m + h_t & \text{in } \; Y_g, \end{cases}$$

ただし，h_m は潤滑膜の最小膜厚を，h_t は，テクスチャの厚みを表す．このような膜厚の設定の下，ユニットセル Y 内では，前述の通り以下に示すレイノルズ方程式が成り立つ．

$$-\nabla\cdot(h^3\nabla(p-p_{\mathrm{cav}})) + 6\mu\boldsymbol{U}\cdot\nabla(\alpha h) = 0 \quad \text{in } Y, \qquad (1)$$

ただし，p は圧力，μ は粘性係数を表す．p_{cav} はキャビテーション圧力を表し，圧力 p が p_{cav} 以下になると液体中に気泡（キャビティ）が発生する．また，α は，潤滑膜中の液体の占める割合を表す．キャビテーションが生じた領域では圧力 p は p_{cav} に等しく，α は $0<\alpha<1$ の範囲の値をとる．

一方，それ以外の領域では潤滑膜を液体が全て占めることから，$\alpha = 1$，$p > p_{\rm cav}$ となる [10]．α と p の持つこれらの特徴により，以下の関係式が成り立たなければならない．

$$(p - p_{\rm cav})(1-\alpha) = 0 \quad \text{in } Y. \tag{2}$$

ここで，後述の定式化のために，式 (1) を無次元化する．このために，以下の無次元量を導入する．

$$\overline{x} = \frac{\boldsymbol{x}}{l}, \quad \overline{h} = \frac{h}{h_m}, \quad \overline{p} = \frac{p - p_{\rm cav}}{p_a}, \quad \boldsymbol{\gamma} = \frac{6\mu l}{h_m^2 p_a}\boldsymbol{U} \tag{3}$$

ただし，l はユニットセル寸法を，p_a は大気圧を表す．これらを用いて式 (1) を無次元化すると，次のように表される．

$$-\overline{\nabla}\cdot(\overline{h}^3\overline{\nabla}\overline{p}) + \boldsymbol{\gamma}\cdot\overline{\nabla}(\alpha\overline{h}) = 0, \tag{4}$$

ただし，$\overline{\nabla}$ は無次元化座標 $\overline{\boldsymbol{x}}$ における勾配を表す．同様に，無次元圧力 $\overline{p}$ を用いると，式 (2) は以下のように表される．

$$\overline{p}(1-\alpha) = 0. \tag{5}$$

次にユニットセル Y における境界条件を説明する．$+\overline{x}$ 方向のすべり速度を考慮し，図 1(b) に示す境界 $\Gamma_{1,2}$ に周期境界条件を適用する．また，$\overline{y}$ 方向に隣接するユニットセルにおけるテクスチャ間の相互作用を無視できるものとし，境界 Γ_D における圧力 p を大気圧 p_a とする．すなわち，無次元圧力 $\overline{p}$ に関して，$\overline{p} = 1$ のディリクレ条件を課す．

以上より，図 1(b) の系に対する境界値問題は，次のように表される．

$$\begin{aligned} -\overline{\nabla}\cdot(\overline{h}^3\overline{\nabla}\overline{p}) + \boldsymbol{\gamma}\cdot\overline{\nabla}(\alpha\overline{h}) &= 0 \quad \text{in } Y, \\ \overline{p}(1-\alpha) &= 0 \quad \text{in } Y, \\ \overline{p} &= 1 \quad \text{on } \Gamma_D \\ \overline{p}\big|_{\Gamma_1} &= \overline{p}\big|_{\Gamma_2}. \end{aligned} \tag{6}$$

なお，以上の境界値問題の設定は先行研究 [5] の設定に基づいており，テクスチャ構造を対象とした最適設計問題のベンチマーク的問題として知られている．次章以降ではこのような問題を対象にトポロジー最適化法を展開し，提案手法の妥当性を検証する．

3. 最適化問題の定式化

ここでは，本論文で対象とするトポロジー最適化問題の定式化を行う．図 1 に示した系におけるテクスチャの持つ機能として，耐荷重能 (Load-carrying capacity, LCC) が挙げられる．これは，潤滑膜が支えうる荷重の大きさに相当し，圧力 $\overline{p}$ の摩擦面での積分 $\int_Y \overline{p}d\Omega$ で表される．LCC を向上することによって，摩擦面における摩耗や熱の発生を抑えることができることが知られている．そこで本論文では，テクスチャ構造を最適化することによって，LCC を最大化する以下の最適化問題を考える．

$$\begin{aligned} &\min_{Y_g} && J = -\int_Y \overline{p}d\Omega \\ &\text{subject to} && \text{Governing equations and} \\ & && \text{boundary conditions in Eq. (6).} \end{aligned} \tag{7}$$

4. レベルセット法に基づくトポロジー最適化法

式 (7) の最適化問題を解くために，本研究ではレベルセット法に基づくトポロジー最適化法 [9] を導入する．この方法では，レベルセット関数 ϕ と呼ばれるスカラー値を示す関数を導入することによって，設計対象となる構造を表現する．まず，ϕ を用いて，以下のようにテクスチャ領域 Y_g と非テクスチャ領域 Y_u を表現する．

$$\begin{cases} 0 < \phi(\boldsymbol{x}) \le 1 & \text{if } \forall \boldsymbol{x} \in Y_u \\ \phi(\boldsymbol{x}) = 0 & \text{if } \forall \boldsymbol{x} \in \Gamma_{ug} \\ -1 \le \phi(\boldsymbol{x}) < 0 & \text{if } \forall \boldsymbol{x} \in Y_g, \end{cases} \tag{8}$$

