ISSN 1348-5245

計算数理工学論文集

第22巻
2022年12月

Transactions of the Japan Society for Computational Methods in Engineering

Volume 22, December 2022

JASCOME

日本計算数理工学会
2022年12月16日発行

計算数理工学論文集 第 22 巻
編集委員会 (2022 年 12 月)

委員長	松　本　敏　郎	（名古屋大学大学院 工学研究科）
委　員	阿　部　和　久	（新潟大学 工学部）
〃	天　谷　賢　治	（東京工業大学 工学院 システム制御系）
〃	荒　井　政　大	（名古屋大学大学院 工学研究科）
〃	飯　盛　浩　司	（慶應義塾大学 理工学部）
〃	磯　　祐　介	（京都大学大学院 情報学研究科）
〃	井　上　裕　嗣	（東京工業大学 工学院 機械系）
〃	植　田　　毅	（東京慈恵会医科大学 医学部）
〃	遠　藤　龍　司	（職業能力開発総合大学校）
〃	奥　村　　大	（名古屋大学大学院 工学研究科）
〃	神　谷　恵　輔	（愛知工業大学 工学部）
〃	岸　本　喜久雄	（東京工業大学）
〃	北　　栄　輔	（名古屋大学大学院 情報学研究科）
〃	紅　露　一　寛	（新潟大学大学院 自然科学研究科）
〃	斉　藤　隆　泰	（群馬大学大学院 理工学府）
〃	杉　野　隆三郎	（阿南工業高等専門学校）
〃	瀬　田　　剛	（富山大学 学術研究部工学系）
〃	高　橋　　徹	（名古屋大学大学院 工学研究科）
〃	登　坂　宣　好	（Material speaks iT-lab.）
〃	新　納　和　樹	（京都大学大学院 情報学研究科）
〃	西　村　直　志	（京都大学）
〃	長谷川　弘　治	（室蘭工業大学大学院 工学研究科）
〃	廣　瀬　壮　一	（東京工業大学 環境・社会理工学院）
〃	藤　原　宏　志	（京都大学大学院 情報学研究科）
〃	堀　　宗　朗	（海洋研究開発機構 付加価値情報創生部門）
〃	丸　山　泰　蔵	（愛媛大学 理工学研究科）
〃	山　本　昌　宏	（東京大学大学院 数理科学研究科）
〃	吉　川　　仁	（京都大学大学院 情報学研究科）
〃	吉　田　秀　典	（香川大学 工学部）
〃	吉　野　正　人	（信州大学 学術研究院 工学系）

本論文集は、計算数理工学シンポジウム 2022（JASCOME Symposium 2022）で論文講演を行うために投稿された論文原稿（4〜12 ページ）を、論文集編集委員会委員を中心とする複数の校閲者により査読して掲載可と判定されたものを収録したものである。

日本計算数理工学会

〒464-8603 名古屋市千種区不老町
名古屋大学大学院工学研究科 機械システム工学専攻 計算力学研究グループ 内
日本計算数理工学会・事務局
TEL: 052-789-2780
FAX: 052-789-3123
（学会ホームページ）http://www.matsumoto.nuem.nagoya-u.ac.jp/jascome/

計算数理工学論文集 第 22 巻

目　　次

論文番号　論文題目　著者　頁

01-221216　ドローンと人工知能を組み合わせた要配慮者の避難支援システムの開発
……妹尾 大輝, 和田 光真, 野々村 敦子, 吉田 秀典　1

02-221216　Accuracy controllable characteristic basis function method by using Krylov subspace algorithm
……Tai TANAKA, Kazuki NIINO, Naoshi NISHIMURA, Michio TAKIKAWA　11

03-221216　拡張カルマンフィルタ有限要素法に基づく潮流の最適推定解析における推定精度に関する考察
……倉橋 貴彦　21

04-221216　横波ベクトル場の点状散乱体による散乱問題の近似解法 – 定式化 –
……植田 毅　31

05-221216　蝶を模した羽ばたき翼-胴体モデルの飛翔における翼基部の柔軟性を考慮した数値シミュレーション
……井口 大地, 鈴木 康祐, 吉野 正人　37

06-221216　壁面から飛び立つ蝶の方向転換時における飛翔解析: 計測実験と CFD シミュレーション
……木村 晃樹, 小澤 俊哉, 糀 真哉, 鈴木 康祐, 吉野 正人　49

07-221216　融解・凝固を考慮した応力テンソルの不連続に基づく埋め込み境界-格子ボルツマン法の開発と妥当性検証
……遠藤 円, 鈴木 康祐, 吉野 正人　61

08-221216　Dirichlet-to-Neumann 有限要素法と Sakurai–Sugiura 法に基づく 3 次元音響導波路の複素固有値解析
……松島 慶, 野口 悠暉, 山田 崇恭　73

09-221216　有限長スラブ軌道の効率的分散解析法
……塚本 夢菜, 阿部 和久, 紅露 一寛　81

10-221216　修正加速勾配法に基づく軸受け表面のテクスチャ形状の最適化（オイルクリアランスを考慮した摩擦係数の最小化問題に対する考察）
……新田 大晃, 岸田 真幸, 倉橋 貴彦　87

11-221216　連成型仮想的物理モデルに基づいたオーバーハング制約付きトポロジー最適化
……田島 幹大, 山田 崇恭　97

12-221216　トンネル掘削における地山物性値の早期推定法に関する検討
……滝沢 壮太, 阿部 和久, 若月 和人, 椎谷 成孝, 紅露 一寛　107

13-221216　リッジパターン変態のプレストレッチ依存性と分岐座屈特性
……田中 大地, 若林 駿人, 松原 成志朗, 永島 壮, 奥村 大　117

14-221216　流体潤滑問題を対象としたレベルセット法に基づくトポロジー最適化
……野口 悠暉, 松島 慶, 山田 崇恭　123

15-221216　境界要素法により数値的に求められた散乱音場と頭部伝達関数によるバイノーラル信号の合成
……川井 郁哉, 吉川 仁　131

16-221216　半解析的有限要素法を用いた地中に埋設された上水道管中のガイド波の分散解析
……丸山 泰蔵, 中畑 和之　139

17-221216　トポロジー最適化における仮想的な物理モデルに基づく最大厚み制約
……酒井 虹太, 岡 大将, 山田 崇恭　147

18-221216　Topology optimization algorithm using two-point topological derivative
……Masaki NODA, Kei MATSUSHIMA, Takayuki YAMADA　155

19-221216　複数周波数 MUSIC 法を用いた超音波イメージングの実験的検討
……松尾 太聖, 丸山 泰蔵, 中畑 和之　163

20-221216　レーザ干渉計による計測データを用いた弾性材料の非破壊評価のためのトポロジー導関数を用いた欠陥決定解析
……中園 昂志, 吉川 仁　171

21-221216　3 次元 Helmholtz 方程式に対する CBFM を適用した境界要素法についての基礎的研究
……池上 明日香, 新納 和樹　179

22-221216　The influence of volume constraint method on achieving the exact boundary representation in FEM-based topology optimization: Case studies
…… Yi CUI, Toru TAKAHASHI, Koichi TAJI, Toshiro MATSUMOTO　189

計算数理工学論文集 Vol. 22 (2022 年 12 月), 論文 No. 01-221216 JASCOME

ドローンと人工知能を組み合わせた 要配慮者の避難支援システムの開発

DEVELOPMENT OF AN EVACUATION ASSISTANCE SYSTEM FOR PERSON IN NEED OF CARE BY COMBINIG DRONE AND ARTIFICAIL INTELLIGENCE

妹尾 大輝 [1)], 和田光真 [2)], 野々村敦子 [3)], 吉田 秀典 [4)]

Daiki SENO, Mitsumasa WADA, Atsuko NONOMURA and Hidenori YOSHIDA

1) 香川大学大学院工学研究科 (〒761-0396 香川県高松市林町 2217-20, E-mail: s21g404@stu.kagawa-u.ac.jp)
2) 香川大学創造工学部 (〒761-0396 香川県高松市林町 2217-20, E-mail: indv0371@kagawa-u.ac.jp)
3) 香川大学創造工学部 (〒761-0396 香川県高松市林町 2217-20, E-mail: nonomura.atsuko@kagawa-u.ac.jp)
4) 香川大学創造工学部 (〒761-0396 香川県高松市林町 2217-20, E-mail: yoshida.hidenori@kagawa-u.ac.jp)

The Great East Japan Earthquake, approximately 60% of the fatalities occurred among the elderly aged 60 or older. In response to this, it is required to make a list of person who need assistance in evacuation activities. However, there has been no progress due to the increase burden on supporter. Therefore, it is important to support the evacuation of person in need of care during the disaster. In this study, we combine drones and artificial intelligence to develop an evacuation support system for person in need of assistance. As a result, it is possible to grasp the situation of evacuation routes and monitor evacuation action.

Key Words: Drone, Artificial intelligence, Person in need of care, Evacuation assisance

1. 緒言

近年，気候変動の影響により日本で発生する自然災害の激甚化が顕著となっている．平成 23 年の東北地方太平洋沖地震では，死者・行方不明者約 19,000 人という未曽有の人的被害をもたらしたうえ，60 歳以上の高齢者の死亡率が被害全体の約 65% を占めた．加えて，障がい者の死亡・行方不明者の割合が健常者の約 2 倍に上るなど，災害時に自力で迅速な避難することが困難な者の被害が際立っていた．また，平成 30 年 7 月豪雨では，中国・四国地方でも甚大な被害が生じたが，同様に死者の約 7 割が 60 歳以上であった (Fig. 1[(1)]).

こうしたことを受け，国は 2013 年に災害対策基本法を改正し，各自治体に高齢者や障がい者などの避難行動要支援者を把握するための名簿作成を義務付けた．その名簿を基に，要配慮者一人一人について具体的な支援者を決め，避難を支援するための個別避難計画を作ることを推奨した．しかしながら，そうした取り組みは支援者の負担と支援者自身の高齢化により進捗がなされていないのが現状である．前者に関しては，そもそも個別避難計画自体が支援者の負担になることに加え，災害時においては 1 名の支援者に対して 5 名の高齢者や要配慮者の面倒を見る必要がある [(2)]. 後者に関しては，支援者自身が高齢化していることにより，災害時には高齢者が高齢者を支援しなければならないという状態になっている．わが国のような超高齢化社会においては，災害時に高齢者や障がい者のような要配慮者の支援を如何にして行っていくがが重要であると言える．

また，災害時における要配慮者の支援を検討するには避難経路で発生しうる問題についても考えなければならない．どの地域においても，現在，ハザードマップが策定されており，避難所や危険個所などを確認することが可能となっている．しかし，そうし

2022 年 10 月 21 日受付，2022 年 11 月 17 日受理

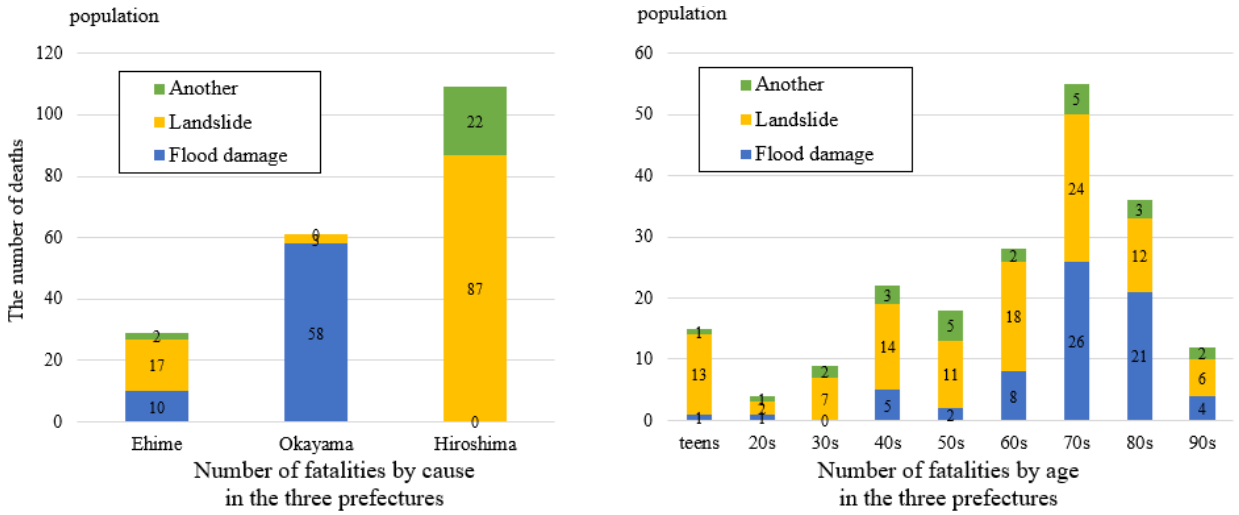


Fig.1　Human casualties due to the 2018 Japan Flood

たマップが策定されていたとしても災害時には避難経路ががれきや放置車両，河川氾濫，高潮，あるいは津波による浸水で機能しない可能性が出てくる．足の不自由な方も含まれる要配慮者が安全かつ迅速な避難を行うためには，災害直後における避難経路の状況把握も必要であると言える．

