

# 融解・凝固を考慮した応力テンソルの不連続に基づく埋め込み境界—格子ボルツマン法の開発と妥当性検証

## DEVELOPMENT AND VALIDATION OF THE STRESS TENSOR DISCONTINUITY-BASED IMMERSSED BOUNDARY-LATTICE BOLTZMANN METHOD WITH MELTING/SOLIDIFICATION

遠藤 円<sup>1)</sup>, 鈴木 康祐<sup>2)</sup>, 吉野 正人<sup>3)</sup>

Madoka ENDO, Kosuke SUZUKI and Masato YOSHINO

1) 信州大学大学院 総合理工学研究科 工学専攻 (〒 380-8553 長野市若里 4-17-1, E-mail: 21w4009f@shinshu-u.ac.jp)

2) 信州大学学術研究院 工学系 (〒 380-8553 長野市若里 4-17-1, E-mail: kosuzuki@shinshu-u.ac.jp)

3) 信州大学学術研究院 工学系 (〒 380-8553 長野市若里 4-17-1, E-mail: masato@shinshu-u.ac.jp)

Melting and solidification can be seen in various engineering problems such as ice slurry and metal casting. Huang and Wu [J. Comput. Phys., **277** (2014), pp. 305-319] proposed the immersed boundary-lattice Boltzmann method to simulate solid-liquid phase change problems. However, the force acting on the solid phase cannot be correctly calculated in the method. Suzuki and Yoshino [Comput. Fluids, **172** (2018), pp. 593-608] proposed the stress tensor discontinuity-based immersed boundary-lattice Boltzmann method. In this method, we can obtain the force locally acting on the boundary from the stress tensor of one side of the fluids divided by the boundary. In the present study, we incorporated the method by Huang and Wu into the stress tensor discontinuity-based immersed boundary-lattice Boltzmann method. We validated the present method through some benchmark problems. As a result, the present method has a good agreement with other numerical results and analytical solutions. In addition, we confirmed that this method can calculate the fluid force acting on the solid phase which deforms due to melting/solidification.

**Key Words** : Immersed Boundary Method, Lattice Boltzmann Method, Melting/Solidification, Heat Transfer

### 1. はじめに

融解・凝固は様々な工学的問題に見られる現象であり、融解・凝固が熱流動に与える影響を調査することは、熱交換効率や品質向上のために重要な課題である。さらに、氷スラリー流<sup>(1)</sup>のように、固相が移流しながら融解・凝固して体積変化する系は、実験による観測が困難である場合が多いため、数値計算によるアプローチが有効と考えられる。

融解・凝固を伴う熱流動の数値計算法は、大きく分けて (i) 流れ場の計算, (ii) 温度場の計算, および (iii) 固液界面の移動計算の3つの部分に分けられ、これらの連成によって成立している。近年, (i) と (ii) の流れ場・温度場の効率の良い計算法として、格子ボルツマン法 (Lattice Boltzmann method: LBM)<sup>(2)</sup> が多く用いられている。また, Samanta

et al.<sup>(3)</sup> の最近のレビュー論文では、融解・凝固計算のための LBM は、(iii) の手法の種類によって、Enthalpy-based LBM, Phase-field-based LBM, Immersed-boundary-based LBM に分類されている。

Enthalpy-based LBM<sup>(4)</sup> は、(ii) で得られた温度場からエンタルピー場を計算、あるいは温度場の代わりに直接エンタルピー場を計算し、得られたエンタルピー場により各セルの液相体積分率を計算し、固液界面を捉える方法である。その単純さのため多くの研究に用いられており、近年でも多孔質内の PCM (phase change material) の融解・凝固計算に用いられている<sup>(5)</sup>。Phase-field-based LBM<sup>(6)</sup> は、(iii) の計算法として、固相・液相を区別する秩序パラメータの場 (phase field) を計算し、固液界面を直接的に追跡することなく形成する手法である。また、固液界面でのすべりなし条件を満た

すために、界面周辺に体積力を分布している。この手法は、その開発当初より現在まで、デンドライト結晶の成長および移流計算<sup>(7)</sup>に多く適用されている。

Immersed-boundary-based LBM<sup>(8)</sup>は比較的新しい手法で、(iii)の計算として埋め込み境界法 (immersed boundary method: IBM) を用いている。IBMでは、固相とともに移動するLagrangian点で固液界面を離散化し、その点上ですべりなし条件・等温条件を満足させるための適切な体積力・熱量を計算して周囲に分配することで、体積力と熱量の場として固液界面を表現している。Huang and Wu<sup>(8)</sup>は、IBMによる熱量が融解・凝固による熱量と等しいと考えて、融解・凝固による界面の変形を計算する手法を提案し、既存の研究と良い一致を示している。本研究では、固液界面におけるすべりなし条件を精度よく満たすことが出来る点と、氷スラリー流のような固相同士が衝突・付着するような系の計算<sup>(9, 10)</sup>において、Lagrangian点を用いた衝突・付着の計算モデルとの親和性が良い点から、Immersed-boundary-based LBMに注目して研究を行っている。

上記のように、Huang and Wu<sup>(8)</sup>は、Immersed-boundary-based LBMを提案し、既存の研究と良い一致を示している。しかし、課題として、変形する固相が液相から受ける力を正しく計算できていないことが挙げられる。埋め込み境界法では、固液界面のすべりなし条件を満足させるために、境界近傍に適切な体積力を分配している。そして、固相が液相から受ける力は体積力の反作用であると物理的に解釈される。この解釈により、体積力の総和を用いることで、変形しない界面が受けるトータルの流体力は計算することができる。しかし、変形する界面の場合にはこの方法を用いることができず、局所的な流体力の計算が必要であるのにも関わらず、Huang and Wuの手法では変形しない界面と同様の方法で流体力を形式的に計算している。従って、変形する界面に関して流体力を正しく計算できているとは言えない。

局所的な流体力を正しく計算できる手法として、応力テンソルの不連続に基づく埋め込み境界-格子ボルツマン法<sup>(11, 12)</sup>が挙げられる。この手法では、格子ボルツマン法におけるbounce-back法と埋め込み境界法を組み合わせることで、境界上の速度分布関数から境界上の応力テンソルを計算することを可能にした。境界が受ける局所的な流体力は、境界上の応力テンソルが分かれば計算することができる。そのため、体積変化の影響を受けずに流体力の計算を行うことができると予想される。

そこで本研究では、応力テンソルの不連続に基づく埋め込み境界-格子ボルツマン法<sup>(11, 12)</sup>に対して、温度場の計算<sup>(13)</sup>と融解・凝固による境界の移動計算<sup>(8)</sup>を導入し、融解・凝固を伴う熱流動問題を解析する新たな手法を開発することを目的とした。

## 2. 計算手法

### 2.1. 支配方程式

本研究において、流体の運動は以下に示す非圧縮性粘性流

体の連続の式およびNavier-Stokes方程式で記述される。

$$\nabla \cdot \hat{\mathbf{u}} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial \hat{t}} + (\hat{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \hat{\mathbf{u}} = -\frac{1}{\hat{\rho}_f} \nabla \hat{p} + \hat{\nu} \nabla^2 \hat{\mathbf{u}}, \quad (2)$$

ここで、 $\hat{\mathbf{u}}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{t})$ ,  $\hat{p}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{t})$  はそれぞれ位置 $\hat{\mathbf{x}}$ , 時刻 $\hat{t}$ における流速および圧力、 $\hat{\rho}_f$ は流体の密度、 $\hat{\nu}$ は動粘性係数である。また、温度は次の移流-拡散方程式に従う。

$$\frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{t}} + \hat{\mathbf{u}} \cdot \nabla \hat{T} = \hat{\alpha} \nabla^2 \hat{T}, \quad (3)$$

ここで、 $\hat{T}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{t})$ は位置 $\hat{\mathbf{x}}$ , 時刻 $\hat{t}$ における流体の温度、 $\hat{\alpha}$ は温度伝導係数である。

### 2.2. 熱を考慮した格子ボルツマン法

LBMとは、流体を有限個の速度をもつ多数の仮想粒子の集合体として近似し、各仮想粒子の衝突と並進とを粒子の速度分布関数を用いて逐次計算し、得られた速度分布関数のモーメントから巨視的変数(流速, 圧力, 温度など)を求める数値計算手法である<sup>(2)</sup>。本節では、非圧縮性粘性流体に対するLBMについて述べる。なお、使用される物理量の無次元化については付録Aを参照されたい。

格子気体モデルとして、Fig. 1に示す2次元9速度モデル、およびFig. 2に示す3次元15速度モデルを用いた。2次元9速度モデルの粒子速度 $\mathbf{c}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 9$ )は、以下のように与えられる。

$$\begin{aligned} & [\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3, \mathbf{c}_4, \mathbf{c}_5, \mathbf{c}_6, \mathbf{c}_7, \mathbf{c}_8, \mathbf{c}_9] \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4)$$

