

## リッジパターン変態のプレストレッチ依存性と分岐座屈特性

## PRESTRETCH DEPENDENCE AND BIFURCATION PROPERTY OF RIDGE PATTERN TRANSFORMATION

田中 大地<sup>1)</sup>, 若林 駿人<sup>2)</sup>, 松原 成志朗<sup>3)</sup>, 永島 壮<sup>4)</sup>, 奥村 大<sup>5)</sup>

Daichi TANAKA, Hayato WAKABAYASHI, Seishiro MATSUBARA, So NAGASHIMA and Dai OKUMURA

- 1) 名古屋大学大学院工学研究科 (〒464-8603 名古屋市千種区, E-mail: tanaka.daichi.n8@s.mail.nagoya-u.ac.jp)
- 2) 名古屋大学工学部 (令和 3 年度卒業) (〒464-8603 名古屋市千種区)
- 3) 名古屋大学大学院工学研究科 (〒464-8603 名古屋市千種区, E-mail: seishiro.matsubara@mac.nagoya-u.ac.jp)
- 4) 名古屋大学大学院工学研究科 (〒464-8603 名古屋市千種区, E-mail: so.nagashima@mac.nagoya-u.ac.jp)
- 5) 名古屋大学大学院工学研究科 (〒464-8603 名古屋市千種区, E-mail: dai.okumura@mac.nagoya-u.ac.jp)

In this study, we investigate the prestretch dependence and bifurcation property of wrinkle-to-ridge pattern transformation, which occurs on a film bonded to a prestretched soft substrate. Step-by-step eigenvalue buckling analysis is used to detect the first bifurcation and the second bifurcation on the bifurcated path. Post buckling analysis is conducted by an initial imperfection method. The first and second bifurcations cause wrinkle and ridge pattern transformation, respectively. The critical strain for the second bifurcation is found to depend on the wavenumber prescribed by the wavelength of the wrinkle as well as the magnitude of the prestretch. The second bifurcation also has a wave property (i.e., double bifurcations). The combination of the two bifurcation modes provides the freedom of the location that forms one ridge in the viewpoint of translational symmetry.

**Key Words:** Pattern transformation, Surface instability, Buckling, Bifurcation, FEA

## 1. 緒 言

軟質基盤上の硬質膜に面内圧縮応力が作用すると分岐座屈が生じ、硬質膜表面には多様なパターンが形成される<sup>(1)-(3)</sup>。近年では工学応用に関する研究も多く報告されている<sup>(4)-(9)</sup>。パターン変態の初期段階ではリンクルと呼ばれるパターンが現れ、二次元的には正弦波形のストライプパターン、三次元的にはチェッカーボードパターンや六方ディンプルパターンと呼ばれる周期パターンが現れる<sup>(10)</sup>。さらに圧縮応力が加えられると、この分岐経路上において第二分岐座屈が生じ、高次のリンクルモードが発生することによって、ヘリンボンパターンやラビリンスパターンに代表される実験において観察される複雑なパターンへの変態が起こる<sup>(10),(11)</sup>。したがって、多様なパターンの発生条件や機構を解明するとともに制御の方法を考えることが重要となる(多様なパターンの形態については文献(10)を参照)。

このような状況下において、リッジパターンが注目されている<sup>(8),(9),(12)-(14)</sup>。表面に形成される凹凸の深さが、通常のリンクルと比べて大きいのが特徴であり、パターンの波長に対して高アスペクト比を有すると説明され、この特長は工学応用を考えると魅力的となる<sup>(8),(9)</sup>。リッジパターンは、大きくプレストレッチされた軟質基盤上に硬質膜を成膜した後、

このプレストレッチを解放することによって硬質膜に大きな圧縮ひずみ(すなわち圧縮応力)を加えることによって発生する(Fig. 1)。ここで、 $h_f$ は膜厚、 $\varepsilon$ は圧縮ひずみ、 $\lambda_0$ はプレストレッチをそれぞれ示している。実験は比較的容易であり、有限要素解析による再現シミュレーションも行われているが、ランダムな初期不整が用いられており、分岐座屈の観点からの調査はほとんど行われておらず、その形成機構は十分に明らかではない。

しかしながら、Liu と Bertoldi の研究<sup>(15)</sup>では、著者らの知る限り唯一、分岐座屈の観点からリッジ形成を解析している。この論文では、Bloch 波を用いた解析を行っており、膜と基盤のヤング率比が非常に大きく、プレストレッチが大きい場合には、第一分岐として正弦波形のリンクルが発生した後、第二分岐としてリッジの発生に至る高次のリンクルモードが生じることを示している。また、第二分岐の波長はリンクルより長波長であり、リッジの発生には優先的な周期間隔があることを示している。すなわち、リッジパターンはリンクルの凸部が特定の波数間隔でリッジ化することによって周期的に生じる(Fig.1(c),(d))。しかし、特定のプレストレッチでの解析であり、リッジパターン発生における第二分岐のプレストレッチ依存性や高次のリンクルモードの特徴は議論されていない。