上記の 2 つの課題を解決するために，本研究では災害時において利用が増加するドローンに着目した．土木分野では国土交通省が提唱する i-Construction によって，近年の災害時においてドローンの利用が増加している．ドローンは人工衛星と比較して災害時に迅速に対応が可能であるという点を活かして災害状況の把握への利用がなされている．国土交通省の緊急災害対策派遣部隊である TEC-FORCE においてもドローンを用いて，実際の災害現場での状況調査等を行っている [(3)]．加えて，災害時の状況把握への利用だけでなく，ドローンを利用した災害支援への需要も高まっている．ドローンを利用した避難支援に関する研究はいくつかなされており，例えば鈴木ら [(4)] の研究では複数のドローンを使用した避難誘導について検討しており，高橋ら [(5)] の研究では避難所までの誘導プランの生成と屋外での避難誘導の予備実験を行っている．しかし，これらの研究はどれもシミュレーションや試作の段階に留まっているという現状である．また，杉安ら [(6)] の研究では津波避難時においてドローンに取り付けた避難誘導サインを用いて避難目的地までの誘導について検討を行っているが，避難誘導の対象者が要配慮者ではなく健常者である．これらのようにドローンを用いた避難支援の研究は未だ発展途上の段階にあり，要配慮者の避難に関しては取り組みがあまりなされていない．一方で，ドローンを用いた避難経路の状況把握に関する研究として，三平ら [(7)] は UAV（Unmanned Aerial Vehicle）

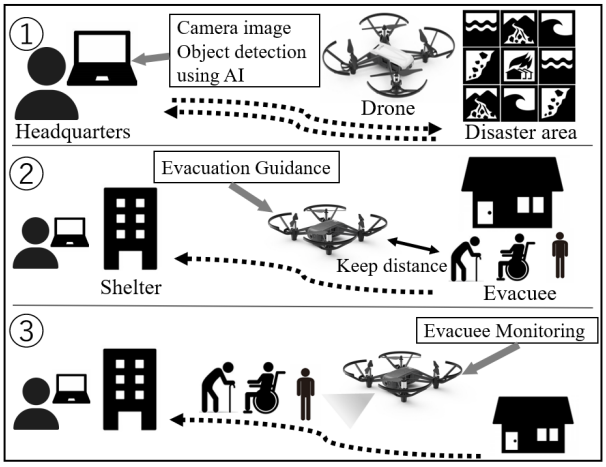


Fig2　Evacuation assistance for person in need of care

を用いて道路領域と障害物（車両）の検出を行っている．しかし，障害物を検出する前に道路領域を判定しなければならない上，道路の状態（天候・時間帯）を考慮していない．道路そのものに影響されずとも障害物のみに着目し，それらを判別することで，より迅速な状況把握が可能になると考えられる．そうしたことを踏まえ，本研究では支援の対象を要配慮者としてドローンと人工知能（以降，AI）を組み合わせた避難支援システムの開発をすることで前述した課題の解決を図ることを目的とする．

2. 要支援者の避難支援システム

2.1. 全体概要

本研究で検討する要配慮者の避難支援システムを表す全体概要図を Fig. 2 に示す．避難に関しては，支援者の補助を必要としたり，車椅子を利用したりするような歩行を困難とする人を含む要配慮者が徒歩で避難所まで移動することを想定している．本研



Fig3　Mavic 2 Enterprise Dual（left）& DJI Tello（right）

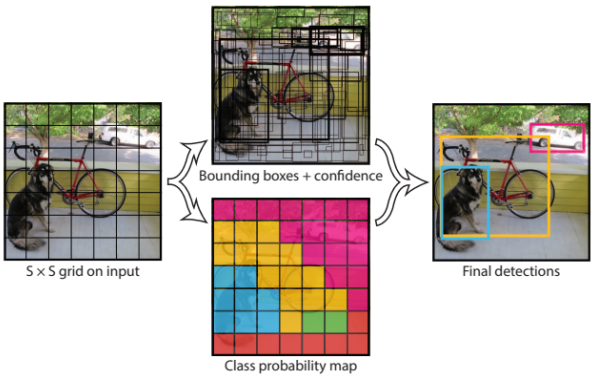


Fig4　Flow of YOLO to object detection[9]

究では，以下の 3 つのステップに分けて避難支援を行うこととする．

①災害発生時には，探索用ドローンを災害対策本部などの拠点となる場所より飛行させ，災害発生地域の空撮を行い，主にハザードマップ等で避難所へと続く避難経路が収まるように画像・映像を取得する．探索用ドローンにより取得した画像・映像を基に歩行が困難となる要因（本研究では「車両」）を AI を用いて検出し，道路の通行可否を判断する．道路が通行可能と判断された場合，その道路は避難経路として利用できるが，通行不可能であると判断された場合，その道路は避難経路としては利用しない．

②避難経路の閉鎖状況を確認し避難可能であると判断した後，要配慮者の元までドローンを飛ばし避難所まで避難誘導を行う．避難誘導を行う際には，決められたルートに沿って誘導を行うことに加え，足の不自由な要配慮者との距離が離れすぎないよう一定の距離を保ちながら飛行を行う．

③通行可能と判断された経路を利用し，要配慮者が避難を行っている際に，避難行動の様子をドローンを用いて監視する．その際には AR（Augumented Reality）マーカ [8] を使用し，監視用のドローンはこの AR マーカを人の目印として認識し，カメラ映像をフィードバックすることで映像から避難の様子を確認する．フィードバックした映像からどの人が避難隊列から遅れているのか，また要配慮者が予期せぬ行動を取っていないかなどを災害対策本部側で把握し，必要であれば応援を向かわせるなど避難所までの安全な避難を行えるようにする．

以上に示す 3 つのステップにより，要配慮者の避難支援を実現するものとする．すなわち，災害発生後には，ドローンで取得した画像から AI を用いて物体検出を行い，要配慮者でも避難が可能な避難経路を決定し，避難時には，リアルタイムで AR マーカを認識して要配慮者を監視するということである．また，将来的には，もう 1 台のドローンが，先に決定した避難経路を誘導かつ避難者となる要配慮者との距離を保つようにして避難を支援することを想定している．

本研究の避難支援システムは，ドローンが飛行できることを前提としたシステムであることから，システムが機能するためにはドローンが飛行可能な環境下である必要がある．ドローンの飛行に影響を与える最も大きな要因としては天候が挙げられる．特に，ドローンは雨や風といった外乱に弱く，安定した飛行を行うことが困難になる．そのため，豪雨や台風といった災害を受けている間はドローンの飛行を行うことができず，本システムは機能しないことから，本システムは天候に左右されない地震災害の際に利用するシステムとなる．本研究が想定する地震災害とは，被災地内で通信障害が発生するような大規模なものであり，外部の情報を得られるスマートフォン等が利用できない場合に活躍するシステムを目指している．本システムは，避難者が通信障害によって災害情報が得られない場合に，情報収集・避難誘導などの避難支援を行えることが強みとなると考えている．

2.2. 要素技術

上述した 3 つのステップはそれぞれ「避難経路の状況把握」，「避難誘導」，「避難行動の監視」という 3 つの要素技術により構成される．その詳細に関して以下に記述するが，「避難誘導」の技術に関しては本稿執筆時において検討段階であるため，概要のみの記述とする．

2.2.1. 避難経路の状況把握

Fig. 2 における①の実現のために，ドローンと AI を組み合わせた手法を用いる．その手法として，ドローンで撮影した画像・映像に対して，AI の一つである CNN（Convolutional Neural Network）を利用した物体検出を行う．ここで使用するドローンは，主に災害現場などの業務利用向けに利用がなされている DJI 社製の Mavic 2 Enterprise Dual（Fig. 3 左）を用いた．被写体を自動で追尾するアクティブトラック等の機能はないものの，4K 可視光カメラを搭載しており，空撮をメインとする DJI 社製の他のドローンに劣らない解像度の画像を取得することが可能である．本研究では，フライトコントローラを使用してドローンを操作し，目的の画像・映像の空撮を行う．また，ドローンにより取

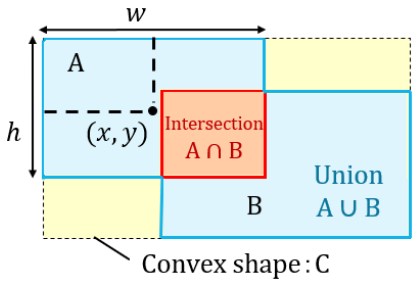


Fig5　Overlap of Bounding Box

得した画像・映像に対して物体検出を行い，避難経路となり得る道路の状況把握を行う．CNN を用いた物体検出手法はいくつかあるが，本研究では導入が容易であり，高速処理・汎化性能に優れる YOLO(You Only Look Once) を採用した．

YOLO は，オブジェクトの領域推定とクラス分類という 2 つの処理を単一のネットワーク内で行うことができるため，リアルタイムオブジェクト検出が可能な手法である．Fig. 4 に YOLO の物体検出までの流れを表したモデル図を示す．まず，YOLO では入力画像を正方形にリサイズし，それを畳み込みニューラルネットワークの入力とするが，その際に正方形の画像全体を $S \times S$ の grid cell（グリッド領域）に分割する（Fig. 4：左）．次に，分割した各 grid cell に対して，B 個の矩形領域（Bounding Box）と信頼度（confidence）を推測する（Fig. 4：中央上）．ここで，B は 1 グリッドセルあたりの Bounding Box の数を表す．信頼度は，Bounding Box に物体が入っていて正確に領域を囲っているかの正確さを表し，Eq. (1) のように定義されている．

$$Confidence = Pr(\text{Object}) * IoU_{Pred}^{Truth} \tag{1}$$

ここで，$Pr(\text{Object})$ は Bounding Box に物体（Object）が含まれている確率であり，IoU（Intersection over Union）は正解 Bounding Box（$Truth$）と推定 Bounding Box（$Prediction$）の一致具合を示す指標である．Eq. (1) 右辺の確率 $Pr(\text{Object})$ は，Bounding Box の中に Object が存在しない場合，0 になることから，信頼度全体も 0 になる．また，Bounding Box は中心座標（x，y）と幅と高さ（w，h）で表すことができ，第二項の IoU は，Fig. 5 に示すパラメータを用いて Eq. (2) のように表される．

$$\begin{aligned} IoU_{Pred}^{Truth} &= \frac{Area\ of\ Intersection}{Area\ of\ Union} \\ &= \frac{Pred \cap Truth}{Pred \cup Truth} = \frac{|A \cap B|}{|A \cup B|} \end{aligned} \tag{2}$$

したがって，Eq. (2) を用いて Eq. (1) は以下のように書き換えられる．

$$Confidence = Pr(\text{Object}) * \frac{|A \cap B|}{|A \cup B|} \tag{3}$$

Bounding Box と信頼度を推測すると同時に，各 grid cell はクラス（物体の種類）ごとにそのクラスである確率も推測する（Fig. 4：中央下）．言い換えると，grid cell が物体である場合にどのクラスに属するのかの確率，つまり条件付き確率を推測すると言える．物体の種類数を C（個）とすると，分類クラスは Class_i と表すことができる．ここで，i は物体の種類数によって変化する変数であり，例えば，人・車・木の 3 種類の分類クラス（$C = 3$）が存在する時，$i = 1, 2, 3$ となる．grid cell ごとに C 個のクラスだけ算出される条件付き確率は，Eq. (4) のように計算することができる．

$$Conditional\ class\ probability = Pr\Big(\text{Class}_i|\text{Object}\Big) \tag{4}$$

Eq. (4) は，各分類クラスの予測確率を表しているため，全てのクラスの値を足し合わせると 1 になる．

最後に，Eq. (3) の「各 Bounding Box の信頼度」と Eq. (4) の「各クラスの予測確率」を掛け合わせることで，各 Bounding Box・各クラスごとの信頼度スコア（Confidence score）を得ることができる．信頼度スコアは Eq. (5) に示す式で計算できる．

$$\begin{aligned} Confidence\ score &= Confidence \times \\ &\quad Conditional\ class\ probability \\ &= Pr(\text{Object}) * IoU_{Pred}^{Truth} * \\ &\quad Pr\Big(\text{Class}_i|\text{Object}\Big) \\ &= Pr(\text{Class}_i) * IoU_{Pred}^{Truth} \\ &= Pr(\text{Class}_i) * \frac{|A \cap B|}{|A \cup B|} \end{aligned} \tag{5}$$

Eq. (5) の信頼度スコアに基づき，どの Bounding Box が対象とするクラスの物体を正確に検出できているかを判断する．

また，Bounbing Box とクラスの予測確率を合わせることで，何の物体であるかを示す複数の Bounding Box を得ることもできる．重複領域も含んだこれらの Bounding Box は，信頼度スコアの高い Bounding Box を基準にしきい値を用いることによって，一つの物体に一つの Bounding Box となるように選別する．以上のプロセスを経て，YOLO による物体検出結果が得られる（Fig. 4：右）．

以上で説明した YOLO は，これまで v1 から v5 までの計 5 つのバージョンが公表されている．YOLO を開発した Joseph らは，YOLOv2[10]，YOLOv3[11] を発表した論文にて，YOLOv2

よりも YOLOv3 の方が認識精度は向上しているということを示している．また，Yan ら [12] は，YOLOv3，v4，v5 を用いて実際に物体検出を行い，その精度・学習速度の比較を行っている．その結果，この 3 つのバージョンの中では YOLOv5 が最も優れた値を得られ，さらにはモデルのサイズも小さくなったという結論を得ている．このことから，YOLO はバージョンが更新されていく毎に高性能化していることが分かる．そのため本研究では，現時点で最も高性能な YOLOv5 を採用した．

