

拡張カルマンフィルタ有限要素法に基づく 潮流の最適推定解析における推定精度に関する考察

CONSIDERATION ON ESTIMATION ACCURACY IN OPTIMAL ESTIMATION ANALYSIS OF TIDAL FLOW BASED ON THE EXTENDED KALMAN FILTER FINITE ELEMENT METHOD

倉橋 貴彦¹⁾

Takahiko KURAHASHI

1) 長岡技術科学大学 技学研究院 機械系 (〒 940-2188 長岡市上富岡町 1603-1, E-mail: kurahashi@mech.nagaokaut.ac.jp)

In this study, the tidal flow estimation analysis in a model of Tokyo bay based on a method combined the extended Kalman filter and the finite element method (FEM). This method is called the extended Kalman filter FEM. In this method, numerical simulation considering the observation value is carried out, and it is known that numerical analysis that appropriately represents the phenomenon can be performed by using this method. However, in the system equation, the stabilization parameter is included to prevent the numerical instability, it appears that this parameter affects the estimation of tidal flow. The purpose of this study is to investigate the effect of stabilization parameter in the optimal estimation of tidal flow.

Key Words: Extended Kalman Filter, Finite Element Method, Stabilization Parameter, Optimal Estimation

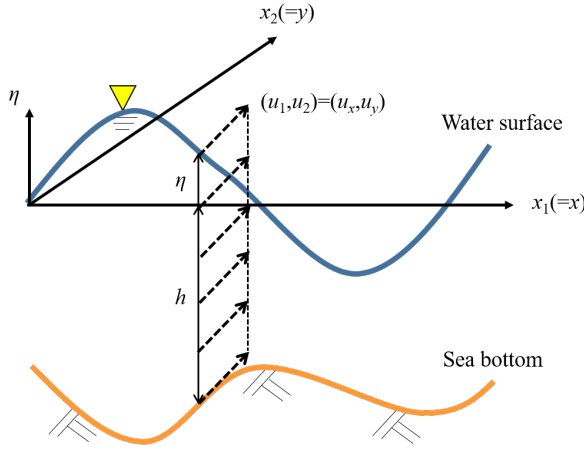
1. はじめに

カルマンフィルタは 1960 年に Rudolf Emil Kalman により提唱された状態推定理論である⁽¹⁾。この理論は、アポロ計画の際のロケットの軌道推定に用いられ、当時の事を記載した論文では、解析内で用いられる観測値（光学センサ）の精度が十分では無いという問題があったが、月へのロケット軌道を推定できる理論であったと言われている⁽²⁾。この手法は、初期条件や境界条件、支配方程式内の係数等による数値モデルの不確かさを確率論に基づき修正する方法であり、近年では、コンピュータ上の仮想空間と、実際の物理空間を結ぶ枠組みを作る方法（デジタルツインを構築する方法）の 1 つとして考えられている⁽³⁾。カルマンフィルタでは、物理現象を表すためにシステムを表す方程式を導入することになる。支配方程式を離散系で表しシステム方程式とすることもあり、適用する離散化手法によっては離散化により生じる誤差（級数展開の近似による誤差や、補間により生じる誤差等）が異なる。そのため、良好に物理現象を表現できるように、適切な離散化手法を適用する必要がある。本研究では、カルマンフィルタを適用し潮流推定を行うことを目的としているが、既往の研究として、有限差分法を離散化手法として

用い、イギリスとフランスの間の北海周辺についての流れ場推定解析例がある⁽⁴⁾。解析モデルの形状を適切に表しながら、要素内における物理量を補間できる有限要素法とカルマンフィルタを融合した手法を用いた流れ解析は、川原らの研究グループにより行われ^(5, 6, 7)、著者を含む研究グループも、適切な観測点配置に関する調査⁽⁸⁾や、潮流発電ポテンシャルの算定⁽⁹⁾に対する応用等について研究を実施している*。カルマンフィルタでは、推定誤差を最小とするカルマンゲインを算定し、シミュレーションの結果と観測値を適切にブレンド（線形結合）することにより最適推定値を算定するが、非線形のモデルをシステム方程式として使用することは、上記の線形結合により推定値を表せず直接適用できないことから、一般にシステム方程式の線形化を行う、あるいは複数のサンプルを用意し、状態変数の確率分布をアンサンブル近似により表し、線形化を行わずに非線形のシステム方程式をカルマンフィルタに適用する方法が用いられる^(10, 11)。

本研究では、比較的簡便に非線形のシステム方程式を導入することができる拡張カルマンフィルタを適用し、非線形システム方程式の空間方向の離散化に有限要素法を適用するこ

*本研究で対象としている潮流の最適推定解析は、他にも、埋立て事業における流れの予測、取放水管路内の流れの整流検討等への応用も期待できる。



Assumption:
 *The current velocity from the water surface to the sea bottom is uniform.
 *Water pressure is represented by hydrostatic pressure.

Fig. 1: Illustration of variables of shallow water equation.

とにより潮流推定の解析を行う。カルマンフィルタ有限要素法に関する研究は、地盤解析⁽¹²⁾や構造解析⁽¹³⁾を対象としたものについても見受けられるが、観測値は、事前にシミュレーションを実施することで模擬的に作成した値を用いた例が多く、実モデルを対象としたものも見受けられるが⁽⁵⁾、実モデルを対象とし推定精度に関して論じた文献は数少ないものと思われる。そこで、解析モデルとしては、東京湾のモデルを導入し、流入境界からは主要4分潮の水位変動の条件を与え、陸岸境界ではスリップ境界条件を適用する。拡張カルマンフィルタにおいて使用する観測値としては、東京・横浜・千葉における検潮所の実水位データを適用し、システム方程式の違いや、数値安定性を考慮して設定するパラメータを変更することで、横須賀における最適推定値に対して推定精度の検証を行うことを本研究の目的とする。

2. 非線形浅水長波方程式に基づく有限要素方程式の導出

本論文では、支配方程式として、式(1)および式(2)に示す非線形浅水長波方程式を用いる。流れ場の解析については平面二次元モデルを対象とする。式(1)および式(2)は総和規約により示している。

$$\dot{u}_i + u_j u_{i,j} + g \eta_{,i} - \nu (u_{i,j} + u_{j,i})_{,j} + f u_i = 0 \quad (1)$$

$$\dot{\eta} + ((h + \eta) u_i)_{,i} = 0 \quad (2)$$

ここで、 u_i は平面二次元モデルにおける x 軸方向および y 軸方向の流速、 g は重力加速度、 h は静水時の水深を示す基準水深、 η は基準水深からの水位変動量、 ν は渦動粘性係数を示す(図1参照.)。

式(1)および式(2)に対して両辺に重み関数 u_{mi}^* 、 η_m^* を乗じ、要素領域 Ω_m において積分すると、式(3)および式(4)に示す重み付き残差方程式を得る。添え字の m は各要素の

