

連成型仮想的物理モデルに基づいた オーバーハング制約付きトポロジー最適化

TOPOLOGY OPTIMIZATION WITH OVERHANG CONSTRAINT BASED ON COUPLED FICTITIOUS PHYSICAL MODEL

田島 幹大¹⁾, 山田 崇恭²⁾

Mikihiro TAJIMA and Takayuki YAMADA

1) 東京大学大学院工学系研究科 (〒 113-8656 文京区弥生 2-11-16, E-mail: tajima-mikihiro8@g.ecc.u-tokyo.ac.jp)

2) 東京大学大学院工学系研究科 (〒 113-8656 文京区弥生 2-11-16, E-mail: t.yamada@mech.t.u-tokyo.ac.jp)

Additive Manufacturing (AM) is facilitating the fabrication of optimal structures derived from topology optimization. While AM can produce complex shapes, support materials are required when the overhang angle exceeds a certain angle. However, the use of support materials is time-consuming and costly. Therefore, there is a need for topology optimization that produces manufacturable structures without support materials. Recently, a method has been proposed to formulate geometric constraints by introducing a fictitious physical model that detects geometric features. However, converging to the optimal geometry is difficult with the method because a fictitious physical model is completely independent of a mechanical model describing physical phenomena and acts in a non-interlocking manner. In this study, we propose a “coupled fictitious physical model” in which two models interact. Specifically, convergence is improved by varying the material constants used in the mechanical model so that the value of the objective function worsens near domains where geometric constraints are violated. As an example, we consider a stiffness maximization problem with overhang constraints, formulate a coupled fictitious physical model, and perform a sensitivity analysis. Finally, a numerical example is provided to confirm the validity.

Key Words: Level Set Method, Topology Optimization, Overhang constraint, Geometric constraint, Optimal design, Fictitious physical model, Coupled fictitious physical model

1. 緒言

近年、トポロジー最適化を機械製品をはじめとする様々な工業製品に応用する研究が盛んである。トポロジー最適化とはトポロジーの変更を許容しながら最適構造を自動的に導き出す設計手法であり、最も設計自由度の高い構造最適化法として知られている。例として、熱伝導問題への適用例⁽¹⁾や音響問題への適用例⁽²⁾などが挙げられる。しかしながら、トポロジー最適化により得られた最適形状は幾何学的に非常に複雑な部分構造を有することが多い。故に、最適形状の製造には、造形可能な形状の自由度が高い造形方法である、積層造形法が適している。

積層造形法では様々な形状が造形可能であるものの、いく

つかの制限がある。その中の一つとして、構造境界の接線の傾斜角(以下、オーバーハング角)がある一定の角度を超過すると樹脂などの素材を積層することが困難となりサポート材が必要となる制限がある。ここで、サポート材とは、造形工程上の都合から、造形形状に追加するように造形される仮の構造である。このサポート材の利用には幾つかの問題がある。まず、サポート材の除去には多大な時間とコストがかかる。加えて、サポート材が構造的に内部に閉じ込められた箇所が存在する場合除去することが不可能である。これらの問題点から、オーバーハング角がサポート材なしで積層可能な最小の角度を超過しないようにする制約(以下、オーバーハング制約)を満たしたトポロジー最適化手法が求められる。

オーバーハング制約を課した最適設計手法に関して、幾

つかの先行研究が挙げられる。Leary et al.⁽³⁾ はオーバーハング制約を考慮せずにトポロジー最適化を行った後、制約を満たすように再度設計を行う手法を提案している。しかし、提案された再設計法はオーバーハング角を考慮して人為的に構造領域を付け加える方法であり、得られた最適形状とは大きく性能が変化する可能性がある。Gayor et al.⁽⁴⁾ や Langelaar⁽⁵⁾ は密度法に基づき、下部の要素が構造領域で積層可能な場合のみ形状が追加されるようにする密度フィルターを用いた手法を提案している。これらの手法は各要素が下部の形状に大きく依存し最適化過程で制約に違反する領域ができることを許容しないため、最適化前の初期構造への依存が大きく高い性能を持つ形状が得られにくい。Allaire et al.⁽⁶⁾ や Wang et al.⁽⁷⁾ は構造領域と空洞領域の境界が明瞭であり幾何学的特徴を捉えやすいレベルセット法に基づく手法を提案している。Allaire et al. は一定の剛性が満たされるように機械的制約を加えることで、制約を満たした形状を作り出している。しかし、最適化の計算過程で多くの形状に対して剛性を評価する必要があり、多大な計算コストがかかる。一方、Wang et al. は構造領域の法線ベクトルから制約関数を定義しているが、局所的に制約に違反する領域を正しく検出できていない箇所が存在し、所望の最適形状とは異なる形状に収束する可能性がある。

幾何学的制約を考慮した様々な最適設計手法が提案される中、近年仮想的物理モデルを導入することで幾何学的特徴を抽出する手法⁽⁸⁾⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾⁽¹¹⁾⁽¹²⁾ が提唱されている。仮想的物理モデルでは、物理現象を定式化した力学モデルとは独立して、幾何学的特徴を抽出するための偏微分方程式を導入し、トポロジー最適化の枠組に準拠した定式化が可能となる。しかし、仮想的物理モデルは力学モデルと完全に独立して非連動的に影響を及ぼすため、一つの最適形状に収束させることが困難な場合がある。

従来の仮想的物理モデルにおける問題点に対して本研究では、仮想的物理モデルと力学モデルを独立させずに連動させる連成型仮想的物理モデルを新しく提案する。具体的には、幾何学的制約条件に違反する領域で、力学モデルで用いられる材料定数を目的関数が悪化するように変化させることにより二つのモデルを仮想的に連成させる。それぞれのモデルを組み合わせることで連動性が向上し収束性に関する問題点が解決される可能性を有する。