YOLOv5 の学習における損失関数 [13] は，$GIoULoss$（Generalized IoU Loss）を採用している．$GIoU$ とは，IoU を一般化した概念であり，$GIoU$ を用いることで，2 つの Bounding Box が全く重なっていない場合に，2 つの領域がどの程度離れた位置にあるかを定量化することが可能となる．$GIoU$ は Fig. 5 に示すように，2 つの領域の積と和に加え，2 つの領域を囲む最小かつ同じ形状の領域を用いて Eq. (6) のように計算される．なお，$GIoULoss$ は，1 から $GIoU$ を引くことで計算できる．

$$\begin{aligned} GIoU &= IoU_{Pred}^{Truth} - \frac{\left|C - A \cap B\right|}{\left|C\right|} \\ &= \frac{\left|A \cap B\right|}{\left|A \cup B\right|} - \frac{\left|C - A \cap B\right|}{\left|C\right|} \end{aligned} \tag{6}$$

$$GIoULoss = 1 - GIoU \tag{7}$$

2.2.2. 避難誘導

前述したように，①によって避難経路の状況把握が完了し，避難経路を決定した後，その情報をウェブサイトで公開することで避難者がスマートフォンで確認できるようにするなど，避難経路決定後の避難所までの誘導方法は様々な選択肢がある．他方で，本システムが想定しているようなスマートフォンなどが使えないような通信障害が発生するほどの大規模な災害であった場合，スマートフォンで確認する以外の方法では，もう 1 台のドローンで誘導することも可能であると考えており，その技術について，現在，検討中である．

2.2.3. 避難行動の監視

Fig. 2 における③の実現のために，ドローンと画像処理を組み合わせた手法を用いる．そのために，ドローンを操作するためのコーディングを行い，搭載されたカメラに映る AR マーカを認識できるようにする必要がある．AR マーカとは，バーコードや QR コードのようなデータを持ったパターン画像の一種であり，二次元バーコードと同じである．AR マーカの特徴として，QR コードと同じように黒い枠内の図柄のパターンによってマーカの種類（ID）を区別することが可能である．そのため，複数人に別々のパターンの AR マーカを付与することで，マーカの種類によって人を判別することができるようになる．加えて，ドローンに搭載されるカメラでマーカを撮影することで，マーカに対しての相対位置や距離を求めることができるという利点もある．こうした特徴や利点を考慮して，人の判別のために AR マーカを使用することとした．また，ここで使用するドローンは，Ryze 社製の DJI Tello(Fig. 3 右) を用いた．Tello は，重量 200g 未満のトイドローンに分類され，GPS 非搭載の小型な機体ながらもジャイロ，気圧センサー，ビジョンセンサー等の各種センサーにより安定した飛行が可能である．また，Tello はプログラミングにより飛行させることが可能なドローンであり，プログラミング言語の Python によるコーディングを行うことで，フライトコントローラを必要とせずに自律飛行させることができる．以上に挙げたメリットやプログラミング飛行ができる点に着目し，Tello を採用した．

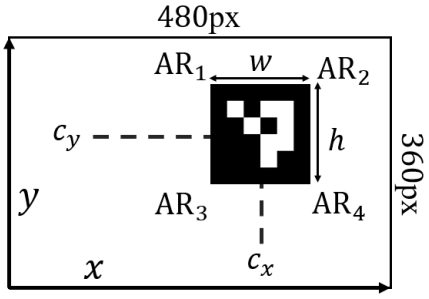


Fig6　Details of AR marker coordinates

前述したように，人を認識するための目印として AR マーカを用いて，Tello により撮影した映像からマーカを認識できる環境の構築を試みた．Tello のカメラが AR マーカを認識したとき，AR マーカの ID と四隅の座標 $\mathrm{AR}_m(x[m], y[m])(m = 1, 2, 3, 4)$ を得る (Fig. 6)．ここで，m は AR マーカにおける四隅の座標位置を表しており，左上を $m = 1$，右上を $m = 2$，左下を $m = 3$，左下を $m = 4$ とする．すなわち，AR マーカの左上の座標は $\mathrm{AR}_1(x[1], y[1])$，右下の座標は $\mathrm{AR}_4(x[4], y[4])$ で表されるため，幅 w と高さ h は Eq. (8)，Eq. (9) のように計算できる．

$$w = \left|x[1] - x[4]\right| \tag{8}$$

$$h = \left|y[1] - y[4]\right| \tag{9}$$

また，AR マーカの中心座標を c_x, c_y とすると，Eq. (10)，Eq. (11) のように計算できる．

$$c_x = \Big(x[1] + x[4]\Big)/2 \tag{10}$$

$$c_y = \Big(y[1] + y[4]\Big)/2 \tag{11}$$

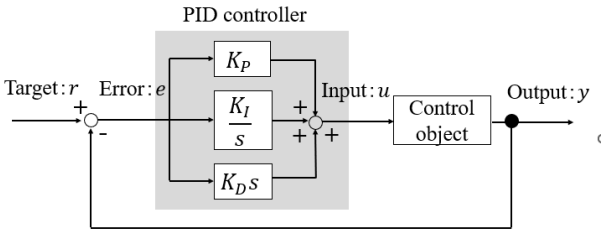


Fig.7　Feedback control system

Tello が人を認識し続ける，すなわち AR マーカを追尾し続けるために，ドローンが観測した成分（w，h，c_x，c_y）を用いてマーカをカメラ映像の中心に捉え続ける入力を行う．Tello より取得する画像・映像は 960 × 720 の HD 画質となっているが，PC への画像処理でかかる負荷等を考慮し，サイズを半分の 480 × 360 へと変更している．そのため，AR マーカの中心座標を Tello のカメラ映像の中心座標である $(240, 180)$ になるようにフィードバック制御をかける．

フィードバック制御とは，機体（制御対象）の状態を常に監視し，それが目標からずれた際にその誤差をリアルタイムで修正する制御方法である．一般的なフィードバック制御のシステムは，Fig. 7 に示すようなブロック線図を用いて表される．まず，Fig. 7 において，制御対象（Contorol object）とその周辺の信号に着目する．制御対象とは制御したいシステムのことであり，本研究においてはドローンが該当する．今，制御したいものはドローンが認識した AR マーカの位置（中心座標）であり，これはドローンから得られる情報であるため，ドローンの出力（Output:y）として表される．一方で，AR マーカの位置を調整するためにドローンに作用するのは制御器（詳細は後述する）からの操作量であり，これがドローンへの入力（Input:u）として働く．次に，制御器（Controller）とその周辺の信号に着目する．制御器とは前述した制御入力を生成するシステムのことであり，コントローラとも呼ばれる．本研究での制御器は PC であり，この PC から出力される操作量が制御入力として，制御対象のドローンへと入力される．一方で，制御器である PC への入力は，目標値（Target:r）と出力の差（Error:e）である．本研究においては目標値はカメラ映像の中心座標，出力は AR マーカの中心座標が該当する．これを基準として，ドローンへと与える操作量 u が決定される．

本研究では，前述した制御器において PID 制御というアルゴリズムを採用した．PID 制御とは，P（Proportional：比例），I（Integral：積分），D（Differential：微分）の 3 要素から構成されており，一般的に Eq. (12) に示す式 [14] で表される．

$$u(t) = K_p e(t) + K_I \int_0^t e(\tau) d\tau + K_D \dot{e}(t) \tag{12}$$

前述したように，$u(t)$ は単位時間当たりの入力（操作量），$e(t)$ は目標値と出力の差として表され，K_P，K_I，K_D は各制御における制御ゲインを表す．制御ゲインとは調整パラメータであり，この値を変化させることで制御の性能を高くすることが可能である．また，e に関しては Fig. 7 に示すパラメータを用いて，$e = r - y$ と表すことができるため，Eq. (12) は Eq. (13) のように書き換えることができる．

$$\begin{aligned} u(t) = K_p\big\{r(t) - y(t)\big\} + K_I \int_0^t \big\{r(\tau) - y(\tau)\big\} d\tau + \\ K_D\big\{\dot{r}(t) - \dot{y}(t)\big\} \end{aligned} \tag{13}$$

Eq. (13) において，第一項が P 制御，第二項が I 制御，第三項が D 制御を表している．P 制御は，PID 制御における基本動作であり，目標値と出力との偏差に比例した入力を調節する制御方式である．I 制御は，風などの外乱に抗い，出力を目標値に留める制御方式であり，D 制御は，振動的な挙動を抑制し，出力を滑らかに目標値に導く役割をする制御方式である．以上の 3 つの制御により PID 制御は構成されているが，本研究では最も基本的な P 制御のみを採用し，「AR マーカを捉え続ける」という制御を行った．

P 制御のみである場合，Eq. (13) の第一項が示すように，目標値と出力の差に比例するゲイン K_P を掛け合わせるだけでドローンへの入力 u が計算できる．前述したように，PC に映し出されるカメラ映像の中心座標 $(240, 180)$ が目標値であり，AR マーカの中心座標 (c_x, c_y) が出力である．したがって，ドローンへの x 軸方向の入力を u_x，y 軸方向の入力を u_y とすると，Eq. (14) と Eq. (15) に示す式で計算できる．

$$u_x = K_P * (240 - c_x) \tag{14}$$

$$u_y = K_P * (180 - c_y) \tag{15}$$

さらに，AR マーカの中心座標をカメラ映像の中心に合わせるだけでなく，映し出される AR マーカの大きさを一定に保つためにマーカの幅に関しても制御を行う．カメラ映像に映る AR マーカの幅の基準を 100px とすると，現在の AR マーカの幅 w を 100px にする入力 u_w は，Eq. (16) で表すことができる．

$$u_w = K_P * (100 - w) \tag{16}$$

前述したように，制御の性能はゲインによって決まるが，この調整は実際に制御対象を動かしながら手作業で試行錯誤的に実施



Fig8　Images taken by Mavic 2 Enterprise Dual
(left：Gokenzan, right：Kagawa University)

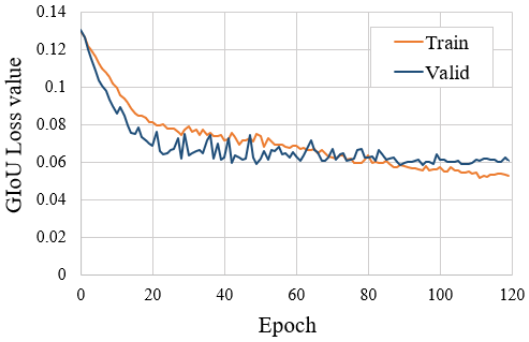


Fig9　Transition of loss

することが多い．K_P のような制御ゲインを決定する際には，プロセスゲインについて考えなければならない．プロセスゲインとは，制御する対象がどの程度の能力を持っているかを表す指標であり，本研究で言えば機体の安定性の高さと表現できる．Tello は前述したように，複数のセンサーによって安定したホバリングを行うことが可能である．そのため，自作のドローン等と比較するとその安定性は高いと言える．すなわち，プロセスゲインは高いと言え，他方で，プロセスゲインが高ければ制御ゲインは小さくなる傾向にあるため，本研究では基準値を 0.1 という低い値に設定し，そこから 0.1 ずつ増減させて調整を行った．その結果，u_x，u_y では $K_P = 0.3$，u_w では $K_P = 0.7$ のとき，ドローンが安定した挙動を示したため，以上の値をそれぞれの制御ゲイン K_P として設定した．

3. 各要素技術の実証実験

本論文では，「避難経路の状況把握」と「避難行動の監視」の要素技術に関して，実証実験を行った結果について以下に記述する．

3.1. 避難経路の状況把握

3.1.1. ドローンによる空撮

Fig. 8 に Mavic 2 Enterprise Dual を使用し，香川県高松市の五剣山（標高 375m）周辺（以降，五剣山）と香川大学林町キャンパス駐車場（以降，香川大学）で撮影した画像を示す．ドローン飛行には航空法等に基づく規制があり，公共の道路を飛行・撮影することは困難であったため，本研究では許可を得ることができた五剣山と香川大学での撮影を行った．香川大学に関しては，研究対象としている「道路」ではないが，車両がアスファルト上にある状況は道路と変わらないため，研究のロジック等の検証には問題がないと判断した．また，空撮は撮影関係者以外の人・物に対して安全を確保したうえで実施した．五剣山での空撮では関係者の車両しか駐車していなかったため，車両の上空を飛行しながら撮影を行ったが，香川大学ではほとんどが関係者以外の車両であり，車両・通行人への安全の観点から道路・建物境界または駐車している車両より 30m 離して撮影を行った．

3.1.2. YOLO を用いた車両検出モデルの作成

車両を検出するにあたり，前述した YOLO を用いて車両検出モデルの作成を行った．ドローン画像と同じく上空より車両を撮影した画像を Photock というフリー画像を提供するサイトより入手した．画像は全部で 259 枚入手し，アノテーションツールである RoboFlow を使用し，ラベル付けを行った．その際，教師データとして与えたラベルは自動車（軽自動車，普通自動車の区別なし），トラック，バス，自転車とした．今回検出するべきは車であるが，検出する段階で他のラベルとして誤検知されないかを確認するため，上記のラベルを設定した．

モデル学習時における損失の推移を Fig. 9 に示す．この時の損失は上述した $GIoU\,Loss$（Eq. (7)）により求められた値とする．損失は学習が進むごとに小さくなっていき，100〜120epoch 付近で値が収束していることが分かる．そのため，本研究では 120epoch まで学習したモデルを用いて検証を行う．

3.1.3. 車両検出結果

YOLO で作成した検出モデルによる車両の検出結果を Fig. 10 と Fig. 11 に示す．各図において，検出箇所を分類結果と同様の色で囲い，その上に検出結果の信頼度を示している．Fig. 10 では，画像に写る 2 台の車両が 0.63，0.77 という信頼度で検出が可能になっており，Fig. 11 では車両の台数は多いものの，車両の駐車されている箇所は概ね検出ができていることが分かる．車両は非常に多くの種類・色・形・サイズのものが存在しているが，そうした車両の特徴の違いによって検出結果に大きな偏りは生じなかった．特に，Fig. 8 には主に自動車が写っていたが，現状の訓練データで作成した車両検出モデルでは，軽自動車・普通自動車に関係なく検出することが可能になった．すなわち，本研究で使用した車両検出モデルは，軽自動車（全長 3.4m 以下，全幅 1.48m 以下，全高 2.0m 以下の車両）と普通自動車（全長 4.7m，全幅 1.7m，全高 2.0m をどれか 1 つでも上回る車）であれば検出