番号を示す。

$$\int_{\Omega_m} u_{mi}^* \dot{u}_{mi} d\Omega + \int_{\Omega_m} u_{mi}^* u_{mj} u_{mi,j} d\Omega + g \int_{\Omega_m} u_{mi}^* \eta_{m,i} d\Omega - \nu \int_{\Omega_m} u_{mi}^* (u_{mi,j} + u_{mj,i})_{,j} d\Omega + f \int_{\Omega_m} u_{mi}^* u_{mi} d\Omega = 0 \quad (3)$$

$$\int_{\Omega_m} \eta_m^* \dot{\eta}_m d\Omega + \int_{\Omega_m} \eta_m^* ((h_m + \eta_m) u_{mi})_{,i} d\Omega = 0 \quad (4)$$

本論文では、要素領域 Ω_m を三角形領域とし、ガラーキン法に基づき、対象とする要素における状態変数 u_{mi} 、 η_m および重み関数 u_{mi}^* 、 η_m^* に対して式(5)~式(8)に示す補間関数を適用する。

$$u_{mi} = N_{m1} u_{mi1} + N_{m2} u_{mi2} + N_{m3} u_{mi3} = \{\Phi_m\}^T \{U_{mi}\} \quad (5)$$

$$\eta_m = N_{m1} \eta_{m1} + N_{m2} \eta_{m2} + N_{m3} \eta_{m3} = \{\Phi_m\}^T \{E_m\} \quad (6)$$

$$u_{mi}^* = N_{m1} u_{mi1}^* + N_{m2} u_{mi2}^* + N_{m3} u_{mi3}^* = \{\Phi_m\}^T \{U_{mi}^*\} \quad (7)$$

$$\eta_m^* = N_{m1} \eta_{m1}^* + N_{m2} \eta_{m2}^* + N_{m3} \eta_{m3}^* = \{\Phi_m\}^T \{E_m^*\} \quad (8)$$

ここで N_{m1} 、 N_{m2} および N_{m3} は式(9)から式(12)により表される三角形要素における形状関数を示している。また A_m は式(13)により計算される要素面積を表し、 (i, j, k) は、 $(i, j, k) = (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)$ という組み合わせで変わる変数を示す**。

$$N_{mi} = a_i + b_i x + c_i y \quad (9)$$

$$a_i = \frac{1}{2A_m} (x_j y_k - x_k y_j) \quad (10)$$

$$b_i = \frac{1}{2A_e} (y_j - y_k) \quad (11)$$

$$c_i = \frac{1}{2A_e} (x_k - x_j) \quad (12)$$

$$A_e = \frac{1}{2} [x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)] \quad (13)$$

重み付き残差方程式に補間関数を代入することにより、有限要素方程式は式(14)および式(15)のように表すことができる。

$$[M_m] \{\dot{U}_{mi}\} + \bar{u}_{mj} [S_{mj}] \{U_{mi}\} + g [S_{mi}] \{E_m\} - \nu ([H_{mj}] \{U_{mi}\} + [H_{mj}] \{U_{mj}\}) + f [M_m] \{U_{mi}\} = \{0\} \quad (14)$$

$$[M_m] \{\dot{E}_m\} + \bar{u}_{mi} [S_{mi}] \{E_{mi}\} + \bar{u}_{mi} [S_{mi}] \{h_m\} + (\bar{h}_m + \bar{\eta}_m) [S_{mi}] \{U_{mi}\} = \{0\} \quad (15)$$

ここに、行列 $[M_m]$ 、 $[S_{mi}]$ および $[H_{mi}]$ は形状関数ベクトル $\{\Phi_m\}$ を用いることにより式(16)~式(18)のように書き表すことができる。

$$[M_m] = \int_{\Omega_m} \{\Phi_m\}^T \{\Phi_m\} d\Omega \quad (16)$$

**式(9)から式(12)の計算、および式(13)の計算に使用される各座標の値 (x_1, y_1) 、 (x_2, y_2) 、 (x_3, y_3) は、各要素 m の三角形の頂点の座標を示している。式(9)の x 、 y は、対象とする要素 m 内の任意の座標点を示す。

$$[S_{mi}] = \int_{\Omega_m} \{\Phi_m\}^T \{\Phi_{m,i}\} d\Omega \quad (17)$$

$$[H_{mii}] = \int_{\Omega_m} \{\Phi_{m,i}\}^T \{\Phi_{m,i}\} d\Omega \quad (18)$$

ここで、セレクトティブ・ランピング法を適用し、式(14)および式(15)を時間方向に離散化する。式(14)および式(15)の各時間微分項に対して前進差分近似を適用すると式(19)および式(20)のよう記述できる。ここに n は時間ステップを表す。

$$\begin{aligned} [M_m]\{U_{mi}^{n+1}\} &= ([M_m] - \Delta t u_{mj}^{-n}[S_{mj}] \\ &+ \Delta t v[H_{mjj}] - \Delta t f[M_m])\{U_{mi}^n\} \\ &+ \Delta t v[H_{mij}]\{U_{mj}^n\} - \Delta t g[S_{mi}]\{E_m^n\} \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} [M_m]\{E_m^{n+1}\} &= ([M_m] - \Delta t u_{mi}^{-n}[S_{mi}])\{E_m^n\} \\ &- \Delta t(\bar{h}_m + \bar{\eta}_m^n)[S_{mi}]\{U_{mi}^n\} - \Delta t u_{mi}^{-n}[S_{mi}]\{h_m\} \end{aligned} \quad (20)$$

また、式(19)および式(20)における質量行列を、集中化した行列 $[\bar{M}_e]$ 、混合質量行列 $[\tilde{M}_e]$ に置き換えることにより、式(21)および式(22)のよう書くことができる。

$$\begin{aligned} [\bar{M}_m]\{U_{mi}^{n+1}\} &= ([\bar{M}_m] - \Delta t u_{mj}^{-n}[S_{mj}] + \Delta t v[H_{mjj}] \\ &- \Delta t f[M_m])\{U_{mi}^n\} \\ &+ \Delta t v[H_{mij}]\{U_{mj}^n\} - \Delta t g[S_{mi}]\{E_m^n\} \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} [\bar{M}_m]\{E_m^{n+1}\} &= ([\bar{M}_m] - \Delta t u_{mi}^{-n}[S_{mi}])\{E_m^n\} \\ &- \Delta t(\bar{h}_m + \bar{\eta}_m^n)[S_{mi}]\{U_{mi}^n\} - \Delta t u_{mi}^{-n}[S_{mi}]\{h_m\} \end{aligned} \quad (22)$$

ここで $[M_m]$ 、 $[\bar{M}_m]$ は式(23)および式(24)のように整合質量行列、集中質量行列を示しており、混合質量行列 $[\tilde{M}_m]$ は式(25)のようにランピングパラメータ e を用いて表す⁽¹⁴⁾。ランピングパラメータは数値的不安定を回避するように設定するパラメータであり、0 から 1 の間で与えられる。

$$[M_m] = \frac{A_m}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$[\bar{M}_m] = \frac{A_m}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$[\tilde{M}_m] = (1 - e)[\bar{M}_m] + e[M_m] \quad (25)$$

