

## 有限長スラブ軌道の効率的分散解析法

## AN EFFICIENT DISPERSION ANALYSIS METHOD FOR A PERIODIC SLAB TRACK

塚本 夢菜<sup>1)</sup>, 阿部 和久<sup>2)</sup>, 紅露 一寛<sup>3)</sup>

Yumena TSUKAMOTO, Kazuhisa ABE and Kazuhiro KORO

1) 新潟大学大学院 (〒 950-2181 新潟市西区五十嵐 2 の町 8050 番地, E-mail:f22e041h@mail.cc.niigata-u.ac.jp)

2) 新潟大学工学部 (〒 950-2181 新潟市西区五十嵐 2 の町 8050 番地, E-mail:abe@eng.niigata-u.ac.jp)

3) 新潟大学工学部 (〒 950-2181 新潟市西区五十嵐 2 の町 8050 番地, E-mail:kouro@eng.niigata-u.ac.jp)

This paper presents an efficient dispersion analysis method for a railway track supported by discontinuous slabs. Reduction of the computational effort is realized by replacing the discontinuous slabs with a continuous one. The discontinuity is represented by nodal forces acting on the nodes at slab ends. This problem is solved by the aid of Floquet transformation with respect to the periodicity of sleeper spacing. The dispersion analysis is then reduced to a nonlinear eigenvalue problem of a matrix which gives the relationship between the external and the internal nodal forces at slab ends. Through numerical examples, efficiency of the developed method and influence of the slab length on the dispersion curves are discussed.

**Key Words:** rail-slab interaction, under-slab sheet, sleeper spacing periodicity, Floquet transformation

## 1. はじめに

地下鉄や高速鉄道では、レールを支持する構造としてコンクリートスラブが多用されている。なお、スラブ下の緩衝材には、主にセメントアスファルト (CA) モルタルが用いられている。この場合、スラブの支持剛性は比較的高く、列車走行に伴う振動の低減効果は限定的となる。これに対し、スラブをバネ等で支持するフローティングスラブ<sup>(1)</sup>や、低剛性ウレタンマットで支持する防振マット工法<sup>(2)</sup>などの振動低減策も、近年国内外で採用される様になってきている。

軌道の防振対策におけるこれらの工法や支持剛性の検討に当り、軌道系の卓越周波数や振動・波動モードの把握などが重要である。そのためには、軌道内に発生し得る波動モードの波数-周波数空間における分布性状を表す分散曲線が有用となる。一般にレールはまくらぎ等により等間隔に支持されているため、軌道はその支持間隔(まくらぎ間隔)の周期性を持つ。このような周期場内を伝播する波動モードは、周期構造の最小単位である 1 ユニットセルの問題に帰着して解くことができる<sup>(3)</sup>。Gupta & Degrande<sup>(1)</sup>は、フローティングスラブを用いた地下鉄軌道を対象に、その動特性について検討している。なお、無限長連続スラブの分散曲線は、まくらぎ間隔 (0.6m) を 1 ユニットとした解析で求めることができるが、有限長スラブ軌道の場合はスラブ長 (6m) を 1 周期と

して解析する必要がある。また、Sheng ら<sup>(4)</sup>は、CA モルタルで支持された有限長 (6.5m) スラブ軌道を対象に、その動特性を調べている。文献 (4) では無数に配置されたスラブと無限長レールとの連成問題を直接的に定式化している。その下で得られる行列を対象に、波数-周波数平面全域で行列式の値を求め、そのゼロ点分布の様子から分散曲線を得ている。しかし、比較的高い周波数域における分散曲線が不鮮明で、その分布が判別しづらくなっている。

阿部ら<sup>(2)</sup>は、防振マット工法を用いた地下鉄軌道(防振マット軌道)を対象に、定点加振応答解を求めた。なお当該軌道のスラブ長は 30m 程と長いため、所定の減衰設定下で、それを無限長スラブで近似した。しかし分散曲線を求める場合、無減衰系が対象となる。そのため、スラブの長短に関わらず防振マット軌道の分散曲線は、スラブ端部からの反射波の影響により、無限長スラブのそれと本質的に異なるものになると考えられる。

本研究では、有限長スラブの防振マット軌道を対象に分散曲線を求め、当該軌道の基本振動特性について調べる。ただし、軌道系の周期長が約 30m と長くなるため、前述の様な従来法を用いる場合、1 ユニットセルの長尺化による計算負荷の増大が懸念される。そこで、2 次元周期場を対象に提案された効率的分散解析法<sup>(5)</sup>の軌道系への適用を試みる。具体的には、有限長スラブを無限長スラブに置き換え、スラブ