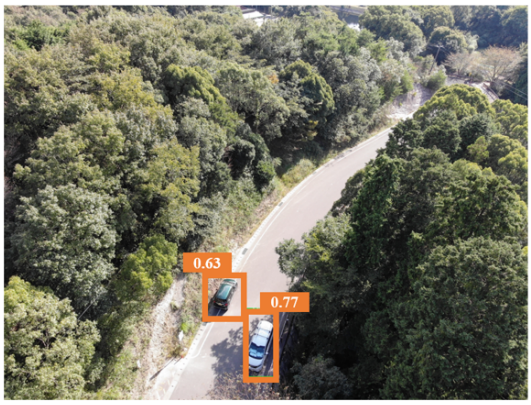


Fig.10　Result of vehicle detection(Gokenzan)



Fig.11　Result of vehicle detection(Kagawa University)

が可能であると言える．また，検出結果に大きな影響を与えると想定されたのは車両の色である．色は画像に写る車両の特徴として最も判断しやすく，検出モデルにおいても教師用データでラベル付けする際にデータが少なければ検出が困難になる可能性が考えられた．最近の車両は，カラーバリエーションが赤や青，緑といった原色やパステルカラーといったように豊富にはなってきているが，全体的にみると基本的に黒や白色の車両が多い傾向にある．そのため，モノトーンカラー以外の車両は必然的に教師データ数が少なくなる．しかし，本研究で色の違いによって車両が検出できなかったのは，Fig. 11 の青丸で囲った黄色の車両だけである．これは，学習用データの中に黄色の車両が少なかったことが原因であると考える．言い換えれば，それ以外の赤色の車両や青色（水色も含む）の車両は，黄色の車両よりも教師データが多かったことで，車両としての検出が可能になったということである．実際の検出によって，黄色の車両のような学習用データで他と比較して少ないような対象物の検出は困難であるということを確認できた．災害時にどのような種類・色・形・サイズの車が画像に写っていたとしても確実に検出ができるようなモデルを作成するためには，想定される様々なパターンの教師用データを用いた検出モデルの作成が必要になると言える．また，本研究では基礎的実験段階の検証として車両を対象として検出を行ったが，同様の手法を用いることにより，瓦礫などで封鎖された道路等を検出することも可能になると考えられる．

現段階では，車両の検出に留まっているが，今後は車両検出結果より，道路が避難可能な状況か否かを判断する方法を検討している．避難可能な道路としては要配慮者が通行可能かを考える必要があり，要配慮者が避難する際のパターンとしてはいくつか想定される．例えば，車椅子を利用している場合や車椅子は利用していないが介助歩行で本人の体を支えて歩行する場合などが挙げられる．全てに共通するのは，健常者のみの避難の場合と比較して移動のための四方のスペースが必要ということである．そのため，健常者だけであれば避難が可能な道路幅であっても，要配慮者の避難は困難になる可能性がある．車椅子が通行に必要な最低限の道幅はおよそ 0.7〜0.9m（回転させるためには，四方 1.35〜1.5m のエリアが必要）であるが，介助歩行の場合は 1.5 人分の幅を必要とするため，およそ 1.2m 必要となる．現時点では車両検出結果からどれだけの道路幅が確保できるかを判断することは困難である．そのため，今後は車両の検出結果を自動的にマップに落とし込み，検出結果の有無から避難可能かを判断できる道路閉塞マップの作成を検討する．

3.2. 避難行動の監視

3.2.1. AR マーカ認識実験

本研究では予備実験として AR マーカを手に持った状態で AR マーカを正しく認識し追尾することが可能かの実験を行った．Tello による AR マーカの認識実験の様子を Fig. 12 に示す．Tello は，その構造上カメラのジンバルを変更することができないため，避難者に見立てた人（被験者）が持つ AR マーカと同じ高さまで上昇させる必要がある．その場合，Tello による AR マーカの自動追尾が解除された場合，被験者にそのまま衝突する危険性がある．こうした状況を避けるため，本来は被験者よりも高い位置に Tello を飛行させ，カメラのジンバルを変更させることで斜め上から被験者の AR マーカを捉え続ける必要がある．しかし，本研究ではまず AR マーカを確実に認識し，それを自動追尾できるかの技術的な確認を行うという意味で，被験者と同じ高さで安全に追尾することが可能かを検討した．

実験で使用した AR マーカは，Python のプログラムにより作成し，11.5 × 11.5 cm に拡大したものを印刷した．AR マーカはクリップボードに張り付けたのち，被験者に持たせ，Tello の前を移動してもらった．移動に関しては，直線的な動きだけでなく，カーブを描きながら曲がる移動，その場に停止後再度動き出すと

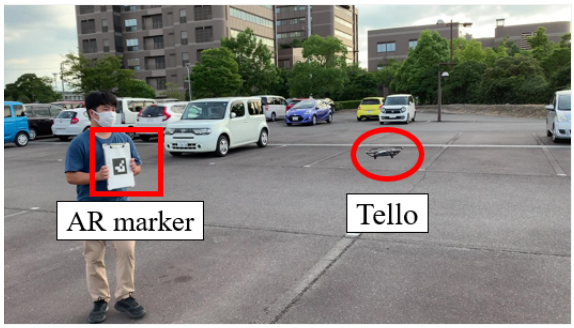


Fig.12　AR marker recognition by Tello

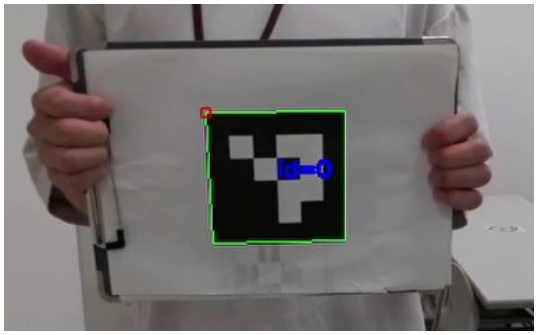


Fig.13　AR marker on Tello camera

いったような複数のシチュエーションを想定し，実験を行った．

3.2.2. 実験結果

実験の結果，被験者に持たせた AR マーカを Tello が認識し，自動追尾することを確認できた．また，同時に，Tello のカメラ映像から，被験者の行動を監視することも可能となった．ここで，Fig. 13 に AR マーカを認識し，自動追尾している際の Tello のカメラ映像の切り抜きを示す．Tello のカメラが AR マーカを認識し，ID 番号を青文字で表示するとともに，AP マーカの外周を緑色に囲っている様子が分かる．Tello を動かすプログラムを処理している PC の画面では，AR マーカが認識されるたび，画面内における座標が表示されるようになっており，AR マーカの座標を逐一確認することも可能である．前述したように，被験者には直線移動だけでなく，複数の移動を行ってもらったが，Tello は AR マーカをカメラに捉え続けて追尾を行った．自動追尾が失敗する例としては，Tello が AR マーカを見失うほど素早くカメラ外に移動するなど，機体が急激な旋回を行わなければならないような状態になると，自動追尾が終了し，Tello が思わぬ方向に飛行してしまうことを確認した．しかし，AR マーカがカメラ外に移動したとしても追尾方向から大きく逸脱していなければ，再度自動的にカメラ内に AR マーカを収め，自動飛行を続行することは可能であることが分かった．特に，本研究で最終的に対象としている避難時における要配慮者は，健常者と比較して移動の速度は速くないと考えられるため，要配慮者の移動速度程度であれば自動追尾が解除されることなく避難行動の監視を行うことができると考える．

また，AR マーカが認識されなくなる例として，太陽の光による影響も挙げられる．実験を実施している際には，太陽の光が直接 AR マーカに当たった時，黒色の部分が白っぽくなることで，Tello が AR マーカを認識できなくなることを確認した．実験を行った際の天候は晴れではあったものの，決して強い日差しが指しているという状態ではなかった．しかし，そのような状態であっても太陽が上っている方角に AR マーカを向けたとき，AR マーカが太陽の光によって見づらくなる現象が発生した．こうした外部の影響によって AR マーカが認識されなくなる可能性も考えられることから，AR マーカ自体が認識しやすいものであることが前提であるとした上で不測の事態に対する対処法に関しても検討をする必要がある．

前述したように，避難する際には実証実験のように 1 人ではなく，複数人での避難となるため，AR マーカを複数の避難者に配置することが想定される．その際には，基本的に一列に並び先導者の後に続くような避難隊列を想定しているため，基本的にカメラに映るのは最後尾の避難者と支援者の AR マーカだけと思われる．しかし，例えば，ある要配慮者が避難隊列から逸脱するような行動を取った場合，Tello のカメラはそのマーカを捉え，PC の画面上に ID を表示する．そこで，該当の ID の人にドローンに搭載されたスピーカーで忠告することにより，避難隊列の修復を図るものとする．今後は，以上に示すような複数の避難者を想定し，それぞれに ID の異なる AR マーカを配置することで避難隊列から離れていく人を認識しすることができるかを検討する．

4. 結言

本研究では，ドローンと AI を組み合わせて，災害時における復旧・復興ならびに適切な避難等のために道路状況を把握し，さらに，避難等に大きなハンディキャップを有するような配慮者の避難支援を行うシステムを開発することを目指した．本研究では，避難支援システムを構成する要素技術である「避難経路の状況把握」と「避難行動の監視」について実証実験による検討を行った．

「避難経路の状況把握」に関しては，Mavic 2 Enterprise Dual によって撮影された画像・映像に対して，AI の一つである CNN を用いた物体検出モデルである YOLO を採用して車両検出を行うことで実現を目指した．その結果，ドローン画像内に写る車両を台数に関係なく概ね検出することが可能となった．車両の種類・色・形・サイズで検出結果に大きな偏りは生じなかったが，

教師データの少ない黄色の車両の検出は困難であった．したがって，災害時にどのような車両が撮影されたとしても，確実に検出することができるようにするために，想定される様々なパターンの教師データを用いた検出モデルを作成する必要がある．

「避難行動の監視」に関しては，Python 等でコード化されたプログラムによって飛行制御が可能な DJI Tello を使用して，ドローンが特定の人物を認識することを念頭に，被験者が持つ AR マーカをカメラで認識し，自動追尾することで実現を目指した．その結果，被験者の移動方法に関わらず，Tello が AR マーカを追尾することを確認した．他方で，被験者の移動の速度により AR マーカが Tello のカメラの画角から外れた場合，自動追尾が解除される事例を確認したが，要配慮者の移動速度を考慮すれば自動追尾は解除されることなく，避難行動の監視を行うことができると考える．

以上に示すように，本研究で検討した「避難経路の状況把握」と「避難行動の監視」に関しては，実現可能なレベルにまで達していることを確認した．今後は，避難支援システムを構成する要素技術のうち「避難経路の状況把握」と「避難行動の監視」に係る課題等の検討ならびに実際の要配慮者を想定した実験を重ねるとともに，残る「避難誘導」の技術について検討を開始する予定である．

参考文献

(1) 内閣府：平成 30 年 7 月豪雨による水害・土砂災害からの避難に関するワーキンググループ（第 1 回）資料，内閣府 防災情報のページ（2018 年），https://www.bousai.go.jp/fusuigai/suigai_dosyaworking/pdf/dai1kai/siryo2.pdf，（2022 年 10 月 19 日閲覧可）

(2) NHK：「災害と障がい者」に関する自治体アンケート，NHK 福祉災害情報サイト ハートネット（2016 年 1 月），https://www.nhk.or.jp/heart-net/topics/19/anq_jichitai.html，（2022 年 10 月 19 日閲覧可）

(3) 国土交通省：TEC-FORCE（緊急災害対策派遣部隊），国土交通省 水管理・国土保全局 防災課, https://www.mlit.go.jp/river/bousai/pch-tec/index.html，（2022 年 10 月 19 日閲覧可）

(4) 鈴木学，浜克己，中村尚彦：協調ドローンを用いた避難誘導支援システム，計測自動制御学会論文集 (2020)，**56**，**1**，pp. 24-30.

(5) 高橋秀幸，片山健太，横田信英，杉安和也，北形元，木下哲男：UAV を活用した避難誘導支援システムの設計と試作，第 17 回情報科学技術フォーラム講演論文集 (2018)，pp. 363-364.

(6) 杉安和也，高橋秀幸，横田信英，片山健太：津波避難時の誘導を目的とした UAV の活用方法の検討，東日本大震災特別論文集 (2018)，**7**，pp. 7-10.

(7) 三平悠磨，堀浩一：UAV による災害時の通行可能経路の探索，人工知能学会全国大会論文集 (2013)，pp. 1-4.

(8) 藤井政宗，曽我真人：AR 技術を用いた小型マルチコプターの操縦スキル学習支援システムの提案と構築，人工知能学会全国大会論文集 (2021)，pp. 1-4.

(9) Redmon, J., Divvala, S., Girshick, R.,and Farhadi, A.：You Only Look Once:Unified, Real-Time Object Detection, Computer Vision and Pattern Recognition(CVPR). (2016)，pp. 779-788.

(10) Redmon, J., and Farhadi, A.：YOLO9000:Better, Faster, Stronger, Computer Vision and Pattern Recognition(CVPR). (2017)，pp. 7263-7271.