また、3次元15速度モデルの粒子速度 $\mathbf{c}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 15$ )は、以下のように与えられる。

$$\begin{aligned} & [\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3, \mathbf{c}_4, \mathbf{c}_5, \mathbf{c}_6, \mathbf{c}_7, \mathbf{c}_8, \mathbf{c}_9, \mathbf{c}_{10}, \mathbf{c}_{11}, \mathbf{c}_{12}, \mathbf{c}_{13}, \mathbf{c}_{14}, \mathbf{c}_{15}] = \\ & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5)$$

本手法では、流れ場と温度場を表現するため、座標 $\mathbf{x}$ および時刻 $t$ における速度 $\mathbf{c}_i$ をもつ仮想粒子の速度分布関数 $f_i(\mathbf{x}, t)$ ,  $g_i(\mathbf{x}, t)$ を導入する。速度分布関数 $f_i$ ,  $g_i$ の時間発展は以下の式で与えられる。

$$\begin{aligned} f_i(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i \Delta x, t + \Delta t) &= f_i(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{\tau_f} [f_i(\mathbf{x}, t) \\ &\quad - f_i^{\text{eq}}(p(\mathbf{x}, t), \mathbf{u}(\mathbf{x}, t))], \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} g_i(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i \Delta x, t + \Delta t) &= g_i(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{\tau_g} [g_i(\mathbf{x}, t) \\ &\quad - g_i^{\text{eq}}(T(\mathbf{x}, t), \mathbf{u}(\mathbf{x}, t))], \end{aligned} \quad (7)$$

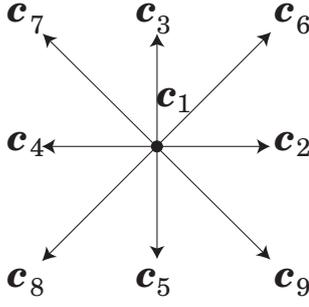


Fig. 1 Two-dimensional 9-velocity model.

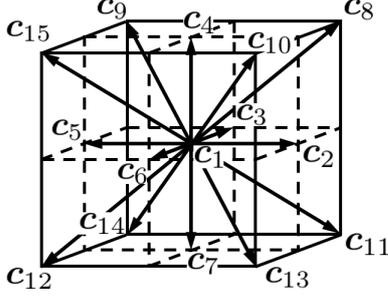


Fig. 2 Three-dimensional 15-velocity model.

ここで,  $\Delta x$  は格子間隔,  $\Delta t$  は時間刻み,  $\tau_f, \tau_g$  は緩和時間である. また式 (6), (7) 中の局所平衡分布関数  $f_i^{\text{eq}}, g_i^{\text{eq}}$  は次式で与えられる.

$$f_i^{\text{eq}}(p, \mathbf{u}) = E_i \left[ 3p + 3\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u} + \frac{9}{2}(\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u})^2 - \frac{3}{2}\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \right], \quad (8)$$

$$g_i^{\text{eq}}(T, \mathbf{u}) = E_i T (1 + 3\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u}), \quad (9)$$

ここで,  $E_i$  は, 2次元9速度モデルでは

$$\begin{aligned} E_1 &= 4/9, \\ E_2 &= \dots = E_5 = 1/9, \\ E_6 &= \dots = E_9 = 1/36, \end{aligned} \quad (10)$$

3次元15速度モデルでは

$$\begin{aligned} E_1 &= 2/9, \\ E_2 &= \dots = E_7 = 1/9, \\ E_8 &= \dots = E_{15} = 1/72, \end{aligned} \quad (11)$$

で与えられる. 巨視的変数である圧力  $p$ , 流速  $\mathbf{u}$  および温度  $T$  は, 以下のように計算される.

$$p = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^b f_i, \quad (12)$$

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^b \mathbf{c}_i f_i, \quad (13)$$

$$T = \sum_{i=1}^b g_i, \quad (14)$$

ここで, 2次元では  $b = 9$ , 3次元では  $b = 15$  である. 動粘性係数  $\nu$ , 温度伝導係数  $\alpha$  および熱伝導係数  $\lambda$  は, 以下のように入力される.

$$\nu = \frac{1}{3} \left( \tau_f - \frac{1}{2} \right) \Delta x, \quad (15)$$

$$\alpha = \frac{1}{3} \left( \tau_g - \frac{1}{2} \right) \Delta x, \quad (16)$$

$$\lambda = \frac{1}{3} \tau_g \Delta x. \quad (17)$$

なお, 外力および熱量を考慮する場合は,  $\mathbf{g}$  を体積力,  $q$  を熱量とすると以下のように時間発展する.

1. 外力, 熱量なしで時間発展する.

$$\begin{aligned} f_i^*(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i \Delta x, t + \Delta t) &= f_i(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{\tau_f} [f(\mathbf{x}, t) \\ &\quad - f_i^{\text{eq}}(p(\mathbf{x}, t), \mathbf{u}(\mathbf{x}, t))], \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} g_i^*(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i \Delta x, t + \Delta t) &= g_i(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{\tau_g} [g(\mathbf{x}, t) \\ &\quad - g_i^{\text{eq}}(T(\mathbf{x}, t), \mathbf{u}(\mathbf{x}, t))]. \end{aligned} \quad (19)$$

2.  $f_i^*, g_i^*$  を外力, 熱量によって補正する.

$$f_i(\mathbf{x}, t + \Delta t) = f_i^*(\mathbf{x}, t + \Delta t) + 3\Delta x E_i \mathbf{c}_i \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}, t + \Delta t), \quad (20)$$

$$g_i(\mathbf{x}, t + \Delta t) = g_i^*(\mathbf{x}, t + \Delta t) + \frac{\alpha}{\lambda} \Delta x E_i q(\mathbf{x}, t + \Delta t), \quad (21)$$

ここで,  $\lambda/\alpha$  は見かけの熱容量である.

### 2.3. 埋め込み境界法

本研究では, 任意形状の境界上ですべりなし境界条件および等温境界条件を満たすために, IBM を用いる. 流れ場における IBM は, 境界の内外が同種の非圧縮性粘性流体で満たされているとみなし, 境界近傍に適切な体積力を加えることにより, 境界上でのすべりなし境界条件を満足させる方法である. 同じく, 温度場における IBM は, 境界近傍に適切な熱量を加えることにより, 境界上の等温境界条件を満足させる方法である.

#### 2.3.1. 流れ場に対する埋め込み境界法

本研究では, 流れ場に対する IBM として, Suzuki et al. (11) による応力テンソルの不連続に基づく埋め込み境界-格子ボルツマン法 (immersed boundary-lattice Boltzmann method: IB-LBM) を用いる.

この手法において, Suzuki et al. は流線が境界を貫通してしまう問題を解決するために, Smoothed-Profile Method

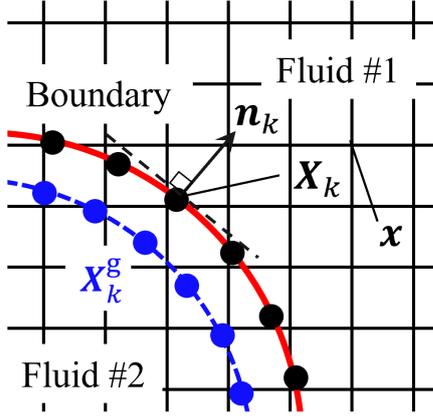


Fig.3 Illustration of boundary Lagrangian points  $\mathbf{X}_k$ , ghost points  $\mathbf{X}_k^g$ , unit normal vector  $\mathbf{n}_k$  to the boundary at  $\mathbf{X}_k$ , and lattice points  $\mathbf{x}$ .