2022 年 10 月 25 日受付, 2022 年 11 月 16 日受理

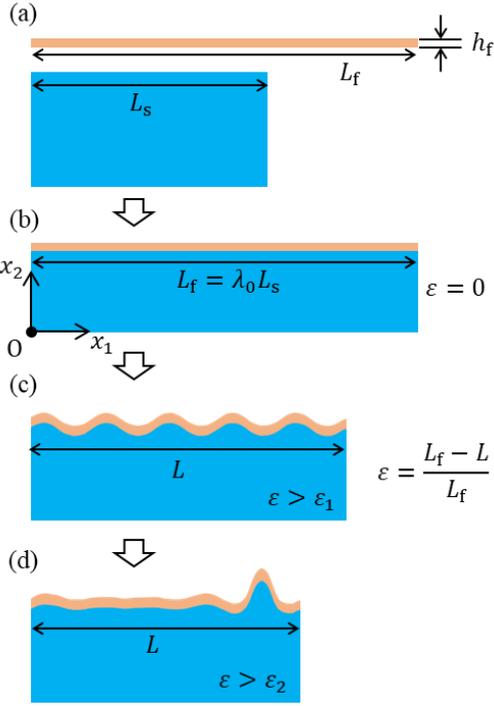


Fig. 1 Schematic illustrations of wrinkle-to-ridge pattern transformation on a film bonded to a prestretched soft substrate. (a) Stress-free state of the film and soft substrate ( $L_f > L_s$ ), (b) Stress-free film bonded to the soft substrate prestretched by  $\lambda_0 = L_f/L_s$  ( $\epsilon$  is defined as the nominal compressive strain obtained by releasing  $\lambda_0$ ), (c) Wrinkle evolution from critical strain,  $\epsilon_1 (> 0)$ , for the first bifurcation, and (d) Ridge evolution from  $\epsilon_2 (> \epsilon_1)$  for the second bifurcation on the bifurcated path.

そこで本研究では、リンクルからリッジへのパターン変態のプレストレッチ依存性と分岐座屈特性を解析する。2章では、逐次的座屈固有値解析とその結果として得られる分岐モードを初期不整として用いた座屈後解析の方法について説明する。3章では、有限要素モデルについて述べる。4章では解析結果を示す。リッジの発生と関連付けられる第二分岐点は、その臨界ひずみ及び周期間隔（リンクルの波数）にプレストレッチ依存性があるだけでなく、第二分岐点は二重分岐となり波動性<sup>(16),(17)</sup>の特徴を有することを示す。したがって、リンクルパターンの発達過程にて生じるリッジは並進対称性の観点から合理的に解釈できることを述べる。最後に5章では結言を述べる。

## 2. 解析方法

この章では、逐次的な座屈固有値解析と結果として得られる分岐モードを初期不整として用いた座屈後解析の方法について述べる。この方法<sup>(10),(11),(18)</sup>は著者らのグループにおいて提案されており、一般的な有限要素解析ソフトを利用する場合の座屈固有値解析において、独自に設定された状態変数を負荷パラメータにできない問題や非線形性が強く未変形状態において正確な分岐点の同定ができない問題を回避することができる。さらに分岐経路上の分岐点を探索するためにも有用である。本研究では ABAQUS を用いて解析を行う

ため、座屈固有値解析では BUCKLE オプション<sup>(19)</sup>を用いる。以下に解析手法の概略を述べる。座屈固有値解析では、分岐点と分岐モードを評価するため、次の有限要素方程式が解析される。

$$\{\mathbf{K}_0(\mathbf{P}) + \kappa_i \mathbf{K}_\Delta(\mathbf{P}, \mathbf{Q})\} \boldsymbol{\phi}_i = \mathbf{0} \quad (1)$$

ここで、 $\mathbf{K}_0(\mathbf{P})$ は基準状態での剛性マトリックスであり、 $\mathbf{P}$ は無負荷状態から基準状態までの間に与えられた予負荷によって生じる節点力ベクトルである。一方、 $\mathbf{K}_\Delta(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$ は $\mathbf{Q}$ と関係づけられる摂動負荷を用いた線形摂動解析によって求められる剛性マトリックスであり、すなわち、 $\mathbf{Q}$ は基準状態において加えられる摂動負荷によって生じる節点力ベクトルである。したがって、 $\mathbf{K}_0(\mathbf{P})$ は予負荷によって生じる幾何学的及び材料非線形性の効果を含んでいる。また、 $\kappa_i$ と $\boldsymbol{\phi}_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots$ )は固有値と固有ベクトル（分岐モード）である。したがって、分岐点での節点力ベクトルは $\mathbf{P} + \kappa_i \mathbf{Q}$ と求められる。なお、予負荷と摂動負荷は同じである必要はない。