(11) Redmon, J., and Farhadi, A.：YOLOv3:An Incremental Improvement, Computer Vision and Pattern Recognition(CVPR). (2018)，1804.02767, 6p.

(12) Yan, B., Fan, P., Lie, X., Liu, Z.,and Yang, F.：A Real-Time Apple Targets Detection Method for Picking Robot Based on Improved YOLOv5, remote sensing.(2021)，**13**，**9**，1619, 23p.

(13) 久保栞，全邦釘，伊藤克雄：YOLOv5 を用いた導水路トンネルにおけるチョーキング箇所の検出，AI・データサイエンス論文集 (2021)，**2**，**J2**，pp. 87-96.

(14) Yoon, J., Doh, J.：Optimal PID control for hovering stabilization of quadcopter using long short term memory, Advanced Engineering Informatics.(2022)，**53**，pp. 1-12.

Transaction of JASCOME Vol. 22 (Dec., 2022), Paper No. 02-221216 JASCOME

Accuracy Controllable Characteristic Basis Function Method by using Krylov Subspace Algorithm

Tai TANAKA[1,2)], Kazuki NIINO[3)], Naoshi NISHIMURA[4)], and Michio TAKIKAWA[5)]

1) Kyoto University (36-1 Yoshida-Honmachi, Sakyo-ku, Kyoto 606-8501, E-mail: tanaka.tai.76a@st.kyoto-u.ac.jp)
2) Mitsubishi Electric Corp. (2-7-3, Marunouchi, Chiyoda-ku, Tokyo 100-8310, E-mail: Tanaka.Tai@dh.MitsubishiElectric.co.jp)
3) Kyoto University (36-1 Yoshida-Honmachi, Sakyo-ku, Kyoto 606-8501, E-mail: niino@i.kyoto-u.ac.jp)
4) Kyoto University (36-1 Yoshida-Honmachi, Sakyo-ku, Kyoto 606-8501, E-mail: nishimura.naoshi.8r@kyoto-u.jp)
5) Mitsubishi Electric Corp. (2-7-3, Marunouchi, Chiyoda-ku, Tokyo 100-8310, E-mail: Takikawa.Michio@ak.MitsubishiElectric.co.jp)

We propose a hybrid algorithm of the method of moments (MoM) and the characteristic basis function method (CBFM), which can rapidly and accurately calculate angular characteristics of scattered waves for electromagnetic incident waves from multiple directions. The proposed method roughly captures characteristics of a solution by the CBFM, and the accuracy of the solution is further controlled with the help of the Krylov subspace method in the MoM. Also the number of sampling points of the incident plane waves in the computation of generating the CBFs is small. We analyzed the monostatic radar cross section pattern of two scatterers by using the proposed method. The accuracy improvement can be achieved by the hybrid algorithm, which is faster than the conventional MoM.

Key Words : Method of Moments (MoM), Characteristic Basis Function Method (CBFM), Radar Cross Section (RCS).

1. Introduction

Numerical analyses for electromagnetic scattering are studied for various purposes in engineering such as design of wireless communication systems and radar systems. When analyzing scattering properties of a structure, a plane wave is often used as the incident field. In general, the scattering properties depend on the incident angle of the plane wave. The scattered field for each incident field is often evaluated by the radar cross section (RCS), which is the ratio of the norm of a scattered field to that of the incident field [1].

There exist many methods to evaluate RCSs for electromagnetic scattering problems. For example, the high-frequency approximation methods based on uniform diffraction theory [2] and the numerical methods such as the finite element method [3], the finite-difference time-domain method [4], and the method of moments (MoM) [5] are well known as typical methods for the analysis of the electromagnetic problems. Among these methods, the MoM can analyze scattering problems in open regions with very high accuracy. In the MoM, the integral equation are discretized and transformed into a system of linear equations by the Galerkin method. Since the coefficient matrix of that linear equation is dense, it is difficult for a naive MoM to solve large-scale problems. However, it is well known that the fast multipole method (FMM) can compute the product of the dense matrix and arbitrary vectors faster thus providing a fast method of solving large-scale problems along with iterative linear solvers [6, 7].

As another approach for acceleration and reduction of the memory usage in the MoM, the domain decomposition methods have been considered [8, 9]. They can reduce the computational complexity and memory usage by a low-rank approximation of the matrix equations. Among various domain decomposition methods, the characteristic basis function method (CBFM) is known to be effective for problems with multiple sources and finite periodic scatterers such as the array antennas [10–13]. In the CBFM, scatterers are divided into multiple cells and the characteristic basis functions (CBFs) are defined as non-local basis functions in each cell. The CBFs in each cell are obtained as a sub-matrix solution corresponding to elementary basis functions such as the Rao-Wilton-Glisson (RWG) function [14] with multiple incident plane waves. In general, the number of CBFs is much less than that of the RWG functions; hence the computational cost for solving integral equations discretized with the CBFs is smaller than that with the RWG. However, the CBFM has a trade-off between the computational time for generating the CBFs and accuracy of the final solution. Indeed, it takes much computational time for generating the CBFs if the number of incident plane waves is increased while smaller numbers of incident waves for CBF generation leads to poor accuracy. In order to solve this problem, we have proposed a new type of CBF called the improved primary CBF (IPCBF) [15, 16]. This method takes into account the coupling effects between cells (the higher-order CBFs [17]),

received Oct. 4, 2022, accepted Nov. 10, 2022

which are solutions of the submatrix equation with waves radiated from other cells as incident waves. The CBFM using the IPCBFs is particularly useful as a way to roughly check the angular characteristics of the scattered field.

In this paper, we propose a hybrid of the conventional MoM and the CBFM as a method to further improve the accuracy while taking advantages of the IPCBFs. In the proposed method, the characteristics of the solution are roughly identified by CBFM, and the accuracy of the solution is further controlled by the MoM. The proposed method can seamlessly select cases where the accuracy of CBFM is sufficient, thus mitigating the problem related to the trade-off between accuracy and efficiency.

The article consists of the following components. First, we present the preliminary description of the MoM in next section. In section 3, we show detailed expression of the proposed algorithm. In section 4, the validity of the formulation is shown by numerical evaluations. Finally, we show some concluding remarks. We use following symbols in this paper. The bold and italicized symbols such as $\boldsymbol{A}$ represent vector quantities in three-dimensional fields. The uppercase and lowercase symbols $\mathbf{A}$, $\mathbf{a}$ written in bold and upright type represent matrices and vectors, respectively. The expression such as $\left[\mathbf{A}\right]_{ij}$ denotes an element of a matrix or vector. A matrix or vector with a subscript such as $\mathbf{A}_{ij}$, $(\mathbf{A})_{ij}$ is a subset or a subvector, respectively. The matrix with the superscript H represents the adjoint matrix, and $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\sum_i [\bar{A}]_i[B]_i$ is the (complex) inner product of vectors $\boldsymbol{A}$ and $\boldsymbol{B}$. In addition, RCS means monostatic RCS, not bistatic RCS [1].

2. Integral equations and MoM

In this section, we present a preliminary description of the MoM.

2.1. Integral Equation

We assume that domain Ω is a perfect electric conductor, and $D=\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega}$ is the analysis space as shown in Fig. 1. $\Gamma=\partial\Omega$ is the closed surface of the PEC. The unit normal vector $\hat{\boldsymbol{n}}$ points in the direction of D. Hereinafter we assume the time dependence to be $e^{j\omega t}$ and suppress it. The electric field integral equation (EFIE) and the magnetic field integral equation (MFIE) [18] are represented by

$$\hat{\boldsymbol{n}}\times\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{E}^{\mathrm{inc}}(\boldsymbol{r})=-\eta\hat{\boldsymbol{n}}\times(\mathcal{T}\boldsymbol{J})(\boldsymbol{r}), \tag{1}$$

$$\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}^{\mathrm{inc}}(\boldsymbol{r})=-(\mathcal{K}\boldsymbol{J})(\boldsymbol{r})+\frac{1}{2}\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}). \tag{2}$$

Here, $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r})$ is the unknown surface current on Γ. The integral

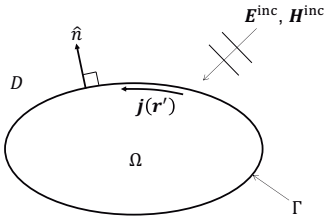


Fig. 1: Definition of the domain

operators $\mathcal{T}$ and $\mathcal{K}$ are defined as

$$\begin{aligned}(\mathcal{T}\boldsymbol{J})(\boldsymbol{r})&=jk\hat{\boldsymbol{n}}\times F.P.\int_\Gamma\left(\mathcal{I}+\frac{1}{k^2}\nabla\nabla\right)G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')d\boldsymbol{r}'\\&\equiv\hat{\boldsymbol{n}}\times(\mathcal{T}'\boldsymbol{J})(\boldsymbol{r})\end{aligned} \tag{3}$$

$$(\mathcal{K}\boldsymbol{J})(\boldsymbol{r})=\hat{\boldsymbol{n}}\times P.V.\int_\Gamma\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')\times\nabla G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')d\boldsymbol{r}' \tag{4}$$

Here, $F.P.$, $P.V.$, and $\mathcal{I}$ represent the finite part, the Cauchy principal value integral, and the identity operator, respectively. Also $\boldsymbol{E}^{\mathrm{inc}}$ and $\boldsymbol{H}^{\mathrm{inc}}$ denote the incident electric and magnetic fields. The wavenumber, impedance of the free space and imaginary unit are denoted by k, η, and j, respectively. The function $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ is the fundamental solution of Helmholtz's equation in three-dimension space for the observation point $\boldsymbol{r}$ and the source point $\boldsymbol{r}'$:

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\frac{e^{-jk|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \tag{5}$$

We have the combined field integral equation (CFIE) in the following form:

$$\begin{aligned}&-\gamma\hat{\boldsymbol{n}}\times\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{E}^{\mathrm{inc}}(\boldsymbol{r})+(1-\gamma)\eta\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}^{\mathrm{inc}}(\boldsymbol{r})\\&\quad=\gamma\eta\hat{\boldsymbol{n}}\times(\mathcal{T}\boldsymbol{J})(\boldsymbol{r})-(1-\gamma)\eta(\mathcal{K}\boldsymbol{J})(\boldsymbol{r})+\frac{1}{2}(1-\gamma)\eta\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}),\end{aligned} \tag{6}$$

where γ is coefficients of the combination of (1) and (2). We use the CFIE for analyzing the problem in this paper.

2.2. Discretization of Integral Equations

In this analysis, the scatterers are discretized with triangles and RWG basis function [14] $\boldsymbol{f}_n(\boldsymbol{r})$ defined on the triangular mesh. The unknown current $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r})$ is expanded with the RWG function:

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r})\approx\sum_{n=1}^{N}\alpha_n\boldsymbol{f}_n(\boldsymbol{r}),\quad\alpha_n\in\mathbb{C} \tag{7}$$

Taking the inner product of RWG basis and the integral equation in (6), we obtain the matrix equation [5]

$$\mathbf{Zj}=\mathbf{v} \tag{8}$$

where $\mathbf{Z}\in\mathbb{C}^{N\times N}$ and $\mathbf{v}\in\mathbb{C}^N$ are respectively the impedance

matrix and incident field vector, which are defined by

$$\left[\mathbf{Z}\right]_{mn} = \int_{\Gamma} \boldsymbol{f}_m(\boldsymbol{r}) \cdot (\gamma\eta\hat{\boldsymbol{n}} \times (\mathcal{T}\boldsymbol{f}_n)(\boldsymbol{r}) - (1-\gamma)\eta\,(\mathcal{K}\boldsymbol{f}_n)(\boldsymbol{r}) + \frac{1}{2}(1-\gamma)\eta\boldsymbol{f}_n(\boldsymbol{r}))d\boldsymbol{r}, \quad (9)$$

$$\left[\mathbf{v}\right]_m = \int_{\Gamma} \boldsymbol{f}_m(\boldsymbol{r}) \cdot (-\gamma\hat{n} \times \hat{n} \times \boldsymbol{E}^{\mathrm{inc}}(\boldsymbol{r}) + (1-\gamma)\eta\hat{n} \times \boldsymbol{H}^{\mathrm{inc}}(\boldsymbol{r}))d\boldsymbol{r}. \quad (10)$$

In the conventional MoM, we solve equation (8) with an iterative method or a direct method to obtain the solution as the expansion coefficient vector $\mathbf{j} = \begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_N\end{bmatrix}^T$ where the superposed T stands for the transpose of a vector.

The convergence of (8) is usually good because the discretized MFIE included in the CFIE has a small condition number. Since the condition number of the EFIE is large, the convergence of (8) becomes worse as the coefficient γ of the CFIE is set to larger values. On the other hand, the accuracy of the analysis improves [7].

3. Formulation of Proposed Method

3.1. Overview of CBFM

The CBFM is a numerical method to accelerate the MoM by discretizing integral equations with the CBF, which in general has smaller DOFs than the RWG functions. For generating the CBF, the boundary of a scatterer is divided into N^{Cell} cells. The nth CBF in cell m, denoted by $\mathbf{c}_{mn}$, is represented as the linear combination of the RWG function:

$$\mathbf{c}_{mn}(\boldsymbol{r}) = \sum_{i=1}^{N_m} c_{mni}\boldsymbol{f}_{\Lambda_{mi}}(\boldsymbol{r}) \quad (n = 1, \cdots L_m), \quad (11)$$

where N_m and Λ_{mi} are the total number and index of the RWG function in cell m, and c_{mni} are complex coefficients. The complex matrix $\mathbf{C}_m \in \mathbb{C}^{N_m \times N_m^{\mathrm{CBF}}}$ consisting of the coefficients c_{mni}:

$$\left[\mathbf{C}_m\right]_{in} = c_{mni}. \quad (12)$$

is also referred to as the CBF in cell m in this paper.