すなわち，レベルセット関数は Y_u で正，Y_g で負の値を示し，テクスチャ領域と非テクスチャ領域の界面 Γ_{ug} 上で 0 を示す．ここで，構造の有無を表す特性関数 χ_ϕ を ϕ に基づき以下のように定義する．

$$\chi_\phi = \begin{cases} 1 & \phi \ge 0 \\ 0 & \phi < 0. \end{cases} \tag{9}$$

この特性関数を用いれば，テクスチャ構造を考慮した膜厚 $\overline{h}$ の分布は，以下のように表現することができる．

$$\overline{h} = \overline{h}_u\chi_\phi + \overline{h}_g(1-\chi_\phi), \tag{10}$$

ただし，$\overline{h}_u = h_m/h_m = 1$ は非テクスチャ領域の膜厚を，$\overline{h}_g = (h_m + h_t)/h_m$ はテクスチャ領域における膜厚を表す．このようなテクスチャ構造の表現を用いて目的関数 J を最小化する構造を求める方法として，[9] では最適化問題をレベルセット関数 ϕ の仮想的な時間発展問題に置き換える方法が提案されている．具体的には，以下の反応拡散方程式に基づき ϕ を更新することで，最適化問題を解く．

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = -K(J' - \tau_\phi\overline{\nabla}^2\phi), \tag{11}$$

ただし，t は仮想的な時間，$K > 0$ は比例定数，J' は後述する設計感度，$\tau_\phi > 0$ は正則化係数を表す．式 (11) を解くことで最適な ϕ の分布，すなわち最適なテクスチャ構造が得られる．

5. 感度解析

式 (11) に基づき最適化問題を解くには，設計指針となる設計感度 J' が必要となる．ここでは，トポロジー導関数の概念に基づき設計感度の導出を行う．トポロジー導関数とは一般に，構造物に微小な空洞，もしくは介在物が導入された際の目的関数の変化率を表す．式 (7) の最適化問題については，目的関数 J に対して，非テクスチャ領域内に微小なテクスチャ領域が導入された場合のトポロジー導関数 $D_T J^{u\to g}$ と，テクスチャ領域内に微小な非テクスチャ領域が導入された場合のトポロジー導関数 $D_T J^{g\to u}$ の 2 種類が存在する．これらを組み合わせて設計感度 J' を定義することができる．

以下では，$D_T J^{u\to g}$ について詳細を示す．導入するテクスチャ領域が半径 ε，中心座標 $\overline{\boldsymbol{x}_0}$ の円形領域 Ω_ε であるとする

と，トポロジー導関数 $D_T J^{u\to g}$ は以下のように定義される．

$$D_T J^{u\to g} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{J_\varepsilon - J_0}{\pi\varepsilon^2}, \tag{12}$$

ただし，J_ε は微小なテクスチャ領域 Ω_ε を導入した後の目的関数を，J_0 は導入する前の目的関数を表す．

ここで，円形テクスチャ領域 Ω_ε が導入される前の目的関数 J_0 及び膜厚 $\overline{h}_0$ は以下のように表される．

$$\begin{aligned} J_0 &= -\int_Y \overline{p}_0 d\Omega, \\ \overline{h}_0 &= \overline{h}_u \chi_{Y_u} + \overline{h}_g \chi_{Y_g} \end{aligned} \tag{13}$$

ただし，χ_A は領域 A で 1，それ以外で 0 の値を示す特性関数を表す．$\overline{p}_0$ は Ω_ε 導入前の圧力を表し，式 (6) の境界値問題に対応する弱形式を満たす．

$$a_p^0(\overline{p}_0, \tilde{p}) + a_\alpha^0(\alpha_0, \tilde{p}) = 0 \quad \forall \tilde{p} \in V(Y), \tag{14}$$

$$\int_Y \overline{p}_0(1-\alpha_0)\tilde{q} d\Omega = 0 \quad \forall \tilde{q} \in W(Y), \tag{15}$$

ただし，α_0 は Ω_ε 導入前の α を表す．$\tilde{p} \in V(Y)$ 及び $\tilde{q} \in W(Y)$ はそれぞれテスト関数を表し，$V(Y)$ は Γ_D におけるディリクレ条件 $\tilde{p} = 0$ 及び $\Gamma_{1,2}$ における周期境界条件が成り立つソボレフ空間を，$W(Y)$ は同様の境界値条件が成り立つ L^2 空間を表す．また，式 (14) の各項は次のように表される．

$$\begin{aligned} a_p^0(\overline{p}, \tilde{p}) &= \int_Y \overline{h}_0^3 \overline{\nabla}\overline{p} \cdot \overline{\nabla}\tilde{p} d\Omega, \\ a_\alpha^0(\alpha, \tilde{p}) &= -\int_Y \alpha \overline{h}_0 \boldsymbol{\gamma} \cdot \overline{\nabla}\tilde{p} d\Omega. \end{aligned} \tag{16}$$