ここで、式(21)および式(22)を全要素に対して重ね合わせ、得られた式の両辺に重ね合わせ後の集中化質量行列の逆行列を乗じることにより、最終的な有限要素方程式を得ることができる。次章以降の説明のために、式展開後の最終形を式(26)のよう記述する。

$$\{\hat{\phi}^{n+1}\} = [A]\{\hat{\phi}^n\} + \{N^n\} \quad (26)$$

ここに、 $\{\hat{\phi}\}$ は通常の数値シミュレーションにおいては、 $n+1$ 時間ステップの解であるが、カルマンフィルタでは推定値と捉

え、式展開を行うことになる。 $\{\hat{\phi}\}^T = \{\{\hat{U}\}^T \ \{\hat{V}\}^T \ \{\hat{E}\}^T\}$ により表される。また、 $[A]$ は状態遷移行列、 $\{N\}^T$ は式(26)の右辺第1項以外の諸量により表されるベクトルを示す。

3. 拡張カルマンフィルタに基づく状態推定解析

3.1. システム方程式および観測方程式

拡張カルマンフィルタにおいて用いるシステム方程式、観測方程式をそれぞれ式(27)、式(28)に示す。

$$\{\phi^{n+1}\} = [A]\{\phi^n\} + \{N^n\} + [\Gamma]\{q^n\} \quad (27)$$

$$\{z^{n+1}\} = [H]\{\phi^{n+1}\} + \{r^{n+1}\} \quad (28)$$

ここで $\{\phi\}$ は真値の状態変数ベクトル、 $[\Gamma]$ は駆動行列、 $\{z\}$ は観測値ベクトル、 $[H]$ は観測行列、 $\{q^n\}$ はシステムノイズベクトル、 $\{r^n\}$ は観測ノイズベクトルを示す。ここに、システムノイズベクトルおよび観測ノイズベクトルは正規分布に従うホワイトノイズにより与える。

3.2. 拡張カルマンフィルタにおける線形化処理および状態推定解析の流れ

カルマンフィルタの計算において、非線形のシステム方程式を用いる場合、システム方程式に対して線形化の処理が行われる。式(27)のシステムノイズの項を除く右辺に対して、式(29)に示す処理を施すことにより、線形化された状態遷移行列 $[F^n]$ を得ることができる。線形化された状態遷移行列 $[F^n]$ は、カルマンゲイン行列を求める際に使用される。

$$[F^n] = \frac{\partial([A]\{\phi^n\} + \{N^n\})}{\partial\{\phi^n\}} \Big|_{\{\phi^n\}=\{0\}} \quad (29)$$

拡張カルマンフィルタ理論^(10, 11)に基づく状態推定解析の計算の流れを以下に示す。計算の流れにおけるステップ7において、シミュレーションの値をカルマンゲイン行列を使用して補正が行われる。補正前は同化前（シミュレーションによる算定値）、補正後は同化後（最適推定値）と呼び、同化後の値は、同化前の値と観測値をブレンドすることにより算定される（図2参照）。

1. 初期値の設定

$imax$ (Time steps), $[P_{(+)}^0]$, $[\Gamma]$, $[H]$, $\{\hat{\phi}_{(+)}^0\}$, $[F^0]$, $[Q^n]$, $[R^n]$, $\{z^{n+1}\}$, (※初期値を設定する変数内の時間ステップ n については、 $n = 0 \sim imax$ の間について設定する.)

2. 線形化した状態遷移行列の計算

$$[F^n] = \frac{\partial([A]\{\phi^n\} + \{N^n\})}{\partial\{\phi^n\}} \Big|_{\{\phi^n\}=\{0\}}$$

3. 同化前の誤差共分散行列の計算

$$[P_{(-)}^{n+1}] = [F^n][P_{(+)}^n][F^n]^T + [\Gamma][Q^n][\Gamma]^T$$

4. カルマンゲイン行列の計算

$$[K^{n+1}] = [P_{(-)}^{n+1}][H]^T ([H][P_{(-)}^{n+1}][H]^T + [R^{n+1}])^{-1}$$

5. 同化後の誤差共分散行列の計算

$$[P_{(+)}^{n+1}] = [P_{(-)}^{n+1}] - [K^{n+1}][H][P_{(-)}^{n+1}]$$

6. 同化前推定値の計算

$$\{\hat{\phi}_{(-)}^{n+1}\} = [A^n]\{\hat{\phi}_{(+)}^n\} + \{N^n\}$$

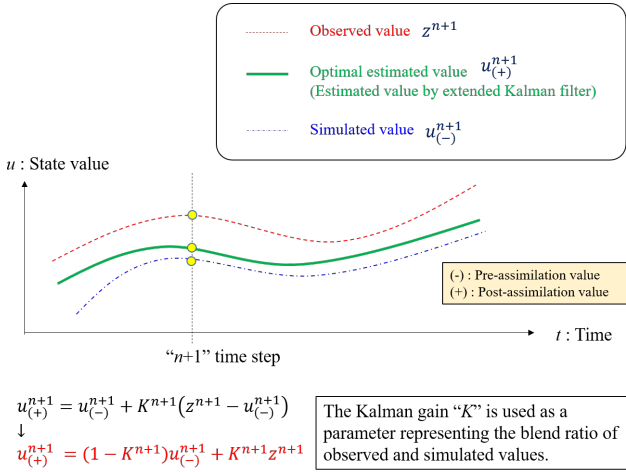


Fig. 2: Illustration for pre-assimilation and post-assimilation values.

7. 最適推定値 (同化後推定値) の計算

$$\{\hat{\phi}_{(+)}^{n+1}\} = \{\hat{\phi}_{(-)}^{n+1}\} + [K^{n+1}](\{z^{n+1}\} - [H]\{\hat{\phi}_{(-)}^{n+1}\})$$

8. 時間ステップ数の確認

もし $n + 1 > imax$ であれば終了, そうでなければ 2 から 8 の計算を繰り返し行う.

4. 東京湾をモデルとした拡張カルマンフィルタ FEM に基づく状態推定解析

4.1. 解析条件

本論文では, 東京湾の解析モデルを導入し, 拡張カルマンフィルタ FEM を適用し, 潮流の推定解析を行う. 解析条件を表 1 に示す***. 拡張カルマンフィルタ FEM における観測点位置および観測値は, 図 3~図 6 に示すものを使用する****. 潮流の推定解析においては, 図 7 に示す三角形有限要素メッシュを使用する. 解析対象領域における基準水深の分布を図 8 に示す. また, 図 9 に示す流入境界において, 館山の主要四分潮に基づく水位の経時変化 (式 (30)) を与える. 表 2 に館山の主要四分潮の各成分を示す. また, 陸域境界には, スリップ境界条件を与える (15).

$$\eta(t) = \sum_{i=1}^4 a_i \sin\left(\frac{2\pi t}{T_i} + \kappa_i\right) \quad (30)$$

4.2. 解析結果

各観測点 (東京, 千葉, 横浜, 横須賀) における推定値および観測値の比較について, $e=0.7$ の場合を図 10~図 13 に, $e=0.8$ の場合を図 14~図 17 に, また, $e=0.9$ の場合を図 18~図 21 に示す. 今回の推定解析では, 横須賀の観測値は含

***ランピングパラメータ e は, 0~1 の間において与えられ, 一般に 1 に近い値が用いられる. また, システムノイズは「各節点間において無相関」, 観測ノイズは「各観測点間において無相関」と仮定し, システム誤差共分散行列 $[Q]$ および観測誤差共分散行列 $[R]$ は対角行列として設定する.

