計算数理工学論文集 Vol. 22 (2022 年 12 月)，論文 No. 08-221216 JASCOME

Dirichlet-to-Neumann 有限要素法と Sakurai–Sugiura 法に基づく 3 次元音響導波路の複素固有値解析

COMPLEX EIGENVALUE ANALYSIS OF THREE-DIMENSIONAL ACOUSTIC WAVEGUIDES BASED ON A DIRICHLET-TO-NEUMANN FINITE ELEMENT METHOD AND SAKURAI–SUGIURA METHOD

松島　慶 [1)]，野口　悠暉 [2)]，山田　崇恭 [3)]

Kei MATSUSHIMA, Yuki NOGUCHI and Takayuki YAMADA

1) 東京大学大学院工学系研究科　(〒 113-8656　東京都文京区弥生 2-11-16,　E-mail: matsushima@mech.t.u-tokyo.ac.jp)
2) 東京大学大学院工学系研究科　(〒 113-8656　東京都文京区弥生 2-11-16,　E-mail: noguchi@mech.t.u-tokyo.ac.jp)
3) 東京大学大学院工学系研究科　(〒 113-8656　東京都文京区弥生 2-11-16,　E-mail: t.yamada@mech.t.u-tokyo.ac.jp)

In this paper, we propose a numerical method for calculating complex eigenvalues of semi-infinite acoustic waveguides based on a finite element method and the Dirichlet-to-Neumann (DtN) map. We first show that the DtN map is given by the transverse modal expansion in a homogeneous waveguide with an arbitrary cross section. Subsequently, the DtN map is incorporated into the variational equation of the Helmholtz equation, which yields a nonlinear eigenvalue problem in terms of the complex frequency. We solve this nonlinear eigenvalue problem using Sakurai–Sugiura method. Finally, we demonstrate some numerical examples to verify the proposed method.

Key Words : Complex Eigenvalue, Waveguide, Helmholtz Equation, Finite Element Method, Sakurai–Sugiura Method

1．緒言

電磁波・音波・弾性波などの波の伝搬・散乱の特性は，系の固有値（固有周波数）と密接に関係していることが知られている．例えば，エネルギーの損失・利得がない系（エルミート系）では時間調和を仮定して得られる周波数域での境界値問題の固有値はすべて実数であり，この周波数で境界値問題の一意可解性は失われる．これは物理現象の共鳴に対応し，固有値が実数であることは共鳴の Q 値と寿命が無限大であることを意味する．一方，非エルミート系，すなわち系に損失あるいは利得がある場合，一般に境界値問題の固有値は複素数となる．この固有値の虚部の大きさは共鳴の減衰あるいは発散の速さを表し，時間域における散乱問題の解の性質は固有値の複素平面内の分布に大きく依存することになる．

特に，非エルミート系の複素固有値と共鳴は近年注目を集めている分野である．例えば，非エルミート系では固有値と対応する固有モードが同時に重複し得ることが報告されており，このような特異な重複が生じるパラメータ空間上の点は例外点（非エルミート縮退点）と呼ばれる [1]．固有関数が完全正規直交系を成す通常のエルミート系では生じ得ない現象であり，非エルミート系特有の物理として近年多くの研究が進められている．

非エルミート系の代表として Parity-Time（PT）対称系が挙げられる [2]．PT 対称系とは，パリティ反転操作（空間座標反転）と時間反転操作（複素共役）の組み合わせに対して不変な系であり，損失と利得が空間的に対称に配置された系は PT 対称となる．PT 対称系は前述の例外点の他に，PT 相転移 [3]，coherent perfect absorption (CPA)/lasing [4]，非対称反射や一方向クローキング [5–8] などの多くの応用が考案されており，理論・応用の双方から近年多くの成果が報告されている．

波が伝搬する媒質に起因する損失のみならず，無限遠での放射によっても系のエルミート性は失われる．この種の開放系では，複素固有値は scattering pole あるいは quasinormal mode frequency とも呼ばれる [9]．多くの場合，非有界領域で放射する解は遠方で平面波や（球）Hankel 関数の和で展開することができ，これらが共鳴のエネルギーを無限遠に放射することで寿命が生じる．これに起因する複素固有値は同様

2022 年 10 月 27 日受付，2022 年 11 月 21 日受理

に例外点を示すことが 2 次元 Helmholtz 方程式 [10]，3 次元 Maxwell 方程式 [11] について調べられている．また，周期散乱や導波路など遠方での放射モードにカットオフがある場合，放射の存在に関わらず寿命が無限大の共鳴（複素固有値の虚部が厳密に零）が実現可能であり，このような共鳴モードは bound state in the continuum あるいは embedded/trapped mode と呼ばれる [12].

このような背景から，放射条件が課された定常振動場の固有値計算は重要である一方で，その数値解析は容易ではない．1 次元問題を除いて，実数周波数で用いられる Sommerfeld の放射条件は複素固有モードに対して成り立たないため，放射条件の近似として広く用いられる Robin 境界条件は固有値解析に使用できない [13].

境界積分方程式に基づく境界要素法は，この種の固有値問題の解法として有力であり，様々な外部問題の固有値解析に用いられている [14–17]．一方で，導波路や周期構造などの複雑な系では放射条件を満たす Green 関数の計算が一般に容易ではなく，複素周波数についての計算は特に注意を要する．

有限要素法を用いて複素固有値を計算する場合，主な方法として (1) Perfectly Matched Layer (PML) に基づく方法，(2) 無限要素を用いる方法，(3) Dirichlet-to-Neumannn (DtN) 写像に基づく方法の 3 つが挙げられる．(1) の PML は実装が容易であり，離散化して得られる代数固有値問題が線形になる利点があるが，PML に起因する偽の固有値が複素平面に多く混在し，その判別が困難となる問題がある [18]. (2) の無限要素に基づく方法は，放射場の基底の選び方に依って固有値問題が非線形になる場合 [19] や PML と同様の偽固有値が混在する場合があり [13]，また他と比較して実装は煩雑となる．(3) の DtN 写像に基づく方法は，離散化された固有値問題が非線形となり，係数行列の疎性が一部失われる欠点はあるが，実装が簡単であり，PML などと比較して偽固有値が現れにくい利点がある [18].