本研究では、連成型仮想的物理モデルの妥当性を検証するために、剛性最大化問題を例として挙げて定式化及び感度解析を行い、具体的な数値解析例を示して、有効性を検証する。以下の章では、まず第2章でレベルセット法に基づくトポロジー最適化問題の定式化と今回具体例として扱う剛性最大化問題について考える。次に、第3章において連成型仮想的物理モデルの定式化法について述べる。第4章では仮想的物理モデルによるオーバーハング制約の定式化を行った後、第3章で提案した定式化法に則り剛性最大化問題に連成型仮想的物理モデルを導入した場合の定式化を行う。第5章では

最適化問題の定式化、感度解析及び最適化アルゴリズムの構築を行い、設計感度の観点から二つのモデルの連動性について議論する。第6章では具体的な数値解析例を考え、本手法の妥当性を検証する。最後に第7章で結言を記す。

2. レベルセット法に基づくトポロジー最適化

2.1. 基本的な考え方

レベルセット法に基づくトポロジー最適化について概要を述べる。設計対象とする構造物を包括する領域(以下、固定設計領域)を D 、構造領域を Ω とする。Yamada et al.⁽¹³⁾ の提案した手法に基づき、レベルセット関数 $\phi(\mathbf{x})$ を以下のように定義する。

$$\begin{cases} 0 < \phi(\mathbf{x}) \leq 1 & \text{if } \mathbf{x} \in \Omega \\ \phi(\mathbf{x}) = 0 & \text{if } \mathbf{x} \in \partial\Omega \\ -1 \leq \phi(\mathbf{x}) < 0 & \text{if } \mathbf{x} \in D \setminus \Omega \end{cases} \quad (1)$$

このとき、材料分布を表す特性関数 $\chi(\phi)$ を以下のように定義する。

$$\chi(\phi(\mathbf{x})) = \begin{cases} 1 & \text{if } \phi \geq 0 \\ 0 & \text{if } \phi < 0. \end{cases} \quad (2)$$

トポロジー最適化の基本的な考え方は、材料分布を設計変数とし、目的関数 J を最小化(あるいは最大化)する構造を求める最適化問題として、構造最適化問題を定式化することである。特性関数 $\chi(\phi)$ を用いて構造最適化問題は以下のように定式化される。トポロジー最適化の基本的な考え方は、材料分布を設計変数とし、目的関数 J を最小化(あるいは最大化)する構造を求める最適化問題として、構造最適化問題を定式化することである。所望の目的関数を表現する関数 $j(u)$ 及び特性関数 $\chi(\phi)$ を用いて構造最適化問題は以下のように定式化される。

$$\min_{\chi} \quad J[u, \chi(\phi)] = \int_D j(u) \chi(\phi) d\Omega \quad (3)$$

$$\text{subject to:} \quad \text{Governing equations} \quad (4)$$

続いて、レベルセット関数の更新方法について述べる。Yamada et al.⁽¹³⁾ は仮想的な時間 t を導入して、レベルセット関数の変更を時間発展方程式により記述した。この手法に基づき、レベルセット関数の更新を以下の反応拡散方程式で行う。

$$\frac{\partial \phi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = -K \left\{ \frac{C J' \int_D d\Omega}{\int_D |J'| d\Omega} - \tau \nabla^2 \phi(\mathbf{x}, t) \right\} \quad (5)$$

ただし、 $K \in \mathbb{R}^+$ は比例定数、 $C \in \mathbb{R}^+$ は正規化係数、 $\tau \in \mathbb{R}^+$ は正則化係数、 J' は設計感度である。正則化係数 τ を調節することにより構造領域の幾何学的な複雑さを制御することが可能となる。詳細は文献⁽¹³⁾を参照されたい。

2.2. 剛性最大化問題

本研究では、代表的な問題設定である剛性最大化問題を扱う。固定設計領域 D に対して、線形弾性体により構成され

る構造領域 Ω の一部境界 Γ_t に静的な表面力 \mathbf{t} を負荷し、構造領域 Ω の一部境界 Γ_u において変位場 \mathbf{u} を完全拘束する。これらの境界条件のもと等方性線形弾性体を仮定した場合、変位 \mathbf{u} に対して、以下の支配方程式が成立する。

$$\begin{cases} -\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_{ij}(\mathbf{u}) = 0 & \text{in } \Omega \\ \mathbf{u} = \mathbf{0} & \text{on } \Gamma_u \\ \boldsymbol{\sigma}_{ij}n_j = t_i & \text{on } \Gamma_t \\ \boldsymbol{\sigma}_{ij}n_j = 0 & \text{on } \Gamma_N \end{cases} \quad (6)$$

ただし、 $\Gamma_N = \partial D \setminus (\Gamma_t \cup \Gamma_u)$ である。 $\boldsymbol{\sigma}_{ij}(\mathbf{u})$ は応力テンソルであり、ひずみテンソル $\epsilon_{ij}(\mathbf{u})$ 及び弾性テンソル C_{ijkl} を用いて以下のように定義される。

$$\epsilon_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (7)$$

$$C_{ijkl} = E \left(\frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \delta_{ij}\delta_{kl} + \frac{1}{2(1+\nu)} (\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \right) \quad (8)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{ij}(\mathbf{u}) = C_{ijkl}\epsilon_{ij}(\mathbf{u}) \quad (9)$$

ただし、 E はヤング率、 ν はポアソン比である。このとき、平均コンプライアンスを目的関数として、次式のように剛性最大化問題を定式化する。

$$\inf_{\chi} J(\mathbf{u}) = \int_{\Gamma_t} \mathbf{t} \cdot \mathbf{u} d\Gamma \quad (10)$$

3. 連成型仮想的物理モデルに基づく幾何学的制約条件の定式化

本研究では、従来の仮想的モデルの問題点を克服した連成型仮想的物理モデルを提案する。仮想的物理モデル⁽⁸⁾とは、製造工程や生産工程から要求される製造要件を考慮するために、物理現象のみを記述した力学モデルとは別に、仮想的に導入される支配方程式系のことである。これにより、従来のトポロジー最適化の枠組に準拠した定式化と数値解析アルゴリズムの開発が可能になる。