一方，Ω_ε を領域 Y_u に導入した後の目的関数 J_ε 及び膜厚 $\overline{h}_\varepsilon$ は以下のように表される．

$$\begin{aligned} J_\varepsilon &= -\int_Y \overline{p}_\varepsilon d\Omega, \\ \overline{h}_\varepsilon &= \overline{h}_u \chi_{(Y_u \setminus \overline{\Omega_\varepsilon})} + \overline{h}_g \chi_{(Y_g \cup \Omega_\varepsilon)} \end{aligned} \tag{17}$$

ただし，$\overline{p}_\varepsilon$ は Ω_ε 導入後の圧力を表し，以下の弱形式を満たす．

$$a_p^\varepsilon(\overline{p}_\varepsilon, \tilde{p}) + a_\alpha^\varepsilon(\alpha_\varepsilon, \tilde{p}) = 0 \quad \forall \tilde{p} \in V(Y), \tag{18}$$

$$\int_Y \overline{p}_\varepsilon(1-\alpha_\varepsilon)\tilde{q} d\Omega = 0 \quad \forall \tilde{q} \in W(Y), \tag{19}$$

なお，式 (18) の各項は以下のように表される．

$$\begin{aligned} a_p^\varepsilon(\overline{p}, \tilde{p}) &= \int_Y \overline{h}_\varepsilon^3 \overline{\nabla}\overline{p} \cdot \overline{\nabla}\tilde{p} d\Omega, \\ a_\alpha^\varepsilon(\alpha, \tilde{p}) &= -\int_Y \alpha \overline{h}_\varepsilon \boldsymbol{\gamma} \cdot \overline{\nabla}\tilde{p} d\Omega. \end{aligned} \tag{20}$$

次に，式 (30) の極限を評価するために，目的関数の差 $(J_\varepsilon - J_0)$ を評価すると，

$$\begin{aligned} J_\varepsilon - J_0 &= -\int_Y (\overline{p}_\varepsilon - \overline{p}_0) d\Omega \\ &= -\int_Y (\overline{p}_\varepsilon - \overline{p}_0) d\Omega \\ &+ \{a_p^\varepsilon(\overline{p}_\varepsilon, \lambda_p^\varepsilon) + a_\alpha^\varepsilon(\alpha_\varepsilon, \lambda_p^\varepsilon)\} + \int_Y \overline{p}_\varepsilon(1-\alpha_\varepsilon)\lambda_\alpha^\varepsilon d\Omega \\ &- \{a_p^0(\overline{p}_0, \lambda_p^\varepsilon) + a_\alpha^0(\alpha_0, \lambda_p^\varepsilon)\} - \int_Y \overline{p}_0(1-\alpha_0)\lambda_\alpha^\varepsilon d\Omega \\ &= -\int_Y (\overline{p}_\varepsilon - \overline{p}_0) d\Omega \\ &+ a_p^\varepsilon(\overline{p}_\varepsilon - \overline{p}_0, \lambda_p^\varepsilon) + (a_p^\varepsilon - a_p^0)(\overline{p}_0, \lambda_p^\varepsilon) \\ &+ a_\alpha^\varepsilon(\alpha_\varepsilon - \alpha_0, \lambda_p^\varepsilon) + (a_\alpha^\varepsilon - a_\alpha^0)(\alpha_0, \lambda_p^\varepsilon) \\ &+ \int_Y (\overline{p}_\varepsilon - \overline{p}_0)(1-\alpha_0)\lambda_\alpha^\varepsilon d\Omega - \int_Y \overline{p}_0(\alpha_\varepsilon - \alpha_0)\lambda_\alpha^\varepsilon d\Omega \\ &- \int_Y (\overline{p}_\varepsilon - \overline{p}_0)(\alpha_\varepsilon - \alpha_0)\lambda_\alpha^\varepsilon d\Omega \end{aligned} \tag{21}$$

と表される．ここで，$(\lambda_p^\varepsilon, \lambda_\alpha^\varepsilon)$ について，以下の随伴方程式が成り立つと仮定する．

$$a_p^\varepsilon(\eta, \lambda_p^\varepsilon) + \int_Y \eta(1-\alpha_0)\lambda_\alpha^\varepsilon d\Omega = \int_Y \eta d\Omega \quad \forall \eta \in V(Y), \tag{22}$$

$$a_\alpha^\varepsilon(\xi, \lambda_p^\varepsilon) - \int_Y \overline{p}_0 \xi \lambda_\alpha^\varepsilon d\Omega = 0 \quad \forall \xi \in W(Y). \tag{23}$$

このような $(\lambda_p^\varepsilon, \lambda_\alpha^\varepsilon)$ を用いた上で 2 次の摂動項に相当する式 (21) の最後の項を無視すれば，

$$J_\varepsilon - J_0 \approx (a_p^\varepsilon - a_p^0)(\overline{p}_0, \lambda_p^\varepsilon) + (a_\alpha^\varepsilon - a_\alpha^0)(\alpha_0, \lambda_p^\varepsilon) \tag{24}$$