One of widely used methods to generate the CBF is as follows. Considering scattering problems whose scatterer is a part of the original one included in cell m, one computes the solution of the problem with multiple incident plane waves from s directions as wave sources. We define the solution in cell m with the ith incident wave as $\mathbf{j}_{m,i}$ and $\mathbf{J}_m$ by

$$\mathbf{J}_m = \begin{bmatrix}\mathbf{j}_{m,1} & \mathbf{j}_{m,2} & \cdots & \mathbf{j}_{m,s}\end{bmatrix}. \quad (13)$$

Once the coefficient matrix $\mathbf{J}_m$ is calculated, the conventional CBFM computes the CBF $\mathbf{C}_m$ by algebraically orthogonalizing $\mathbf{J}_m$ with the singular value decomposition (SVD):

$$\begin{aligned}\mathbf{J}_m &= \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^H \\ &= \begin{bmatrix}\mathbf{U}_{\mathrm{L}} & \mathbf{U}_{\mathrm{S}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{\Sigma}_{\mathrm{L}} & \\ & \mathbf{\Sigma}_{\mathrm{S}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{V}_{\mathrm{L}}^H \\ \mathbf{V}_{\mathrm{S}}^H\end{bmatrix} \\ &\simeq \mathbf{U}_{\mathrm{L}}\mathbf{\Sigma}_{\mathrm{L}}\mathbf{V}_{\mathrm{L}}^H, \end{aligned} \quad (14)$$

where $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{N_m \times r}$ and $\mathbf{V} \in \mathbb{C}^{s \times r}$ are unitary matrices and $\mathbf{\Sigma} \in \mathbb{C}^{r \times r}$ is the diagonal matrix having r singular values in its diagonal components. Here, Σ is split into two matrices Σ_L and Σ_S with the use of a threshold δ_{SVD}, namely Σ_L is the diagonal matrix with the singular values of $\mathbf{J}_m$ larger than $\sigma_1\delta_{\mathrm{SVD}}$ while Σ_S is the one with smaller singular values, where σ_1 is the largest singular value of $\mathbf{J}_m$. The submatrix of $\mathbf{U}$ corresponding to $\mathbf{\Sigma}_{\mathrm{L}}$, denoted by $\mathbf{U}_{\mathrm{L}} \in \mathbb{C}^{N_m \times N_m^{\mathrm{CBF}}}$, is used as the CBF $\mathbf{C}_m$. The CBF $\mathbf{C}_m$ obviously satisfies $\mathbf{C}_m^H\mathbf{C}_m = I$, which means that the coefficient vectors of the CBFs in each cell are algebraically orthogonalized.

3.2. Proposed Algorithm

The CBFs are created from the excitation current of each cell. One of the simplest methods to generate CBF is to compute $\mathbf{j}_{m,i}$ as solutions of scattering problems in cell m without taking into account the mutual couplings between cells, namely

$$\mathbf{j}_{m,i} = \mathbf{Z}_{mm}^{-1}(\mathbf{v}_i)_m, \quad (15)$$

where $\mathbf{Z}_{mm} \in \mathbb{C}^{N_m \times N_m}$ is submatrix of the impedance matrix $\mathbf{Z}$ formed by N_m RWG functions in cell m and $(\mathbf{v}_i)_m \in \mathbb{C}^{N_m}$ is the subvector of the ith incident field vector $\mathbf{v}_i$ for cell m [10]. For $\mathbf{v}_i$, the plane waves propagating in the directions sampled at an appropriate interval from the three-dimensional unit sphere are used. The CBF generated from $\mathbf{j}_{m,i}$ in (15) is called the primary CBF [11]. In addition to the primary CBFs, several types of CBFs exist, such as secondary CBFs generated from the current of other cells [10] and higher-order CBFs [17]. In Tanaka et al. [15,16], we have proposed IPCBFs, which iteratively include the effect of the higher-order CBFs into the primary CBF without increasing the number of basis functions. The expansion coefficient vector $\mathbf{j}_{m,i}^{(p)}$ with p iterations for the IPCBF is obtained by

$$\mathbf{j}_{m,i}^{(p)} = \mathbf{Z}_{mm}^{-1}\left((\mathbf{v}_i)_m - \sum_{\substack{n=1 \\ n\neq m}}^{N^{\mathrm{Cell}}} \mathbf{Z}_{mn}\mathbf{j}_{n,i}^{(p-1)}\right). \quad (16)$$

This method not only prevents the number of CBFs from increasing, but also efficiently add the effects of the higher-order CBFs to the primary CBFs. Note that equation (16) can be interpreted as the solution of the MoM with p iterations of the block Jacobi method. According to this idea, we have further developed a numerical method to obtain IPCBF with the rough use of the Krylov subspace algorithm to (8)

instead of (16) [19]. In our previous study [19], we have used the block BiCGStab [20,21] for generating the IPCBF. In fact the block BiCGStab seems appropriate for this purpose since it can simultaneously solve linear systems with multiple incident waves by generating the Krylov subspace from the initial residuals based on the incident plane waves with s directions. However the block-type Krylov subspace method is not as effective as was expected since the initial residuals calculated from plane waves with multiple directions are in general almost linearly dependent and thus the dimension of the Krylov subspace is less than the number of the basis functions. By this reason, we utilize the standard generalized minimal residual (GMRES) method [22] as the Krylov subspace algorithm in this paper. Hence $\mathbf{j}_{m,i}^{(p)}$ is computed one by one for each RHS $\mathbf{v}_i$.

One of issues of the IPCBF is a trade-off between accuracy and computational cost. When the interval of the incident waves for calculating the IPCBF is too wide, we cannot calculate RCS patterns accurately even if the IPCBFs are generated from sufficiently converged iterative solutions obtained with GMRES. On the other hand, it is desirable to use smaller numbers of incident wave sources in order to reduce the computational cost of IPCBF. We therefore propose a hybrid algorithm of using CBFM and the original matrix equation in (8) together as a way to obtain a solution with better accuracy while using these IPCBFs. This algorithm utilizes the feature that one may roughly capture the characteristics of RCS using these IPCBFs.

In this algorithm, the IPCBF is first computed with sparsely sampled incident wave sources and relatively large residual norm. The IPCBF is then used to calculate the unknown current, denoted by $\mathbf{j}^{(0)}$, with CBFM. The current $\mathbf{j}^{(0)}$ is used as the initial value for the iteration in the MoM since $\mathbf{j}^{(0)}$ is expected to broadly capture the characteristics of the correct current $\mathbf{j}$. From a different point of view, one may say that this algorithm tries to reduce the number of iterations of the conventional MoM by improving the initial value with the help of CBFM.

Algorithm 1 shows the proposed hybrid algorithm which consists of three procedures. The first procedure is for the generation of $\mathbf{C}_m$ for the IPCBFs. The loop for $i = 1$ to s is the calculation scheme for the IPCBF $\mathbf{J}_m$. In the next loop for $m = 1$ to N^{Cell}, $\mathbf{J}_m$ is algebraically orthogonalized and compressed by the SVD. The second procedure is for preparing a matrix for the CBFM with the LU decomposition, which is more effective for this procedure than iterative methods since the LU decomposition can efficiently obtain solutions for linear equations with a small coefficient matrix and multiple sources. The third procedure is the final iteration scheme for obtaining the current $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r})$. We first calculate $\mathbf{j}^{\mathrm{CBF}}$, which is the solution of the discretized CFIE:

Algorithm 1 Hybrid Algorithm using CBFM and MoM

procedure Coefficient Generation
  for $i = 1, \cdots, s$ **do**
    Set $\mathbf{v}$ for direction i from (10)
    Solve $\mathbf{Z}\mathbf{j}_i = \mathbf{v}$ in (8) for $\mathbf{j}_i$ with a tolerance δ_{r}.
    for $m = 1, \cdots, N^{\mathrm{Cell}}$ **do**
      Divide $\mathbf{j}_i$ into elements per cell $\mathbf{j}_{m,i}$
    end for
  end for
  for $m = 1, \cdots, N^{\mathrm{Cell}}$ **do**
    Orthogonalize $\mathbf{J}_m \simeq \mathbf{U}_{\mathrm{L}}\mathbf{\Sigma}_{\mathrm{L}}\mathbf{V}_{\mathrm{L}}^H$ by (14)
    Assign $\mathbf{U}_{\mathrm{L}}$ to $\mathbf{C}_m$
  end for
end procedure

procedure CBFM Matrix Filling
  Compute $\mathbf{Z}^{\mathrm{CBF}}$ in (18)
  Decompose $\mathbf{Z}^{\mathrm{CBF}}$ by using LU decomposition
end procedure

procedure Final Iteration
  for $i = 1, \cdots, S$ **do**
    Set $\mathbf{v}^{\mathrm{CBF}}$ for direction i from (19)
    Solve $\mathbf{Z}^{\mathrm{CBF}}\mathbf{j}^{\mathrm{CBF}} = \mathbf{v}^{\mathrm{CBF}}$ in (17) for $\mathbf{j}^{\mathrm{CBF}}$
    Compute $\mathbf{j}^{(0)}$ and set it as initial value
    Solve $\mathbf{Z}\mathbf{j} = \mathbf{v}$ in (8) for $\mathbf{j}$ with a tolerance δ_{R}.
    Compute current $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r})$ from (7)
  end for
end procedure

$$\mathbf{Z}^{\mathrm{CBF}}\mathbf{j}^{\mathrm{CBF}} = \mathbf{v}^{\mathrm{CBF}} \tag{17}$$

with the IPCBF, where

$$\mathbf{Z}^{\mathrm{CBF}} = \mathbf{C}^H\mathbf{Z}\mathbf{C}, \tag{18}$$

$$\mathbf{v}^{\mathrm{CBF}} = \mathbf{C}^H\mathbf{v}, \tag{19}$$

$$\mathbf{C} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{C}_{N^{\mathrm{Cell}}} \end{bmatrix}. \tag{20}$$

Then we apply the GMRES to the CFIE discretized with the RWG functions with $\mathbf{j}^{(0)} = \mathbf{C}\mathbf{j}^{\mathrm{CBF}}$ as the initial guess.

The advantage of the proposed method is that it can always converge to within an arbitrary accuracy, even if the solution of CBFM with IPCBF is not accurate. If the accuracy of IPCBF is sufficient, the final iteration scheme is not performed and the solution is obtained. In other words, the proposed method can seamlessly select cases where the accuracy of CBFM is sufficient, and can control the analysis accuracy. In addition, IPCBFs do not require extended regions which are used in the conventional CBFM in order to avoid unnatural behavior of the solution near the boundaries of cells [10]. Furthermore, for the Krylov subspace algorithm, the computation can be made more efficient with the help of FMM [6, 7], which would further speed up the IPCBF generation.

An advantage of the proposed method from the viewpoint of program implementation is that it can use the matrix solving procedure in the conventional MoM code for calculating $\mathbf{C}_m$ and for the final iteration in the hybrid algorithm. There is obviously no complication in the process caused by the extended region. In addition, the advantage of the CBFM implementation that the matrix equation of the CBFM is generated simply by taking the inner product of the coefficient $\mathbf{C}_m$ and $(\mathbf{Z}, \mathbf{v})$ remains unchanged. Therefore, one can easily implement the proposed method using any existing in-house MoM program.

4. Numerical Results

In this section, we show numerical examples with two types of perfect electric conductor scatterers, a plate and an almond. Hereafter the CBFM using the IPCBFs will be referred to as "IPCBFM" in order to distinguish it from the proposed hybrid algorithm. The residual norms of (8) solved in the procedure of the coefficient generation and the final iteration in Algorithm 1 are denoted by δ_{r} and δ_{R}, respectively. The GMRES method and FMM are used in the above procedure. The calculation by the standard MoM is also performed for the comparison with these methods. We use the RCS, denoted by σ, as the evaluation index of the spatial distribution of scattering in the far field. The RCS σ for the current excited by the incident plane wave $\boldsymbol{E}^{\mathrm{inc}}(\boldsymbol{r})$ is expressed as follows:

$$\sigma = \lim_{r\to\infty} 4\pi r^2 \frac{\left|\boldsymbol{E}^{\mathrm{scat}}(\boldsymbol{r})\right|^2}{\left|\boldsymbol{E}^{\mathrm{inc}}(\boldsymbol{r})\right|^2}, \tag{21}$$

where $\boldsymbol{E}^{\mathrm{scat}}(\boldsymbol{r}) = \eta(\mathcal{T}'\boldsymbol{J})(\boldsymbol{r})$ is the scattered field.

4.1. Plate

We calculate the RCS pattern of the plate shown in the Fig. 2 and evaluate its analysis accuracy and convergence. The number of the unknowns N in the MoM is 22050. Analysis coordinate plane (the coordinate plane on which σ is calculated) is $z-x$ plane ($\phi = 0^\circ$ plane). We calculate the

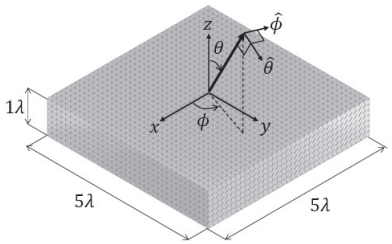


Fig. 2: Plate

RCS pattern of $0^\circ \le \theta \le 90^\circ$, $\Delta\theta = 1^\circ$ of $\hat{\theta}$ polarization; therefore, the number of the incidence S is equal to 91. The scatterer is divided into 4, 4, and 2 cells in the x, y, and z directions, respectively. The longest side length of the cell l^{Cell} is 1.25λ and the total number of cells N^{Cell} is 32. We set the coefficient γ of CFIE in (6) as 2.0×10^{-1}. The typical threshold value δ_{SVD} is usually around 10^{-3} [11]. If the threshold is too large, one may lose necessary CBFs, which makes it difficult to evaluate the characteristics of IPCBFM. To prevent this, we use a smaller value 10^{-7} for δ_{SVD} in this paper. In this analysis, we set the tolerance of the residual norm δ_{R} to be 10^{-4} at the final iteration in the hybrid algorithm and the MoM.