先行研究では、フライス加工における幾何学的要件を満たすために仮想的な定常移流拡散方程式を導出するモデル⁽¹⁰⁾や、幾何学的特徴を抽出するために仮想的な物理場を導入するモデル⁽⁹⁾⁽¹¹⁾、閉じた空洞領域をなくすために仮想的な熱拡散方程式を定式化したモデル⁽¹²⁾などが提案されてきた。しかし、今まで提案されてきた仮想的物理モデルは全て、力学モデルとは完全に独立して非連動的に作用するため、問題設定によっては、最適解の収束性が悪い場合がある。

このような課題を解決する方法として、本研究では仮想的物理モデルと力学モデルを独立させずに連動的に作用させる連成型仮想的物理モデルを新たに提案する。具体的には、仮想的物理モデルにより導出された幾何学的制約条件に違反する領域において、目的関数を悪化させるように力学モデル内の材料定数を変化させることにより二つのモデルを連成させる。この手法により、それぞれのモデルが互いに作用し合い収束性が改善する可能性がある。

本章からは本手法の妥当性を検証するために、オーバーハング制約及び平均コンプライアンス最小化問題を例に定式化

を行う。その後、感度解析を行い、連成させた結果生じる相互作用について詳しく考察する。

4. オーバーハング制約の定式化

積層造形法におけるオーバーハング制約を明確にする。図1に示すように、構造領域の境界 $\partial\Omega$ の傾斜角をオーバーハング角 α と定義する。積層造形法ではオーバーハング角がある一定の角度より小さくなると、積層が困難となるため、サポート材が必要となる。支持なしで積層可能な最小のオーバーハング角 θ を最小オーバーハング角とする。また、構造領域の境界で $\alpha > \theta$ が満たされるようにする制約をオーバーハング制約とする。一例として、オーバーハング制約に違反する境界（以下、制約違反境界）を図1に示す。

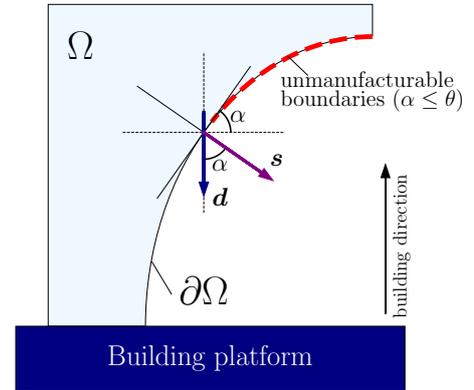


Fig. 1: The definition of overhang angle and unmanufacturable boundaries without support structures. The angle between the state variable \mathbf{s} in the fictitious physical model and the inverse unit vector \mathbf{d} in the building direction equals to overhang angle.

4.1. 仮想的物理モデルに基づく制約条件の定式化

本研究では、制約違反境界を検出するために、構造領域の境界の法線ベクトルを近似的に表現する仮想的物理モデル⁽⁸⁾を用いる。固定設計領域を D 、固定設計領域の周囲に十分な幅の非設計領域 D_N を設けると、状態変数を $s_i \in H^1(D \cup D_N)$ として、幾何学的特徴を抽出する仮想的物理モデルを以下のように定義する。

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (a_s \nabla s_i - \mathbf{e}_i \chi) + (1 - \chi)s_i = 0 & \text{in } D \cup D_N \\ s_i = 0 & \text{on } \partial D_N \end{cases} \quad (11)$$

ただし、 $a_s \in \mathbb{R}^+$ は拡散係数、 \mathbf{e}_i は \mathbb{R}_n の正規直交基底ベクトルである。図2に式(11)で定義された仮想的物理モデルの力学的な解釈を表した図を示す。式(11)は、ヤング率を a_s 、ポアソン比を0として、構造境界 $\partial\Omega$ に単位法線ベクトル \mathbf{n} の荷重を付加した条件下で、空洞領域 $D \setminus \Omega$ または非設計領域 D_N にばね係数1の仮想的なばねを配置した場合の等方性線形弾性体の変位場を意味する⁽⁸⁾。仮想的なばねを

配置することにより、非構造領域では境界付近のみ \mathbf{s} の大きさは大きくなる。また、固定設計領域 D の境界 ∂D にディリクレ条件 $s_i = 0$ を課した場合、設計領域境界における仮想的物理モデル \mathbf{s} が不安定となり境界付近の幾何学的特徴を正しく捉えることが困難となる。故に、設計領域 D の外側に非設計領域 D_N を設けて、拡張した領域 $D \cup D_N$ で仮想的物理モデルを解く。一例として図 3b に、構造領域を図 3a のように定義し、 $a_s = 3 \times 10^{-4}$ としたときの仮想的物理モデルの解を示す。

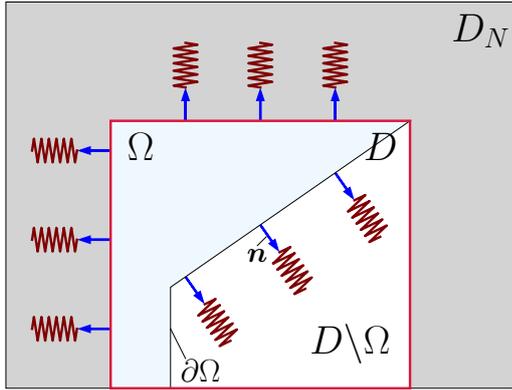
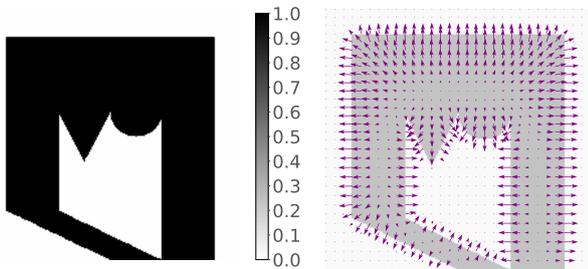


Fig. 2: Diagram representing the interpretation of the fictitious physical model. The zigzag lines represent fictitious springs with the spring constant of 1.