と評価できる．各項の具体的な表式は，膜厚 $\overline{h}_0$ 及び $\overline{h}_\varepsilon$ の定義より，

$$\begin{aligned} (a_p^\varepsilon - a_p^0)(\overline{p}_0, \lambda_p^\varepsilon) &= \int_Y \overline{h}_\varepsilon^3 \overline{\nabla}\overline{p}_0 \cdot \overline{\nabla}\lambda_p^\varepsilon d\Omega - \int_Y \overline{h}_0^3 \overline{\nabla}\overline{p}_0 \cdot \overline{\nabla}\lambda_p^\varepsilon d\Omega \\ &= (\overline{h}_g^3 - \overline{h}_u^3) \int_{\Omega_\varepsilon} \overline{\nabla}\overline{p}_0 \cdot \overline{\nabla}\lambda_p^\varepsilon d\Omega, \end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned} (a_\alpha^\varepsilon - a_\alpha^0)(\alpha_0, \lambda_p^\varepsilon) &= -\int_Y \alpha_0 \overline{h}_\varepsilon \boldsymbol{\gamma} \cdot \overline{\nabla}\lambda_p^\varepsilon d\Omega + \int_Y \alpha_0 \overline{h}_0 \boldsymbol{\gamma} \cdot \overline{\nabla}\lambda_p^\varepsilon d\Omega \\ &= -(\overline{h}_g - \overline{h}_u) \int_{\Omega_\varepsilon} \alpha_0 \boldsymbol{\gamma} \cdot \overline{\nabla}\lambda_p^\varepsilon d\Omega \end{aligned} \tag{26}$$

となる．

トポロジー導関数を評価するには，$\varepsilon \to 0$ の極限を評価する必要があるため，式 (25), (26) をさらに展開する．まず，Ω_ε 導入前の場である $\overline{p}_0$ と α_0 は，領域 Ω_ε の中心座標 $\boldsymbol{x_0}$ 近傍で滑らかな分布を持つため，テーラー展開を用いて式 (25), (26) 中の領域 Ω_ε における積分量を評価できる．一方 λ_p^ε については，Ω_ε 導入前の随伴場 λ_p^0 との差 $(\lambda_p^\varepsilon - \lambda_p^0)$ が，$\varepsilon \to 0$ の極限においてどのような漸近的挙動を示すかを評価する必要がある．λ_p^ε の $\lambda_\alpha^\varepsilon$ との連成による影響が小さいと仮定し，式 (22) の主要項に着目すると，$\varepsilon \to 0$ の極限において，領域 Ω_ε 内で以下に示す漸近的評価ができる．

$$\overline{\nabla}(\lambda_p^\varepsilon - \lambda_p^0)\big|_{\Omega_\varepsilon} \to -\frac{\overline{h}_g^3 - \overline{h}_u^3}{\overline{h}_g^3 + \overline{h}_u^3} \overline{\nabla}\lambda_p^0(\boldsymbol{x_0}), \tag{27}$$

ここで，λ_p^0 は Ω_ε 導入前の随伴場を表し，以下の弱形式を満たす．

$$a_p^0(\eta, \lambda_p^0) + \int_Y \eta(1-\alpha_0)\lambda_\alpha^0 d\Omega = \int_Y \eta d\Omega \quad \forall \eta \in V(Y), \tag{28}$$

$$a_\alpha^0(\xi, \lambda_p^0) - \int_Y \overline{p}_0 \xi \lambda_\alpha^0 d\Omega = 0 \quad \forall \xi \in W(Y), \tag{29}$$

ただし，λ_α^0 は λ_p^0 と同様に Ω_ε 導入前の随伴場を表す．

よって，式 (27) を用いれば，式 (25), (26) は $\varepsilon \to 0$ の極限において以下のように評価できる．

$$(a_p^\varepsilon - a_p^0)(\overline{p}_0, \lambda_p^\varepsilon) \to \pi\varepsilon^2 \frac{2\overline{h}_u^3(\overline{h}_g^3 - \overline{h}_u^3)}{\overline{h}_g^3 + \overline{h}_u^3} \overline{\nabla}\overline{p}_0(\boldsymbol{x_0}) \cdot \overline{\nabla}\lambda_p^0(\boldsymbol{x_0}),$$

$$(a_\alpha^\varepsilon - a_\alpha^0)(\alpha_0, \lambda_p^\varepsilon) \to -\pi\varepsilon^2 \frac{2\overline{h}_u^3(\overline{h}_g - \overline{h}_u)}{\overline{h}_g^3 + \overline{h}_u^3} \alpha_0(\boldsymbol{x_0})\boldsymbol{\gamma} \cdot \overline{\nabla}\lambda_p^0(\boldsymbol{x_0}).$$

以上より，式 (7) の目的関数 J に対するトポロジー導関数は，

$$\begin{aligned} D_T J^{u\to g} &= \frac{2\overline{h}_u^3(\overline{h}_g^3 - \overline{h}_u^3)}{\overline{h}_g^3 + \overline{h}_u^3} \overline{\nabla}\overline{p}_0(\boldsymbol{x_0}) \cdot \overline{\nabla}\lambda_p^0(\boldsymbol{x_0}) \\ &\quad - \frac{2\overline{h}_u^3(\overline{h}_g - \overline{h}_u)}{\overline{h}_g^3 + \overline{h}_u^3} \alpha_0(\boldsymbol{x_0})\boldsymbol{\gamma} \cdot \overline{\nabla}\lambda_p^0(\boldsymbol{x_0}) \end{aligned} \tag{30}$$