(SPM)<sup>(14)</sup>を用いた前処理を行った。SPMは、物体内部の流体（内部流体）の速度を、物体自身の速度に強制するように、内部流体に体積力を加える手法である。その体積力の分布が、物体内部と外部で滑らかにつながるように、滑らかなプロファイル関数を使っていることが特徴である。しかし、本研究では物体が変形するためプロファイル関数を定義することができない。そこで本研究では、物体の内部に仮想的な境界を設定し、適切な体積力を加え、すべりなし条件を強制することで物体内部の流速を物体自身の速度に強制する前処理を行う。

はじめに、時刻  $t$  における物体境界と共に移動する境界点とその速度、およびその点における境界の単位法線ベクトルをそれぞれ  $\mathbf{X}_k$ ,  $\mathbf{U}_k$ ,  $\mathbf{n}_k$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ) とし、それらの時刻  $(t + \Delta t)$  における値が既知であるとする。なお、境界を隔てて一方の側の流体を流体1、もう一方の側の流体を流体2として、単位法線ベクトルは常に流体2から流体1へ向かう方向とする (Fig. 3 参照)。次に、境界の内側の法線方向に格子間隔ずつ離れた点を内部点  $\mathbf{X}_k^g$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ) とし以下のように定義する。

$$\mathbf{X}_k^g = \mathbf{X}_k - \Delta x \mathbf{n}_k. \quad (22)$$

内部点は流線の貫通を防ぐためのものであり、そのために強制すべき速度を設定する。ここでは、内部点上の強制すべき速度  $\mathbf{U}_k^g$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ) は境界点の速度  $\mathbf{U}_k$  と等しいものとする。前処理のための内部点  $\mathbf{U}_k^g$  における体積力の決定には、Wang et al.<sup>(15)</sup>により提案された Multi-Direct Forcing Method (MDFM) を用いる。また、MDFM<sup>(15)</sup>では境界上のすべりなし条件を強く強制するために反復計算を行う。予備計算より、3回程度の反復ですべりなし条件を十分強制できることがわかっている。このようにして求めた体積力  $\mathbf{g}^{\text{pre}}(\mathbf{x}, t + \Delta t)$  を式 (20) に代入し、補正することで二

次的な速度分布関数  $f_i^{**}(\mathbf{x}, t + \Delta t)$  を求める。

次に、応力テンソルの不連続に基づく IB-LBM により、境界点  $\mathbf{X}_k$  における体積力を決定する。前処理後の二次的な速度分布関数  $f_i^{**}(\mathbf{x}, t + \Delta t)$  が既知であるとする。境界点  $\mathbf{X}_k$  は格子点  $\mathbf{x}$  に一般には一致しないため、境界点上での二次的な速度分布関数  $f_i^{**}(\mathbf{X}_k, t + \Delta t)$  を、以下のように周囲の格子点から内挿して求める。

$$f_i^{**}(\mathbf{X}_k, t + \Delta t) = \sum_{\mathbf{x}} f_i^{**}(\mathbf{x}, t + \Delta t) W(\mathbf{x} - \mathbf{X}_k) (\Delta x)^d, \quad (23)$$

ここで、2次元では  $d = 2$ 、3次元では  $d = 3$  であり、 $\sum_{\mathbf{x}}$  は全ての格子点  $\mathbf{x}$  についての和を表す。また、 $W$  は重み関数を表し、3次元では以下で与えられるような関数である<sup>(16)</sup>。

$$W(x, y, z) = \frac{1}{\Delta x} w\left(\frac{x}{\Delta x}\right) \cdot \frac{1}{\Delta x} w\left(\frac{y}{\Delta x}\right) \cdot \frac{1}{\Delta x} w\left(\frac{z}{\Delta x}\right), \quad (24)$$

$$w(r) = \begin{cases} \frac{1}{8} (3 - 2|r| + \sqrt{1 + 4|r| - 4r^2}), & (|r| \leq 1), \\ \frac{1}{8} (5 - 2|r| - \sqrt{-7 + 12|r| - 4r^2}), & (1 \leq |r| \leq 2), \\ 0, & (|r| > 2). \end{cases} \quad (25)$$

境界点で満たすべき速度分布関数は bounce-back 法<sup>(2)</sup>により計算する。しかし、単純に bounce-back 法を適用するだけでは、跳ね返る仮想粒子の速度分布関数の組が境界の向きによって離散的に変わるため、境界上の応力に非物理的な振動が発生してしまうという問題がある。この問題を改善するために、境界の法線ベクトルの角度に応じた bounce-back 条件の緩和を行う<sup>(12)</sup>。具体的には、流体1および2が境界点  $\mathbf{X}_k$  で満たすべき速度分布関数  $f_i^{[1]}(\mathbf{X}_k, t + \Delta t)$  および  $f_i^{[2]}(\mathbf{X}_k, t + \Delta t)$  を、それぞれ以下のように計算する。

$$f_i^{[1]} = \begin{cases} F_i^{\text{not}}, & (\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{c}_i \leq 0), \\ (1 - \gamma) F_i^{\text{not}} + \gamma F_i^{\text{bb}}, & (0 < \mathbf{n}_k \cdot \mathbf{c}_i \leq |\mathbf{c}_i| \sin \chi), \\ F_i^{\text{bb}}, & (\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{c}_i > |\mathbf{c}_i| \sin \chi), \end{cases} \quad (26)$$

$$f_i^{[2]} = \begin{cases} F_i^{\text{not}}, & (\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{c}_i \geq 0), \\ (1 - \gamma) F_i^{\text{not}} + \gamma F_i^{\text{bb}}, & (-|\mathbf{c}_i| \sin \chi \leq \mathbf{n}_k \cdot \mathbf{c}_i < 0), \\ F_i^{\text{bb}}, & (\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{c}_i < -|\mathbf{c}_i| \sin \chi), \end{cases} \quad (27)$$

ここで、 $F_i^{\text{not}}$  と  $F_i^{\text{bb}}$  は、仮想粒子が bounce-back せず境界を通過した場合の速度分布関数と、bounce-back して境界で跳ね返った場合の速度分布関数であり、以下で定義する。

$$F_i^{\text{not}} = f_i^{**}(\mathbf{X}_k, t + \Delta t), \quad (28)$$

$$F_i^{\text{bb}} = f_i^{**}(\mathbf{X}_k, t + \Delta t) + 6E_i \mathbf{c}_i \cdot \mathbf{U}_k, \quad (29)$$

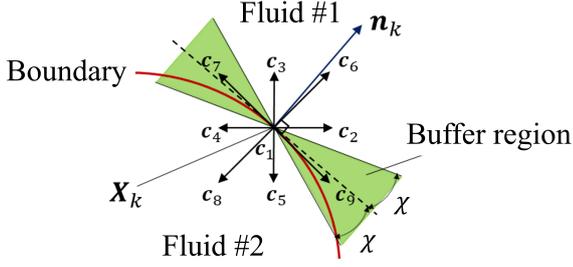


Fig. 4 Illustration of the buffer region for a relaxation of the bounce-back condition.

ここで、 $\bar{i}$  は  $c_{\bar{i}} = -c_i$  となる番号である。また、 $\chi$  は bounce-back 条件を緩和する範囲、 $\gamma$  は緩和関数であり、境界の法線ベクトル  $\mathbf{n}_k$  に応じて連続的に緩和できるように、以下のよう求める。

$$\gamma = \frac{|\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{c}_i|}{|\mathbf{c}_i| \sin \chi}. \quad (30)$$

これは、境界に接平面から角度  $\chi$  だけ傾いた平面の間に来る領域をバッファ領域 (Fig. 4 参照) として、そのバッファ領域中で、境界を通過した場合の速度分布関数と境界で跳ね返った場合の速度分布関数を、重み  $\gamma$  で足し合わせることで、bounce-back 条件を緩和することが狙いである。本研究では、 $\chi = 22.5^\circ$  とする<sup>(12)</sup>。これは、緩和する範囲が狭すぎると応力に非物理的な振動が発生してしまい、逆に広すぎると境界を通過してしまう仮想粒子が多くなり応力が適切に計算出来ないことから、その兼ね合いで決定している。

この  $f_i^{[1]}$  および  $f_i^{[2]}$  を用いて、流体 1 および 2 の境界点  $\mathbf{X}_k$  における応力テンソル  $\sigma_{\alpha\beta}^{[1]}(\mathbf{X}_k)$  および  $\sigma_{\alpha\beta}^{[2]}(\mathbf{X}_k)$  が以下のように計算できる。

$$\sigma_{\alpha\beta}^{[\ell]} = -\frac{1}{2\tau_f} p^{[\ell]} \delta_{\alpha\beta} - \frac{\tau_f - 1/2}{\tau_f} \left[ \sum_{i=1}^b f_i^{[\ell]} (c_{i\alpha} - U_{k\alpha})(c_{i\beta} - U_{k\beta}) - (3p^{[\ell]} - 1)U_{k\alpha}U_{k\beta} \right], \quad (\ell = 1, 2), \quad (31)$$

ここで、 $\alpha, \beta = x, y, z$  は総和規約に従い、 $p^{[\ell]}$  は、 $f_i^{[\ell]}$  を用いて式 (12) から計算される圧力である。

IBM における体積力  $\mathbf{g}(\mathbf{X}_k, t + \Delta t)$  と、境界における応力テンソルの不連続  $\sigma^{[1]}(\mathbf{X}_k) - \sigma^{[2]}(\mathbf{X}_k)$  は、

$$\mathbf{g}dV = -(\sigma^{[1]} - \sigma^{[2]}) \cdot \mathbf{n}dS, \quad (32)$$

で表されるように等価である<sup>(11)</sup>。そこで式 (32) より、流体 1 および 2 の境界点  $\mathbf{X}_k$  における応力テンソルの差から、境界点  $\mathbf{X}_k$  で加えるべき体積力を以下のように決定する。