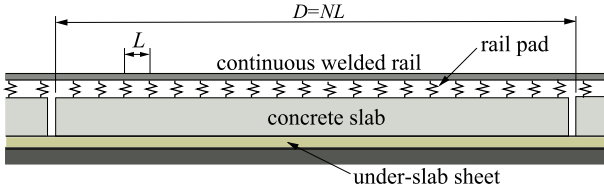


Fig. 1 Track with discontinuous slabs supported by under-slab sheet

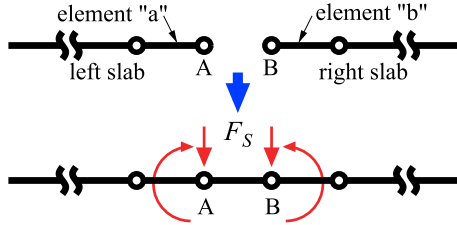


Fig. 2 Replacement with continuous slab

端からの反射波を等価な加振力で表現する．無限長スラブ軌道であれば，まくらぎ間隔をその周期長として設定できる．当該問題にまくらぎ間隔に基づいた Floquet 変換<sup>(6, 7)</sup>を適用することで，まくらぎ 1 区間で与えられるユニットセルの加振問題に帰着して解くことが可能となり，解析領域を大幅に縮小できる．なお，本定式化における分散解析は，スラブ端の加振力と内部節点力との関係を与える行列に関する非線形固有値問題として与えられる．そこで鮮明な分散曲線を得るために，非線形固有値問題の数値解法である Block S-S 法<sup>(8)</sup>を適用する．解析例を通し，本手法の有効性や，スラブ長が分散特性に及ぼす影響などについて検討する．

## 2. 分散解析法

### 2.1. 対象とする軌道

本研究で対象とする防振マット軌道を Fig.1 に示す．レールは無限長とし，まくらぎ間隔  $L$  で軌道パッドを介してコンクリートスラブ上に直接離散支持されている直結軌道を考える．コンクリートスラブは有限長とし，隣接スラブ間のスリット（間隙）を含めて 1 区間の長さ  $D$  をまくらぎ間隔の整数倍で与え，その値を  $N$  とおく．また，当該スラブは防振マットで剛基礎上に連続支持されているものとする．この時，軌道は周期長  $D = NL$  の無限周期構造で与えられる．

本解析では，レールとスラブを Timoshenko ばりでモデル化する．また，軌道パッドは離散バネで，防振マットは連続支持バネで与える．

### 2.2. 効率的な分散解析法の概要

本研究は分散解析を目的としているので，円振動数  $\omega$  における定常波動場を対象とする．Fig.2 上図の様に，隣接する左右のスラブをモデル化したはり要素端の節点を，それぞれ A, B, それを節点に持つ端部要素をそれぞれ「要素 a」および「要素 b」と呼ぶこととする．なお実際の離散化では，Fig.1 の様にレールと連結した連成系を対象としている．本来は節点 A, B 間には隙間が存在しているので，それらの節

点力はゼロとなる．当該問題を，Fig.2 下図の様に，両節点間にもはり要素を設けた連続なスラブに置き換える．その下で，左右のスラブに対応する領域内の波動場が本来の有限長スラブのそれと一致する様に，A, B 点に一連の節点力ベクトル  $\{\mathbf{F}_S\}$  を設定したい．なお，Floquet 原理<sup>(9)</sup>より，本定常波動場における加振力  $\{\mathbf{F}_S\}$  は次の条件を満たす．

$$\{\mathbf{F}_S(x + D)\} = e^{-ikD} \{\mathbf{F}_S(x)\} \quad (1)$$

ここで， $x$  は軌道長手方向座標， $k$  は Floquet 波数である．

Fig.2 下図の加振問題において，節点 A, B に作用している節点力ベクトル  $\{\mathbf{F}_S\}$  による，要素 a の A 点および要素 b の B 点での内部節点力を並べたベクトルを  $\{\mathbf{F}_0\}$  とおく．これらの関係が次式で与えられているものとする．

$$[\mathbf{B}]\{\mathbf{F}_S\} = \{\mathbf{F}_0\} \quad (2)$$

なお，加振力は，式 (1) に従う様に全スラブ端に作用させている．行列  $[\mathbf{B}]$  の導出については後述する．

Fig.2 下図の加振問題が上図の有限長スラブの応答を再現しているものであるならば，A, B 点の内部節点力  $\{\mathbf{F}_0\}$  はゼロとなる．したがって，有限長スラブ軌道における波動モードの存在条件は次式で与えられる．

$$[\mathbf{B}]\{\mathbf{F}_S\} = \{\mathbf{0}\} \quad (3)$$

式 (3) は，円振動数  $\omega$  と Floquet 波数  $k$  に関する固有値問題を与える．当該固有値問題を解くことで有限長スラブ軌道の分散曲線を求めることができる．