と表せる．

ここでは，非テクスチャ領域中に微小なテクスチャ領域が導入された際のトポロジー導関数 $D_T J^{u\to g}$ を導出したが，同様の手順によって，テクスチャ領域中に非テクスチャ領域が導入された際のトポロジー導関数 $D_T J^{g\to u}$ も導出できる．$D_T J^{g\to u}$ は，式 (30) 中の膜厚 $\overline{h}_u$ と $\overline{h}_g$ を入れ替えた表式となる．また，前述の導出過程では，点 $\overline{\boldsymbol{x_0}}$ に微小領域 Ω_ε が導入された状況を考えたが，ユニットセル Y 内の任意の点 $\overline{\boldsymbol{x}} \in Y$ に Ω_ε を導入することを考えると，点 $\overline{\boldsymbol{x}} \in Y$ におけるトポロジー導関数を評価できる．

式 (11) の反応拡散方程式とトポロジー導関数の定義より，式 (7) の最適化問題を解くために必要な設計感度 J' は，次のように定義される．

$$J' = D_T J^{g\to u}(1-\chi_\phi) - D_T J^{u\to g}\chi_\phi \tag{31}$$

6. 数値実装法

6.1. 圧力場の数値解析方法

本研究では，有限要素法を用いてレイノルズ方程式の数値解を評価する．式 (4) のレイノルズ方程式は，移流拡散方程式とみなせる．したがって，圧力場の数値解析には，移流項の影響を考慮した適切な数値実装が必要となる．そこで以下では，Meng et al. [11] による研究例に基づき，有限要素法を用いてレイノルズ方程式の数値解を得る方法の概略を説明する．まず，式 (14) の弱形式左辺に，以下の安定化項 I_s を加えた上で離散化を行う，SUPG 法と呼ばれる方法を導入する．

$$I_s = \frac{\tau_{\mathrm{SUPG}}}{2} \int_Y \overline{h}(\boldsymbol{\gamma} \cdot \overline{\nabla}\tilde{p})(\boldsymbol{\gamma} \cdot \overline{\nabla}(\overline{h}\alpha)) d\Omega, \tag{32}$$

ここで τ_{SUPG} は安定化の度合いを定めるパラメータを表す．式 (32) のように，安定化項に無次元すべり速度 $\boldsymbol{\gamma}$ を導入することによって，流れ方向に人工拡散を加えることができ，安定的に圧力場の数値解析を行うことができる．

さらに，式 (6) の境界値問題では圧力 $\overline{p}$ に加えて液体の割合 α も未知数となる．このため，[11] では，$\overline{p}$ と α を同時に扱う変数 $\Phi = F\overline{p} + (1-F)\alpha$ が導入されている．ここで，F はキャビテーションの有無を区別する変数であり，1 であればキャビテーションが存在しない領域を，0 であればキャビテーションが生じる領域を表す．そして，$F = 1$ 等の適当な初期値を与えた上で，安定化項 I_s を加えたレイノルズ方程式の弱形式から導出される，Φ について成り立つ弱形式を解く．式 (5) を満たしているかを確認し，適宜 F を修正する．もし，i 番目の節点上で $F_i = 1$ かつ $\Phi_i < 0$ であれば，この節点上では $\overline{p} < 0$ となっていることから，キャビテーションが生じた領域であるため，$F_i = 0$ と修正する．また，$F_i = 0$ かつ $\Phi_i > 1$ であれば，この節点上では潤滑膜をすべて液体が占めることから，$F_i = 1$ と修正する．Φ についての方程式を解き，F の分布を修正するという流れを繰り返すことによって，式 (5) を満たす解 $(\overline{p}, \alpha)$ が得られる．

なお，この手法で得られた $(\overline{p}, \alpha)$ はキャビテーション領域の界面で解が非平滑な分布を示すことが多い．これは，変数 F の分布を前述の基準に従って，節点毎に与えていることが原因と考えられる．このような分布を示す解を用いて式 (31) の設計感度を評価すると，最適化計算が不安定なものとなりやすい．そこで，設計感度の評価には，$\boldsymbol{v} := (\overline{p}, \alpha)$ をソースとする以下の方程式の解 $\boldsymbol{w} := (w_1, w_2)$ を用いるものとする．

$$\int_Y (\tau_{\mathrm{reg}} \overline{\nabla} w_i \cdot \overline{\nabla}\tilde{v} + w_i \tilde{v}) d\Omega = \int_Y v_i \tilde{v} d\Omega \quad \forall \tilde{v} \in V_v(Y), \tag{33}$$

ただし，v_i $(i = 1, 2)$ は $\boldsymbol{v}$ の成分を，$\tilde{v}$ は試験関数を表す．$V_v(Y)$ は $\Gamma_{1,2}$ における周期境界条件が成り立つソボレフ空間を表す．式 (33) の解 w_1 は $\overline{p}$ が平滑化された量を，w_2 は α が平滑化された量を表す．

6.2. 特性関数の近似方法

式 (9) の特性関数 χ_ϕ は，1 か 0 の不連続な値を示す関数であるため，数値計算上の扱いが困難である．このため，最適化計算では，次式に示す近似を用いた特性関数 χ_ϕ^{Num} を用いることにする．

$$\chi_\phi^{\mathrm{Num}} = \begin{cases} 0 & (\phi < -d) \\ \frac{1}{2} + \frac{\phi}{d}\left\{\frac{15}{16} - \frac{\phi^2}{d^2}\left(\frac{5}{8} - \frac{3}{16}\frac{\phi^2}{d^2}\right)\right\} & (-d \le \phi < d) \\ 1 & (d \le \phi) \end{cases} \tag{34}$$