****観測値は, 3.2 節のステップ 7 の $\{z^{n+1}\}$ において使用する.

Table 1: Computational conditions

Time steps ($imax$)	86400
Time increment Δt [s]	1.0
Number of nodes	1052
Number of elements	1731
Lumping parameter e	0.7, 0.8, 0.9
Gravitational acceleration g [m/s ²]	9.8
Constant of the bottom friction f [s ⁻¹]	0.002
vortex viscosity coefficient ν [m ² /s]	0.001
Diagonal component of system error covariance matrix $[Q]$	0.0001
Diagonal component of observation error covariance matrix $[R]$	0.1

Table 2: Numerical conditions

i	Tidal component	a_i [m]	κ_i [deg]	T_i
1	M_2	0.3605	146.48	12h25m
2	S_2	0.1707	174.36	12h00m
3	K_1	0.2318	177.13	25h49m
4	O_1	0.1823	158.40	23h50m

めずに解析を行い, 図 13, 図 17, 図 21 に示す観測値は, 推定値との比較のため (推定精度検証のため) に用いている. 結果より, 各観測点 (東京, 千葉, 横浜) においてランピングパラメータ e を変えた場合に対しても, 観測値に近い推定値が得られている事を確認できる. 観測点 (横須賀) における観測値と推定値の比較 (図 13, 図 17, 図 21) では, 比較対象用として, 式 (31) および式 (32) に示す線形浅水長波方程式を適用した場合の推定値も合わせて示している†.

$$\dot{u}_i + g\eta_{,i} = 0 \quad (31)$$

$$\dot{\eta} + hu_{i,i} = 0 \quad (32)$$

図 13, 図 17, 図 21 より, 観測点 (横須賀) における拡張カルマンフィルタ FEM による推定値 (EKF-FEM) は, $e=0.7, 0.8, 0.9$ においてどの場合においても, 線形浅水長波方程式を用いた状態推定解析 (KF-FEM) に比べて観測値 (Observed value) に近い結果を得ていることを確認できる‡. ここで, ランピング

†式 (31) および式 (32) の離散化手法としては, 非線形浅水長波方程式のものと同様の手法を適用している. 線形浅水長波方程式を用いた状態推定解析では, システム方程式が線形であるため, 拡張カルマンフィルタでは無く, 通常のカルマンフィルタを適用している. ランピングパラメータ e は 0.8 としている.

‡拡張カルマンフィルタでは, カルマンゲイン行列を計算開始か

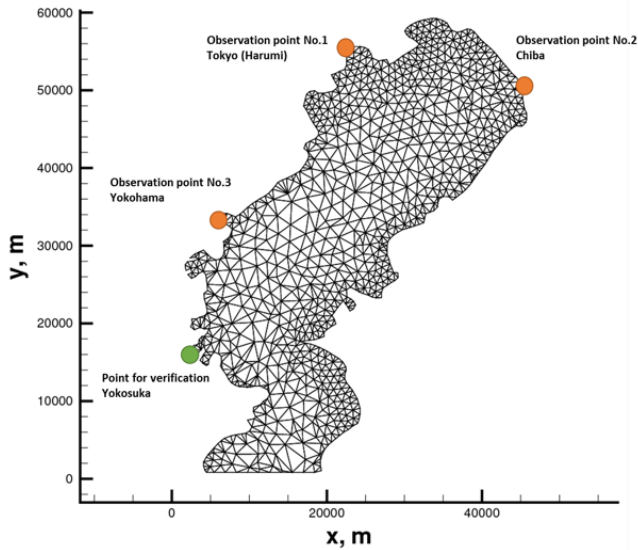


Fig. 3: Position of observation points and estimation point.

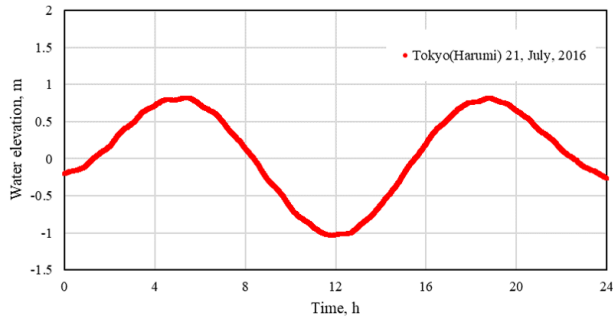


Fig. 4: Observation value at Tokyo.

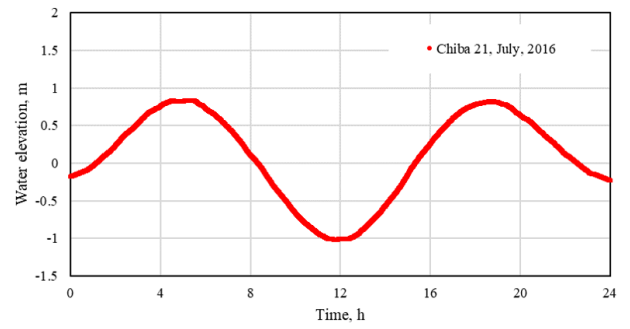


Fig. 5: Observation value at Chiba.

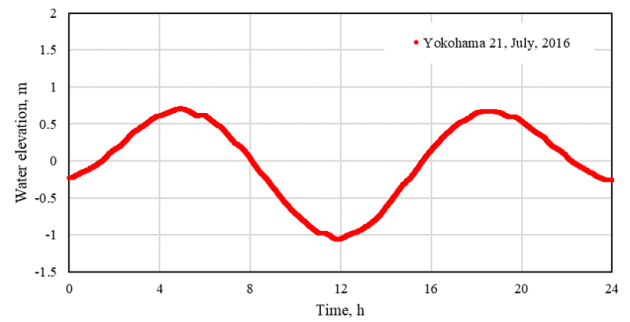


Fig. 6: Observation value at Yokohama.