### 2.3. 行列 $[\mathbf{B}]$ の導出

節点 A, B に対応する全スラブ端節点の加振力として，その何れか 1 成分にのみ単位調和加振力を与え，他の成分はゼロとしたものを設定する．なお，前述のとおりスラブを Timoshenko ばりでモデル化しているが，ここではたわみを 3 次 Hermite で，断面回転角を 2 次 Lagrange で補間する TIM7 要素<sup>(10)</sup>により離散化する．この場合，節点変位は，たわみ，たわみ角および断面回転角の 3 成分で与えられる．よって，節点力もそれらに対応する 3 成分から成り，スラブ端点 (A, B 点) 加振力は合計 6 成分で構成される．長さ  $D$  の各スラブ区間に対して， $x$  軸方向に順に番号  $n$ , ( $n \in \mathbb{Z}$ ) を付し，0 番区間における非ゼロ加振力成分  $P_0$  を 1 と設定すると，それに対応する  $n$  番区間の加振力成分  $P_n$  は，式 (1) より次式で与えられる．

$$P_n = e^{-iknD} \quad (4)$$

なお，時間因子  $e^{i\omega t}$  は省略している．

この加振問題を解き，節点 A, B における内部節点力 6 成分から成るベクトルを求める．6 つの加振力成分を式 (4) に従い順次設定して，同様に内部節点力ベクトルを求め，これらを縦ベクトル成分に持つ  $6 \times 6$  の行列  $[\mathbf{F}]$  を作成する．加振力ベクトルを縦ベクトル成分に持つ  $6 \times 6$  の行列を  $[\mathbf{P}]$  とおくと，式 (2) の関係より，次式が成り立つ．

$$[\mathbf{B}][\mathbf{P}] = [\mathbf{F}] \quad (5)$$

ここで,  $[\mathbf{P}]$  は 6 成分の内の一つを順次 1 に設定した縦ベクトルから構成されているので, 恒等行列を与える. したがって, 次式が成り立ち, 行列  $[\mathbf{B}]$  は  $[\mathbf{F}]$  で与えられることとなる.

$$[\mathbf{B}] = [\mathbf{F}] \quad (6)$$

以上より, 行列  $[\mathbf{B}]$  の導出は上述の加振問題に帰着する.

#### 2.4. 加振問題の求解

本加振問題は, スリットの無い無限長スラブ軌道が対象となるので, 当該構造の周期長はまくらぎ間隔  $L$  で与えられる. そこで, 次の長さ  $L$  に関する Floquet 変換<sup>(6, 7)</sup> を適用して解く.

$$\tilde{u}(x, \kappa) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(x+nL)e^{in\kappa L} \quad (7)$$

ここで,  $u$  は軌道変位,  $\tilde{u}$  はその Floquet 変換,  $\kappa$  は  $0 \leq \kappa < 2\pi/L$  で定義された Floquet 波数である.

式 (7) の  $\tilde{u}$  は次の周期条件を満たす.

$$\tilde{u}(x+L, \kappa) = e^{-i\kappa L} \tilde{u}(x, \kappa) \quad (8)$$

なお, 逆 Floquet 変換は次式で与えられる.

$$u(x+nL) = \frac{L}{2\pi} \int_0^{2\pi/L} \tilde{u}(x, \kappa) e^{-in\kappa L} d\kappa \quad (9)$$

本問題の加振力は式 (1) を満たしているので, 応答解  $u$  も次式を満たす.

$$u(x+nD) = e^{-in\kappa D} u(x) \quad (10)$$

式 (10) の関係を式 (7) の  $u(x+nL)$  に適用すると,  $\tilde{u}(x, \kappa)$  は次式で与えられることとなる.