非線形性が強い問題を解析するときには線形摂動解析による外挿区間が長くなると（すなわち、固有値が大きくなると）、多くの場合において正しい分岐モードを評価することができず、分岐点の定量的な評価にも悪い影響を及ぼす。したがって、逐次的に $\mathbf{P}$ を増加させながら座屈固有値解析を実行し、最小固有値 $\kappa_1$ が0に到達するとき（線形摂動解析の外挿区間がないものとみなせるとき）の $\mathbf{P}_c$ を求めることによって幾何学的及び材料非線形性を考慮した分岐点の同定が可能となる。このとき式(1)は単純に

$$\mathbf{K}_0(\mathbf{P}_c) \boldsymbol{\phi}_i = \mathbf{0} \Leftrightarrow \det \mathbf{K}_0(\mathbf{P}_c) = 0 \quad (2)$$

と書くことができ、外挿区間を含まず分岐点で成立する条件となる<sup>(16),(20),(21)</sup>。結果として、 $\mathbf{Q}$ は必ずしも $\mathbf{P}$ と同じである必要はなく、 $\mathbf{P}$ が追加された状態変数によって規定される負荷パラメータの場合には、 $\mathbf{P}$ を疑似的に再現する負荷パラメータを用いてもよい。本研究では、プレストレッチ状態からの解放による圧縮ひずみ $\epsilon$  (Fig. 1)が負荷パラメータとなるが、摂動負荷には線膨張係数 $\alpha$ と温度増分 $\Delta T$ によって規定される熱ひずみ $\alpha \Delta T$ を用いる。したがって、分岐点での節点力ベクトルは $\mathbf{P}(\epsilon) + \Delta T_i \mathbf{Q}(\epsilon, \alpha)$ と書ける。ここで、 $\Delta T_i$ は固有値に対応する温度増分である。逐次的に圧縮ひずみ $\epsilon$ を増加させて（つまり、予負荷を大きくして）、 $\Delta T_i = 0$ の状態を解析するため、最終的には $\mathbf{P}_c$ を評価することができ、すなわち、分岐点での臨界ひずみ $\epsilon_1$ （第一分岐）と $\epsilon_2$ （分岐経路上の第二分岐）を求められる。

座屈後解析は得られた最小固有値に対応する優先的な分岐モードを初期不整として導入することによって行われる。分岐点の多重性を考慮すると、初期不整は

$$\Delta \boldsymbol{\phi} = d \sum_{i=1}^k r_i \boldsymbol{\phi}_i \quad (3)$$

と表される（ $k$ 個の分岐モードが固有値0を想定）。ここで、 $\boldsymbol{\phi}_i$ は最大成分を1として正規化されており、 $d$ は導入する不整

量の大きさを表し、 $r_i$ は多重分岐点での $\phi_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) の構成を決める係数となる。本研究では、第一分岐点からの分岐経路上にて第二分岐点とそこからの分岐経路に着目する。第一・第二分岐での分岐モードを $\phi_i^{(1)}$ と $\phi_i^{(2)}$ として区別すると、第二分岐経路を解析するための初期不整は、

$$\Delta\Phi = d \left( \sum_{i=1}^{k^{(1)}} r_i^{(1)} \phi_i^{(1)} + \sum_{i=1}^{k^{(2)}} r_i^{(2)} \phi_i^{(2)} \right) \quad (4)$$

となる。本研究では、分岐経路に誘導可能な小さい値として、試験解析によって $d/h_f = 0.02$ の値を用いることとした。

### 3. 有限要素モデル

Fig. 2 に有限要素モデルを示す。図示されている寸法は、圧縮ひずみ $\varepsilon = 0$ での変形状態 (Fig. 1(b))、すなわち、基盤にプレストレッチを加え、基盤上に無応力状態の膜が接着されているときの寸法に対応しており、実験では基盤厚さ $h_s$ が膜厚 $h_f$ に比べて十分大きいことから、本研究では $h_s/h_f = 150$ の値を用いる。さらに、膜と基盤のヤング率 $E_f$ と $E_s$ の比は文献(22)を参考にして $E_f/E_s = 836$ とする。したがって、寸法長さは $h_f$ 、ヤング率は $E_f$ で無次元化する。軟質基盤には neo-Hookean 超弾性体を仮定して非圧縮とする。一方、膜には線形弾性体を仮定して、近似的に非圧縮 (ポアソン比は 0.4999999 (~0.5)) とする。このとき、リンクルの発生に対する理論解(22)が報告されており、プレストレッチ解放によって負荷される圧縮ひずみ $\varepsilon$ の第一分岐点での臨界ひずみ $\varepsilon_1$ と発生するリンクルの優先的な波長 $l_w$ は、