パラメータ e の各ケースにおいて、式 (33) により横須賀の観測値 η_{obs}^n と推定値 η_{est}^n に対して残差平方和 RSS (Residual Sum of Squares) を計算し、表 3 に整理する[§]。 $imax$ は時間ステップ数を示す。拡張カルマンフィルタ FEM による推定値においても結果として $e=0.8$ が最も観測値に良い一致率を示すことを確認できた。

$$RSS = \sum_{n=1}^{imax} (\eta_{obs}^n - \eta_{est}^n)^2 \quad (33)$$

また、横須賀の結果において、線形の浅水長波方程式を用いた場合に対する推定結果 (KF-FEM) と非線形の浅水長波方程式を用いた場合に対する推定結果 (EKF-FEM) を比較すると、振幅は大きく変わらないが、位相差が異なる結果が得られた。

ら時刻ステップに応じて更新をしていく関係もあり、解析初期の時刻においては、状態推定が適切に行っていないこともある。そのため、 $t=0.0$ 付近では、観測値と推定値の結果の一致性が乏しいもの考えられる。

[§]表 3 の値は、" $e=0.8$ (KF-FEM)" の RSS の値に対する相対値として示している。

ここに、 $e=0.8$ の場合における水位変動量と流速ベクトルの分布を図 22~図 27 に示す。結果として、どの時刻においても、計算が発散することなく、流れ場を推定できていることを確認できる。

5. おわりに

本論文では、拡張カルマンフィルタ有限要素法を用いて、東京湾の解析モデルに対して潮流推定解析を行い、解析結果に関する考察を行った。支配方程式として、非線形浅水長波方程式を導入し、空間方向の離散化手法として、三角形一次要素を用いた有限要素法、時間方向の離散化手法として、セレクトティブ・ランピング法を適用した。まず、ランピングパラメータ e を変え実施した検討では、横須賀における結果において、推定値と観測値が良好に一致することを確認できた。観測値と推定値の残差平方和を用いて、観測値と推定値の一致性を確認したところ、 $e=0.8$ の場合の推定値が最も観測値に近いという結果となった。また、線形の浅水長波方程式を用いた場合に対する推定結果と比較すると、振幅は大きく変わらないが、位相差が異なる結果が得られた。横須賀の検潮所における水位波形において、非線形の浅水長波方程式を用いた場合の結果は線形の浅水長波方程式を用いた場合の結果に比べて観測水位に近い結果が得られており、システム方程式の適切性は位相差に影響を与えることがわかった。

本研究において得られた成果をもとに、より広範な領域を対象とした潮流推定解析へ拡張し、解析条件として与える観測点数や観測点位置による推定精度の違いに関する考察も今

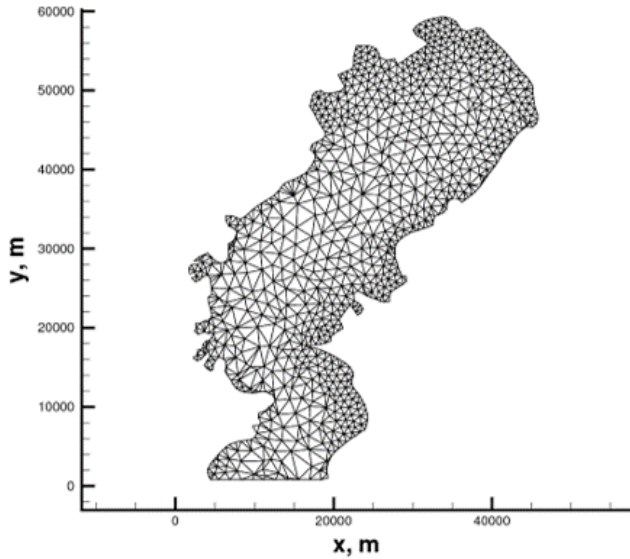


Fig. 7: Finite element mesh. (Number of nodes: 1052, Number of elements: 1731)

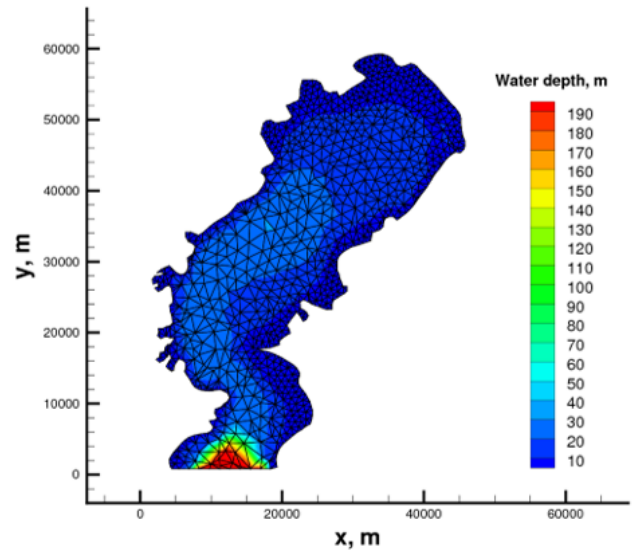


Fig. 8: Distribution of water depth.

Table 3: Comparison of residual sum of squares in each case (Relative value for RSS of " $e=0.8$ (KF-FEM)").

e	RSS
0.7 (EKF-FEM)	0.289767
0.8 (EKF-FEM)	0.266542
0.9 (EKF-FEM)	0.284777
0.8 (KF-FEM)(Standard value)	1.0

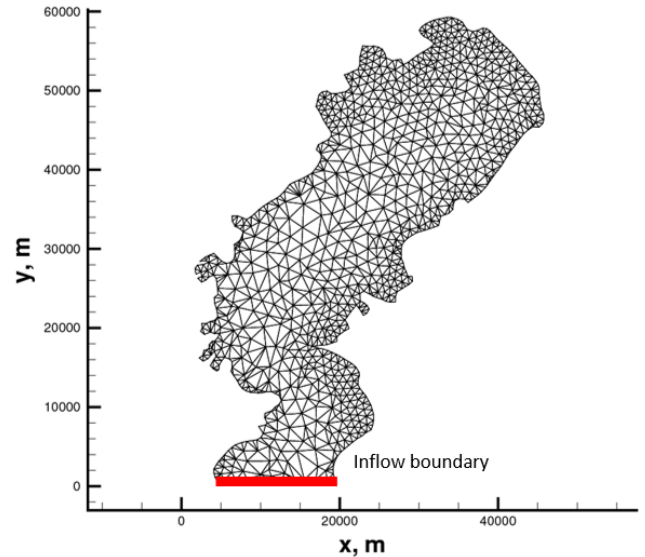


Fig. 9: Inflow boundary

後必要とされる。従来の研究⁽⁸⁾においても、流れの上流側に観測点を配置することは、下流側に観測点を配置することによって重要という知見を得ている。本論文で対象とした東京湾モデルは、閉鎖性の水域であり、上下流の定義は困難であるが、今回検証で設定した横須賀の確認点を別の観測点で実施する必要性もある。確認点と観測点の組み合わせをえることで、いくつか検討は可能であるが、最後に、将来を見据えた検討の一例として、千葉、横浜、横須賀の観測値を用いて、確認点を東京と設定した場合の水位の履歴の比較結果を紹介しておく。図 28 に結果を示す。結果より、この検討では、通常のカルマンフィルタ FEM では、観測値に比べて少し小さな振幅値になっているが、拡張カルマンフィルタ FEM では、振幅値、位相差ともに良好な一致を示している。このように、観測点と確認点の組み合わせをえることにより、より観測値と推定値の一致性を高められる可能性がある。本検討において実施した考察をより強固なものとするため、追加検討については、将来的な課題とする。

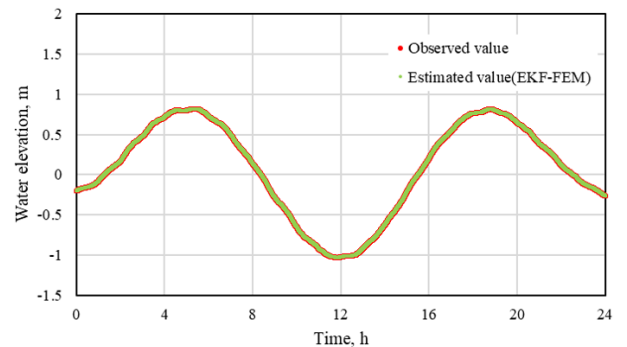


Fig. 10: Comparison of time history of estimated water elevation at Tokyo. ($e=0.7$.)