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x, \kappa) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(x+nL)e^{in\kappa L} \\ &= \dots \\ &\quad + u(x) + u(x+L)e^{i\kappa L} + \\ &\quad \dots + u(x+(N-1)L)e^{i\kappa(N-1)L} \\ &\quad + u(x+D)e^{i\kappa D} + u(x+D+L)e^{i\kappa D}e^{i\kappa L} + \dots \\ &\quad + u(x+2D)e^{i\kappa 2D} + u(x+2D+L)e^{i\kappa 2D}e^{i\kappa L} + \dots \\ &\quad + \dots \\ &= \{ \dots u(x) + u(x+L)e^{i\kappa L} + u(x+2L)e^{i\kappa 2L} \dots \} \\ &\quad \times \{ \dots + 1 + e^{i(\kappa-k)D} + e^{i(\kappa-k)2D} + \dots \} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} u(x+nL)e^{in\kappa L} \times \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{i(\kappa-k)mD} \end{aligned} \quad (11)$$

ここで, 次式が成り立つ.

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{i(\kappa-k)mD} = \frac{2\pi}{D} \delta_{\frac{2\pi}{D}}(\kappa-k) \quad (12)$$

なお,  $\delta_{\frac{2\pi}{D}}$  は,  $2\pi/D$  を周期とした周期デルタ関数である.

式 (11), 式 (12) より次式を得る.

$$\tilde{u}(x, \kappa) = \frac{2\pi}{D} \delta_{\frac{2\pi}{D}}(\kappa-k) \hat{u}(x, \kappa) \quad (13)$$

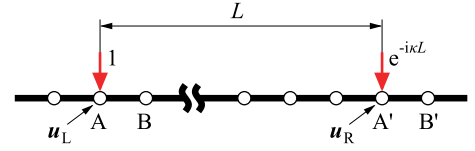


Fig. 3 Harmonic loading of unit cell

ここで  $\hat{u}(x, \kappa)$  は次式で定義する.

$$\hat{u}(x, \kappa) = \sum_{n=0}^{N-1} u(x+nL)e^{i\kappa nL} \quad (14)$$

なお, 式 (8) より,  $\hat{u}$  は次式を満たす.

$$\hat{u}(x+L, \kappa) = e^{-i\kappa L} \hat{u}(x, \kappa) \quad (15)$$

$\hat{u}$  は, 長さ  $L$  のユニットセル両端に式 (15) の周期条件を課し, 当該ユニットセル内の節点 A, B に相当する節点に単位加振力を順次設定して解くことで得られる.  $u$  は  $\hat{u}$  の逆 Floquet 変換で求める. その際に式 (13) の関係を用いると, 次式を得る.

$$\begin{aligned} u(x+mL) &= \frac{L}{2\pi} \int_0^{2\pi/L} \tilde{u}(x, \kappa) e^{-i\kappa mL} d\kappa \\ &= \frac{L}{2\pi} \int_0^{2\pi/L} \frac{2\pi}{D} \delta_{\frac{2\pi}{D}}(\kappa-k) \hat{u}(x, \kappa) e^{-i\kappa mL} d\kappa \end{aligned} \quad (16)$$

ここで,  $\delta_{\frac{2\pi}{D}}(\kappa-k)$  は  $\kappa = k + 2n\pi/D (n=0, \dots, N-1)$  に特異点を持つ. よって, 式 (16) はさらに次式の様になる.

$$\begin{aligned} u(x+mL) &= \frac{L}{D} \sum_{n=0}^{N-1} \hat{u}(x, k + n\frac{2\pi}{D}) e^{-imL(k+n\frac{2\pi}{D})} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \hat{u}(x, k + \frac{n}{N} \frac{2\pi}{L}) e^{-i(k+\frac{n}{N} \frac{2\pi}{L})mL} \end{aligned} \quad (17)$$

式 (17) より,  $u(x+mL)$  は長さ  $L$  のユニットセルの加振問題を  $\kappa = k + 2n\pi/LN (n=0, \dots, N-1)$  について解き, それらの解を重ね合わせることで求めることができる.

#### 2.5. ユニットセルの加振解析

行列  $[\mathbf{B}]$  作成のための加振問題の解は, 式 (17) に示したとおり, 最終的にはまくらぎ間隔  $L$  で与えられるユニットセルの加振問題を  $N$  回解くことで求めることができる. ここでは, その具体的問題設定と定式化について述べる.

式 (8) の周期条件の下, Fig.3 に示すユニットセルの調和加振問題を設定する. 以下の説明では Fig.3 の様に, Fig.2 の節点 A をユニット左端に置いている場合を対象としているが, 本来は長さ  $L$  の 1 ユニット内における節点 A の位置は任意である. なお, Fig.3 では, A 点を加振する場合を例示している. 以下では, その場合について述べる.