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}, t + \Delta t)\Delta V = -[\sigma^{[1]}(\mathbf{X}_k) - \sigma^{[2]}(\mathbf{X}_k)] \cdot \mathbf{n}_k \Delta S, \quad (33)$$

ここで、 $\Delta S$  は面積要素で、境界の表面積を  $S$  とすると、 $\Delta S = S/N$  で与えられる。本手法では、 $\Delta S \lesssim \Delta x$  となるように境界点の個数  $N$  を決定する。また、体積力は境界点一点にのみ加わるのではなく、境界点近傍の微小な領域に平均的に分布していると考え、その領域の体積を  $\Delta V$  で表す。本手法では、 $\Delta V = \Delta S \times \Delta x$  で与える。

最後に、この体積力を周囲の格子点に以下のように分配する。

$$\mathbf{g}(\mathbf{X}_k, t + \Delta t) = \sum_{k=1}^N \mathbf{g}(\mathbf{X}_k, t + \Delta t) W(\mathbf{x} - \mathbf{X}_k) \Delta V, \quad (34)$$

ここで、内挿と同じ重み関数  $W$  を用いている。この分配した体積力を用いて、式 (20) と同様に以下のように速度分布関数を補正する。

$$f_i(\mathbf{x}, t + \Delta t) = f_i^{**}(\mathbf{x}, t + \Delta t) + 3\Delta x E_i c_i \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}, t + \Delta t). \quad (35)$$

### 2.3.2. 温度場に対する埋め込み境界法

本研究では、温度場に対する IBM として、Wang et al.<sup>(17)</sup> による Multi-Direct Heat Source Method を用いる。時刻  $t$  における速度分布関数  $g_i(\mathbf{x}, t)$ 、流速  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  および温度  $T(\mathbf{x}, t)$  が既知であるとする、これらの値から式 (14), (21) より、格子点上での一時的な温度  $T^*(\mathbf{x}, t + \Delta t)$  が求められる。

**Step 0.** はじめに、境界点における一時的な温度を計算する。格子点上の温度  $T^*(\mathbf{x}, t + \Delta t)$  を用いて境界点上の一時的な温度  $T^*(\mathbf{X}_k, t + \Delta t)$  は以下のように内挿される。

$$T^*(\mathbf{X}_k, t + \Delta t) = \sum_{\mathbf{x}} T^*(\mathbf{x}, t + \Delta t) W(\mathbf{x} - \mathbf{X}_k) (\Delta x)^d. \quad (36)$$

次に、境界温度  $T_k$  と  $T^*(\mathbf{X}_k, t + \Delta t)$  の差から境界点に反復の初期において加わる熱量  $q_0(\mathbf{X}_k, t + \Delta t)$  を計算する。

$$q_0(\mathbf{X}_k, t + \Delta t) = \frac{\lambda}{\alpha} Sh \frac{T_k - T^*(\mathbf{X}_k, t + \Delta t)}{\Delta t}, \quad (37)$$

ここで、 $Sh (= \Delta t / \Delta x)$  はストローハル数である (付録 A 参照)。この手法は、等温境界条件をより強く強制するために、反復的に熱量を求める。境界点  $\mathbf{X}_k$  での反復  $l$  回までの熱量  $q_l(\mathbf{X}_k, t + \Delta t)$  を既知としたとき、以下に示す Step で熱量  $q_{l+1}(\mathbf{X}_k, t + \Delta t)$  を導出する。

Step 1. 格子点へ熱量を分配する.

$$q_l(\mathbf{x}, t + \Delta t) = \sum_{k=1}^N q_l(\mathbf{X}_k, t + \Delta t) W(\mathbf{x} - \mathbf{X}_k) \Delta V, \quad (38)$$

ここで、熱量は境界点一点にのみ加わるのではなく、境界点近傍の微小な領域に平均的に分布していると考え、流れ場の場合と同様にその領域の体積を  $\Delta V$  とする。

Step 2. 格子点での温度を補正する.

$$T_l(\mathbf{x}, t + \Delta t) = T^*(\mathbf{x}, t + \Delta t) + \frac{\alpha \Delta t}{\lambda Sh} q_l(\mathbf{x}, t + \Delta t). \quad (39)$$

Step 3. 境界点での温度を内挿する.

$$T_l(\mathbf{X}_k, t + \Delta t) = \sum_{\mathbf{x}} T_l(\mathbf{x}, t + \Delta t) W(\mathbf{x} - \mathbf{X}_k) (\Delta x)^d. \quad (40)$$

Step 4.  $T_k$  からの残差によって、境界点での熱量を補正する.

$$q_{l+1}(\mathbf{X}_k, t + \Delta t) = q_l(\mathbf{X}_k, t + \Delta t) + \frac{\lambda}{\alpha} Sh \frac{T_k - T_l(\mathbf{X}_k, t + \Delta t)}{\Delta t}. \quad (41)$$

以下、Step の 1 から 4 までを反復することによって、残差を減らしていく。また、文献<sup>(13)</sup>によれば、反復回数が 5 回程度で境界上での等温条件を十分強制することができるので報告されているため、本論文での反復回数は、 $l = 5$  とする。このようにして得られた熱量  $q(\mathbf{x}, t + \Delta t)$  を式 (21) に代入し、温度場を計算する。

#### 2.4. 物体が周囲の流体から受ける力およびトルク

物体が境界点  $\mathbf{X}_k$  周りの微小面積を介して周囲の流体から受ける応力  $\mathbf{P}(\mathbf{X}_k)$  は、物体の外側の流体を流体 1 としたとき、流体 1 の側の応力テンソルを用いて、以下のように計算される。

$$\mathbf{P}(\mathbf{X}_k) = \boldsymbol{\sigma}^{[1]}(\mathbf{X}_k) \cdot \mathbf{n}_k. \quad (42)$$

また、物体が周囲の流体から受ける正味の力  $\mathbf{F}$  は、式 (42) を用いて以下のように計算される。

$$\mathbf{F} = \sum_{k=1}^N \mathbf{P}(\mathbf{X}_k) \Delta S. \quad (43)$$

同様にして、物体が周囲の流体から受ける、点  $\mathbf{X}_c$  周りの正

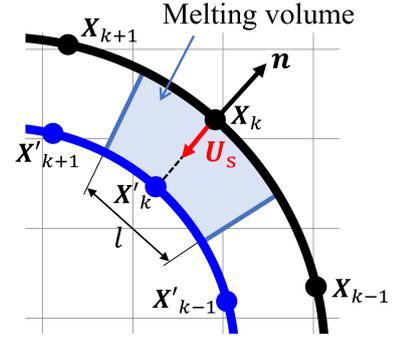


Fig. 5 Illustration of melting process.

味のトルク  $\mathbf{T}$  は、以下のように計算される。

$$\mathbf{T} = \sum_{k=1}^N (\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_c) \times \mathbf{P}(\mathbf{X}_k) \Delta S. \quad (44)$$

#### 2.5. 物体の運動計算

物体が流体中を自由に運動するような場合には、式 (43) で与えられる力  $\mathbf{F}$  と式 (44) で与えられるトルク  $\mathbf{T}$  を用いて、物体の運動方程式を計算する。物体の運動方程式の詳細については、文献<sup>(11, 18)</sup>を参照されたい。本研究では、物体の運動計算の時間刻みは、流体の運動計算と同じにとり、流体と物体の運動計算を交互に行う弱連成を用いる。また、物体の運動方程式の離散化には、オイラーの陽解法を用いる。

#### 2.6. 融解・凝固の計算

融解・凝固の計算には、Huang and Wu<sup>(8)</sup>によって提案された手法を用いた。Huang and Wu<sup>(8)</sup>の手法は、融解・凝固によって生じる体積変化を、境界点  $\mathbf{X}_k$  を法線方向の速度  $\mathbf{U}_s$  で移動させることで再現する。この  $\mathbf{U}_s$  は融解・凝固する体積がもつ融解熱と、IBMにて境界点が分配する熱量  $q$  (2.3.2 項参照) が等しいと仮定し導出する。以下に導出方法を示す。本節では融解する場合のみ導出するが、凝固する場合についても同様に計算することができる。

まず、Fig. 5 のようにある時刻において境界が黒線の位置にあり、 $\Delta t$  後に融解により境界点が速度  $\mathbf{U}_s$  で青線へ移動する場合を考える。すなわち、境界点  $\mathbf{X}_k$  は  $\mathbf{X}'_k$  へ移動し、融解体積は Fig. 5 の青帯の領域となる。このとき、境界点間距離  $S/N$  が十分に小さいため、この領域を長方形として近似する。よって融解体積  $V_{\text{melt}}$  は、

$$V_{\text{melt}} = -(\mathbf{U}_s \cdot \mathbf{n}) \Delta t \frac{S}{N}, \quad (45)$$