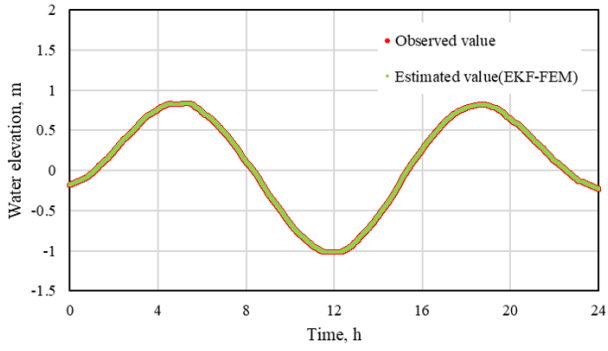


Fig. 11: Comparison of time history of estimated water elevation at Chiba. ($e=0.7.$)

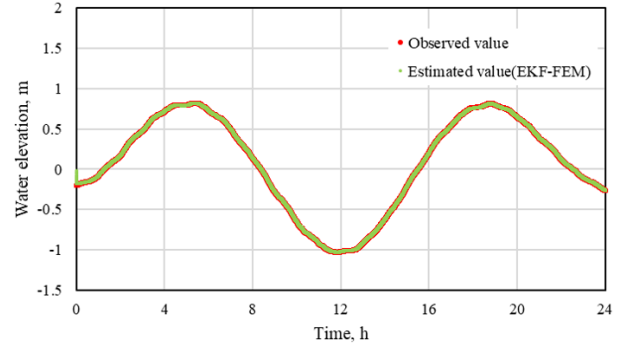


Fig. 14: Comparison of time history of estimated water elevation at Tokyo. ($e=0.8.$)

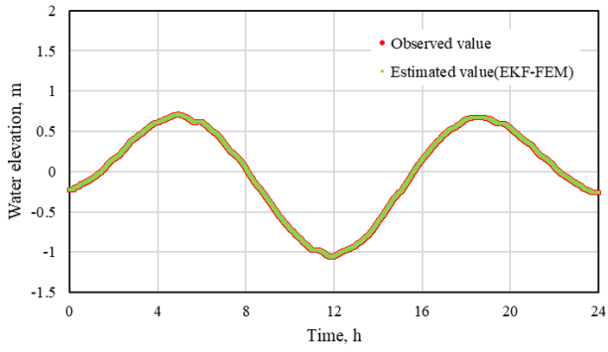


Fig. 12: Comparison of time history of estimated water elevation at Yokohama. ($e=0.7.$)

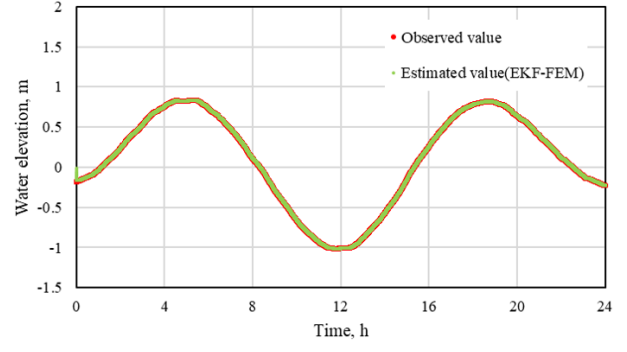


Fig. 15: Comparison of time history of estimated water elevation at Chiba. ($e=0.8.$)

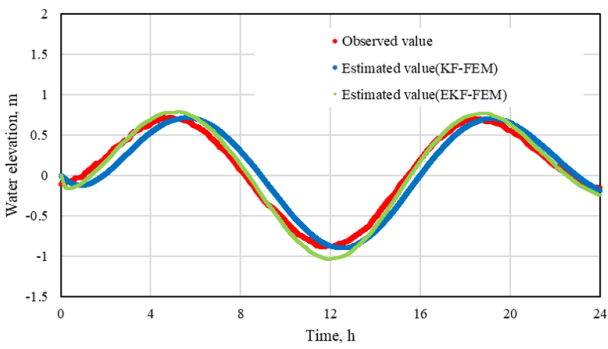


Fig. 13: Comparison of time history of estimated water elevation at Yokosuka. ($e=0.7.$)

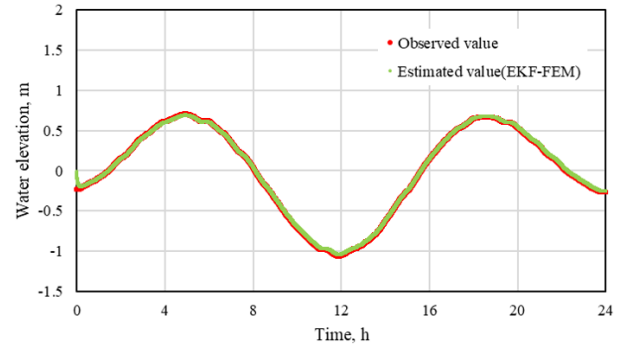


Fig. 16: Comparison of time history of estimated water elevation at Yokohama. ($e=0.8.$)

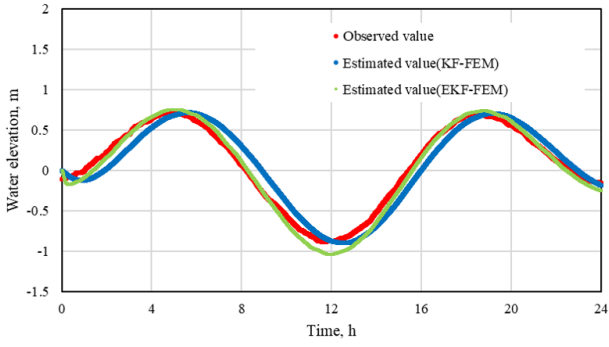


Fig. 17: Comparison of time history of estimated water elevation at Yokosuka. ($e=0.8$.)