(a) an example of structure χ (b) a solution of fictitious physical model \mathbf{s}

Fig. 3: Numerical examples: structure and fictitious physical field.

続いて、仮想的物理モデルを用いて制約違反境界を定式化する。図 1 より、幾何学的な関係性から、法線ベクトルを近似した \mathbf{s} と積層方向の逆単位ベクトル \mathbf{d} の成す角度はオーバーハング角 α と一致する。このとき \mathbf{s} と \mathbf{d} の内積を用いることで、オーバーハング角 α と最小オーバーハング角 θ の関係性を以下のように表現できる。

$$\begin{cases} \mathbf{s} \cdot \mathbf{d} \geq \|\mathbf{s}\| \cos \theta & \text{if } \alpha \leq \theta \\ \mathbf{s} \cdot \mathbf{d} < \|\mathbf{s}\| \cos \theta & \text{if } \alpha > \theta \end{cases} \quad (12)$$

式 (12) の上式は制約違反境界の場合に成立する式であり、下

式はオーバーハング制約を満たす境界の場合に成立する式である。

これらを踏まえて、仮想的な物理場 \mathbf{s} を用いた近似的な制約違反境界を以下の式で定義する。

$$g_1(\mathbf{s})(1 - \chi)^2 = \frac{a_s}{(1 - \cos \theta)^2} \left\{ \mathcal{R}(\mathbf{s} \cdot \mathbf{d} - \sqrt{\|\mathbf{s}\|^2 + \epsilon_s} \cos \theta) \right\}^2 (1 - \chi)^2 \quad (13)$$

ただし、 $\mathcal{R}(x)$ は以下のように定義される近似ランプ関数である。

$$\mathcal{R}(x) = \frac{1}{2}(x + \sqrt{x^2 + \epsilon_r}) \quad (14)$$

ここで、設計感度を導出する際に式 (13) を微分する必要があるため、パラメータ ϵ_s , ϵ_r を導入している。右辺第二項は制約違反境界では正の値をとり、それ以外の境界では近似ランプ関数内の変数が負となるため 0 となり排除される。右辺第三項は、非構造領域 $(1 - \chi)$ 内の境界付近を除いた領域は $g_1(\mathbf{s}) \simeq 0$ ($\because \mathbf{s} \simeq 0$) であることを利用し、境界を抽出する項である。

しかし、例外的に式 (13) は上に凸または下に凸の局所的に鋭利な点 (以下、幾何学的特異点) 付近における制約違反境界を正しく検出できない。図 4 に幾何学的特異点に該当する箇所を示す。 $c-$ の箇所は局所的にサポート材なしで製造可能である。しかし、 $c-$ 付近においては、式 (13) が正の値を持ち制約違反境界として検出される。一方、 $c+$ の箇所は積層プラットフォームから離れておりオーバーハング制約に違反している。しかし、大域的に $c+$ を除いた領域を見てオーバーハング制約が満たされている場合、制約違反境界は $c+$ の箇所のみとなり、制約違反境界は無限に小さくなる。故に、 $c+$ の制約違反境界を強調して下に凸の氷柱状の形が形成されないようにする必要がある。

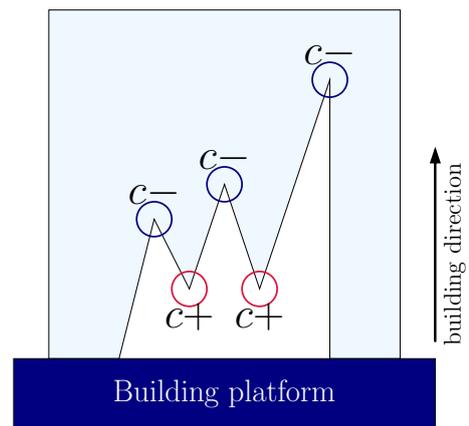


Fig. 4: Geometric singular points.

このような幾何学的特異点における問題に対して、 $c-$ 付近の平均曲率は局所的に大きい負の値をとり $c+$ 付近の平均曲率は大きい正の値をとる性質を利用することで、制約違反境界を正確に検出する⁽⁹⁾。仮想的物理モデルを用いて近似

した単位法線ベクトル \mathbf{f} , 及び平均曲率 $\nabla \cdot \mathbf{f}$ を用いて幾何学的特異点を考慮した式 $g_2(\mathbf{s})$ を以下のように定義する.

$$\mathbf{f} = \frac{\mathbf{s}}{\sqrt{\|\mathbf{s}\|^2 + \epsilon_{sn}}} \quad (15)$$

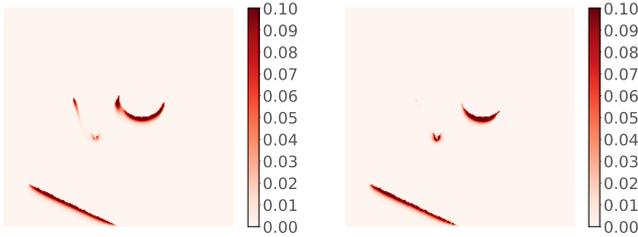
$$g_2(\mathbf{s}) = \mathcal{R}(1 + \beta \nabla \cdot \mathbf{f}) \quad (16)$$

ただし, $\beta \in \mathbb{R}^+$ は平均曲率を考慮する度合いを表すパラメータであり, ϵ_{sn} は微小パラメータである. $c-$ の部分では, 式 (16) 内の近似ランプ関数内部の変数が負となる ($\nabla \cdot \mathbf{f} \ll 0$) ため排除される一方, $c+$ の部分では内部の変数が大きい正の値となる ($\nabla \cdot \mathbf{f} \gg 1$) ため強調される.