しかし，DtN 有限要素法は $\mathbb{R}^2$ や $\mathbb{R}^3$ に有界な散乱体が置かれた問題の複素固有値の計算に用いた例 [20–22] は報告されている一方，導波路問題に関しては散乱解析への適用に限られている [23, 24].

そこで，本研究は DtN 写像に基づく有限要素法と，非線形固有値解析アルゴリズムである Sakurai–Sugiura 法 (SSM) [25] を組み合わせて 3 次元導波路で定義される Helmholtz 方程式の複素固有値を計算する手法を提案する．まず，Neumann 境界条件が課された任意形状の断面の導波路を伝わる波のモード展開について述べ，これを用いて DtN 写像を表現する．この DtN 写像を Helmholtz 方程式の弱形式と組み合わせて離散化することで，外部問題の有限要素法を構成する．得られる連立一次方程式は周波数に関する非線形項を含むため，SSM を用いて非線形固有値問題を一般化固有値問題に置き換えて数値的に解く．数値例として，まず解析解が求まる問題に対して提案法による固有値解析を実行し，その誤差を検証する．その後，複雑形状の導波路構造を対象として

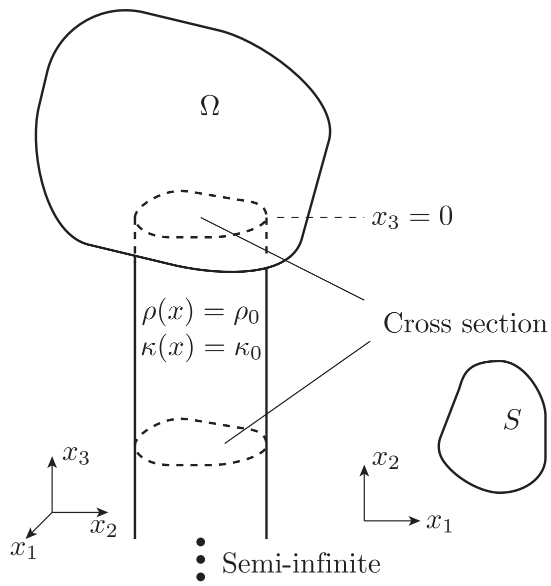

Fig. 1 Semi-infinite acoustic waveguide with cross section S.

複素固有値分布を計算し，bound state in the continuum や CPA-laser モードなどの特異な固有モードが現れることを確認する．

2. 3 次元音響導波路

2.1. 境界値問題

Fig. 1 に示すように，半無限的に伸びる導波路の終端に有界領域が接続した構造を考える．すなわち，断面を $S \subset \mathbb{R}^2$ とする半無限導波路を $\Omega_\infty = S \times (-\infty, 0)$，終端の領域を $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ として，Ω と Ω_∞ を界面 $\tilde{S} = \{(x, 0)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x \in S\}$ で接続した領域について考える．ここで，u に関する次の境界値問題を解く．

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho} \nabla u \right) + \frac{\omega^2}{\kappa} u = -g \quad \text{in } \Omega \tag{1}$$

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho_0} \nabla u \right) + \frac{\omega^2}{\kappa_0} u = 0 \quad \text{in } S \times (-\infty, 0) \tag{2}$$

$$u|_+ = u|_- \quad \text{on } \tilde{S} \tag{3}$$

$$n \cdot \nabla u|_+ = n \cdot \nabla u|_- \quad \text{on } \tilde{S} \tag{4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{on } \partial(\Omega \cup \Omega_\infty \cup \tilde{S}) \tag{5}$$

ここに，$\omega \in \mathbb{C}$ は角周波数，$\rho(x)$ は質量密度分布，$\kappa(x)$ は体積弾性率分布，$g(x)$ は外力を表す．質量密度と体積弾性率は導波路内で一様であり，それぞれ $\rho_0 > 0$ と $\kappa_0 > 0$ である．また，$\frac{\partial}{\partial n} = n \cdot \nabla$ は外向き単位法線ベクトル n で定義される法線方向微分である．さらに，導波路と Ω の界面 $\tilde{S}$ に関して $\tilde{S} \subset \partial\Omega$ を仮定する．質量密度と体積弾性率は $\tilde{S}$ を跨いで連続であり，$\rho|_+ = \rho_0$，$\kappa|_+ = \kappa_0$ とする．ここに，$u|_\pm$ は $\tilde{S}$ への u の Ω の内側，外側からのトレースである．

2.2. 導波路内のモード展開と DtN 写像

等断面半無限導波路内の 3 次元 Helmholtz 方程式 (2) の解

のうち，次のように変数分離できるものについて考える．

$$u(x_1,x_2,x_3)=u_{1,2}(x_1,x_2)u_3(x_3) \tag{6}$$

これを Helmholtz 方程式 (2) に代入し，次式を得る．

$$0=u_3\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)u_{1,2}+u_{1,2}\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2}+\frac{\omega^2}{c^2}u_{1,2}u_3 \tag{7}$$

ここに，$c=\sqrt{\kappa_0/\rho_0}>0$ は導波路内の平面波の位相速度である．さらに両辺を $u_{1,2}u_3$ で除することで次式を得る．

$$0=\frac{1}{u_{1,2}}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)u_{1,2}+\frac{1}{u_3}\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2}+\frac{\omega^2}{c^2} \tag{8}$$

ここで，分離定数を $\lambda\in\mathbb{C}$ と置くことで次の二つの独立した微分方程式を得る．

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)u_{1,2}+\lambda u_{1,2}=0 \tag{9}$$

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2}+\left(\frac{\omega^2}{c^2}-\lambda\right)u_3=0 \tag{10}$$