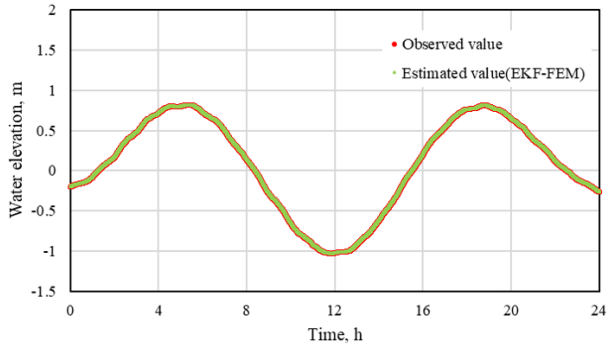


Fig. 18: Comparison of time history of estimated water elevation at Tokyo. ($e=0.9$.)

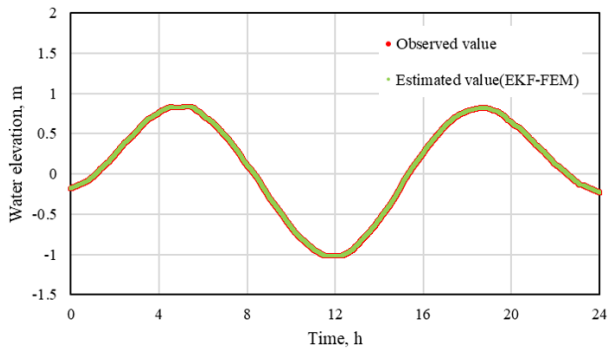


Fig. 19: Comparison of time history of estimated water elevation at Chiba. ($e=0.9$.)

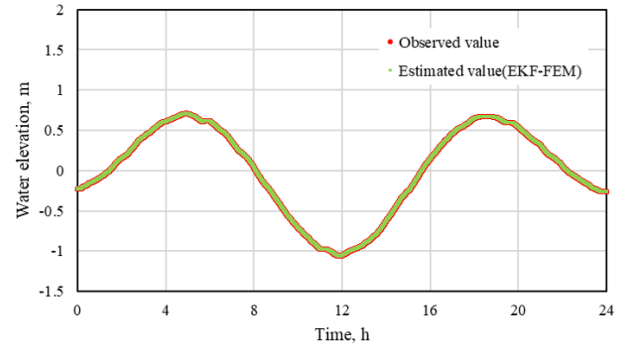


Fig. 20: Comparison of time history of estimated water elevation at Yokohama. ($e=0.9$.)

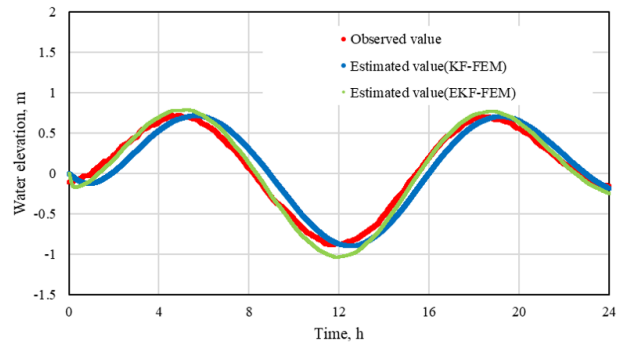


Fig. 21: Comparison of time history of estimated water elevation at Yokosuka. ($e=0.9$.)

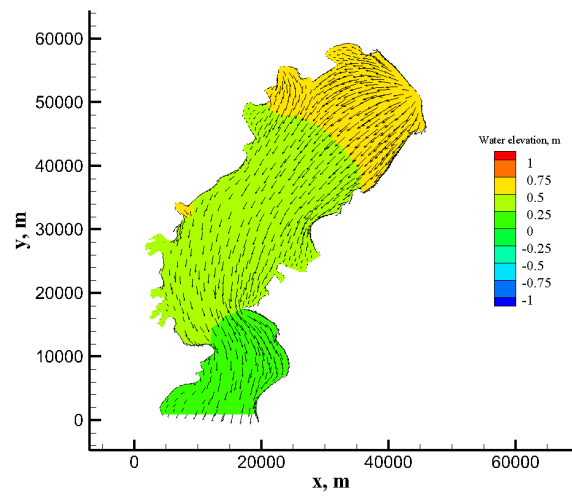


Fig. 22: Distribution of velocities u_x and u_y and water elevation η at $T = 4.0$ [h]. ($e=0.8$.)

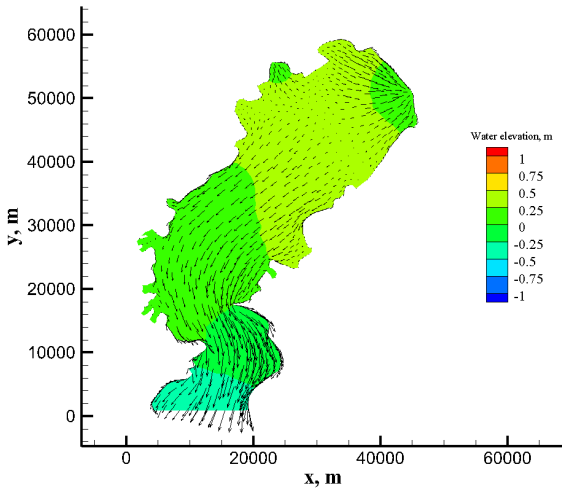


Fig. 23: Distribution of velocities u_x and u_y and water elevation η at $T = 8.0[h]$. ($e=0.8$.)

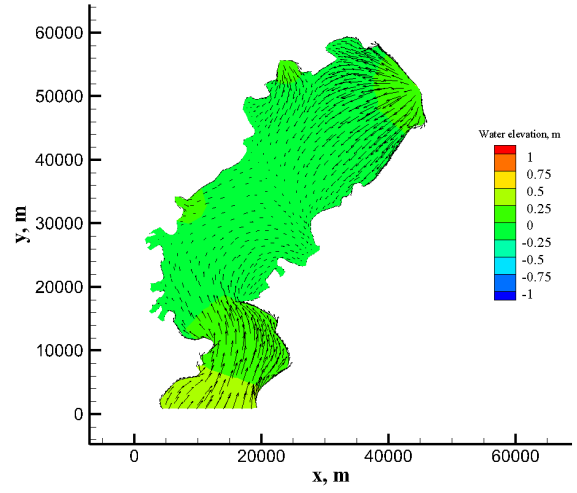


Fig. 25: Distribution of velocities u_x and u_y and water elevation η at $T = 16.0[h]$. ($e=0.8$.)

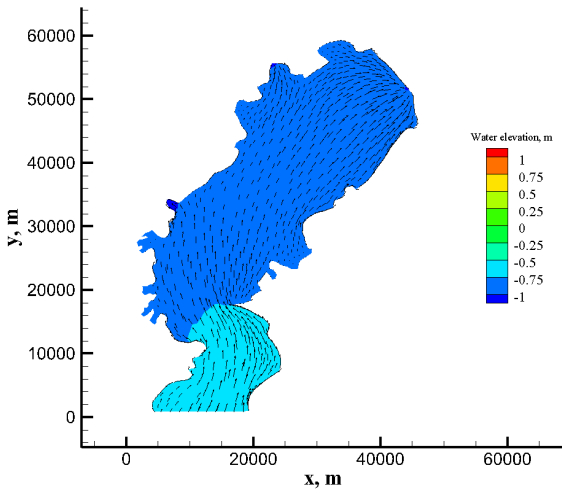


Fig. 24: Distribution of velocities u_x and u_y and water elevation η at $T = 12.0[h]$. ($e=0.8$.)