以上より, 幾何学的特異点を考慮して正確に制約違反境界を検出する式は以下ようになる.

$$g(\mathbf{s})(1 - \chi)^2 = g_1(\mathbf{s})g_2(\mathbf{s})(1 - \chi)^2 \quad (17)$$

構造領域を図 3a のように定義して最小オーバーハング角を 45° , $\beta = 0.1$ としたとき, 幾何学的特異点を考慮しない場合 (図 5a) 及び考慮した場合 (図 5b) の比較図を図 5 に示す. この図から幾何学的特異点を考慮した場合, $c-$ の特異点は排除され, $c+$ の特異点が強調されていることが確認できる.



(a) unmanufacturable boundaries not considering geometric singular points $g_1(\mathbf{s})(1 - \chi)^2$
(b) unmanufacturable boundaries considering geometric singular points $g_1(\mathbf{s})g_2(\mathbf{s})(1 - \chi)^2$

Fig. 5: Numerical examples: comparison of methods for detecting unmanufacturable boundaries without support structures (minimum overhang angle is 45°).

4.2. 連成型仮想的物理モデルの定式化

第 2.2 節で述べた剛性最大化問題を例に, オーバーハング制約を考慮した連成型仮想的物理モデルの定式化について考える.

連成型仮想的物理モデルでは幾何学的制約に違反する領域 (以下, 制約違反領域) の材料定数を目的関数が悪化するように変化させる. しかし, 式 (17) で定義された制約違反境界は境界のみに値を持つため, 領域として制約に違反する部分を定義できない. そこで本研究では, 制約違反境界 $g(\mathbf{s})(1 - \chi)^2$ を仮想的な熱源として拡散させた領域 p を用いて制約違反領域を定義する. 制約違反境界を拡散させる熱拡散方程式を以下に示す.

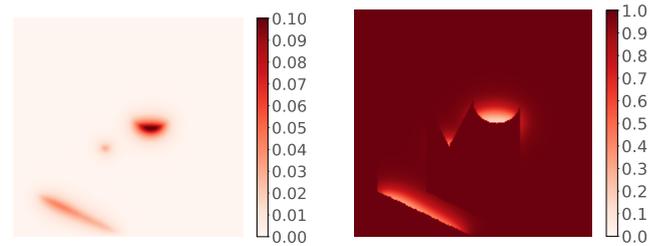
$$\begin{cases} -\nabla \cdot (a_p \nabla p) + p = g(\mathbf{s})(1 - \chi)^2 & \text{in } (D \cup D_N) \\ p = 0 & \text{on } \partial D_N \end{cases} \quad (18)$$

ただし, $a_p \in \mathbb{R}^+$ は拡散係数である. このとき拡散場 p と構造領域 χ の共通部分を制約違反領域と定義する. 構造領域を図 3a のように定義し $a_p = 1 \times 10^{-3}$ としたとき, 制約違反領域 $p\chi$ の数値例を図 6a に示す.

続いて, 制約違反領域 $p\chi$ を用いて目的関数を悪化させるように材料定数を変化させる. 本研究では, 式 (10) で定式化された剛性最大化問題を例に, 目的関数として平均コンプライアンス, 材料定数としてヤング率を適用する. 平均コンプライアンスを悪化するなわち増大させるには, 構造領域のヤング率を低下させれば満たされる. これを踏まえて, オーバーハング制約を考慮した仮想的ヤング率を以下のように定義する.

$$E_f(p, \chi) = E \left(1 - \frac{2}{\pi} \arctan(\gamma p \chi) \right) \quad (19)$$

ここで E は元々の材料のヤング率, $\gamma \in \mathbb{R}^+$ はヤング率を低下させる度合いを変化させるパラメータである. 式 (19) により, 拡散場と構造領域の共通部分のヤング率を低下させ, それ以外の領域は元々の材料のヤング率となる. 構造領域を図 3a のように定義し $\gamma = 50$ としたとき, 仮想的ヤング率 $E_f(p)$ の数値例を図 6b に示す.



(a) domains that violate overhang constraint $p\chi$
(b) fictitious young's modulus $E_f(p, \chi)$

Fig. 6: Numerical examples: domains that violate overhang constraint and fictitious young's modulus.

5. 最適化問題の定式化と数値解析アルゴリズム

5.1. 最適化問題の定式化

第 4 章で定式化した連成型仮想的物理モデルに基づき, 剛性最大化問題を考える. 目的関数は第 2 章で定式化された式 (10) と同様である. また, 固定設計領域を D , 固定設計領域の外部に十分な幅を持たせた非設計領域を D_N とする. 固定設計領域 D に対して境界 Γ_t に静的な表面力 \mathbf{t} を加え, 境界 Γ_u で変位 \mathbf{u} を 0 として完全拘束する. Γ_u 及び Γ_t の位置は最適化過程で変更されないものとし, それ以外の境界は生成及び消滅を繰り返すものとする. これらの境界条件のもと, 全体の体積が閾値 V_{\max} を超えないように体積制約 G_v を課

す。このとき、制約条件は次式となる。

$$\begin{cases} G_v(\chi(\phi)) = \int_{\Omega} \chi(\phi) d\Omega - V_{\max} \leq 0 \\ -\nabla \cdot (a_s \nabla s_i - \mathbf{e}_i \chi(\phi)) + (1 - \chi(\phi)) s_i = 0 & \text{in } D_A \\ s_i = 0 & \text{on } \partial D_N \\ -\nabla \cdot (a_p \nabla p) + p = g(\mathbf{s})(1 - \chi(\phi))^2 & \text{in } D_A \\ p = 0 & \text{on } \partial D_N \\ -\nabla \cdot \sigma_{ij}(\mathbf{u}, p, \phi) = 0 & \text{in } \Omega \\ \mathbf{u} = \mathbf{0} & \text{on } \Gamma_u \\ \sigma_{ij} n_j = t_i & \text{on } \Gamma_t \\ \sigma_{ij} n_j = 0 & \text{on } \Gamma_N \end{cases} \quad (20)$$