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{4} \left\{ \frac{3E_s(1 + \lambda_0^2)}{2E_f} \right\}^{2/3} \quad (5)$$

$$\frac{l_w}{h_f} = 2\pi \left\{ \frac{2E_f}{3E_s(1 + \lambda_0^2)} \right\}^{1/3} \quad (6)$$

と表され、プレストレッチ $\lambda_0$ の影響を含む。第二分岐によって生じるリッジは、リンクルの波長より長波長であることが知られている。したがって、有限要素モデルの長さ $L_f$ には式(6)に解析条件を代入して得られる優先的なリンクル波長の自然数倍を考える (Fig. 2)。本研究ではこの係数を波数 $M$ と定義しており、優先的な波数を探索するためのパラメータとして考える。境界条件として、基盤の底面には $x_2$ 方向の拘束、基盤と膜の界面には完全接着の条件を与える。一方、側面には周期境界条件を与え、 $x_1$ 方向の平均的な変位を圧縮ひずみ $\varepsilon$ と対応させる。

有限要素解析は ABAQUS で行う。2章で述べたように座屈固有値解析と座屈後解析を行う。平面ひずみ条件下での二次元解析を考え、要素分割には四節点ハイブリッド低減積分要素 CPE4RH を用いる。リンクルの波形を再現するため、 $x_1$ 方向にはリンクル1波長あたり20要素で等間隔に要素分割する。 $x_2$ 方向には膜は等間隔に20分割、基盤は69分割されており、バイアスをつけて界面から底面に向かうにつれて要素は大きくなる。プレストレッチは MODEL CHANGE オプション

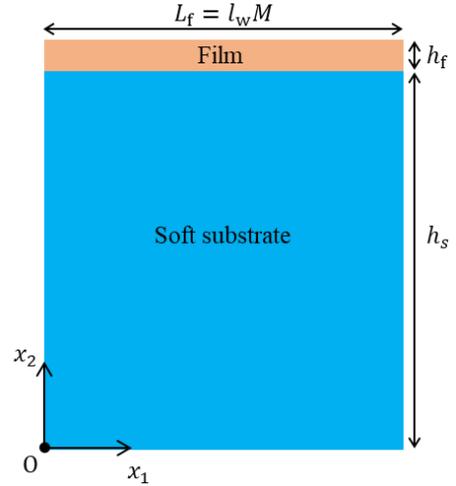


Fig. 2 Finite element model consisting of  $M$  cells of the unitcell including the dominant wavelength  $l_w$  for wrinkling ( $\varepsilon = 0$ ).

ン(19)を用いて与え、Fig. 2 に示される寸法状態において、基盤にはプレストレッチ $\lambda_0$ が作用し、膜には無応力という状態は達成される(22)。圧縮ひずみ $\varepsilon$ を増加させ、リンクル (第一分岐) 及びリッジ (第二分岐) の発生する臨界ひずみ、 $\varepsilon_1$ と $\varepsilon_2$ をそれぞれ解析する。

本研究では、プレストレッチ $\lambda_0$ と波数 $M$ をパラメータとして、リンクルからリッジへのパターン変態のプレストレッチ依存性と分岐座屈特性を調べる。

### 4. 解析結果

Fig. 3 は、第一分岐点の臨界ひずみ $\varepsilon_1$ のプレストレッチ依存性を示している。マーカーは有限要素解析による計算点、破線は式(5)に基づく理論値である。理論と有限要素解析の結果はよく一致しており、2章にて述べた解析手法は正しく機能していることがわかる。なお、第一分岐点に波数 $M$ は影響せず、リンクル以外の長波長座屈の存在は確認されなかった。

Fig.4 は、 $\lambda_0 = 1.75$ における第一分岐モード $\phi^{(1)}$ と第一分岐経路上でのリンクルパターンの発達を示している。周期境界条件が与えられているため、リンクルの分岐モードは二重分岐 ( $k^{(1)} = 2$ ) として解析され、二つの位相の異なるリンクルモードの重ね合わせによって任意の位相でリンクルモードは発生することができる(10),(11)。位相が異なるだけで等価であるため、本研究では解析された二つの分岐モードの一方を用いた。このような並進対称性に起因する二重分岐が発生する場合に波動性を有すると説明することがある(16),(17)。この図が示すように、第一分岐点で生じるリンクルの分岐モードは、分岐経路上において圧縮ひずみが増大するにつれて、リンクル変形パターンとしてよりはっきりと確認できるようになる。この解析では、 $M = 5$ の結果を示しているが、異なる値を用いてもリンクルの波数が異なるだけで等価な応答が得られる。なお、分岐モードのコンターには $x_2$ 成分の値、変形パターンのコンターには $x_1$ 方向の公称ひずみ $\varepsilon_{11}$  (基盤に

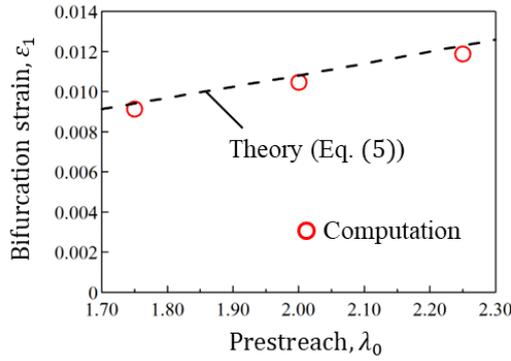


Fig. 3 Comparison of  $\varepsilon_1$  (the first bifurcation) with theory using Eq. (5).