上式において，d は遷移幅で十分小さい値を設定する．本研究では，$d = 0.1$ と設定した．

6.3. 最適化アルゴリズム

本研究で行う最適化計算のアルゴリズムについて概略を述べる．まず，レベルセット関数 ϕ を初期構造に対応するように初期化する．次に，レベルセット関数の分布に基づく膜厚 $\overline{h}$ の分布に従い，境界値問題（式 (6)）の解を 6.1 節に説明

した方法を用いて解く．そして，式 (7) に示す目的関数 J を計算し，もし目的関数値が収束していれば最適化計算を終了する．収束していなければ，随伴方程式（式 (28) 及び (29)）を解き，設計感度を評価する．このとき，式 (31) を評価するために，6.1 節で導入した式 (33) の解 $\boldsymbol{w}$ を用いる．算出された設計感度を用いて反応拡散方程式（式 (11)）を解き，膜厚 $\overline{h}$ の分布を更新する．そして，境界値問題の解を解くステップに戻り，これらの手順を繰り返すことによって，最適なテクスチャ形状を得る．なお，各計算はオープンソースの有限要素法ソフトウェアである FreeFEM[12] を用いて行った．

7. 数値解析例

7.1. 感度解析の妥当性の検証

5 章で導出したトポロジー導関数の妥当性を検証するために，テクスチャ領域中に微小な非テクスチャ領域が導入された際のトポロジー導関数である $D_T J^{g\to u}$ と，これに対応する差分感度 $D_{\mathrm{Num}} J^{g\to u}$ の分布を比較する．ここで，$D_{\mathrm{Num}} J^{g\to u}$ は次のように定義される．

$$D_{\mathrm{Num}} J^{g\to u} = \frac{J_{\varepsilon_0} - J_0}{\pi \varepsilon_0^2} \tag{35}$$

ここで，$\varepsilon_0 \ll 1$ は微小な正数を表し，J_{ε_0} は，半径 ε_0 のテクスチャが存在しない円形領域 Ω_{ε_0} を導入した際の目的関数を表す．J_0 は，領域 Ω_{ε_0} 導入前の目的関数を表す．

図 2 は，トポロジー導関数の検証に用いる解析モデルを表す．黒色の領域はテクスチャ領域を，灰色の領域は非テクスチャ領域を表す．図中の各寸法は，無次元座標に基づくものを示す．半径 $\varepsilon_0 = 0.01$ の非テクスチャ領域 Ω_{ε_0} を，図中白色の矢印で示した $0.1 \leq \overline{x} \leq 0.9$, $\overline{y} = 0.1$ の区間内に配置し，差分感度 (式 (35)) を評価する．そして，同じ区間上のトポロジー導関数 $D_T J^{g\to u}$ の値と差分感度の値の比較を行う．テクスチャ構造の形状最適化を行った Zhirong et al. の先行研究 [5] の設定に基づき，テクスチャ領域の膜厚を $\overline{h}_g = 3$ とし，無次元すべり速度を $\boldsymbol{\gamma} = [250, 0]^T$ とする．この $\boldsymbol{\gamma}$ の設定は有次元において，大気圧 ($p_a = 101325$Pa) の下でユニットセル寸法を $l = 2\pi \times 10^{-3}$m，最小膜厚を $h_m = 5.0 \times 10^{-6}$m，粘性係数を $\mu = 0.038$Pa·s，すべり速度 $\boldsymbol{U}$ の x 方向成分を 436.28×10^{-3}m/s と設定した状況を想定している．流体の密度を 1.0×10^3kg/m^3 とすると，図 1 の系におけるレイノルズ数は 0.057 と評価でき，比較的小さな値を示す．したがって，このようなパラメータ設定では z 方向の流れや圧力の変化を無視したレイノルズ方程式によるモデル化が有効である．また，圧力場の解析に用いる安定化項の係数 τ_{SUPG} を $\tau_{\mathrm{SUPG}} = 1 \times 10^{-4}$ とする．なおこの節では，式 (33) に基づく平滑化処理を用いずに，トポロジー導関数及び差分感度の評価を行う．

図 3 は，$0.1 \leq \overline{x} \leq 0.9$, $\overline{y} = 0.1$ 上のトポロジー導関数及び差分感度の分布を示す．トポロジー導関数と差分感度の分布の傾向は，符号も合わせて一致しており，導出したトポロジー導関数の妥当性を確認できた．

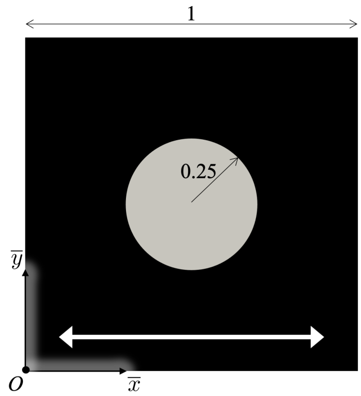

Fig. 2 Geometry setting for comparing the topological derivative and numerical finite difference. Black color represents textured region, whereas gray color represents non-textured region.