TABLE 1 shows the calculation parameters for generating the CBFs. For conditions 1 to 4, the CBFs are generated by sampling the incident plane wave from the coordinate plane and range in which the RCS is finally computed, and the angular intervals and the residual norms δ_{r} are varied. The polarization of condition 1–4, 6, 7 is $\hat{\theta}$ and that of condition 5 is $\hat{\phi}$. The conditions 6 and 7 have the same number of the incident waves s as in condition 1, but the coordinate planes to be sampled are different from in other conditions. We analyze the effects of the residual norm δ_{r}, the angle interval $\Delta\theta$, the polarization, and the coordinate plane selection on CBF generation and analysis accuracy through these analyses.

Table 1: Parameters for the CBF generations

Condition	θ_{s}	ϕ_{s}	$\Delta\theta$	$\Delta\phi$	N_θ	N_ϕ	N_{p}(Pol.)	δ_{r}
1	0°	0°	10°	0°	10	1	1 ($\hat{\theta}$)	10^{-4}
2	0°	0°	10°	0°	10	1	1 ($\hat{\theta}$)	10^{-2}
3	0°	0°	30°	0°	4	1	1 ($\hat{\theta}$)	10^{-4}
4	0°	0°	30°	0°	4	1	1 ($\hat{\theta}$)	10^{-2}
5	0°	0°	10°	0°	10	1	1 ($\hat{\phi}$)	10^{-4}
6	0°	90°	10°	0°	10	1	1 ($\hat{\theta}$)	10^{-4}
7	90°	0°	0°	10°	1	10	1 ($\hat{\theta}$)	10^{-4}

Fig. 3 shows the number of the CBFs N^{CBF}, the total number of the iterations for the CBF generations T^{CBF} and that for the final iterations T^{Final}. In the hybrid algorithm, if N^{CBF} is small enough, the computational complexity of the SVD ($O\left(s^2 N_m\right)$) and the LU decomposition ($O\left(\left(N^{\mathrm{CBF}}\right)^3\right)$)

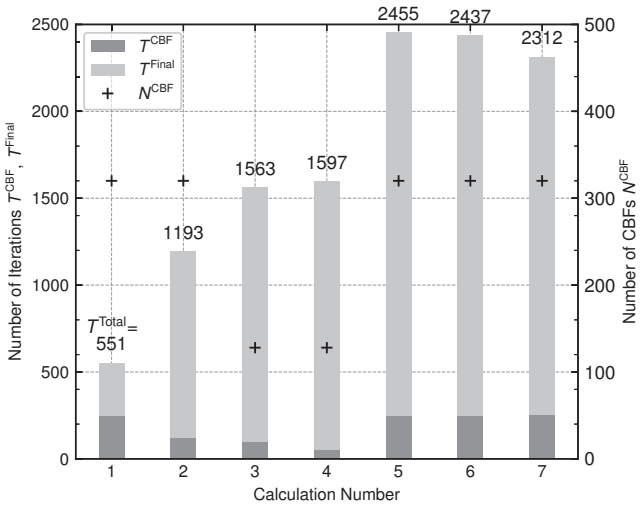


Fig. 3: Iteration results for the plate

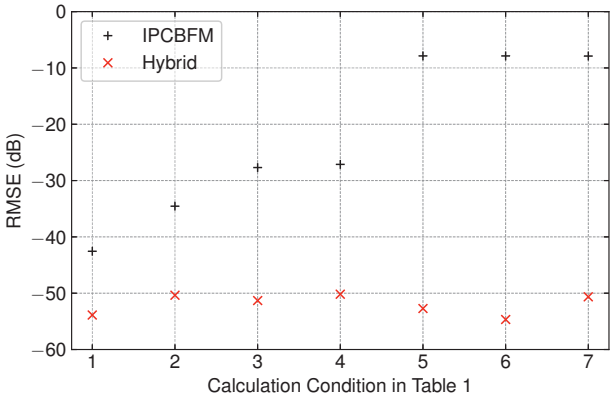


Fig. 4: RMSE of the plate

become much smaller than that of the IPCBF generation and the final iterations. Therefore, the overall computational complexity of the hybrid algorithm will be approximately proportional to the number of these iterations. We thus define the total number of iterations in an analysis as $T^{\mathrm{Total}}(= T^{\mathrm{CBF}} + T^{\mathrm{Final}})$. We note that the number of the iterations for the MoM T^{MoM} is 2122. We also note that N^{CBF} is small enough that the matrix equation shown in (17) can be calculated by LU decomposition.

Fig. 4 shows the root mean square error (RMSE) for each of conditions in TABLE 1. The RMSE of the CBFM relative to the MoM is defined by

$$\mathrm{RMSE} = 10 \log 10 \left(\frac{\sqrt{\frac{1}{N_\theta} \sum_{i=1}^{N_\theta} (\sigma_i^{\mathrm{c}} - \sigma_i^{\mathrm{m}})^2}}{\max_i\{\sigma_i^{\mathrm{m}}\} - \min_i\{\sigma_i^{\mathrm{m}}\}} \right) \quad \mathrm{dB},$$

where σ_i^{m} (σ_i^{c}) stands for σ computed with MoM (CBFM) for the ith incident wave. In Fig. 4, the RMSE for the result of the IPCBFM under the condition 1 in TABLE 1 is better than that under the condition 2. It indicates that using a current distribution close to the correct solution for the CBF generation improves the accuracy of the CBFM analysis. As

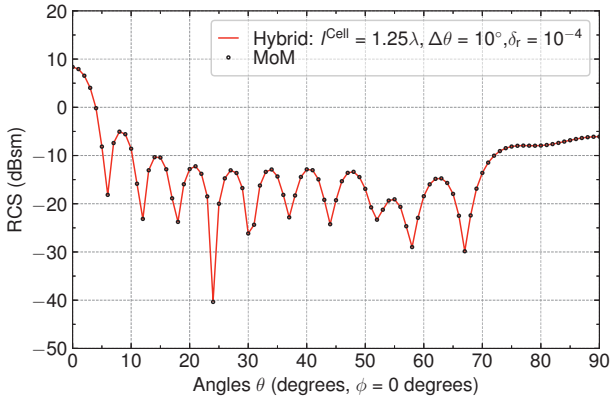


Fig. 5: RCS of the plate

can be seen from the RMSEs for the IPCBFM results under the condition 3 and 4, this will not be the case if the number of CBFs is not sufficient to represent the distribution of induced currents for each direction of the RCS pattern. When the CBFs are generated from the incident plane waves with the orthogonal polarization ($\hat{\phi}$ polarization) in calculation number 5, the RMSE of the IPCBFM becomes over -10 dB. This is also the case when the plane wave is sampled from the coordinate planes ($y - z$ and the $x - y$) different from the plane where the RCS pattern is to be obtained ($z - x$) (i.e., conditions 6 and 7).

One can simply conclude from these results that more incident wave samples are needed to further improve the accuracy of the analysis. On the other hand, as the number of samples is increased, the acceleration effect of the CBFM to the ordinary MoM decreases. The number of sampling points is also largely dependent on the scatterer. As shown in Fig. 4, the hybrid algorithm solves this problem. In the present analysis, the hybrid algorithm yields a solution with RMSE below -50 dB, which agrees very well with the MoM results. The total number of iterations for the calculation number 5 to 7 in the hybrid algorithm exceeds that of MoM. It means that the hybrid algorithm is not effective unless the initial values are reasonable. On the other hand, if good initial values are chosen, the hybrid algorithm can speed up the process. In the case of calculation number 1, which meets this condition, the total number of iterations is reduced by a factor of about 1/4.

The RCS patterns of calculation number 1 for the hybrid method, which showed particularly high efficiency in this analysis, are shown in Fig. 5. The analysis results agree well with the results of the MoM.

4.2. Almond

In this section, we investigate the parameter dependency of the proposed method by analyzing the almond-shaped scatterer [23] in Fig. 6 whose longest length is 10λ. The

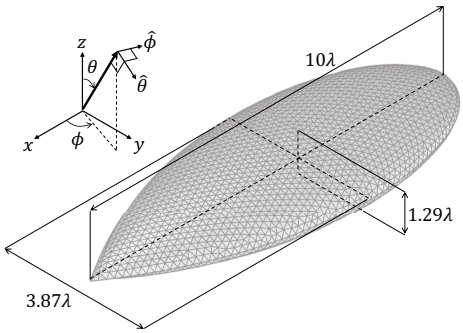


Fig. 6: Almond

number of the unknowns N is 8244. We calculate the RCS pattern of $-90^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$, $\Delta\theta = 0.5^\circ$ of θ polarization ($S = 361$). TABLE 2 shows the parameters for the IPCBF generation. In this calculation, we use two types of the CBFs, the IPCBFs and the primary CBFs, and compare the differences between them. We consider two types of the cells: $l^{\mathrm{Cell}} = 1.25\lambda$ and 2.5λ per side. The scatterer is divided into $8 \times 4 \times 2$ cells for $l^{\mathrm{Cell}} = 1.25\lambda$ and $4 \times 2 \times 2$ cells for $l^{\mathrm{Cell}} = 2.5\lambda$ for the x, y, z directions; hence the number of the cells containing the RWGs excluding empty cells are $N^{\mathrm{Cell}} = 60$ and 16, respectively. Then, three intervals of incident angles $\Delta\theta = 2.5^\circ$, 5°, and 10° are considered. The angular range, the polarization, and the sampling coordinate plane are the same as those for the RCS pattern in the final solutions. The residual norm δ_{r} for the IPCBF generation is set as 10^{-4} or 10^{-2}. The currents to generate the primary CBFs is calculated in each cell with the LU decomposition. We consider all combinations of these parameters. The residual norm δ_{R} for final iteration and the MoM is set to 10^{-6}.

Table 2: Parameters for the IPCBF generations

Parameter	Value
Cell Size l^{Cell} (N^{Cell})	1.25λ (60), 2.5λ (16)
Interval $\Delta\theta$ ($N_\theta = s$)	10° (19), 5° (37), 2.5° (73)
Polarization	$\hat{\theta}$
Residual Norm δ_{r}	10^{-4}, 10^{-2}
SVD Threshold δ_{SVD}	10^{-7}

The numbers of the CBFs N^{CBF} are shown in Fig. 7. Note that N^{CBF}/N is less than one half. Smaller values of the sampling points tend to have fewer N^{CBF} for the IPCBFs. On the other hand, N^{CBF} for the primary CBFs remained almost unchanged even though the number of the sampling points increases. It depends only on the cell size in the case of primary CBFs. This is because the primary CBFs are made from the current of only one cell. In the generation of primary CBFs, there is no significant difference in the current excited in one small cell even if the incident angle is changed slightly in the same coordinate plane. This means that increasing the number of incident wave samples does not lead to an increase in information. When the incident coordinate plane is not limited to that for calculating the RCS, the primary CBF could be sufficiently rich to represent the complex current [11]. However, this results in creating many extra CBFs even though we only want to obtain the RCS for a specific coordinate plane. On the other hand, the IPCBFs are also CBFs generated for each cell, but their original currents are obtained from calculations for the entire region. Hence the IPCBFs are subject to the effect of currents that vary in a complicated way depending on the direction of the incident wave in a specific coordinate plane. Therefore the IPCBFs can generate many independent CBFs with incident waves on a specific coordinate plane. Also it can be seen in Fig. 7 that δ_{r} has almost no effect on the number of CBFs for the same cell size.

Fig. 8 shows the the RMSE for the IPCBFM and hybrid method, and ratio of T^{Total} to $T^{\mathrm{MoM}}(= 11110)$ for the hybrid method. In Fig. 8a, it can be seen that accuracy of the IPCBFM highly depends on the number of the sampling points. On the other hand, no matter what the initial value is, the RMSE will eventually be less than -60 dB in the hybrid method as shown in Fig. 8b. In other words, the hybrid method allows IPCBFM analysis results to be controlled to any desired level of accuracy. This is also valid when primary CBF is used as CBF. However, since the primary CBF does not give a good initial value, the number of iterations when the hybrid method is used is only 0.9 times the number of iterations when it is not used as shown in Fig. 8c. On the other hand, when combined with IPCBF, the computation becomes up to 5 times faster. These results indicate that the hybrid method is particularly effective when combined with IPCBF. Fig. 9 shows the RCS pattern of the MoM and the hybrid method under the condition of $l^{\mathrm{Cell}} = 1.25\lambda$ and $\delta_{\mathrm{r}} = 10^{-4}$. The results obtained by the proposed method agree well with the MoM results overall. From these results, it can be said that the proposed method is a fast method to obtain RCS patterns in a specific coordinate plane with arbitrary accuracy.