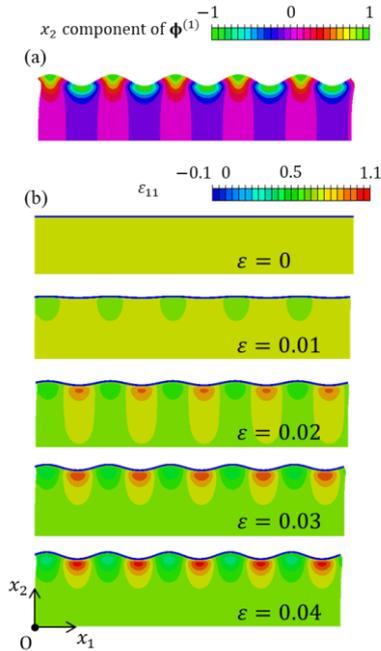


Fig. 4 Bifurcation mode at the first bifurcation and deformation pattern on the first bifurcated path for  $\lambda_0 = 1.75$ . (a) Wrinkle bifurcation mode  $\phi^{(1)}$  and (b) Evolution of wrinkle deformation pattern.

はプレストレッチによって引張りひずみが作用)をそれぞれ用いた。

第一分岐経路上でリンクル変形パターンが発達する過程において第二分岐点を同定したところ、Fig. 5 に示すように第二分岐点の臨界ひずみ $\varepsilon_2$ は、プレストレッチ $\lambda_0$ に強く依存することがわかった。図中の $M_c$ は、 $\varepsilon_2$ が最小値をとる $M$ であり、すなわちリッジが発生するときの優先的なリンクル波数である。 $\lambda_0$ が大きくなるにつれ、 $\varepsilon_2$ は小さくなり、 $M_c$ は大きくなることわかった。 $\lambda_0 = 2.00$ のとき $M_c = 7$ となっており、この結果は文献(15)の結果と一致している。したがって、第二分岐の解析においても解析手法の妥当性は確認される。

第二分岐点は第一分岐点と同様にして二重分岐 ( $k^{(2)} = 2$ ) であった。Fig. 6 は、 $\lambda_0 = 1.75$ における第二分岐モード $\phi_1^{(2)}$ 、 $\phi_2^{(2)}$ と初期不整として $\phi^{(1)} + \phi_1^{(2)}$ 及び $\phi^{(1)} + \phi_2^{(2)}$ をそれぞれ導入したときのリッジ変形パターンの発達を示している。こ

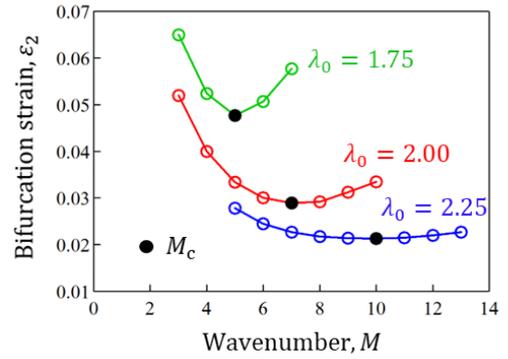


Fig. 5 Dependence of  $\varepsilon_2$  (the second bifurcation) on  $\lambda_0$  and the dominant wavenumber indicated as  $M_c$ .