ここで，次の固有値問題から得られる固有値を $\lambda_m\geq 0$，対応する固有関数を $\psi_m:S\to\mathbb{R}$ $(m=1,2,\ldots)$ とする．

$$\nabla^2\psi_m+\lambda_m\psi_m=0 \quad \text{in } S \tag{11}$$

$$\frac{\partial\psi_m}{\partial n}=0 \quad \text{on } \partial S \tag{12}$$

式 (10) の一般解は

$$u_3(x_3)=\exp(\pm \mathrm{i}x_3\sqrt{\omega^2/c^2-\lambda}) \tag{13}$$

であるから，導波路内の一般解 u は次式で表すことができる．

$$u(x)=\sum_{m=1}^{\infty}A_m\psi_m(x_1,x_2)\exp(+\mathrm{i}K_m x_3)+\sum_{m=1}^{\infty}B_m\psi_m(x_1,x_2)\exp(-\mathrm{i}K_m x_3) \tag{14}$$

ここに，$A_m, B_m\in\mathbb{C}$ は定数列であり，K_m は次式で定義される．

$$K_m(\omega)=\sqrt{\omega^2/c^2-\lambda_m} \tag{15}$$

時間依存に $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$ を選び，角周波数 ω を実数として $x>0$ に対して $\sqrt{-x}=\mathrm{i}\sqrt{x}$ と定義すると，式 (14) 右辺の A_m に関する和の各項は $+x_3$ 方向に進行する伝搬波と $x_3\to\infty$ で減衰するエバネッセント波を表す．同様に，B_m に関する和の各項は $-x_3$ 方向に進行する伝搬波と $x_3\to-\infty$ で減衰するエバネッセント波を表す．すなわち，A を既知として入射波

$$u^{\mathrm{in}}(x)=\sum_{m=1}^{\infty}A_m\psi_m(x_1,x_2)\exp(+\mathrm{i}K_m x_3) \tag{16}$$

を導波路に与えた際の反射の解析は，境界値問題 (1)–(5) を満たす B を求める問題に帰着する．

また，式 (14) のモード展開を利用して DtN 写像を構成することができる．式 (14) と固有関数の正規直交性

$$\int_S\psi_m\psi_{m'}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2=\delta_{mm'} \tag{17}$$

により，B は次式で求められる．

$$B_m=\int_S(u(x_1,x_2,0)-u^{\mathrm{in}}(x_1,x_2,0))\psi_m(x_1,x_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 \tag{18}$$

よって，$\tilde{S}$ 上の関数 ϕ に関して作用素 T を

$$(T\phi)(x)=-\mathrm{i}\sum_{m=1}^{\infty}K_m\psi_m(x_1,x_2)\times\int_S\phi(y_1,y_2,0)\psi_m(y_1,y_2)\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2 \tag{19}$$

で定義すると，$u-u^{\mathrm{in}}$ は次式を満たす．

$$\frac{\partial}{\partial x_3}(u-u^{\mathrm{in}})=T(u-u^{\mathrm{in}}) \quad \text{on } \tilde{S} \tag{20}$$

すなわち，T は $\tilde{S}$ 上の DtN 写像である．導波路に関する DtN 写像 T の詳細に関しては，例えば [23] を参照されたい．

3. 有限要素法

3.1. 定式化

2.2 節で導入した DtN 写像を用いて，次の境界値問題を有限要素法を用いて解く．

$$\nabla\cdot\left(\frac{1}{\rho}\nabla u\right)+\frac{\omega^2}{\kappa}u=-g \quad \text{in } \Omega \tag{21}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_3}(u-u^{\mathrm{in}})=T(u-u^{\mathrm{in}}) \quad \text{on } \tilde{S} \tag{22}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}=0 \quad \text{on } \partial\Omega\setminus\overline{\tilde{S}} \tag{23}$$

この境界値問題に対応する弱形式は次式となる．

$$\begin{aligned}0&=\int_\Omega\frac{1}{\rho}\nabla\tilde{u}\cdot\nabla u\mathrm{d}x-\omega^2\int_\Omega\frac{1}{\kappa}\tilde{u}u\mathrm{d}x-\int_\Omega g\tilde{u}\mathrm{d}x-\int_{\partial\Omega}\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial n}\tilde{u}\mathrm{d}S\\&=\int_\Omega\frac{1}{\rho}\nabla\tilde{u}\cdot\nabla u\mathrm{d}x-\omega^2\int_\Omega\frac{1}{\kappa}\tilde{u}u\mathrm{d}x-\int_\Omega g\tilde{u}\mathrm{d}x\\&\quad+\int_{\tilde{S}}\frac{1}{\rho}\tilde{u}T(u-u^{\mathrm{in}})\mathrm{d}S+\int_{\tilde{S}}\frac{1}{\rho}\tilde{u}\frac{\partial u^{\mathrm{in}}}{\partial x_3}\mathrm{d}S\end{aligned} \tag{24}$$

ここに，$\tilde{u}$ は試験関数である．通常通り，解 u を Ω 上の形状関数 N_i を用いて

$$u(x)\simeq\sum_j U_jN_j(x) \tag{25}$$

で離散化する．ここに，U_i は節点値である．

Galerkin 法により $\tilde{u}=N_i$ を選ぶと，弱形式 (24) 右辺第 1–3 項は次式となる．

$$\int_\Omega\frac{1}{\rho}\nabla\tilde{u}\cdot\nabla u\mathrm{d}x-\omega^2\int_\Omega\frac{1}{\kappa}\tilde{u}u\mathrm{d}x-\int_\Omega g\tilde{u}\mathrm{d}x=\sum_j(G_{ij}-\omega^2M_{ij})U_j-b_i \tag{26}$$