当該ユニットセルの運動方程式は次式で与えられる.

$$[\delta \tilde{\mathbf{u}}]^T \begin{bmatrix} \mathbf{K}'_{LL} & \mathbf{K}'_{LM} & \mathbf{K}'_{LR} \\ \mathbf{K}'_{ML} & \mathbf{K}'_{MM} & \mathbf{K}'_{MR} \\ \mathbf{K}'_{RL} & \mathbf{K}'_{RM} & \mathbf{K}'_{RR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_L \\ \hat{\mathbf{u}}_M \\ \hat{\mathbf{u}}_R \end{bmatrix} = [\delta \tilde{\mathbf{u}}]^T \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{F}}_L \\ \mathbf{0} \\ \hat{\mathbf{F}}_R \end{bmatrix} \quad (18)$$

ここで、下付き添字の  $L, R, M$  は、それぞれ1ユニットセルの左端節点、右端節点、およびそれ以外の内部節点に関する成分を意味している。[ $\mathbf{K}'$ ] は、剛性行列 [ $\mathbf{K}$ ] と質量行列 [ $\mathbf{M}$ ] より次式により与えられる行列である。

$$[\mathbf{K}'] = [\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}] \quad (19)$$

また、 $\{\delta \hat{\mathbf{u}}\}$  は仮想節点変位ベクトル、 $(\cdot)$  は複素共役、 $[\cdot]^T$  は転置である。

式 (8) の周期条件より次式が成り立つ。

$$\hat{\mathbf{u}}_R = \hat{\mathbf{u}}_L e^{-i\kappa L}, \quad \delta \hat{\mathbf{u}}_R = \delta \hat{\mathbf{u}}_L e^{i\kappa L} \quad (20)$$

式 (8) を考慮すると、 $e^{i\kappa L} \hat{F}_R$  は Fig.3 の節点 A における左側要素節点力を与える。よって、単位加振力を受けているユニットセル左右端の内部節点力成分に対して、力のつり合い条件より次の関係式を得る。

$$\hat{F}_L + e^{i\kappa L} \hat{F}_R = 1 \quad (21)$$

式 (20), (21) を式 (18) に代入し、右端節点に関する項を消去すると、次の Hermite 行列に関する求解式を得る。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}'_{LL} + \mathbf{K}'_{LR} e^{-i\kappa L} + \mathbf{K}'_{RL} e^{i\kappa L} + \mathbf{K}'_{RR} & \mathbf{K}'_{LM} + \mathbf{K}'_{RM} e^{i\kappa L} \\ \mathbf{K}'_{ML} + \mathbf{K}'_{MR} e^{-i\kappa L} & \mathbf{K}'_{MM} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_L \\ \hat{\mathbf{u}}_M \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (22)$$

ただし、 $\{\mathbf{1}, \mathbf{0}\}$  は Fig.3 の節点 A, B の加振成分のみ 1 で他は全てゼロとなる節点力ベクトルである。

### 3. 解析結果

#### 3.1. 解析条件

有限長スラブ軌道の分散解析において、スラブ幅は 2.5m、スラブ厚は 0.4m とした。ただし、対称条件によりコンクリートスラブの幅は本来のスラブ幅の半分 (レール 1 本分) に設定した。スラブに関する他の解析条件を Table 1 に示す。ここで、 $\rho A$  は単位長さ当たりの質量、 $\rho I$  は単位長さ当たりの慣性モーメント、 $EI$  は曲げ剛性、 $GAK$  はせん断弾性係数  $G$  と断面積  $A$  およびせん断係数  $K$  の積である。また、レールは 60kg レールを対象とした。レールの諸条件を Table 2 に示す。

軌道パッドのバネ定数は 30MN/m、防振マットの単位面積当たりの動的等価剛性は 12.5MN/m<sup>3</sup> とした<sup>(2)</sup>。まくらぎ間隔は 0.6m とし、精度を確認の上、レールはまくらぎ 1 区間を 2 要素で、スラブは 10 要素で離散化した。その下で、Fig.2 上図の節点 A, B 間の間隔を 1 要素 (6cm) で与えた。

#### 3.2. 本手法の有効性の検討

提案手法の、有限長スラブ軌道の分散解析に対する有効性について検討する。なお、解析は Table 1, Table 2 の条件で行った。

分散解析に当り、Floquet 波数  $k$  を順次走査して、各  $k$  の下で式 (3) を円振動数  $\omega$  に関する固有値問題として設定し、