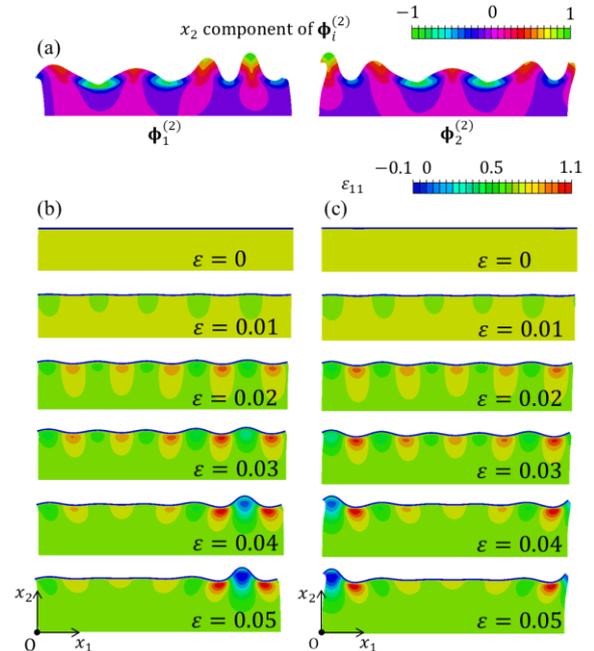


Fig. 6 Bifurcation modes at the second bifurcation and deformation pattern on the second bifurcated path for  $\lambda_0 = 1.75$ . (a) the second bifurcation modes  $\phi_1^{(2)}$  and  $\phi_2^{(2)}$  and evolution of ridge deformation patterns analyzed using the imperfections by (b)  $\phi^{(1)} + \phi_1^{(2)}$  and (c)  $\phi^{(1)} + \phi_2^{(2)}$ .

の図が示すように、第二分岐モードは高次のリンクルモードとみなされ、必ずしも明確に変形パターンと対応関係にないことがわかる (cf. Fig. 4). しかしながら、どちらの分岐モードも第二分岐経路上では $x_2$ 方向に大きくモードが現れる場所においてリンクルがリッジ化しており、リッジ変形パターンの発達を示すことがわかった。 $\lambda_0 = 2.00, 2.25$ の場合の分岐モードも同様の傾向を示した (付録参照)。したがって、 $\lambda_0 = 1.75$ の場合に着目して、以後、二重分岐を構成する $\phi_1^{(2)}$ と $\phi_2^{(2)}$ の間の関係について考察する。

詳細な分岐座屈特性を検討するため、はじめに、第一分岐モード $\phi^{(1)}$ と第二分岐モードの一つである $\phi_1^{(2)}$ の膜表面成分を面内 ( $x_1$ ) 成分及び面外 ( $x_2$ ) 成分に分解して考える。Fig. 7 は、 $\lambda_0 = 1.75$ の場合の二つのモードの関係を示している。グレーの実線が $\phi^{(1)}$ の成分であり、赤色の実線が $\phi_1^{(2)}$ を表し

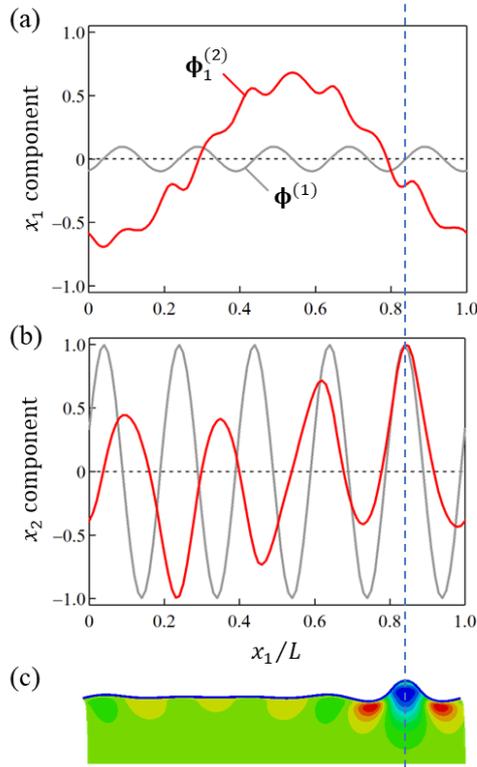


Fig. 7 Comparison of the first and second bifurcation modes,  $\phi_1^{(1)}$  and  $\phi_1^{(2)}$ , at film surface for  $\lambda_0 = 1.75$ . (a) In-plane ( $x_1$ ) component, (b) Out-of-plane ( $x_2$ ) component, and (c) the corresponding ridge deformation pattern.

ている。横軸は圧縮ひずみ $\varepsilon$ と関係づけられる全体長さ $L$  (Fig. 1) で正規化されている。この図から、 $\phi_1^{(2)}$ は、一つのリンクルをリッジに変態させるために作用していることがわかる。面外成分に着目すると、リンクルの頂点と $\phi_1^{(2)}$ の最高点が一致しており整合する。さらに、面内成分についても、 $\phi_1^{(2)}$ が正から負へと変化する点に対応してリッジが発生している。これは、 $\phi_1^{(2)}$ がリッジ発生源にその周辺の変形を寄せ集めるように作用していると理解でき、面外及び面内の変形の組み合わせによってリッジ変態は生じることがわかった。Fig. 7は $\lambda_0 = 1.75$ かつ $\phi_1^{(2)}$ に着目しているが、ほかの場合においても同様の特徴を有することが確認できた。