ここに，行列 G,M とベクトル b はそれぞれ次式で定義される．

$$G_{ij}=\int_\Omega\frac{1}{\rho}\nabla N_i\cdot\nabla N_j\mathrm{d}x \tag{27}$$

$$M_{ij}=\int_\Omega\frac{1}{\kappa}N_iN_j\mathrm{d}x \tag{28}$$

$$b_i=\int_\Omega gN_i\mathrm{d}x \tag{29}$$

弱形式 (24) 右辺第 4 項は式 (18), (19) を用いて次式となる．

$$
\begin{aligned}
&\int_{\partial\Omega}\frac{1}{\rho}\tilde{u}T(u-u^{\mathrm{in}})\mathrm{d}S\\
=&-\mathrm{i}\sum_{m=1}^{\infty}K_m\left(\int_S(u(x_1,x_2,0)-u^{\mathrm{in}}(x_1,x_2,0))\psi_m(x)\mathrm{d}x\right)\\
&\times\left(\int_{\tilde{S}}\frac{1}{\rho}\tilde{u}(x)\psi_m(x)\mathrm{d}x\right)\\
=&-\mathrm{i}\sum_{m=1}^{\infty}K_mB_m\frac{1}{\rho_0}\int_{\tilde{S}}N_i(x)\psi_m(x)\mathrm{d}x\\
=&-\sum_m C_{im}H_{mm}B_m
\end{aligned}
\tag{30}
$$

ここに，行列 C と H は次式で定義した．

$$
C_{im}=\int_{\tilde{S}}N_i(x)\psi_m(x_1,x_2)\mathrm{d}S \tag{31}
$$

$$
H(\omega)=\mathrm{diag}_m\,\mathrm{i}K_m(\omega)/\rho_0 \tag{32}
$$

同様に弱形式 (24) 右辺第 5 項は次式となる．

$$
\begin{aligned}
\int_{\tilde{S}}\frac{1}{\rho}\tilde{u}\frac{\partial u^{\mathrm{in}}}{\partial x_3}\mathrm{d}S=&\mathrm{i}\sum_{m=1}^{\infty}K_mA_m\frac{1}{\rho_0}\int_{\tilde{S}}\tilde{u}(x)\psi_m(x)\mathrm{d}x\\
=&\sum_m C_{im}H_{mm}A_m
\end{aligned}
\tag{33}
$$

式 (24), (26), (30), (33) をまとめると，未知の節点値 U_i と係数列 B_m に関して次式が成り立つ．

$$
\begin{aligned}
0=\sum_j(G_{ij}-\omega^2M_{ij})U_j-b_i-\sum_m C_{im}H_{mm}B_m\\
+\sum_m C_{im}H_{mm}A_m
\end{aligned}
\tag{34}
$$

また，式 (18) より U_i と B_m に関して次式が成り立つ．

$$
0=\sum_j C_{jm}U_j-B_m-A_m \tag{35}
$$

式 (34), (35) をまとめると，節点値 U_j と反射係数 B_m は次の連立一次方程式を解くことで求められる．

$$
\begin{bmatrix} G-\omega^2M & -CH(\omega)\\ C^T & -I\end{bmatrix}\begin{pmatrix}U\\B\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}-CH(\omega)\\ I\end{bmatrix}A+\begin{pmatrix}b\\0\end{pmatrix} \tag{36}
$$

3.2. SSM による固有値解析

境界値問題 (21)–(23) の固有値解析は，方程式 (36) が $A=b=0$ で非自明解をもつときの角周波数 $\omega\in\mathbb{C}$ と対応する解 (U,B) を求める非線形固有値問題となる．

本研究は，この非線形固有値問題を SSM を用いて数値的に解く．SSM は，複素行列値関数 $F(z)$ で定義される非線形固有値問題 $F(z)y=0$ の解 (z,y) を，複素平面内の単純閉曲線 γ 上の周回積分で定義されるモーメント

$$
\int_\gamma W^HF^{-1}(z)V\mathrm{d}z \tag{37}
$$

を並べた行列に関する一般化固有値問題を解くことで，γ 内部の固有値 ω と対応する固有ベクトルを探索する．ここに，行列 V と W は疑似乱数により計算される．詳細は文献 [25] を参照されたい．

式 (36) の場合，左辺の係数行列全体を行列 $F(\omega)$ と置くことも可能であるが，本研究では自由度の削減のため，A を $A=0$ で固定した際の線形変換 $b\mapsto U$ の表現行列を F^{-1} として SSM を適用する．

積分路 γ は $F(\omega)$ の分岐截線を跨いではならず，求めたい固有値の範囲に応じて適切に多価関数の分岐截線を定めなければならない．式 (36) の場合，$F(\omega)$ の多価性は H に含まれる $K_m=\sqrt{\omega^2/c^2-\lambda_m}$ に由来する．そこで，定数 $\lambda\geq 0$ に対して $f(z)=\sqrt{z^2-\lambda}$ と定義して，この多価関数について議論する．まず，散乱問題の解の放射条件から，任意の $\lambda\geq 0$, $\omega\in\mathbb{R}^+$ で $\mathrm{Im}[\sqrt{\omega^2/c^2-\lambda}]\geq 0$ を満たす主値を選ぶ必要がある．ここで，$\sqrt{z}$ の分岐截線に負の虚軸を選び，その主値を $Q(z)=\sqrt{|z|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arg'(z)/2}$ とする．ここに，$\arg'(z)$ は $(-\pi/2,3\pi/2]$ に値を取る z の偏角である．この主値を用いて，2 価関数 $f(z)$ の主値に $f_1(z)=Q(z^2-\lambda)$ を選ぶ．この際の f の分岐截線と 2 値 $f_1(z), f_2=-f_1(z)$ をプロットしたものを Fig. 2 に示す．この図から確かなように，f の分岐截線は分岐点 $\pm\sqrt{\lambda}$ から出発し，第 2・4 象限で $\mathrm{Re}\,[z]+\mathrm{Im}\,[z]=0$ に漸近する双曲線となることが分かる．

4. 数値例

4.1. 計算精度の数値的検証

まず，固有値が解析的に求まる簡単な問題を対象として提案法の検証を行う．

導波路の断面を原点中心の半径 $R>0$ の円，すなわち $S=B_R(0)\subset\mathbb{R}^2$ とする．また，終端部を高さ $2h$ の円筒 $B_R(0)\times(0,2h)$ として，内部の材料定数分布を次式で定める．

$$
\rho(x)=\begin{cases}\rho_1 & (x_3>h)\\ \rho_0 & (x_3<h)\end{cases},\quad \kappa(x)=\begin{cases}\kappa_1 & (x_3>h)\\ \kappa_0 & (x_3<h)\end{cases} \tag{38}
$$