となる。ここで、 $\mathbf{n}$  は単位法線ベクトルである。従って、この領域が放出した融解熱  $Q$  は、

$$\begin{aligned} Q &= \rho_s L V_{\text{melt}} \\ &= -\rho_s L (\mathbf{U}_s \cdot \mathbf{n}) \Delta t \frac{S}{N}, \end{aligned} \quad (46)$$

である。ここで、 $\rho_s$  は固相の密度、 $L$  は融解潜熱である。

また、IBMによって境界点  $\mathbf{X}_k$  が周囲に分配した熱量  $Q$  は、分配する単位時間・単位体積当たりの熱量  $q(\mathbf{X}_k, t + \Delta t)$  を用いて、

$$Q = -q(\mathbf{X}_k, t + \Delta t)\Delta t\Delta V, \quad (47)$$

となる。

よって、式 (46) と式 (47) の熱量は等しいため、

$$-\rho_s L(\mathbf{U}_s \cdot \mathbf{n})\Delta t \frac{S}{N} = -q(\mathbf{X}_k, t + \Delta t)\Delta t\Delta V, \quad (48)$$

が成り立つ。従って  $\mathbf{U}_s$  は、

$$\mathbf{U}_s = \frac{q(\mathbf{X}_k, t + \Delta t)}{\rho_s L} \Delta x \mathbf{n}, \quad (49)$$

と計算することができる。

### 2.7. 固液境界における法線ベクトル

応力テンソルの不連続に基づく IB-LBM (2.3.1 項) および融解・凝固の計算 (2.6 節) において、固液の境界における単位法線ベクトル  $\mathbf{n}$  を使用している。本研究では、法線ベクトルは、Huang and Wu<sup>(8)</sup> の二次元の計算法に倣って計算する。境界点  $\mathbf{X}_k$  における番号が増えていく方向の接線ベクトル  $\boldsymbol{\tau}_k$  は、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}_k &= \begin{pmatrix} \tau_x \\ \tau_y \end{pmatrix} \\ &= \frac{\delta_{k-1}^2 [\mathbf{X}_{k+1} - \mathbf{X}_k] + \delta_k^2 [\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_{k-1}]}{\delta_{k-1}\delta_k(\delta_{k-1} + \delta_k)}, \end{aligned} \quad (50)$$

となる。ここで  $\delta_k$  は  $k$  番目の境界点と  $k+1$  番目の境界点との距離である。Fig. 5 のように、境界点  $\mathbf{X}_k$  の番号が増えていく方向に対して右側の領域を液相、左側の領域を固相とすると、法線ベクトル  $\mathbf{n}_k$  は、接線ベクトル  $\boldsymbol{\tau}$  を時計回りに回転させる方向なので、

$$\mathbf{n}_k = \frac{1}{\sqrt{\tau_x^2 + \tau_y^2}} \begin{pmatrix} \tau_y \\ -\tau_x \end{pmatrix}, \quad (51)$$

と計算することができる。液相と固相の位置が逆の場合は、上式の逆方向となる。

## 3. 妥当性検証

本手法の妥当性を確認するために、Huang and Wu<sup>(8)</sup> を参考に、一次元領域における融解・凝固問題、二次元正方領域における融解・凝固問題、二次元円管領域における融解・凝固問題、三次元半無限領域における融解・凝固問題の解析を行った。

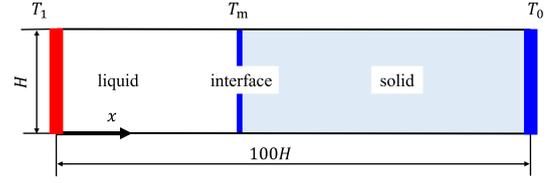


Fig. 6 Computational domain for a one-dimensional melting problem in a semi-infinite area.

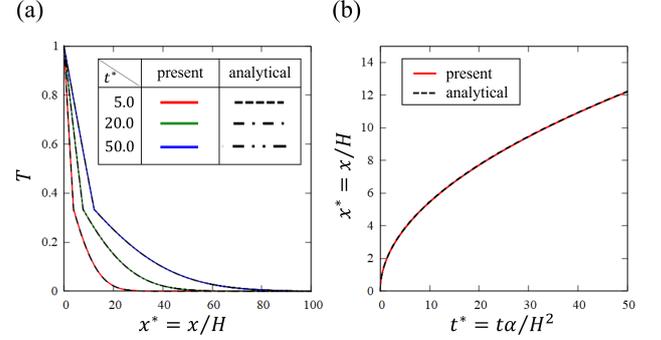


Fig. 7 Comparisons between the present numerical results and analytical solutions: (a) temperature; (b) location of solid-liquid interface.

## 3.1. 一次元領域における融解・凝固問題

### 3.1.1. 計算条件

無限に長い一次元領域内が、初期においてすべて固相で満たされており、温度が  $T_0 = 0$  で一様であるとする (Fig. 6 参照)。この系の左端を  $T_1 = 1$  で加熱することにより、固相が液相へと融解する計算を行う。本手法は二次元領域を扱うため、領域を縦  $H$ 、横  $100H$  とすることで無限に長い一次元領域を再現する。境界条件として、流れ場に対しては左右の壁にはすべりなし条件、上下壁には周期境界条件を適用し、温度場に対しては左壁には  $T = T_1$ 、右壁には  $T = T_0$  の等温条件、上下壁には周期境界条件を適用する。また、凝固点温度は  $T_m = 1/3$  とする。支配パラメータは、液相のステファン数  $St_l = c_{pf}(T_1 - T_m)/L$ 、固相のステファン数  $St_s = c_{pf}(T_m - T_0)/L$  である。ここで、 $c_{pf}$  は定圧比熱である。本計算においては、それぞれ  $St_l = 0.2$ 、 $St_s = 0.1$  とし、その他のパラメータを  $H = 10\Delta x$ 、 $\alpha = 0.05\Delta x$ 、 $c_{pf} = 13.3$ 、 $L = 44.3$  とした。なお、 $c_{pf}$  の値は見かけの熱容量  $\lambda/\alpha$  から算出した。

### 3.1.2. 厳密解

熱物性値が固相と液相で一定である場合、固液境界の位置は以下の式で求めることができる<sup>(19)</sup>。

$$X_k(t) = 2k\sqrt{at}, \quad (52)$$

ここで、 $k$  は以下の方程式より求まる値である。

$$\frac{St_l}{\exp(k^2)\text{erf}(k)} - \frac{St_s}{\exp(k^2)\text{erfc}(k)} = k\sqrt{\pi}, \quad (53)$$

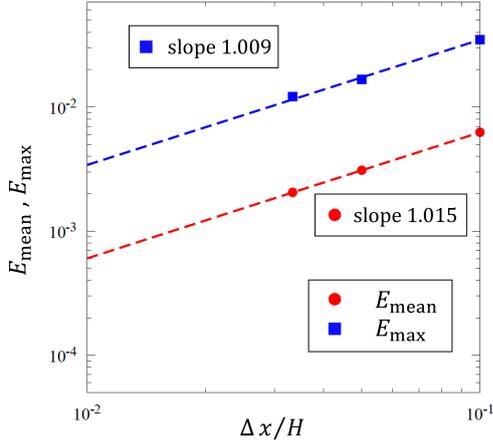


Fig. 8 Mean error  $E_{\text{mean}}$  and maximum error  $E_{\text{max}}$  of the temperature in a one-dimensional melting problem.

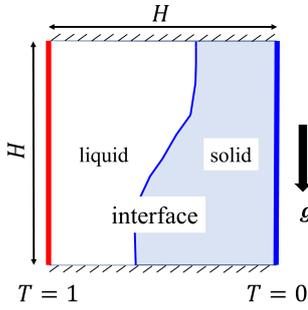


Fig. 9 Computational domain for a two-dimensional melting problem in a square area.