ただし、 $D_A = D \cup D_N$ 、 $\Gamma_N = \partial D \setminus (\Gamma_t \cup \Gamma_u)$ である。また、応力テンソル $\sigma_{ij}(\mathbf{u}, p, \phi)$ はひずみテンソル $\epsilon_{ij}(\mathbf{u})$ 及び弾性テンソルは $C_{ijkl}(p, \phi)$ を用いて以下のように定義される。

$$\epsilon_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (21)$$

$$C_{ijkl}(p, \phi) = E_t(p, \phi) \left(\frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{1}{2(1+\nu)} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \right) \quad (22)$$

$$E_t(p, \phi) = E \left(1 - \frac{2}{\pi} \arctan(\gamma p \chi(\phi)) \right) \quad (23)$$

$$\sigma_{ij}(\mathbf{u}, p, \phi) = C_{ijkl}(p, \phi) \epsilon_{ij}(\mathbf{u}) \quad (24)$$

ただし、 E は元々の材料のヤング率であり、 ν はポアソン比である。

5.2. 変位場の近似解法

最適化の過程で構造領域 Ω は変化し続けるため、最適化過程のステップごとに有限要素メッシュを再定義する必要がある。しかしメッシュ再定義には膨大な計算コストがかかるため、空洞領域 $D \setminus \Omega$ では相対的に小さい弾性テンソルを持つ構造材料であると仮定する⁽¹⁴⁾。このとき、構造領域と空洞領域の境界を滑らかな分布にするヘビサイド関数 \mathcal{H} を用いて、固定設計領域に対して拡張された弾性テンソル \tilde{C}_{ijkl} は以下のように定義される。

$$\tilde{C}_{ijkl} = \{(1-d)\mathcal{H}(\phi, \epsilon_u) + d\} C_{ijkl} \quad (25)$$

$$\mathcal{H}(\phi, \epsilon_u) =$$

$$\begin{cases} 0 & \text{if } \phi < \epsilon_u \\ \frac{1}{2} + \left(\frac{15}{16} \frac{\phi}{\epsilon_u} - \frac{5}{8} \left(\frac{\phi}{\epsilon_u} \right)^3 + \frac{3}{16} \left(\frac{\phi}{\epsilon_u} \right)^5 \right) & \text{if } \phi \in [-\epsilon_u, \epsilon_u] \\ 1 & \text{if } \phi > \epsilon_u \end{cases} \quad (26)$$

ただし、 $\epsilon_u \in \mathbb{R}^+$ は、ヘビサイド関数の遷移幅を表すパラメータであり、 d は構造領域のヤング率に対する空洞領域の相対的な値である。遷移幅を設ける場合、計算の初期段階で一部グレースケールとなる箇所が生まれる。しかし、今回の問題設定では、一時的なグレースケールは許容でき最終的に明確な境界線を持つ構造が得られるため、近似解法を用いる。

5.3. 感度解析

続いて、随伴変数法に基づいた感度解析の結果を示す。平均コンプライアンスを目的関数とした剛性最大化問題は自己

随伴問題であり、変位 \mathbf{u} と対応する随伴変数 \mathbf{v} は一致する。また、拡散場 p における随伴変数を λ_p とすると、随伴方程式は以下の式となる。

$$\begin{cases} -a_p \nabla^2 \lambda_p + \lambda_p = -\frac{\partial \sigma_{ij}(\mathbf{u}, p, \phi)}{\partial p} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} & \text{in } D_A \\ \lambda_p = 0 & \text{on } \partial D_N \end{cases} \quad (27)$$

随伴変数 λ_p を用いて、仮想的物理モデル \mathbf{s} の随伴変数 λ_s は以下の方程式により導かれる。

$$\begin{cases} -a_s \nabla^2 \lambda_{s_i} + (1 - \chi(\phi)) \lambda_{s_i} = \lambda_p \frac{\partial g(\mathbf{s})}{\partial s_i} (1 - \chi(\phi))^2 & \text{in } D_A \\ \lambda_{s_i} = 0 & \text{on } \partial D_N \end{cases} \quad (28)$$

以上の設計変数及び随伴変数を用いて、連成型仮想的物理モデルにおける設計感度は以下のように導出される。

$$J' = \left(C_{ijkl}(p, \phi) \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial C_{ijkl}(p, \phi)}{\partial \phi} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + 2(1 - \chi(\phi)) \lambda_p g(\mathbf{s}) - \mathbf{e}_i \nabla \lambda_{s_i} - s_i \lambda_{s_i} \right) \chi(\phi) \quad (29)$$

式 (29) の第一項及び第二項は弾性方程式を記述した力学モデルに基づく設計感度であり、第四項及び第五項は仮想的物理モデルに基づく設計感度である。連成型仮想的物理モデルによって二つのモデルを連成することにより、力学モデル内の弾性テンソル $C_{ijkl}(p, \phi)$ が仮想的物理モデルの影響を受け、各モデル間の相互作用が起きる。さらに、式 (29) の第三項が新たな設計感度として導出され、この項は二つのモデルの連動性を向上させる意味合いを持つ。従って、提案する連成型仮想的モデルにより、変位場に関する設計感度においても、幾何学的制約条件の影響が入ることで、目的関数と制約条件の両者への寄与を考慮しながら形状更新されることが確認できる。

5.4. 最適化アルゴリズム

最適化アルゴリズムを導出する。体積制約に関しては拡張ラグランジュ法を用いて考慮する。体積制約を踏まえたトポロジー最適化の全体のアルゴリズムは以下のような手順となる。

step 0: 設計変数の設定

step 1: 支配方程式の計算 (式 (20))

step 2: 目的関数の算出 (式 (10)), 収束していれば終了

step 3: 随伴方程式の計算 (式 (27), (28))

step 4: 設計感度の算出 (式 (29))

step 5: 体積制約におけるラグランジュ変数の更新

step 6: レベルセット関数の更新 (式 (5))

step 7: step1 に戻る

6. 数値解析例

数値解析例として、体積制約を課した二次元の剛性最大化問題を有限要素法により解析し妥当性を検証する。具体的な

問題設定として図7のような固定設計領域 D 、及び非設計領域 D_N を考える。また、ヤング率を 210GPa、ポアソン比を 0.3 とし、等方性線形弾性体であると仮定する。境界 Γ_u で完全拘束し、右境界中央の Γ_t に表面力 $\mathbf{t} = [0, -1]^T$ を加える。積層方向は y 軸の正の方向とした。今回の数値例では最小オーバーハング角 θ を 45° とし、面積の上限值 V_{\max} を固定設計領域の面積の 50% とする。