ここに，ρ_1,κ_1 は定数である．このとき，$c_1=\sqrt{\kappa_1/\rho_1}$ とすると固有値の一部は次式で与えられる．

$$
\omega=\frac{c_1}{2h}\left((2n+1)\pi-\mathrm{i}\log\frac{c_1\rho_1+c\rho_0}{c_1\rho_1-c\rho_0}\right)\quad n=0,1,2,\ldots \tag{39}
$$

Fig. 3 のように，$h=R$, $\rho_1=4\rho_0$, $\kappa_1=\kappa_0$ として提案法により計算された固有値の誤差を評価する．ここでは，式 (39) で $n=1$ として計算された固有値 $\omega_{\mathrm{exact}}=(2.356194-0.2746531\mathrm{i})c/R$ を対象とする．提案法による計算では，SSM の複素 ω 平面上の積分路は中心 ω_{exact}，半径 $0.01c/R$ の円を用いた．S の固有値 $\lambda_m\geq 0$ は小さいものから順に 40 個用いた（$\lambda_1R^2=0,\ldots,\lambda_{40}R^2=137.07$）．また，有限要素法の離散化に関しては，領域 Ω を四面体要素の集合で近似して，u を探す関数空間を四面体の頂点と辺の中点に節点を置く四面体二次要素からなる有限要素空間で近似した．同様に，2 次元領域 S は三角形要素の集合で近似し，その上の関数空間の近似には三角形二次要素を用いた．式 (36) の各種行列・ベクトルの構築および式 (11), (12) の S で斉次 Neumann 条件を課すラプラシアンの固有値 λ_m の計算は FreeFem++ [26] を用いて行った．SSM に要する連立一次方程式の求解には Intel

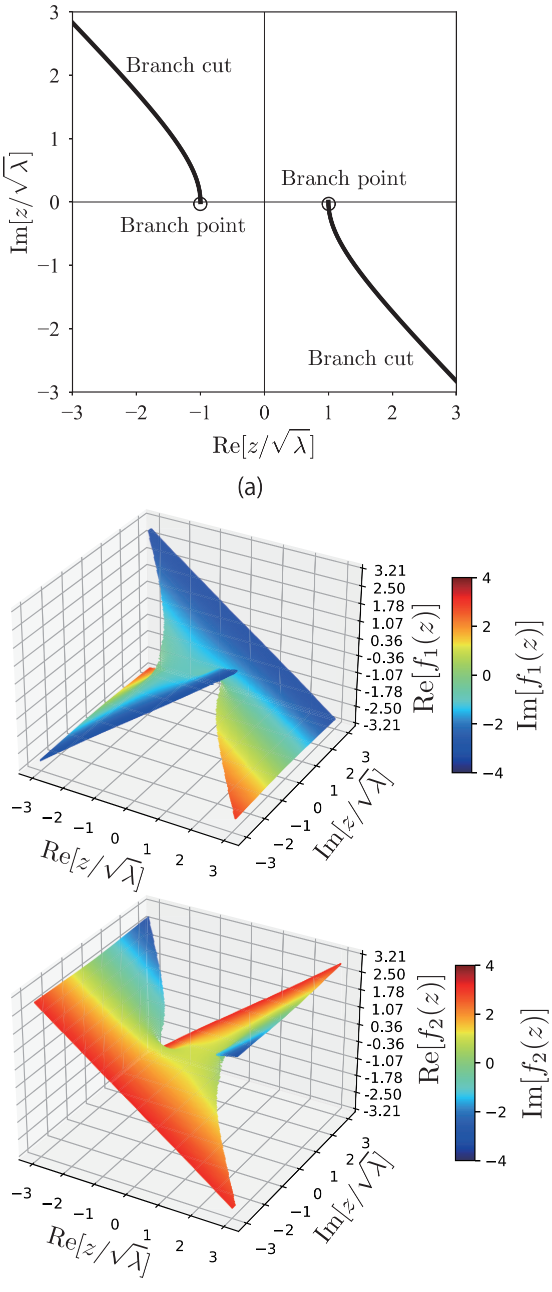

Fig. 2　(a) Branch points and cuts of $f(z) = \sqrt{z^2 - \lambda}$ with $\lambda \geq 0$. (b) Plot of the multivalued function f on the complex plane.

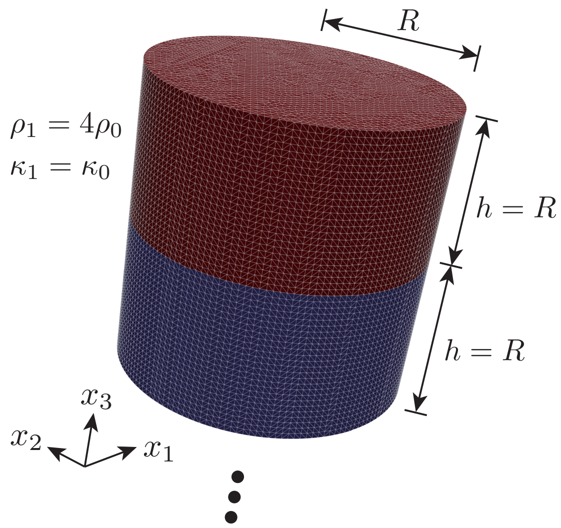

Fig. 3　Finite element mesh inside the cylinder $B_R(0) \times (0, 2h)$ with $N_h = 50$.