ここで、 $\text{erf}(k)$  は誤差関数、 $\text{erfc}(k) (= 1 - \text{erf}(k))$  は相補誤差関数である。また、温度分布は以下の式で求めることができる<sup>(19)</sup>。

$$T(x, t) = \begin{cases} T_1 - \frac{(T_1 - T_m) \text{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right)}{\text{erf}(k)}, & (0 < x \leq X_k(t), t > 0), \\ T_0 + \frac{(T_m - T_0) \text{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right)}{\text{erfc}(k)}, & (x \geq X_k(t), t > 0). \end{cases} \quad (54)$$

### 3.1.3. 計算結果と厳密解の比較

本計算結果と、式 (52) および (54) で求められる値との比較を行う。まず、温度場の比較結果を Fig. 7(a) に示す。Fig. 7(a) より、どの時刻においても温度場が良く一致していることがわかる。次に、固液境界の位置の比較結果を Fig. 7(b) に示す。Fig. 7(b) より、境界の位置が良く一致していることがわかる。よって、一次元領域において本手法の妥当性を確認することができる。

最後に、Fig. 8 に温度場に対する誤差評価の結果を示す。図中の  $E_{\text{mean}}$ 、 $E_{\text{max}}$  はそれぞれ平均誤差、最大誤差を表している。Fig. 8 よりこの計算手法が、最大誤差と平均誤差の両方について空間一次精度をもつことがわかった。

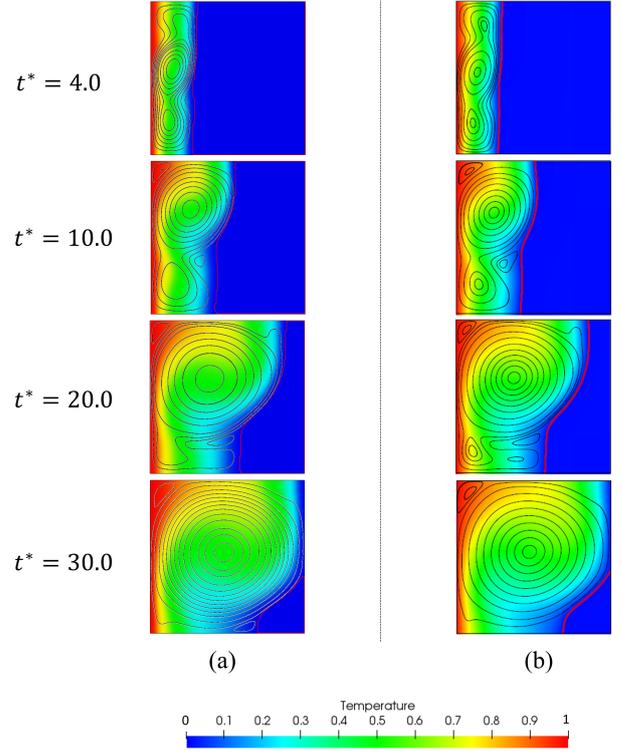


Fig. 10 Temperature and flow fields at  $t^* = 4.0, 10.0, 20.0$  and  $30.0$ : (a) the present results; (b) the results by Huang and Wu<sup>(8)</sup> ( $t^* = \alpha t/H^2$ ). The red solid line denotes the location of solid-liquid interface.

## 3.2. 二次元正方領域における融解・凝固問題

### 3.2.1. 計算条件

一辺の長さが  $H$  の正方領域中が、初期においてすべて固相で満たされ、凝固点温度  $T_0 = 0$  で一様であるとする (Fig. 9 参照)。この領域の左壁を  $T_1 = 1$  で加熱することにより、固相が液相へと融解する計算を行う。また、下向きに重力加速度  $g$  が作用するため、液相内には熱膨張による自然対流が発生する。境界条件として、流れ場に対してはすべての壁ですべりなし条件を適用し、温度場に対しては、左壁には  $T_1 = 1$ 、右壁には  $T_0 = 0$  の等温条件、上下の壁には断熱条件を適用する。固相の表面には、IBM によりすべりなし境界条件および等温境界条件  $T = T_0$  を適用する。支配パラメータは、プラントル数  $Pr = \nu/\alpha$ 、レイリー数  $Ra = g\beta(T_1 - T_0)H^3/(\nu\alpha)$  およびステファン数  $St = c_{\text{pf}}(T_1 - T_0)/L$  である。ここで、 $\beta$  は体積膨張率である。本計算では、 $Pr = 0.02$ 、 $Ra = 2.5 \times 10^4$ 、 $St = 0.01$  とし、その他のパラメータを  $H = 128\Delta x$ 、 $\nu = 0.00859\Delta x$ 、 $\alpha = 0.429\Delta x$ 、 $g\beta\Delta x = 4.39 \times 10^{-5}$ 、 $c_{\text{pf}} = 1.39$ 、 $L = 139$  とした。なお、 $c_{\text{pf}}$  の値は見かけの熱容量  $\lambda/\alpha$  から算出した。

### 3.2.2. 計算結果

まず、各無次元時間における温度場の様子を Fig. 10 に示す。同図には、(a) に本計算結果、(b) に Huang and Wu<sup>(8)</sup> の結果を示す。また、いずれの結果も流れ場を流線で表している。Fig. 10 より、温度場および流れ場が定性的によく一致していることがわかる。

固液境界の時間変化を Fig. 11(a) に示す。Fig. 11(a) より、

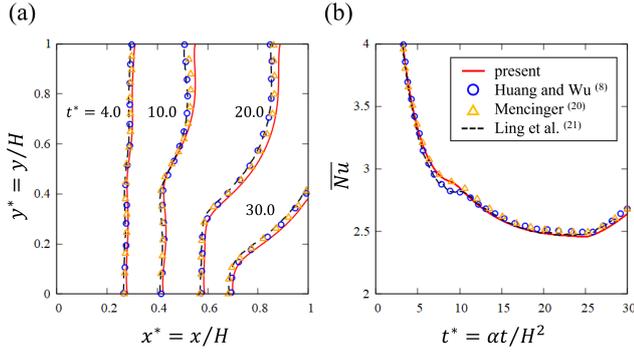


Fig. 11 (a) Comparisons of the location of the solid-liquid interface at  $t^* = 4.0, 10.0, 20.0$  and  $30.0$  ( $t^* = at/H^2$ ); (b) time variations of the averaged Nusselt number on the left wall of the cavity.

どの無次元時刻においても境界の位置が既存の研究と良く一致していることがわかる。次に、以下の式で定義される左壁面の平均ヌセルト数を比較した。

$$\overline{Nu} = \frac{1}{H} \int_0^H \left[ -\frac{H}{(T_1 - T_0)} \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} \right] dy. \quad (55)$$

結果を Fig. 11(b) に示す。Fig. 11(b) より、本計算結果と既存の研究が良く一致していることがわかる。よって、二次元領域での固相が自由運動しない場合において妥当性を確認することができた。

### 3.3. 二次元円管領域における融解・凝固問題

#### 3.3.1. 計算条件

計算領域は一辺の長さが  $D+d$  の正方領域とし、その内部に埋め込み境界法によって直径  $D+2\xi$  の円管を設ける (Fig. 12 参照)。その円管内部が初期においてすべて固相で満たされ、凝固点温度  $T_0 = 0$  で一様であるとする。そして、円管壁面を  $T_1 = 1$  で加熱することで、徐々に固相が液相へと融解する計算を行う。本研究では、固相が計算領域の中心に固定されている場合と自由運動する場合の計算を行った。また、下向きに重力加速度  $g$  が作用するため、液相内には熱膨張による自然対流が発生する。しかし、固相の密度は液相の密度と等しいものとするため、重力は固相の運動に影響を与えない。境界条件として、IBM によって円管壁面にはすべりなし条件と等温条件  $T = T_1$ 、固相表面にはすべりなし条件と等温条件  $T = T_0$  を適用する。また、円管外の壁については鏡面条件と断熱条件を適用する。

支配パラメータはプラントル数  $Pr = \nu/\alpha$ 、レイリー数  $Ra = g\beta(T_1 - T_0)D^3/(\nu\alpha)$ 、およびステファン数  $St = c_{pf}(T_1 - T_0)/L$  である。本計算では、 $Pr = 0.02$ 、 $Ra = 2.5 \times 10^4$ 、 $St = 0.01$  とし、その他のパラメータを  $D = 128\Delta x$ 、 $\xi = 2\Delta x$ 、 $\nu = 0.00859\Delta x$ 、 $\alpha = 0.429\Delta x$ 、 $g\beta\Delta x = 4.39 \times 10^{-5}$ 、 $c_{pf} = 1.39$ 、 $L = 139$  とした。なお、 $c_{pf}$  の値は見かけの熱容量  $\lambda/\alpha$  から算出した。

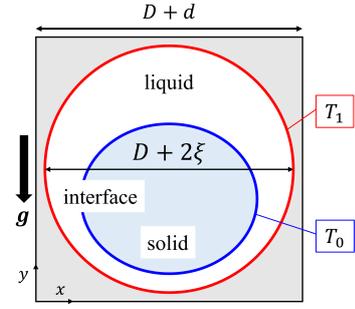


Fig. 12 Computational domain for a two-dimensional melting problem in a circular cylinder.