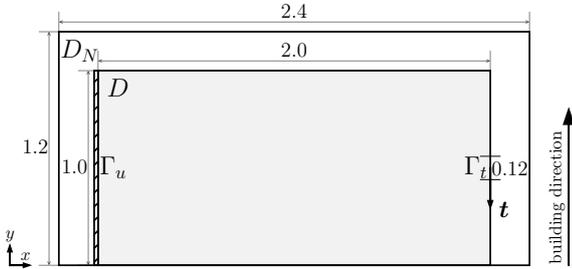


Fig. 7: Design domain and problem settings.

レベルセット関数の更新は、式 (5) を仮想的な時間 t に対して離散化して行う。各ステップごとの時間差分 Δt は $\Delta t = 0.5$ とした。加えて、式 (5) を計算する際に境界 Γ_t に $\phi = 1$ の境界条件を課す。これにより、荷重が負荷される境界 Γ_t は設計対象外とし、物体領域であることを表現する。また、式 (5) の他のパラメータをそれぞれ $K = 1.0$, $C = 0.7$, $\tau = 3.0 \times 10^{-4}$ と設定した。変位場の近似解法におけるパラメータは $d = 1.0 \times 10^{-4}$, $\epsilon_u = 0.5$ とした。式 (11) における拡散係数は $a_s = 3.0 \times 10^{-4}$ とし、式 (18) における拡散係数は $a_p = 0.10$ とした。近似的な制約違反境界の検出式 $g_1(\mathbf{s})(1 - \chi)^2$ 及び平均曲率の検出式 $g_2(\mathbf{s})$ において、それぞれに用いられる近似ランプ関数のパラメータ ϵ_r を 1.0×10^{-9} , 1.5 とした。加えて、 $\epsilon_s = 1.0 \times 10^{-6}$, $\epsilon_{sn} = 1.0 \times 10^{-6}$ とし、平均曲率の考慮する度合い β を $\beta = 0.1$ とした。以上のパラメータのもと、前章のアルゴリズムに基づいて解析を行った。

6.1. オーバーハング制約なしの解析結果

ヤング率を下げる度合い γ を零に設定し、オーバーハング制約を考慮せずに解析を行う。500 回ステップを回した結果図8のような構造領域 $\mathcal{H}(\phi, \epsilon_u)$ が得られた。



Fig. 8: The structure domain ($\mathcal{H}(\phi, \epsilon_u)$) without overhang constraint after 500 steps.

図8からオーバーハング制約なしで得られた最適形状には、オーバーハング角が最小オーバーハング角 45° を大きく超過している箇所が含まれている。故にオーバーハング制約は満たされていない。

6.2. オーバーハング制約ありの解析結果

続いて、 $\gamma = 350$ に設定して、オーバーハング制約を考慮した解析を行う。解析した結果、各ステップごとの構造領域 $\mathcal{H}(\phi, \epsilon_u)$ の変化は図9のようになった。また、反復計算を 500 回実施した場合に得られた構造領域 $\mathcal{H}(\phi, \epsilon_u)$ は図10のようになった。図9と図10から、500 ステップ後の最終的な形状は、反復回数 45 回の場合のときの形状とほとんど変わらず収束している。また、構造領域の全境界のオーバーハング角が最小オーバーハング角 45° よりも小さくなる形状が得られた。

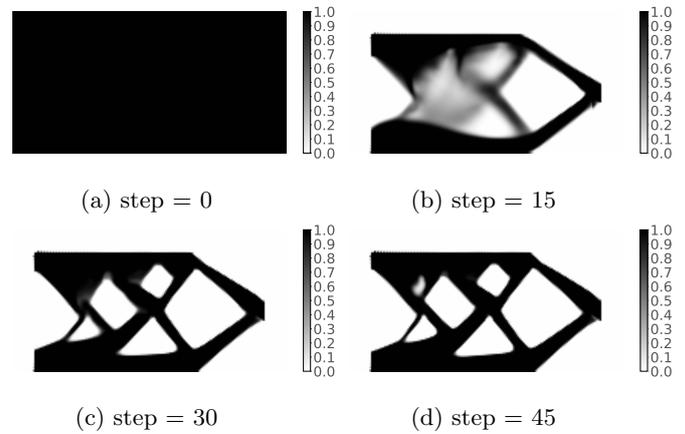


Fig. 9: Change in the structure domains ($\mathcal{H}(\phi, \epsilon_u)$) with overhang constraint for each step.



Fig. 10: The structure domain ($\mathcal{H}(\phi, \epsilon_u)$) with overhang constraint after 500 steps.

6.3. オーバーハング制約の有無による収束性の比較

各ステップにおけるオーバーハング制約ありの場合となしの場合の平均コンプライアンスの変化及び体積の変化をそれぞれ図11、図12に示す。図11より、オーバーハング制約により生じる設計感度は平均コンプライアンス最小化に寄与しないため、オーバーハング制約ありの場合にはなしの場合に比べて平均コンプライアンスが大きいが、大幅に悪化してはいない。また、図11及び図12において平均コンプライアンス及び体積の各ステップごとの変化から、オーバーハング

制約の有無によって収束性に大差がないことが確認できた。以上より、本手法の妥当性が検証できた。

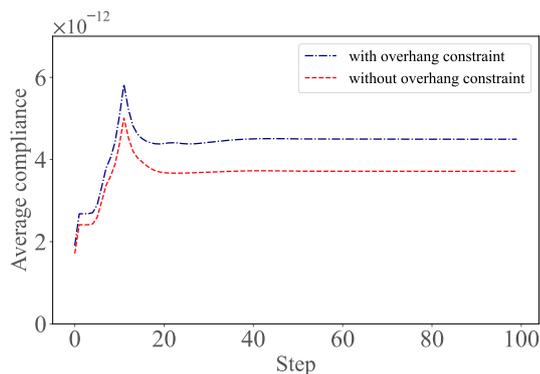


Fig. 11: Comparison of average compliance with and without overhang constraint for each step.