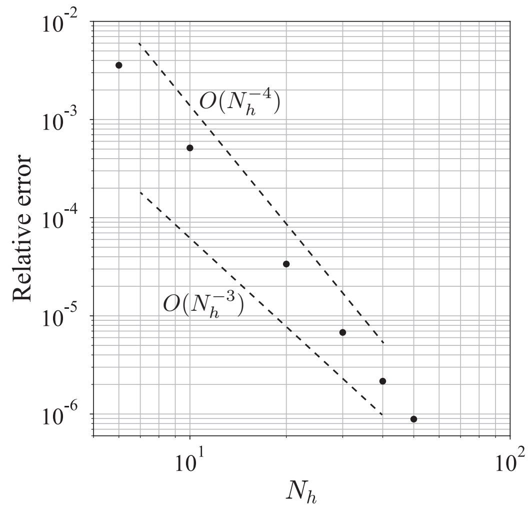

Fig. 4　Relative error of the eigenvalue ω versus the mesh parameter N_h.

MKL ライブラリに含まれる PARDISO を用いた．SSM に関しては，著者らが Python で実装したプログラムを用いた．FreeFem++と Python 間のインターフェースはテキストファイル経由のものを実装した．Python から FreeFem++にはパラメータ ω とベクトル v をファイル経由で渡し，FreeFem++は $F^{-1}(\omega)v$ を計算しファイルに出力する．Python が再度このファイルを読み込み，SSM を実行する．

有限要素メッシュの細かさを変化させた際の有限要素法の誤差計算の結果を Fig. 4 示す．ここで，有限要素法により計算された固有値を ω_{FEM} として，その相対誤差を $|\omega_{\mathrm{FEM}} - \omega_{\mathrm{exact}}|/|\omega_{\mathrm{exact}}|$ で定義した．四面体要素メッシュは円筒の高さ方向 (x_3 方向) に N_h 等分するように生成した．この結果から，高さ方向の分割数 N_h の増加に従って $O(N_h^{-4})$ 程度で単調に誤差が減少する傾向が見られ，提案手法の妥当性が確認された．

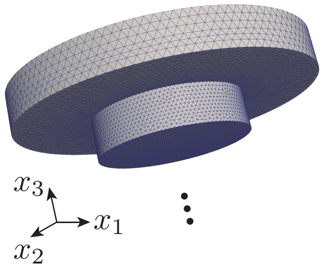

Fig. 5 Two-stage cylinder and finite element mesh.

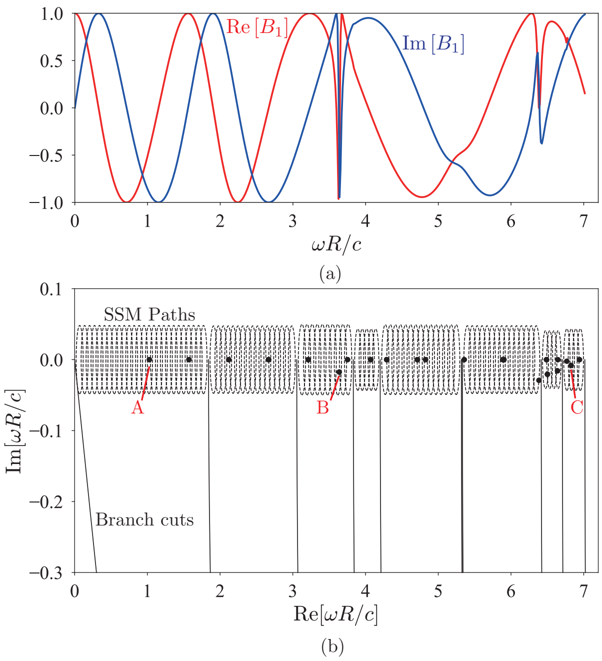

Fig. 6 (a) Spectrum of the reflectance coefficient B_1. (b) Complex eigenvalues of the two-stage cylinder.

4.2. 2 段円筒形状

次に，固有値が解析的に求まらない形状を対象として固有値計算を行った例を示す．

終端領域を $\Omega = B_R(0) \times (0, R/2] \cup B_{2R}(0) \times (R/2, R)$ として，その内部の材料分布は一様に $\rho(x) = \rho_0$，$\kappa(x) = \kappa_0$ とする．導波路の断面 S は前小節と同様に $S = B_R(0)$ である．この形状および使用する有限要素メッシュを Fig. 5 に示す．

この系に平面入射波 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x_3/c}$ を与えたときの反射係数 B_1 のスペクトルと，複素周波数平面内の実軸付近の固有値の分布を計算する．SSM の各積分路上の積分点数は 80 点とし，その他の計算条件は前小節と同じとした．

Fig. 6 に結果を示す．この結果から，複素固有値は実軸上に分布するものと，下半面に分布するものの二種に分類できることが分かる．実軸上に分布する固有値は bound state in the continuum に対応する固有値であると推測される．これを確かめるため，例として Fig. 6 の固有値 A について考察する．この固有値 A に対応する固有モードを Fig. 7 に示す．

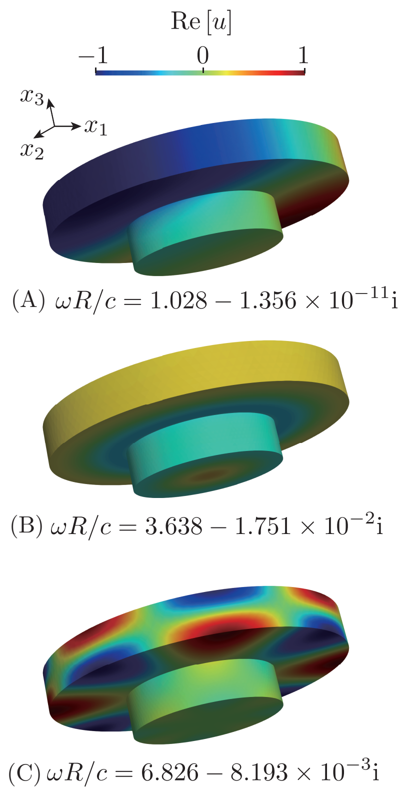

Fig. 7 Eigenmodes corresponding to the complex eigenvalues A–C shown in Fig. 6 (b).