第一分岐のリンクル分岐モードが波動性を有するように、第二分岐でリッジ変形パターンを引き起こす高次のリンクル分岐モードも二重分岐であり、並進対称性に起因する波動性を有していることが期待される。しかしながら、リンクル分岐モードのように分岐モードが単純ではなく、これまでに議論されてこなかった。Fig. 8は、 $\lambda_0 = 1.75$ において、二つの第二分岐モード $\phi_1^{(2)}$ と $\phi_2^{(2)}$ を $-1: -1$ で構成するときの特徴と初期不整としてこの合成された第二分岐モードを導入して解析されるパターン発達を示す。赤色の破線が $\phi_1^{(2)}$ 、青色の破線が $\phi_2^{(2)}$ を示しており、黒色の実線が合成された $-\phi_1^{(2)} - \phi_2^{(2)}$ の挙動を示している。面内成分には、位相ずれが明らかに表れており、面外成分についても同様に合成によって位相は変化することが確認できた。すなわち、高次のリンクル分岐モードについても波動性が現れる。したがって、

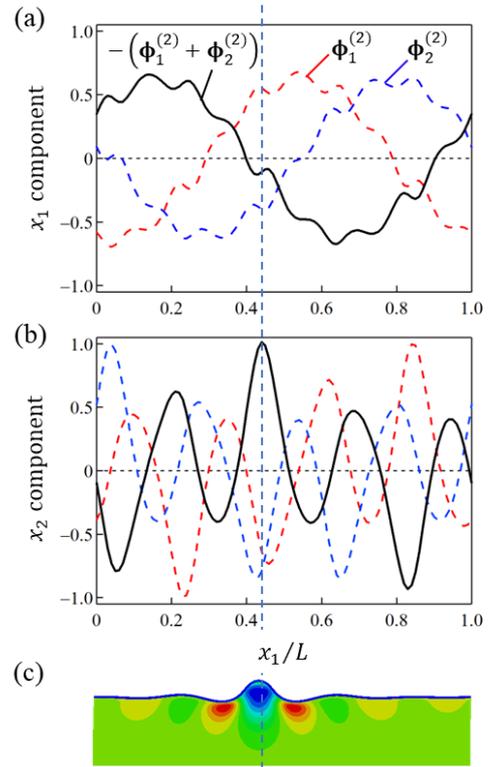


Fig. 8 The second bifurcation mode consisting of  $-\phi_1^{(2)} - \phi_2^{(2)}$  at film surface for  $\lambda_0 = 1.75$ . (a) In-plane ( $x_1$ ) component, (b) Out-of-plane ( $x_2$ ) component, and (c) the corresponding ridge deformation pattern.

二つの分岐モードの構成比 (式(4)) を変更することは、位相を変化させ、リッジ化するリンクルの位置の自由度と対応する。

## 5. 結 言

本研究では、リンクルからリッジへのパターン変態のプレストレッチ依存性と分岐座屈特性を解析することを目的として、逐次的座屈固有値解析および座屈後解析を行った。プレストレッチが大きくなるにつれて、第二分岐の発生する臨界ひずみは小さくなり、リッジパターンの発生間隔は大きくなることがわかった。また、第二分岐モードも第一分岐モードと同様にして波動性の特徴を有し、結果としてリッジ化するリンクルは並進対称性の観点から合理的に解釈できる。分岐座屈特性の理解は複雑なパターンの機構を解明し、制御を可能にするとともに、工学応用に繋がることを期待される。

## 謝 辞

本研究の一部は JSPS 科研費 JP19H00739 と JP22K18284 の助成を受けて行われた。ここに記して謝意を表す。

## 付 録

Fig. 9 に、 $\lambda_0 = 2.00, 2.25$  の場合の第一分岐モード $\phi^{(1)}$ 及び第二分岐モード $\phi_1^{(2)}$ 、 $\phi_2^{(2)}$ を示す。優先的な波数 $M_c$ は異なるが、どの場合においても第二分岐モードは二重分岐であり、 $\lambda_0 = 1.75$  の場合と同様の特徴を有している。

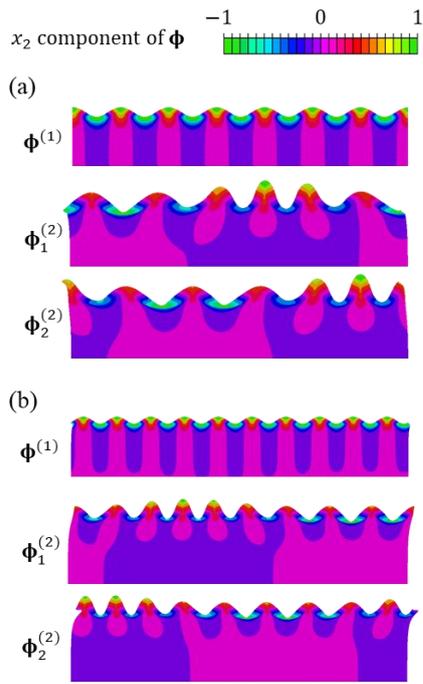


Fig. 9 The first and second bifurcation modes for (a)  $\lambda_0 = 2.00$  ( $M_c = 7$ ) and (b)  $\lambda_0 = 2.25$  ( $M_c = 10$ ).