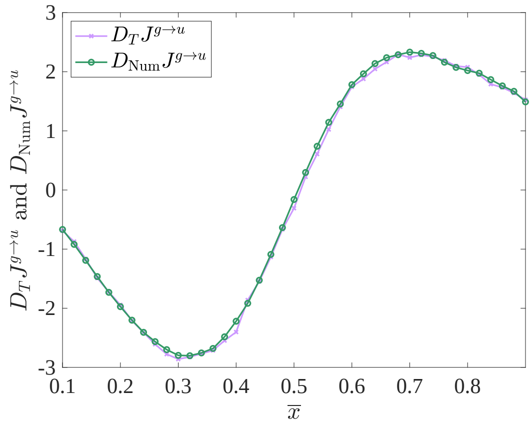

Fig. 3 Comparison between topological derivative $D_T J^{g\to u}$ and numerical finite difference $D_{\mathrm{Num}} J^{g\to u}$.

7.2. 最適設計例

次に，式 (7) に示す最適化問題を対象とした，最適テクスチャ構造設計例を示す．膜厚 $\overline{h}$，無次元すべり速度 $\boldsymbol{\gamma}$，安定化項の係数 τ_{SUPG} の設定は 7.1 節と同様とし，正則化係数 τ_ϕ を $\tau_\phi = 5 \times 10^{-4}$ と設定する．

図 4(a) は，初期構造における膜厚分布を示す．黒色の領域がテクスチャ領域を，灰色の領域が非テクスチャ領域を表す．このような初期構造において，圧力分布は図 4(b) のようになった．式 (4) のレイノルズ方程式の左辺第 2 項に示す通り，圧力分布は膜厚分布の勾配に依存する．流れの方向に沿って膜厚が減少する場合には，断面積の大きな領域から小さな領域へ流体が押し込まれることによって，流れの方向に圧力が増加する．逆に，流れの方向に沿って膜厚が増加する場合には，圧力が減少する．初期構造では，流れの方向（$+\overline{x}$ 方向）に沿って膜厚が減少する状況に相当する，テクスチャ領域の右側の領域に大きな圧力が見られる．一方，膜厚が増加する状況に相当するテクスチャ領域の左側では，圧力が小さい．特に， ユニットセル Y の右側に置かれたテクスチャ領域を中心に，圧力値が 0 となるキャビテーション領域が存在し，6.1 節で導入したキャビテーションの有無を表す変数

F のユニットセルにおける積分値は $\int_Y Fd\Omega = 0.926$ となった．すなわち，ユニットセル Y の約 7%の面積をキャビテーション領域が占めていることになる．なお，初期構造における目的関数は，-1.16 となった．

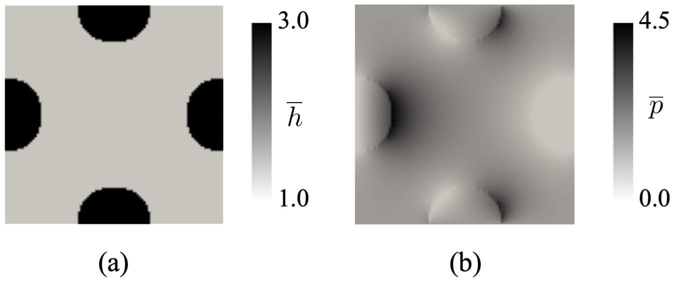

Fig. 4　(a) Initial distribution of $\overline{h}$. (b) Distribution of $\overline{p}$ with the initial $\overline{h}$.

このような初期構造から，6.3 節に示した手順に基づき最適化計算を行った．図 5 は，最適化過程における目的関数の履歴とテクスチャ形状の変遷を表したものである．初期構造は鏡面対称性を持つ構造であるのに対し，$+\overline{x}$ 方向のすべり速度に対応して，$\overline{x}$ 方向に関する対称性が最適化計算の早い段階で崩れている様子が確認できる．最適化計算の反復回数が 10 を超えたあたりで，目的関数の値はほぼ一定となり，V 字が 90 度回転したようなテクスチャ形状が得られた．

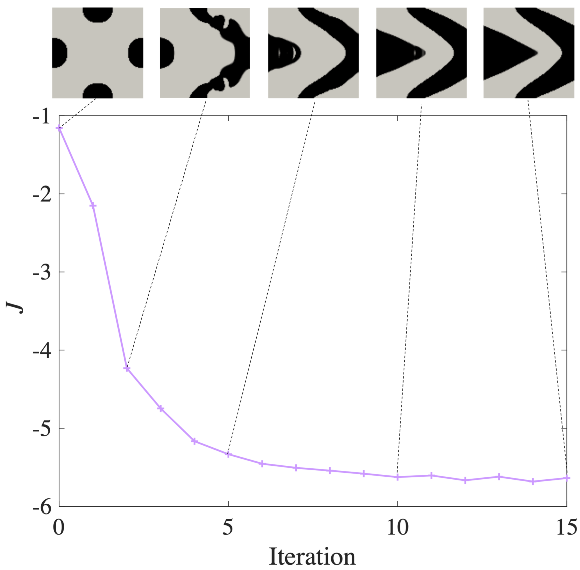

Fig. 5　History of the objective function J with the initial, immediate, and optimal texture designs.