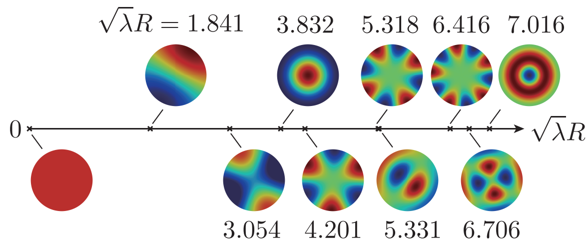

Fig. 8 Neumann eigenvalues and eigenmodes of the disk $B_R(0) \subset \mathbb{R}^2$. The values correspond to the branch points in Fig. 6 (b).

この図から，固有モードの Ω 内部の分布は円筒の軸に関して双極子的であることが分かる．一方で，半無限導波路の断面の固有モード（Fig. 8）を計算した結果，双極子モードの最小固有値は $\sqrt{\lambda}R = 1.841$ であり，これは固有値 A の実部 1.028 より大きい．この周波数で唯一の導波路モードとなる $\lambda = 0$ に対応するモードは対称性より励起されず，結果として導波路内はエバネッセント波のみが分布し，エネルギーはまったく放射されない．このように，放射モードのカットオフと対称性に起因して固有値の虚部が零となった固有モードは symmetry-protected bound state in the continuum と呼ばれ [12]，固有値 A はその一例であると考えられる．なお，この種の固有値は導波路のみならず，周期構造中の散乱問題にも現れることが確かめられている [27].

反対に，このような条件を満たさない固有値は非零の虚部

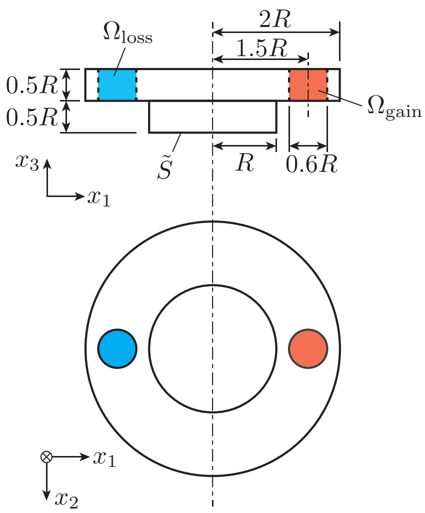

Fig. 9　Shape of a PT-symmetric structure.

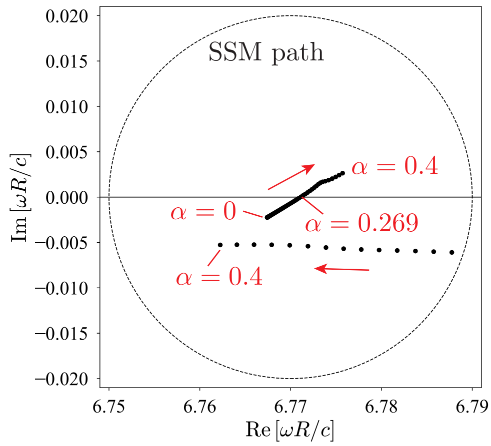

Fig. 10　Trajectories of complex eigenvalues inside the circular SSM path as α increases from $\alpha = 0$ to $\alpha = 0.4$.

を有する可能性がある．例として，Fig. 6 の固有値 B,C について考える．Fig. 7 の対応する固有モードは，それぞれ同一の対称性を有する導波路モードがカットオフされていないため，共鳴モードは Ω 内に束縛されない．一方，これは導波路モードを入射波として与えた際に共鳴が励起されることを意味しており，Fig. 6(a) の $\omega R/c = 3.6$ 付近の反射係数の急激な変化は複素固有値 B に起因していると推測される．

4.3. PT 対称系

最後に，前小節で解析した 2 段円筒形状に PT 対称な損失と利得を与えた際の複素固有値の挙動について議論する．

Fig. 9 のように，2 段円筒形状の内部に 2 つの円筒領域 Ω_{gain} と Ω_{loss} を定義し，質量密度分布を次式に置き換える．

$$\rho(x) = \begin{cases} \rho_0(1 - \mathrm{i}\alpha) & \text{in } \Omega_{\mathrm{gain}} \\ \rho_0(1 + \mathrm{i}\alpha) & \text{in } \Omega_{\mathrm{loss}} \\ \rho_0 & \text{elsewhere} \end{cases} \tag{40}$$

ここに，$\alpha \geq 0$ は定数である．このとき，$\rho(x)$ は x_3 軸周りの PT 対称性 $\rho(-x_1, -x_2, x_3) = \bar{\rho}(x_1, x_2, x_3)$ を満たす．

SSM の積分路を中心 $\omega R/c = 6.77$，半径 0.02 の円として，α を 0 から 0.4 まで変化させた際のこの円の内部の複素固有値の軌跡を計算した結果を Fig. 10 に示す．この結果から，$\alpha = 0.269$ 付近で複素固有値の一つが実軸と交わっていることが分かる．よって，この PT 対称系は適切な大きさの損失・利得を与えることで虚部が零となる固有値を持つと推測できる．これはレーザのメカニズムの一種であり，時間域で定常的に単一のモードの波を放射し続ける現象に対応する．また，PT 対称性のために，この固有モードの時間反転，すなわち複素共役も同一の Helmholtz 方程式の解となる．これはレーザの時間反転であり，CPA あるいは anti-laser と呼ばれる現象を表す [4]．PT 対称系では CPA モードと laser モードが同一周波数で実現する（散乱行列の極と零点が一致する）ことから，CPA-laser モードと呼ばれる [3]．

5. 結言

本研究は，3 次元音響導波路構造の複素固有値を計算する手法を新たに提案した．提案手法は有限要素法と DtN 写像に基づき，離散化して得られる非線形固有値問題を SSM で一般化固有値問題に置き換えることで，複素平面上で定められた経路内の複素固有値の計算を可能とした．数値例を通して，提案法が高い精度で固有値を計算できることを確認した．また，非エルミート系特有の現象である bound state in the continuum と CPA-laser モードが生じることを数値的に示した．今後の課題として，提案手法の計算コストの詳細な検証が挙げられる．

謝辞

本研究は JSPS 科研費 JP22K14166 の助成を受けたものです．

参考文献

(1) Miri, M.A. and Alù, A. Exceptional points in optics and photonics. *Science*, Vol. 363, No. 6422, p. eaar7709, 2019.