Table 1 Slab characteristics

$\rho A$	1200kg/m
$\rho I$	16.1kgm
$EI$	217MNm <sup>2</sup>
$GAK$	4.5GN

Table 2 Rail characteristics

$\rho A$	60.8kg/m
$\rho I$	0.242kgm
$EI$	6.37MNm <sup>2</sup>
$GAK$	209MN

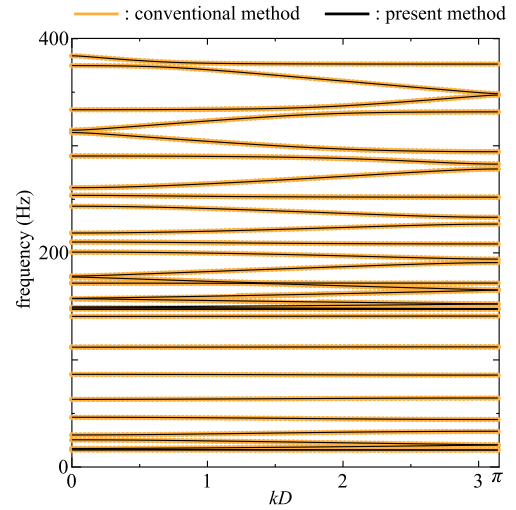


Fig. 4 Dispersion curves obtained by present method and conventional method ( $D=18\text{m}$ )

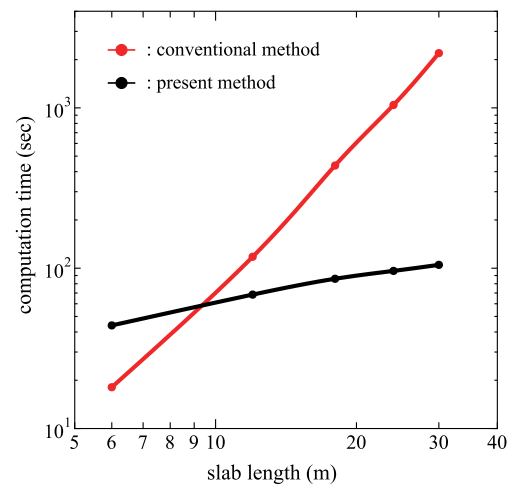


Fig. 5 Comparison of computation time spent for dispersion analysis by the present method with the conventional method

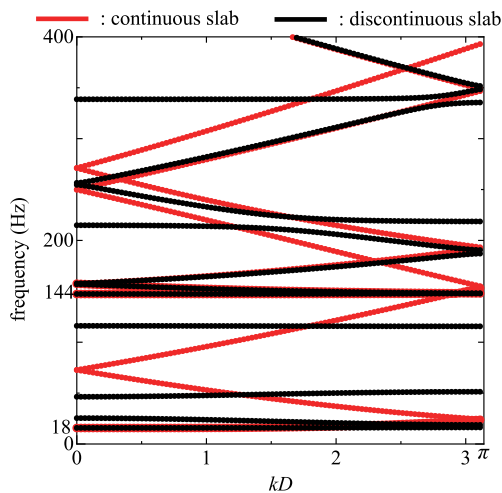


Fig. 6 Dispersion curves of continuous and discontinuous ( $D=6\text{m}$ ) slabs

それを Block S-S 法<sup>(8)</sup>を用いて解いた。なお、スラブ 1 区間を周期長とした従来法による場合、当該問題は  $\omega^2$  に関する Hermite 行列の標準的な線形固有値問題<sup>(3)</sup>として与えられるので、それを解いて分散曲線を求めた。

まず本手法の妥当性を確認する目的で、18m の有限長スラブ軌道を対象に、スラブ長を 1 ユニットとした従来法と、まくらぎ間隔  $L$  を 1 ユニットとした本手法とで分散曲線を求めた。その結果を Fig.4 に示す。この図には、従来法で求めた分散曲線をオレンジ色で、本手法で求めたものを黒で示した。両者はほぼ完全に一致しており、本手法の妥当性が確認できる。

続いて、スラブ長  $D$  を 6m から 30m まで変化させて、分散解析に要した計算時間を求めた。本手法と従来法とで比較を行った結果を Fig.5 に示す。スラブ長 6m の場合は、従来法の方が解析時間が短い結果となったものの、その 2 倍以上のスラブ長においては、提案法の方が計算時間が短くなっている。例えばスラブ長が 30m の場合、従来法では約 2200sec を要したのに対し、本手法では約 105sec となっており、20 倍以上の高速化が図られている。ちなみに、従来法では Householder 変換による行列の三重対角化を用いた固有値計算法を採用しており、計算時間は概ね自由度の 3 乗に比例している。一方、本手法の場合、式 (17) に示した様に計算時間はスラブ長  $D$  とまくらぎ間隔  $L$  との比  $N$  に概ね比例するため、Fig.5 に示した様に長尺なスラブ軌道の解析において特に有効となる。なお、従来法ではスラブ長  $D$  を 1 ユニットとしており本手法の  $N$  倍のサイズの問題を対象としているが、Block S-S 法の適用により計算時間をある程度短縮可能と考えられる。また、本手法で対象とする式 (3) の固有値問題は、スラブ長によらずそのサイズが常に  $6 \times 6$  と非常に小さく、この固有値問題の計算自体には殆ど時間を要しない点に特徴がある。