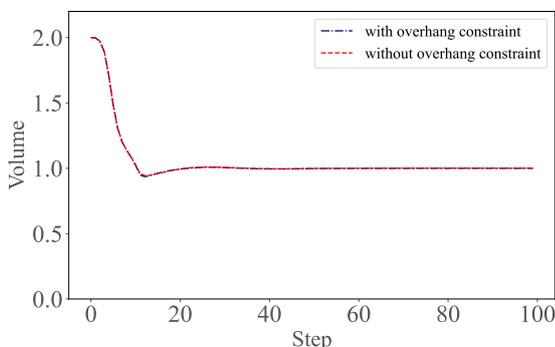


Fig. 12: Comparison of volume with and without overhang constraint for each step.

7. 結言

本研究では仮想的物理モデルと力学モデルを強連成させて収束性を改善する連成型仮想的物理モデルを新たに提案した。また、一例としてオーバーハング制約付きの剛性最大化問題に本モデルを適応し、定式化、感度設計及び妥当性の検証を行った。以下に結果をまとめる。

1. 製造工程などを考慮した幾何学的制約を記述する仮想的物理モデルと、物理現象を記述する力学モデルを連動的に作用させる連成型仮想的物理モデルの考え方を提案した。
2. 幾何学的特徴を捉える仮想的物理モデルに基づいてオーバーハング制約の定式化を行った後、剛性最大化問題を例に連成型仮想的物理モデルを適応した定式化を行った。
3. 具体的な問題設定に対して、最適化問題の定式化及び随伴変数法に基づく感度設計を行い、二つのモデルの連動性について述べた。
4. 数値解析例として、二次元の等方性線形弾性体における平均コンプライアンス最小化問題を考え、本研究で提案した手法の妥当性を検証した。

なお、連成型仮想的物理モデルは目的関数と材料定数の関係性が明確である場合に有用な手法であることを注記する。

8. 謝辞

本研究の一部は、国立研究開発法人新エネルギー・産業技術総合開発機構 (NEDO) の官民による若手研究者発掘支援事業 (JPNP20004) の支援を受けました。ここに記して感謝します。

参考文献

- (1) Dbouk, T.: A review about the engineering design of optimal heat transfer systems using topology optimization, *Applied Thermal Engineering*, **112**(2018), pp. 841–854.
- (2) Dilgen, C. B., Dilgen, S. B., Aage, N., and Jensen, J. S.: Topology optimization of acoustic mechanical interaction problems: a comparative review, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, **60.2**(2019), pp. 779–801.
- (3) Leary, M., Merli, L., Torti, F., Mazur, M., and Brandt, M.: Optimal topology for additive manufacture: A method for enabling additive manufacture of support-free optimal structures, *Materials & Design*, **63**(2014), pp. 678–690.
- (4) Gaynor, A. T., and Guest, J. K.: Topology optimization considering overhang constraints: Eliminating sacrificial support material in additive manufacturing through design, *Structural and Multidisciplinary Optimization* **54.5**(2016), pp. 1157–1172.
- (5) Langelaar, M.: Topology optimization of 3D self-supporting structures for additive manufacturing, *Additive manufacturing* **12**(2016), pp. 60–70.
- (6) Allaire, G., Dapogny, C., Estevez, R., Faure, A., and Michailidis, G.: Structural optimization under overhang constraints imposed by additive manufacturing technologies, *Journal of Computational Physics*, **351**(2017), pp. 295–328.
- (7) Wang, Y., Gao, J., and Kang, Z.: Level set-based topology optimization with overhang constraint: Towards support-free additive manufacturing, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **339**(2018), pp. 591–614.
- (8) Yamada, T., Geometric shape features extraction using a steady state partial differential equation system, *Journal of Computational Design and Engineering*, Volume **6**, Issue **4**, (2019), pp. 647–656.
- (9) 山田崇恭, 正宗淳, 寺本央, 長谷部高広, 黒田紘敏: 幾何学的特徴量に対する偏微分方程式系に基づく幾何学的特徴制約付きトポロジー最適化 (積層造形における幾何

学的特異点を考慮したオーバーハング制約法), 日本機械学会論文集, **85.877**(2019), 19–00129.

- (10) Sato, Y., Yamada, T., Izui, K., and Nishiwaki, S.: Manufacturability evaluation for molded parts using fictitious physical models, and its application in topology optimization, *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, **92**(2017), pp. 1391–1409.
- (11) 酒井虹太, 野口悠暉, 山田崇恭: 幾何学的特徴量に対する偏微分方程式を用いた型成形製造制約の数値モデルとトポロジー最適化への展開, 日本計算工学会論文集, **2021**(2021) 20210018–20210018.
- (12) Yamada, T., and Noguchi, Y.: Topology optimization with a closed cavity exclusion constraint for additive manufacturing based on the fictitious physical model approach, *Additive Manufacturing*, **52**(2022), 102630.
- (13) Yamada, T., Izui, K., Nishiwaki, S., and Takezawa, A.: A topology optimization method based on the level set method incorporating a fictitious interface energy, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **199.45**(2010), pp. 2876–2891.
- (14) Allaire, G., Jouve, F., and Toader, A. M.: Structural optimization using sensitivity analysis and a level-set method, *Journal of Computational Physics*, **194.1**(2004), pp. 363–393.