図 6(a) は最適構造における膜厚分布を，(b) は最適構造における圧力分布を示す．最適構造は V 字状のテクスチャ構造と非テクスチャ構造が互い違いに配置された形状を有している．初期構造と同様に，テクスチャ構造の右側で圧力が大きく，左側で圧力が小さいという傾向が見られる．一方，V 字状の最適テクスチャ構造は，2 つの流入口から V 字の屈曲部に流れを集中させる働きがあるため，屈曲部近傍において極めて高い圧力値が確認できる．さらに，最適構造は V 字状のテクスチャ構造が $\overline{x}$ 方向に周期的に配列された形状を有していることから，ユニットセル全体にわたって圧力が大きく，テクスチャ構造左側の圧力が小さな領域においても，圧力が 0 となる領域は見られない．したがって， 最適構造においてはキャビテーション領域は存在せず，$\int_Y Fd\Omega = 1$ となった．このようなメカニズムに基づき，最適構造ではユニットセル全体で高圧力を実現できることから，最適構造における目的関数値は $J = -5.64$ となり，最適化計算によって耐荷重能を示すテクスチャ構造が得られた．

なお，このようなテクスチャ形状は，[4] の寸法最適化例や [5] の形状最適化例においても示されている．以上の結果から，提案する最適化法の妥当性が確認できた．

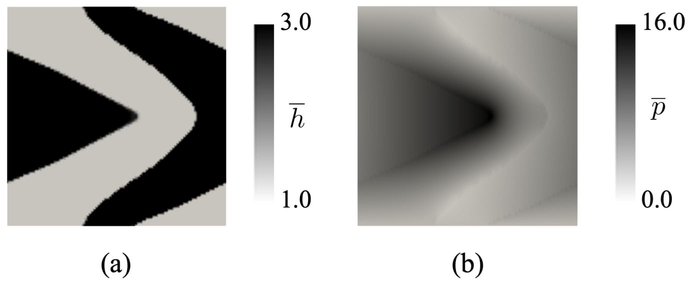

Fig. 6　(a) Optimal distribution of $\overline{h}$. (b) Distribution of $\overline{p}$ with the optimal $\overline{h}$.

8. 結言

本研究では，流体潤滑問題を対象としたトポロジー最適化法を提案し，テクスチャ構造の最適設計を行った．得られた成果を以下に示す．

- レイノルズ方程式に基づき，流体潤滑問題の定式化を行った．
- 潤滑膜内の圧力に基づき，すべり軸受等の重要な指標の一つである耐荷重能を目的関数と設定し，テクスチャ構造を最適化するトポロジー最適化問題の定式化を行った．
- 前述の最適化問題を解くためにレベルセット法に基づくトポロジー最適化法を導入した．レベルセット関数を用いてテクスチャ構造を考慮した潤滑膜の膜厚の表現を行った．
- トポロジー導関数の概念に基づく感度解析を行い，数値差分によってその妥当性を明らかにした．
- テクスチャ構造設計例を示し，提案手法の有用性を確認した．先行研究で行われているベンチマーク問題に対して，同様の最適構造を得ることに成功した．具体的には，周期的に配列されたテクスチャ構造のユニットセルを対象としたテクスチャ設計問題に対して，すべり速度の向きに対応した最適テクスチャ構造を創成できた．

謝辞

本研究は，JSPS 科研費 20K14636 の助成を受けました．この場を借りて御礼申し上げます．

参考文献

(1) 吉本成香：はじめての機械要素，(2011)，森北出版.

(2) Wakuda, M., Yamauchi Y., Kanzaki S., Yasuda Y., Effect of surface texturing on friction reduction between ceramic and steel materials under lubricated sliding contact, *Wear*, Vol. 254, No. 3–4, pp. 356–363, 2003.

(3) Wang X. L., Kato K., Adachi K., Aizawa K., Loads carrying capacity map for the surface texture design of SiC thrust bearing sliding in water, *Tribology International*, Vol. 36, No. 3, pp. 189–197, 2003.

(4) Shen, C., Khonsari, M. M., Numerical optimization of texture shape for parallel surfaces under unidirectional and bidirectional sliding, *Tribology International*, Vol. 82, pp. 1–11, 2015.

(5) Zhirong, T., Xiangkai, M., Yi, M., Xudong, P., Shape optimization of hydrodynamic textured surfaces for enhancing load-carrying capacity based on level set method, *Tribology International*, Vol. 162, p. 107136, 2021.

(6) Waseem, A., Temizer, I., Kato, J., Terada, K., Homogenization-based design of surface textures in hydrodynamic lubrication, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 108, pp. 1427–1450, 2016.

(7) Waseem, A., Temizer, I., Kato, J., Terada, K., Micro-texture design and optimization in hydrodynamic lubrication via two-scale analysis, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 56, pp. 227–248, 2017.

(8) Meng, X., Tu, Z., Ma, Y., Jiang, J., Peng, X., Topology optimization of liquid lubricating zero-leakage mechanical face seals, *Tribology International*, Vol. 169, p. 107490, 2022.

(9) Yamada, T., Izui, K., Nishiwaki, S., Takezawa, A., A topology optimization method based on the level set method incorporating a fictitious interface energy, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 199, No. 45–48, pp. 2876–2891, 2010.

(10) Elrod, H. G., Adams, M., A Computer Program for Cavitation and Starvation Problems, *First LEEDS LYON Symposium on Cavitation and Related Phenomena in Lubrication, I.M.E.*, Vol. 103, pp. 37–41, 1974.

(11) Meng, X., Bai, S., Peng, X., Lubrication film flow control by oriented dimples for liquid lubricated mechanical seals, *Tribology International*, Vol. 77, No. 77, pp. 132–141, 2014.

(12) Hecht, F., New development in FreeFEM++, *Journal of numerical mathematics*, Vol. 20, No. 3–4, pp. 251–265, 2012.