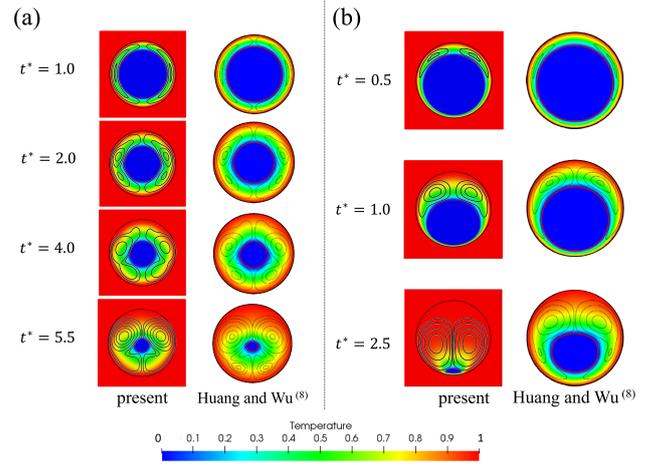


Fig. 13 Temperature and flow fields: (a) the solid phase is fixed; (b) the solid phase is free ( $t^* = at/D^2$ ). The red solid line denotes the location of solid-liquid interface.

#### 3.3.2. 計算結果

まず、各無次元時間における温度場の様子を Huang and Wu<sup>(8)</sup> の結果と比較したものを Fig. 13 に示す。同図には、(a) では固相が固定されている場合、(b) では固相が自由運動する場合の結果を示しており、いずれの結果も流れ場は流線で表されている。Fig. 13(a) より、固相が固定されている場合では、温度場および流れ場が定性的によく一致していることがわかる。その一方で、Fig. 13(b) から、固相が自由運動する場合では、Huang and Wu<sup>(8)</sup> の結果に比べ本計算結果の固相の融解が早く進んでいることがわかる。

次に、円管壁面の平均ヌセルト数の比較を行う。なお、平均ヌセルト数は以下のように計算される<sup>(13)</sup>。

$$\overline{Nu} = \frac{Q_{\text{tot}}}{\pi\lambda(T_1 - T_0)}, \quad (56)$$

ここで、 $Q_{\text{tot}}$  は円管壁面において、IBM によって境界点が周囲に分配した熱量の総和である。Fig. 14 に平均ヌセルト数の時間変化を示す。同図には、(a) では固相が固定されている場合、(b) では固相が自由運動する場合の結果を示している。Fig. 14(a) より、固相が固定されている場合では、本計算結果が既存の研究結果とよく一致することがわかる。し

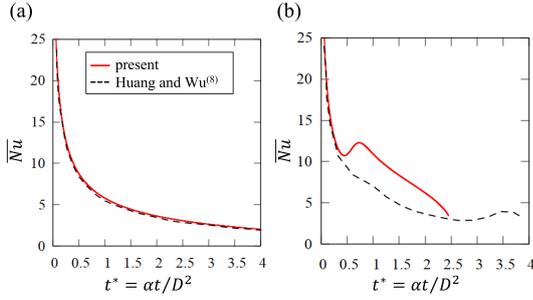


Fig. 14 Time variations of the space-averaged Nusselt number on the circular cylinder wall: (a) the solid phase is fixed; (b) the solid phase is free.

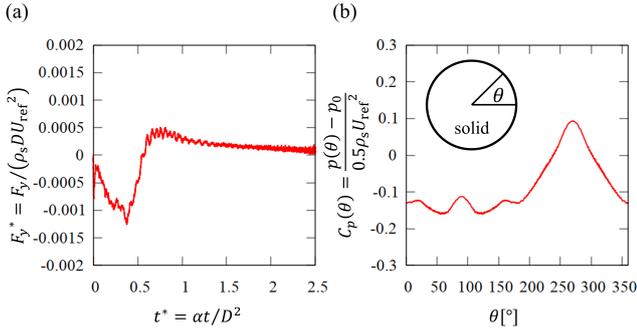


Fig. 15 (a) Time variation of the fluid force acting on the ice particle; (b) distribution of the pressure coefficient at  $t^* = 0.5$ .

かし Fig. 14(b) より、固相が自由運動する場合には、本計算結果と既存の研究結果では定量的にも差異があることがわかる。これは、固相が受ける流体力が手法によって異なり、結果的に固相の運動が異なることに起因する。ただし、Huang and Wu<sup>(8)</sup> の手法では、内部質量の影響<sup>(18)</sup> を計算していないため、流体力を正しく評価できていないと考えられることに注意する。また、Huang and Wu<sup>(8)</sup> の手法では、固相の変形に伴い、境界点  $\mathbf{X}_k$  の個数を増減させる処理を行っているのに対し、本手法では、この処理は行っていない。しかし、固相が固定されている場合の結果は Huang and Wu<sup>(8)</sup> の結果と良い一致を示していることから、この処理の影響はほとんどない。従って、固相が自由運動する場合における、本計算結果と Huang and Wu<sup>(8)</sup> の結果の差異に、この処理は関係していないと考えられる。

最後に、固相が自由運動する場合について、固相にかかる流体力を調べた。Fig. 15(a) に流体力の時間変化を示す。Fig. 15(a) より、若干の時間的振動があるものの流体力を計算できていることが確認できた。また、Fig. 15(b) より、局所的な圧力も計算できることが確認できた。

### 3.4. 三次元半無限領域における融解・凝固問題

#### 3.4.1. 計算条件

無限に長い三次元領域内が、初期においてすべて固相で満たされており、温度が  $T_0 = 0$  で一様であるとする (Fig. 16 参照)。この系の左端を  $T_1 = 1$  で加熱することにより、固相が液相へと融解する計算を行う。この計算は 3.1 節の問題と

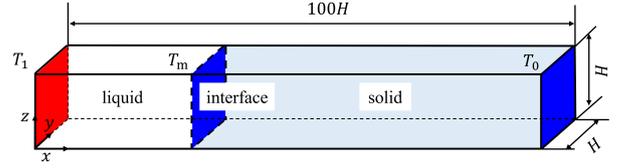


Fig. 16 Computational domain for a three-dimensional melting problem in a semi-infinite area.

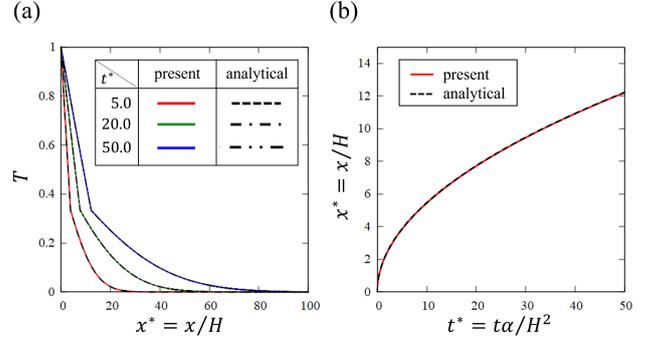


Fig. 17 Comparisons between the present method and analytical solutions: (a) temperature; (b) location of solid-liquid interface.

本質的には同じであるが、三次元計算であることに注意する。また、この問題では温度場の計算に optimal two-relaxation-times thermal LBM<sup>(22)</sup> を用いる。本計算では、領域を縦  $H$ 、横  $100H$ 、高さ  $H$  とすることで無限に長い三次元領域を再現する。境界条件として、流れ場に対しては左右の壁にはすべりなし条件、上下および左右壁には周期境界条件を適用し、温度場に対しては左壁には  $T = T_1$ 、右壁には  $T = T_0$  の等温条件、上下および左右壁には周期境界条件を適用する。また、凝固点温度は  $T_m = 1/3$  とする。支配パラメータ、その他のパラメータは 3.1 節と同様に設定する。

また、この計算は三次元計算であるため、2.7 節に示した二次元の固液境界上の法線ベクトル  $\mathbf{n}$  の計算方法を用いることができない。そこで、境界点  $\mathbf{X}_k$  の近傍の境界点の相対位置ベクトルを計算し、それらの外積から法線ベクトルを求める。

#### 3.4.2. 計算結果

本計算結果と、式 (52) および (54) で求められる値との比較を行う。まず、温度場の比較結果を Fig. 17(a) に示す。Fig. 17(a) より、どの時刻においても温度場が良く一致していることがわかる。次に、固液境界の位置の比較結果を Fig. 17(b) に示す。Fig. 17(b) より、境界の位置が良く一致していることがわかる。よって、三次元の一様な領域において本手法の妥当性を確認することができる。また、3.1 節同様に誤差の収束性を確認したところ、空間一次精度をもつことがわかった。