### 3.3. スラブ長が分散曲線に及ぼす影響

スラブ長の違いによる分散曲線の差異を確認するため、スラブ長 6m および 30m の 2 ケースについて分散解析を行っ

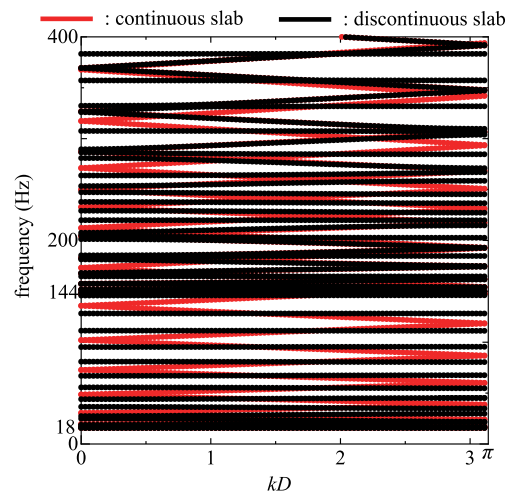


Fig. 7 Dispersion curves of continuous and discontinuous ( $D=30\text{m}$ ) slabs

た。これらに対して求めた分散曲線を、Fig.6 と Fig.7 にそれぞれ示す。なお両図には、比較のため連続スラブ軌道の分散曲線も赤線で示した。

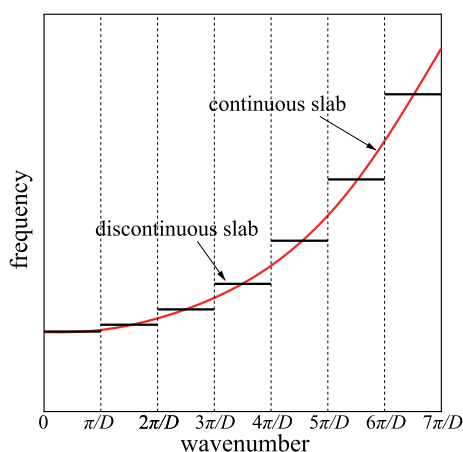
Fig.6 より、連続スラブ軌道の分散曲線が、約 18Hz から始まるものと、144Hz から始まるものの 2 種類から構成されている様子が窺える。前者は防振マットとスラブとから成るバネ・質点系の固有振動数に概ね一致し、後者は軌道パッドとレールから構成される系の固有振動数に一致していることを別途行った計算により確認した。このことから、これらの分散曲線が、それぞれスラブおよびレールが主体的に振動するモードに対応していることが推測できる。

一方、有限長スラブの分散曲線では、特に 144Hz 以下の周波数域において分散曲線が波数に依存せずほぼ一定の周波数に離散的に分布している。これは、前述のとおり当該周波数域のモードがスラブ主体のものであるため、レールを介した波動伝播の影響はごくわずかであり、有限長スラブの固有振動モードが支配的となることに起因しているものと考えられる。これに対し 144Hz 以上の周波数域では、スラブ主体の振動に加え、レール内を伝播する波動が支配的となるモードが混在しており、分散曲線が広い周波数域にわたり分布している。

スラブ長  $D=30\text{m}$  に対する Fig.7 の分散曲線においても、18Hz と 144Hz が各モードの下端周波数を与えている様子が確認できる。なお、赤線で示した無限長スラブの分散曲線は、本来 Fig.6 のそれと同じである。ただし、Fig.7 の横軸の範囲は  $0 \leq k \leq \pi/30(1/\text{m})$  であり、Fig.6 の分散曲線を  $k = \pi/30(1/\text{m})$  の間隔で折りたたんだ図が得られる。例えば、低周波数側から  $i$  番目の周波数域における分散モードを特徴付ける調和振動波形の波数を  $k_i$  と置くと、Floquet 波数  $k$  に対し次の関係が成り立つことが知られている<sup>(3)</sup>。

$$\begin{aligned} k_1 &= k, & k_2 &= -k + \frac{2\pi}{D}, & k_3 &= k + \frac{2\pi}{D}, \\ k_4 &= -k + \frac{4\pi}{D}, & k_5 &= k + \frac{4\pi}{D}, & \dots \end{aligned} \quad (23)$$