#### 参考文献

- (1) M.A. Biot: Mechanics of incremental deformations: theory of elasticity and viscoelasticity of initially stressed solids and fluids, including thermodynamic foundations and applications to finite strain, (1965), Wiley.
- (2) H.G. Allen: In: Analysis and design of sandwich panels, Pergamon Press, (1969), New York.
- (3) A.N. Gent, I.S. Cho: Surface instabilities in compressed or bent rubber blocks, Rubber Chemistry and Technology, **72**(1999), pp. 253–262.
- (4) Y. Rahmawan, M.W. Moon, K.S. Kim, K.R. Lee, K.Y. Suh: Wrinkled, dual-Scale structure of diamond-Like carbon (DLC) for superhydrophobicity, Langmuir, **26**(2010), pp. 484–491.
- (5) Y. Wang, Z. Li, J. Xiao: Stretchable thin film materials: fabrication, application, and mechanics, Journal of Electronic Packaging, **138**(2016), No. 020801.
- (6) H.S. Kim, A.J. Crosby: Solvent-responsive surface via wrinkling instability, Advanced Materials, **23**(2011), pp. 4188–4192.
- (7) S. Nagashima, H. Ebrahimi, K.R. Lee, A. Vaziri, M.W. Moon: Tunable nanochannels fabricated by mechanical wrinkling/folding of a stiff skin on a soft polymer, Advanced Matter Interfaces, **2**(2015), No. 1400493.
- (8) M.A. Ali, W. Hong, S. Oren, Q. Wang, Y. Wang, H. Jiang, L. Dong: Tunable bioelectrodes with wrinkled-ridged graphene oxide surfaces for electrochemical nitrate sensors, RSC Advances, **6**(2016), pp. 67184–67195.

- (9) S. Nagashima, S.M. Yoon, D.H. Kim, A. Nakatani, M.W. Moon: Wrinkle-assisted capillary bridging for the directed assembly of single-level DNA nanowire arrays, Advanced Materials Interfaces, **9**(2022), No. 2102243.
- (10) S. Kikuchi, S. Matsubara, S. Nagashima, D. Okumura: Diversity of the bifurcations and deformations on films bonded to soft substrates: robustness of the herringbone pattern and its cognate patterns, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, **159**(2022), No. 104757.
- (11) H. Miyoshi, S. Matsubara, D. Okumura: Bifurcation and deformation during the evolution of periodic patterns on a gel film bonded to a soft substrate, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, **148**(2021), No. 104272.
- (12) L. Jin, A. Takei, J.W. Hutchinson: Mechanics of wrinkle/ridge transitions in thin film/substrate systems, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, **81**(2015), pp. 22–40.
- (13) C. Cao, H.F. Chan, J. Zang, K.W. Leong, X. Zhao: Harnessing localized ridges for high-aspect-ratio hierarchical patterns with dynamic tunability and multifunctionality, Advanced Materials, **26**(2014), pp.1763–1770.
- (14) A. Takei, L. Jin, J.W. Hutchinson, H. Fujita: Ridge localizations and networks in thin films compressed by the incremental release of a large equi-biaxial pre-stretch in the substrate, Advanced Materials, **26**(2014), pp.4061–4067.
- (15) J. Liu, K. Bertoldi: Bloch wave approach for the analysis of sequential bifurcations in bilayer structures, Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, **471**(2015), No.20150493.
- (16) D. Okumura, N. Ohno, H. Noguchi: Elastoplastic microscopic bifurcation and post-bifurcation behavior of periodic of periodic cellular solids, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, **52**(2004), pp. 641–666.
- (17) D. Okumura, A. Okada, N. Ohno: Buckling behavior of Kelvin open-cell foams under  $[0\ 0\ 1]$ ,  $[0\ 1\ 1]$  and  $[1\ 1\ 1]$  compressive loads, International Journal of Solids and Structure, **45**(2008), pp. 3807–3820.
- (18) D. Okumura, J. Sugiura, H. Tanaka, Y. Shibutani: Buckling and postbuckling of etching-induced wiggling in a bilayer structure with intrinsic compressive stress, International Journal of Mechanical Sciences, **141**(2018), pp. 78–88.
- (19) Dassault Systems SIMULA Corporation: Abaqus 6.14 user documentation, (2014).
- (20) R. Hill: A general theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, **6**(1958), pp. 236–249.
- (21) N. Ohno, D. Okumura, H. Noguchi: Microscopic symmetric bifurcation condition of cellular solids based on a homogenization theory of finite deforestation, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, **50**(2002), pp. 1125–1153.
- (22) Y. Cao, J.W. Hutchinson: Wrinkling phenomena in neo-hookean film/substrate bilayers, Journal of Applied Mechanics, **79**(2012), No. 031019.