(2) El-Ganainy, R., Makris, K.G., Christodoulides, D.N., and Musslimani, Z.H. Theory of coupled optical PT-symmetric structures. *Optics Letters*, Vol. 32, No. 17, pp. 2632–2634, 2007.

(3) Krasnok, A., Baranov, D., Li, H., Miri, M.A., Monticone, F., and Alú, A. Anomalies in light scattering. *Advances in Optics and Photonics*, Vol. 11, No. 4, pp. 892–951, 2019.

(4) Chong, Y.D., Ge, L., Cao, H., and Stone, A.D. Coherent perfect absorbers: Time-reversed lasers. *Physical Review Letters*, Vol. 105, No. 5, p. 053901, 2010.

(5) Lin, Z., Ramezani, H., Eichelkraut, T., Kottos, T., Cao, H., and Christodoulides, D.N. Unidirectional invisibility

induced by $\mathcal{PT}$-symmetric periodic structures. *Physical Review Letters*, Vol. 106, No. 21, p. 213901, 2011.

(6) Zhu, X., Feng, L., Zhang, P., Yin, X., and Zhang, X. One-way invisible cloak using parity-time symmetric transformation optics. *Optics Letters*, Vol. 38, No. 15, pp. 2821–2824, 2013.

(7) Sounas, D.L., Fleury, R., and Alù, A. Unidirectional cloaking based on metasurfaces with balanced loss and gain. *Physical Review Applied*, Vol. 4, No. 1, p. 014005, 2015.

(8) Matsushima, K., Noguchi, Y., and Yamada, T. Unidirectional invisibility in a PT-symmetric structure designed by topology optimization. *Optics Letters*, Vol. 47, No. 13, pp. 3315–3318, 2022.

(9) Dyatlov, S. and Zworski, M. *Mathematical Theory of Scattering Resonances*. American Mathematical Society, 2019.

(10) Kullig, J., Yi, C.H., Hentschel, M., and Wiersig, J. Exceptional points of third-order in a layered optical microdisk cavity. *New Journal of Physics*, Vol. 20, No. 8, p. 083016, 2018.

(11) Bulgakov, E., Pichugin, K., and Sadreev, A. Exceptional points in a dielectric spheroid. *Physical Review A*, Vol. 104, No. 5, p. 053507, 2021.

(12) Hsu, C.W., Zhen, B., Stone, A.D., Joannopoulos, J.D., and Soljačić, M. Bound states in the continuum. *Nature Reviews Materials*, Vol. 1, No. 9, pp. 1–13, 2016.

(13) Hohage, T. and Nannen, L. Hardy space infinite elements for scattering and resonance problems. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, Vol. 47, No. 2, pp. 972–996, 2009.

(14) Durán, M., Miguez, M., and Nédélec, J.C. Numerical stability in the calculation of eigenfrequencies using integral equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 130, No. 1, pp. 323–336, 2001.

(15) Durán, M., Nédélec, J.C., and Ossandón, S. An efficient Galerkin BEM to compute high acoustic eigenfrequencies. *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 131, No. 3, p. 031001, 2009.

(16) Steinbach, O. and Unger, G. Convergence analysis of a Galerkin boundary element method for the Dirichlet Laplacian eigenvalue problem. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, Vol. 50, No. 2, pp. 710–728, 2012.

(17) Misawa, R., Niino, K., and Nishimura, N. Boundary integral equations for calculating complex eigenvalues of transmission problems. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, Vol. 77, No. 2, pp. 770–788, 2017.

(18) Araujo-Cabarcas, J.C. and Engström, C. On spurious solutions in finite element approximations of resonances in open systems. *Computers & Mathematics with Applications*, Vol. 74, No. 10, pp. 2385–2402, 2017.

(19) Gerdes, K. A summary of infinite element formulations for exterior Helmholtz problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 164, No. 1, pp. 95–105, 1998.

(20) Lenoir, M., Vullierme-Ledard, M., and Hazard, C. Variational formulations for the determination of resonant states in scattering problems. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, Vol. 23, No. 3, pp. 579–608, 1992.

(21) Araujo-Cabarcas, J.C., Engström, C., and Jarlebring, E. Efficient resonance computations for Helmholtz problems based on a Dirichlet-to-Neumann map. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 330, pp. 177–192, 2018.

(22) Araújo C., J.C. and Engström, C. On spurious solutions encountered in Helmholtz scattering resonance computations in $\mathbb{R}^d$ with applications to nano-photonics and acoustics. *Journal of Computational Physics*, Vol. 429, p. 110024, 2021.

(23) Goldstein, C.I. A finite element method for solving Helmholtz type equations in waveguides and other unbounded domains. *Mathematics of Computation*, Vol. 39, No. 160, pp. 309–324, 1982.

(24) Givoli, D., Patlashenko, I., and Keller, J.B. Discrete Dirichlet-to-Neumann maps for unbounded domains. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 164, No. 1, pp. 173–185, 1998.

(25) Asakura, J., Sakurai, T., Tadano, H., Ikegami, T., and Kimura, K. A numerical method for nonlinear eigenvalue problems using contour integrals. *JSIAM Letters*, Vol. 1, pp. 52–55, 2009.

(26) Hecht, F. New development in freefem++. *Journal of Numerical Mathematics*, Vol. 20, No. 3-4, pp. 251–266, 2012.

(27) Matsushima, K., Isakari, H., Takahashi, T., and Matsumoto, T. A topology optimization of open acoustic waveguides based on a scattering matrix method. *Wave Motion*, Vol. 113, p. 102987, 2022.