## 参考文献

Fig. 8 Schematic illustration of unfolding of dispersion curves for discontinuous slab track

そのため、 $D=30\text{m}$  に対する Fig.7 では、 $D=6\text{m}$  に対する Fig.6 より狭い周波数間隔で分散曲線が分布する。また、黒線で示した有限長スラブの分散曲線も、同程度の周波数間隔で分布している。なお、Fig.4( $D=18\text{m}$ ) との比較からも、スラブ長が長くなるにしたがって分散曲線の周波数間隔が狭くなる傾向が確認できる。

Fig.7 に示した  $144\text{Hz}$  以下のスラブ主体のモードでは、その分散曲線と無限長スラブの分散曲線とが  $kD = \pi/2$  付近で交差している。このことより、以下の様な傾向が推測できる。有限長スラブ軌道におけるスラブ振動主体の分散曲線は、前述のとおり、当該スラブの固有振動数に概ね対応して周波数方向に離散的に分布する。これを式 (23) に従い波数方向に展開すると、Fig.8 に示すイメージ図の様に、無限長スラブ軌道の分散曲線に対する区間一定近似が得られる。したがって、スラブ長  $D$  を長くしていくと、分散曲線は無限長スラブ軌道のそれに収束することが推測できる。

## 4. おわりに

まくらぎ間隔とスラブ長の 2 つの異なる周期長を持つ軌道の分散曲線を、前者の周期性を利用して効率的に求める手法を構成した。本手法と、スラブ長を 1 周期長とする従来法とで分散解析を実施した結果、両者は良好な一致を示し提案法の妥当性を確認することができた。また、本手法の計算量はスラブ長に対して概ね 1 次関数的に増加し、スラブ長が長い程、従来法に比べより短い時間で計算可能であることがわかった。さらに、無限長スラブ軌道と有限長スラブ軌道の分散曲線の比較より、スラブ長が長くなる程、有限長スラブ軌道の分散曲線が無限長スラブ軌道のそれに近づく傾向が認められた。

- (1) Gupta, S. and Degrande, G.: Modelling of continuous and discontinuous floating slab tracks in a tunnel using a periodic approach, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.329, pp. 1101-1125, 2010.
- (2) 阿部和久, 山田高也, 古田勝, 末原美智子, 紅露一寛: 地下鉄トンネル・地盤連成系の三次元加振応答解析, 土木学会論文集 A2 (応用力学), Vol.74, No.2 (応用力学論文集 Vol.21), pp. I.523-I.534, 2018.
- (3) 阿部和久, 古屋卓稔, 紅露一寛: まくらぎ支持された無限長レールの波動伝播解析, 応用力学論文集, Vol.10, pp. 1029-1036, 2007.
- (4) Sheng, X., Xiao, X., Li, Y. and Zhong, T.: Resonance and propagation characteristics of slab high-speed railway tracks used in China, Proc. of 12th International Workshop on Railway Noise, pp. 342-357, 2016.
- (5) 阿部和久, 笈拓哉, 紅露一寛: 等間隔に欠陥が存在する周期場を対象とした効率的分散解析手法, 土木学会論文集 A2 (応用力学), Vol.73, No.2 (応用力学論文集 Vol.20), pp. I.133-I.141, 2017.
- (6) Clouteau, D., Arnst, M., Al-Hussaini, T.M. and Degrande, G.: Freefield vibrations due to dynamic loading on a tunnel embedded in a stratified medium, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.283, pp. 173-199, 2005.
- (7) Clouteau, D., Elhabre, M.L. and Aubry, D.: Periodic BEM and FEM-BEM coupling, Application to seismic behaviour of very long structures, *Computational Mechanics*, 25, pp. 567-577, 2000.
- (8) Asakura, J., Sakurai, T., Tadano, H., Ikegami, T. and Kimura, K.: A numerical method for nonlinear eigenvalue problems using contour integrals, *JSIAM Letters*, Vol.1, pp. 52-55, 2009.
- (9) Brillouin, L.: Wave propagation in periodic structures, Dover Publications, New York, 1953.
- (10) Nickel, R.E. and Secor, G.A.: Convergence of consistently derived Timoshenko beam finite elements, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.5(2), pp. 243-253, 1972.