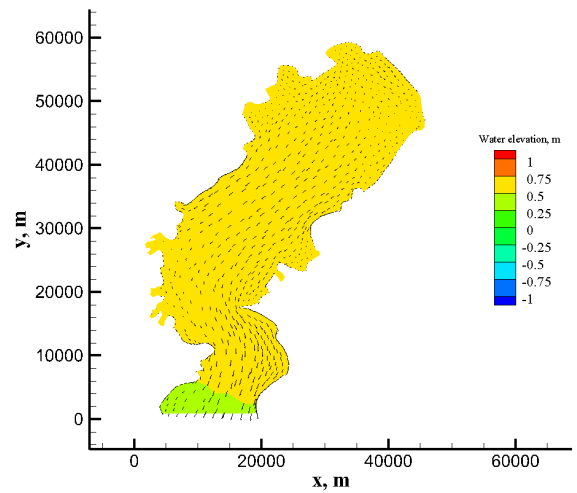


Fig. 26: Distribution of velocities u_x and u_y and water elevation η at $T = 20.0[h]$. ($e=0.8$.)

参考文献

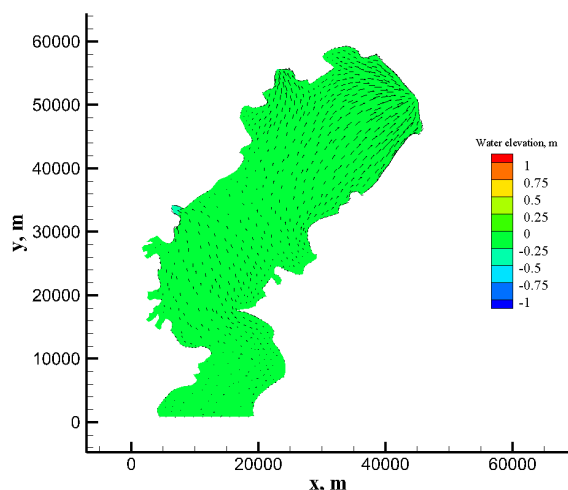


Fig. 27: Distribution of velocities u_x and u_y and water elevation η at $T = 24.0$ [h]. ($e=0.8$.)

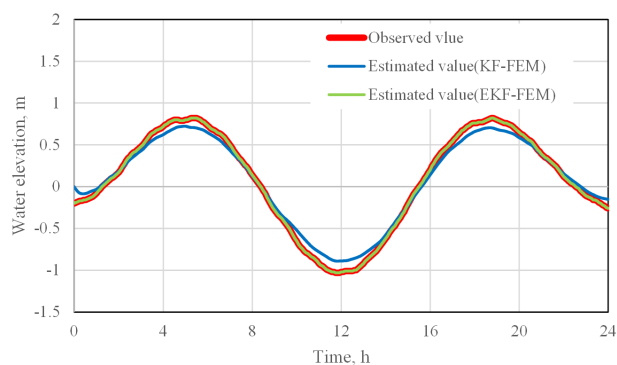


Fig. 28: Comparison of time history of estimated water elevation at Tokyo. ($e=0.8$.)

また、本論文では東京湾モデルを対象としたが、解析対象領域の変更も視野に入れ、本研究で示した考察の様に、ランピングパラメータ e と観測点数、観測点位置の組み合わせを変えた検討についても、今後の検討課題とする。

謝辞

本研究を実施するにあたり、公益財団法人 TAKEUCHI 育英奨学会からの研究助成を受けた。また、数値実験における検討では、長岡技術科学大学大学院 機械創造工学専攻の修了生である吉荒 太一氏、五十嵐 晃平氏には多大なる協力を頂いた。解析結果については、九州大学情報基盤研究開発センターの研究用計算機システムを使用し、算出したものを示した。また、本論文は、中央大学理工学部都市環境学科 名誉教授 川原睦人 先生の内容を元に研究を行ったものである。ご関係皆様に対して謝意を表す。

- (1) R.E.Kalman: A new approach to linear filtering and prediction problems, Transactions of the ASME - Journal of Basic of Engineering, **82**(1960), pp. 35–45.
- (2) L.A. McGee and S.F. Schmidt: Discovery of the Kalman filter as a practical tool for aerospace and industry, NASA Technical Memorandum, (1985), pp. 1–21.
- (3) 大林茂, 三坂孝志, 加藤博司, 菊池亮太: データ同化流体科学 流動現象のデジタルツイン, (2020), 共立出版.
- (4) A.W.Heemink: Two-dimensional shallow water flow identification, Applied Mathematical Modelling, **12**(1998), pp. 109–118.
- (5) 高木利光, 稲本耕介, 早川豊, 川原睦人: カルマンフィルタ有限要素法による浅水域の流況推定, 海岸工学論文集, **43**(1996), pp. 346–350.
- (6) K.Yonekawa, M.Kawahara: Application of Kalman filter finite element method and AIC, International Journal of Computational Fluid Dynamics, **17**(2003), pp. 307–317.
- (7) R.Suga and M.Kawahara: Estimation of tidal current using Kalman filter finite-element method, Computers and Mathematics with Applications, **52**(2006), pp. 1289–1298.
- (8) 倉橋貴彦, 吉荒太一, 小林泰秀: カルマンフィルタ有限要素法による浅水域における流れ場の推定精度の検証(計測変数・計測点の数および位置が推定精度に与える影響), 日本機械学会論文集, **82**(2016), pp. 1–19.
- (9) T.Kurahashi, T.Yoshiara, Y.Kobayashi, N.Yamada: Flow field estimation analysis based on the Kalman filter FEM for selection of tidal stream power generator locations, Journal of Fluid Science and Technology, **12**(2017), pp. 1–10.
- (10) 樋口知之, 上野玄太, 中野慎也, 中村和幸, 吉田亮: データ同化入門 一次世代のシミュレーション技術一, (2011), 朝倉出版.
- (11) 片山徹: 非線形カルマンフィルタ, (2011), 朝倉出版.
- (12) 呉旭, 市川康明: カルマンフィルタ有限要素法による岩盤損傷力学パラメータの逆解析, 土木学会論文集, **523**(1995), pp. 1–8.
- (13) 秋田剛, 高木亮治, 嶋英志: アンサンブルカルマンフィルタによるモデルパラメータ推定一大変形を伴う非線形複合構造システムへの適用一, 日本計算工学会論文集, **2010**(2010), pp. 1–10.
- (14) M. Kawahara: Finite element methods in incompressible, adiabatic, and compressible flows: from fundamental concepts to applications (mathematics for industry), (2018), Springer.
- (15) 吉田裕, 川原睦人: 新体系土木工学 3 –有限要素法, (1983), 丸善出版.