### 4. 結言

応力テンソルの不連続に基づく埋め込み境界-格子ボルツマン法<sup>(11)</sup> に対して、温度場の計算<sup>(13)</sup> と融解・凝固によ

る境界の移動計算<sup>(8)</sup>を導入し、融解・凝固を伴う熱流動問題を解析する新たな手法の開発および妥当性検証を行った。一次元半無限領域、二次元正方領域および三次元半無限領域における融解・凝固問題の解析を行い、解析解および既存の研究結果とよく一致することを確認した。よって固相が固定されている場合における妥当性を得た。二次元円管領域における融解・凝固問題では、Huang and Wu<sup>(8)</sup>の結果と、流体力の計算方法に起因すると考えられる差異があった。しかし、本研究で開発した手法を用いて、変形する固相にかかる流体力を計算できることを確認できた。

今後の課題として、三次元問題への拡張、および氷スラリー流れなどへの応用が挙げられる。

### 謝辞

本研究の一部は、JSPS 科研費 JP21K03873 の助成を受けたものです。

### 付録 A 無次元量の定義

本手法で用いる無次元変数の定義を以下に示す。使用される物理量はすべて、代表長さ  $\hat{L}_0$ 、粒子の代表速さ  $\hat{c}$ 、時間スケール  $\hat{t}_0 = \hat{L}_0/\hat{U}_0$  ( $\hat{U}_0$ : 流れの代表速さ)、基準密度  $\hat{\rho}_f$ 、基準温度差  $\Delta\hat{T}_0$ 、基準温度  $\hat{T}_0$  および定圧比熱  $\hat{c}_{pf}$  を用いて無次元化したものである。

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{c}_i &= \hat{\mathbf{c}}_i/\hat{c}, & \mathbf{x} &= \hat{\mathbf{x}}/\hat{L}_0, \\ t &= \hat{t}/\hat{t}_0, & \Delta x &= \Delta\hat{x}/\hat{L}_0, \\ \Delta t &= \Delta\hat{t}/\hat{t}_0, & f_i &= \hat{f}_i/\hat{\rho}_f, \\ g_i &= (\hat{g}_i - \hat{T}_0)/\Delta\hat{T}_0, & \rho &= \hat{\rho}/\hat{\rho}_f, \\ p &= \hat{p}/(\hat{\rho}_f\hat{c}^2), & \mathbf{u} &= \hat{\mathbf{u}}/\hat{c}, \\ T &= (\hat{T} - \hat{T}_0)/\Delta\hat{T}_0, & \nu &= \hat{\nu}/(\hat{c}\hat{L}_0), \\ \alpha &= \hat{\alpha}/(\hat{c}\hat{L}_0), & \lambda &= \hat{\lambda}/(\hat{\rho}_f\hat{c}_{pf}\hat{c}\hat{L}_0), \\ \mathbf{g} &= \hat{\mathbf{g}}\hat{L}_0/(\hat{\rho}_f\hat{c}^2), & q &= \hat{q}\hat{L}_0/(\hat{\rho}_f\hat{c}_{pf}\Delta\hat{T}_0\hat{c}), \\ \mathbf{X}_k &= \hat{\mathbf{X}}_k/\hat{L}_0, & \mathbf{U}_k &= \hat{\mathbf{U}}_k/\hat{c}, \\ T_k &= (\hat{T}_k - \hat{T}_0)/\Delta\hat{T}_0, & L &= \hat{L}/(\hat{c}_{pf}\Delta\hat{T}_0), \\ \mathbf{F} &= \hat{\mathbf{F}}/(\hat{\rho}_f\hat{c}^2\hat{L}_0^2), & \mathbf{T} &= \hat{\mathbf{T}}/(\hat{\rho}_f\hat{c}^2\hat{L}_0^3), \\ \beta &= \hat{\beta}\Delta\hat{T}_0, \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

ここで、 $\hat{\cdot}$ は有次元量を表す。なお、ストローハル数  $Sh$  を  $Sh = \hat{U}_0/\hat{c}$  と定義すると、 $Sh = \Delta t/\Delta x$  であることに注意されたい。

### 参考文献

- (1) J. Wang, F. Battaglia, S. Wang, T. Zhang and Z. Ma: Flow and heat transfer characteristics of ice slurry in typical components of cooling systems: A review, *Int. J. Heat Mass Transf.*, **141** (2019), pp. 922–939.
- (2) 稲室隆二, 吉野正人, 鈴木康祐: 格子ボルツマン法入門-複雑境界および移動境界流れの数値計算法, 丸善出版, (2020).
- (3) R. Samanta, H. Chattopadhyay and C. Guha: A review on the application of lattice Boltzmann method for melting and solidification problems, *Compt. Mater. Sci.*, **206** (2022), 111288 (22pp).
- (4) W.-S. Jiaung, J.-R. Ho and C.-P. Kuo: Lattice-Boltzmann method for the heat conduction problem with phase change, *Numer. Heat Transf. Part B Fundam.*, **30** (2001), pp. 167–187.
- (5) M. Jourabian, A.A.R. Darzi, O.A. Akbari and D. Toghraie: The enthalpy-based lattice Boltzmann method (LBM) for simulation of NePCM melting in inclined elliptical annulus, *Physica A*, **548** (2020), 123887 (16pp).
- (6) W. Miller, S. Succi and D. Mansutti: Lattice Boltzmann model for anisotropic liquid–solid phase transition, *Phys. Rev. Lett.*, **86** (2001), pp. 3578–3581.
- (7) R. Rojas, T. Takaki and M. Ohno: A phase-field-lattice Boltzmann method for modeling motion and growth of a dendrite for binary alloy solidification in the presence of melt convection, *J. Comput. Phys.*, **298** (2015), pp. 29–40.
- (8) R. Huang and H. Wu: An immersed boundary–thermal lattice Boltzmann method for solid–liquid phase change, *J. Comput. Phys.*, **277** (2014), pp. 305–319.
- (9) K. Suzuki, T. Kawasaki, T. Asaoka and M. Yoshino: Numerical simulations of solid–liquid and solid–solid interactions in ice slurry flows by the thermal immersed boundary–lattice Boltzmann method, *Int. J. Heat Mass Transf.*, **121** (2018), pp. 1099–1117.
- (10) K. Suzuki, T. Kuroiwa, T. Asaoka and M. Yoshino: Particle-resolved simulations of ice slurry flows in a square duct by the thermal immersed boundary–lattice Boltzmann method, *Comput. Fluids*, **228** (2021), 105064(18pp).
- (11) K. Suzuki and M. Yoshino: A stress tensor discontinuity-based immersed boundary–lattice Boltzmann method, *Comput. Fluids*, **172** (2018), pp. 593–608.
- (12) K. Suzuki, K. Ishizaki and M. Yoshino: Local force calculations by in improved stress tensor discontinuity-based immersed boundary–lattice Boltzmann method, *Phys. Fluids*, **33** (2021), 047104(17pp).
- (13) K. Suzuki, T. Kawasaki, N. Furumachi, Y. Tai and M. Yoshino: A thermal immersed boundary–lattice Boltzmann method for moving-boundary flows with Dirichlet and Neumann conditions, *Int. J. Heat Mass Transf.*, **121** (2018), pp. 1099–1117.

- (14) Y. Mino, H. Shinto, S. Sakai and H. Matsuyama: Effect of internal mass in the lattice Boltzmann simulation of moving solid bodies by the smoothed-profile method, *Phys. Rev. E*, **95** (2017), 043309(10pp).
- (15) Z.L. Wang, J.R. Fan and K. Luo: Combined multi-direct forcing and immersed boundary method for simulating flows with moving particles, *Int. J. Multiphase Flow*, **34** (2008), pp. 283–302.
- (16) C.S. Peskin: The immersed boundary method, *Acta Numer.*, **11** (2002), pp. 479–517.
- (17) Z.L. Wang, J.R. Fan, K. Luo and K. Cen: Immersed boundary method for the simulation of flows with heat transfer, *Int. J. Heat Mass Transf.*, **52** (2009), pp. 4510–4518.
- (18) K. Suzuki and T. Inamuro: Effect of internal mass in the simulation of a moving body by the immersed boundary method, *Comput. Fluids*, **49** (2011), pp. 173–187.
- (19) A. Solomon: Some remarks on the Stefan problem, *Math. Comput.*, **20** (1996), pp. 347–360.
- (20) J. Mencinger: Numerical simulation of melting in two-dimensional cavity using adaptive grid, *J. Comput. Phys.*, **198** (2004), pp. 243–264.
- (21) K. Ling and W.Q. Tao: A sharp-interface model coupling VOSET and IBM for simulations on melting and solidification, *Comput. Fluids*, **178** (2019), pp. 113–131.
- (22) I. Ginzburg, D. d’Humières and A. Kuzmin: Optimal stability of advection-diffusion lattice Boltzmann models with two relaxation times for positive/negative equilibrium, *J. Stat. Phys.*, **139** (2010), pp. 1090–1143.