5. Conclusion

For reducing the number of iterations and unknowns in the MoM, we proposed a hybrid algorithm combining the CBFM and the MoM by using IPCBFs. The proposed methods are formulated, and verified numerically as we analyze the RCS of two scatterers. By using proposed methods, we could obtain solutions with good accuracy and faster than with conventional method. In this study, we conducted numerical analyses without any preconditioning for the iterative method in order to purely verify the performance of the

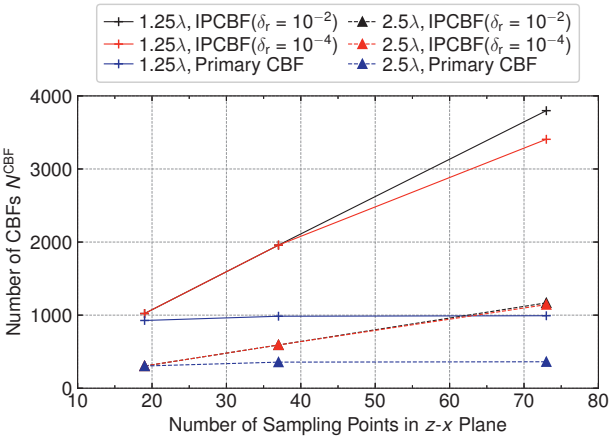
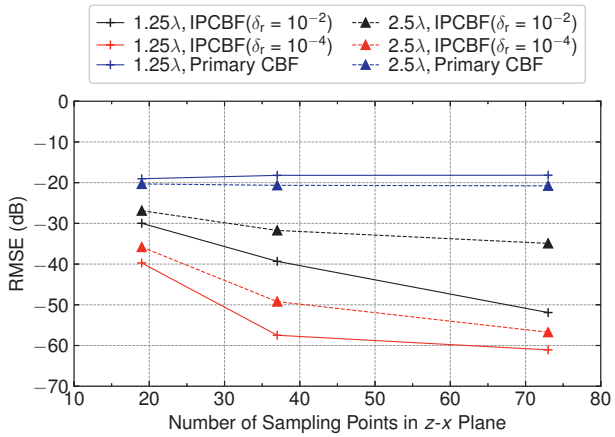
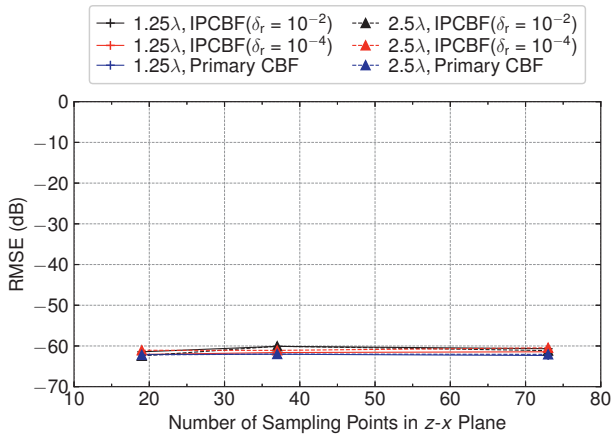


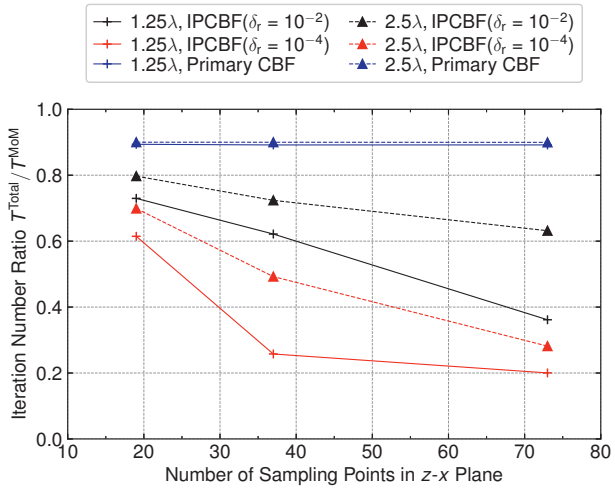
Fig. 7: Number of CBFs N^{CBF}



(a) RMSE (IPCBFM)



(b) RMSE (hybrid method)



(c) Iteration number ratio of $T^{\mathrm{Total}}/T^{\mathrm{MoM}}$

Fig. 8: Analysis result of the almond by using the IPCBFM and the hybrid method

proposed methods. We believe that preconditioning methods can be easily incorporated into the proposed method, and the matrix generation and final iteration time will be even faster. Furthermore, we realize that the validity of the IPCBF for other integral equations than CFIE will need to be verified. In particular, we plan to extend the ideas of the IPCBF in the present formulation to the analysis of dielectrics.

References

(1) E. F. Knott, J. F. Shaeffer, and M. T. Tuley, *Radar Cross Section*, 2nd ed. Boston, USA: Artech House, 1993.

(2) R. G. Kouyoumjian and P. H. Pathak, "A uniform geometrical theory of diffraction for an edge in a perfectly conducting surface," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 62, no. 11, pp. 1448–1461, Nov. 1974.

(3) J.-M. Jin, *The Finite Element Method in Electromagnetics*, 3rd ed. New York: Wiley-IEEE Press, 2014.

(4) A. Taflove and S. C. Hagness, *Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method*, 3rd ed. Boston: Artech House, 2005.

(5) R. F. Harrington, *Field Computation by Moment Methods*. Piscataway, NJ: IEEE Press, 1993.

(6) J. Song, C.-C. Lu, and W. C. Chew, "Multilevel fast multipole algorithm for electromagnetic scattering by large complex objects," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 45, no. 10, pp. 1488–1493, Oct. 1997.

(7) O. Ergül and L. Gürel, *The Multilevel Fast Multipole Algorithm (MLFMA) for Solving Large-Scale Computational Electromagnetics Problems*. New York, USA: Wiley-IEEE Press, 2014.

(8) A. Heldrig, J. M. Rius, J. M. Tamayo, J. Parrón, and E. Úbeda, "Fast direct solution of method of moments linear system," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 55, no. 11, pp. 3220–3228, Nov. 2007.

(9) R. Gholami, J. Mojolagbe, A. Menshov, F. S. H. Lori, and V. Okhmatovski, "$\mathcal{H}$-matrix arithmetic for fast

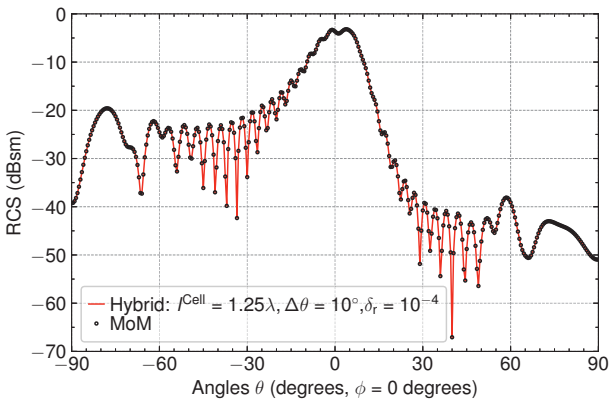


Fig. 9: RCS pattern of the almond

direct and iterative method of moment solution of surface-volume-surface EFIE for 3-D radiation problems," *Progress In Electromagnetics Research B*, vol. 82, pp. 189–210, Dec. 2018.

(10) V. V. S. Prakash and R. Mittra, "Characteristic basis function method: a new technique for efficient solution of method of moments matrix equations," *Microw. Opt. Techn. Let.*, vol. 36, no. 2, pp. 95–100, Jan. 2003.

(11) E. Lucente, A. Monorchio, and R. Mittra, "An iteration-free MoM approach based on excitation independent characteristic basis functions for solving large multiscale electromagnetic scattering problems," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 56, no. 4, pp. 999–1007, Apr. 2008.

(12) R. Mittra and K. Du, "Characteristic basis function method for iteration-free solution of large method of moments problems," *Progress In Electromagnetics Research B*, vol. 6, pp. 307–336, May 2008.

(13) R. Maaskant, R. Mittra, and A. G.Tijhuis, "Fast analysis of large antennas arrays using the characteristic basis function method and the adaptive cross approximation algorithm," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 56, no. 11, pp. 3440–3451, Nov. 2008.

(14) S. Rao, D. Wilton, and A. Glisson, "Electromagnetics scattering by surfaces of arbitrary shape," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 30, no. 3, pp. 409–418, May 1982.

(15) T. Tanaka, Y. Inasawa, Y. Nishioka, and H. Miyashita, "Improved primary characteristic basis function method for monostatic radar cross section of specific coordinate plane," *IEICE Trans. Electron.*, vol. E99-C, no. 1, pp. 28–35, Jan. 2016.

(16) T. Tanaka, Y. Inasawa, Y. Nishioka, and H. Miyashita, "Improved primary characteristic basis function method considering higher-order multiple scattering," *IEICE Trans. Electron.*, vol. E100-C, no. 1, pp. 45–51, Jan. 2017.

(17) S. G. Hay, J. D. O'Sullivan, and R. Mittra, "Connected patch array analysis using the characteristic basis function method," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 59, no. 6, pp. 1828–1837, Jun. 2011.

(18) J. Nédélec, *Acoustic and Electromagnetic Equations: Integral Representations for Harmonic Problems.* New York: Springer-Verlag, 2001.

(19) T. Tanaka, K. Niino, N. Nishimura, M. Takikawa, and N. Yoneda, "A generation scheme of the characteristic basis functions by using block Krylov subspace algorithm (Japanese)," *Trans. Jpn. Soc. Comput. Methods Eng.*, vol. 19, pp. 99–102, Dec. 2019.

(20) A. E. Guennouni, K. Jbilou, and H. Sadok, "A block version of BiCGSTAB for linear systems with multiple right-hand sides," *Elec. Trans. Numer. Anal.*, vol. 16, pp. 129–142, Jan. 2003.

(21) Y. Nakamura, K.-I. Ishikawa, Y. Kuramashi, T. Sakurai, and H. Tadano, "Modified block BiCGSTAB for lattice QCD," *Comput. Phys. Commun.*, vol. 183, pp. 34–37, Jan. 2012.

(22) Y. Saad, *Iterative Methods for Sparse Linear Systems.* PA, USA: SIAM, 2003.

(23) A. C. Woo, H. T. G. Wang, M. J. Schuh, and M. L. Sanders, "EM programmer's notebook-benchmark radar targets for the validation of computational electromagnetics programs," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 35, no. 1, pp. 84–89, Feb. 1993.

計算数理工学論文集 Vol. 22 (2022 年 12 月)，論文 No. 03-221216 JASCOME

拡張カルマンフィルタ有限要素法に基づく潮流の最適推定解析における推定精度に関する考察

CONSIDERATION ON ESTIMATION ACCURACY IN OPTIMAL ESTIMATION ANALYSIS OF TIDAL FLOW BASED ON THE EXTENDED KALMAN FILTER FINITE ELEMENT METHOD

倉橋　貴彦 [1)]

Takahiko KURAHAHSHI

1) 長岡技術科学大学 技学研究院 機械系　(〒 940-2188　長岡市上富岡町 1603-1,　E-mail: kurahashi@mech.nagaokaut.ac.jp)

In this study, the tidal flow estimation analysis in a model of Tokyo bay based on a method combined the extended Kalman filter and the finite element method (FEM). This method is called the extended Kalman filter FEM. In this method, numerical simulation considering the observation value is carried out, and it is known that numerical analysis that appropriately represents the phenomenon can be performed by using this method. However, in the system equation, the stabilization parameter is included to prevent the numerical instability, it appears that this parameter affects the estimation of tidal flow. The purpose of this study is to investigate the effect of stabilization parameter in the optimal estimation of tidal flow.

Key Words: Extended Kalman Filter, Finite Element Method, Stabilization Parameter, Optimal Estimation

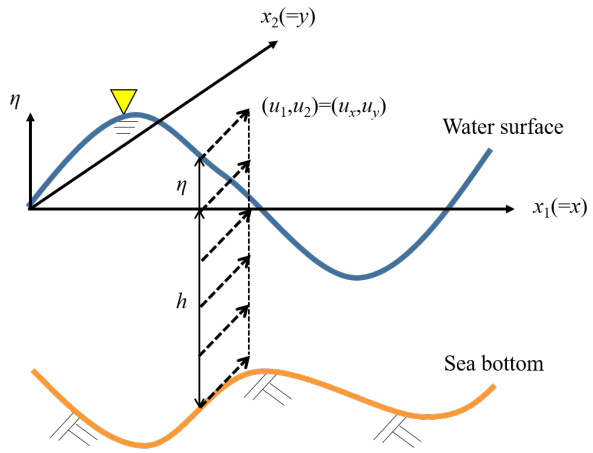
1. はじめに

カルマンフィルタは 1960 年に Rudolf Emil Kalman により提唱された状態推定理論である [(1)]．この理論は，アポロ計画の際のロケットの軌道推定に用いられ，当時の事を記載した論文では，解析内で用いられる観測値（光学センサ）の精度が十分では無いという問題があったが，月へのロケット軌道を推定できる理論であったと言われている [(2)]．この手法は，初期条件や境界条件，支配方程式内の係数等による数値モデルの不確かさを確率論に基づき修正する方法であり，近年では，コンピュータ上の仮想空間と，実際の物理空間を結ぶ枠組みを作る方法（デジタルツインを構築する方法）の 1 つとして考えられている [(3)]．カルマンフィルタでは，物理現象を表すためにシステムを表す方程式を導入することになる．支配方程式を離散系で表しシステム方程式とすることもあり，適用する離散化手法によっては離散化により生じる誤差（級数展開の近似による誤差や，補間により生じる誤差等）が異なる．そのため，良好に物理現象を表現できる様に，適切な離散化手法を適用する必要がある．本研究では，カルマンフィルタを適用し潮流推定を行うことを目的としているが，既往の研究として，有限差分法を離散化手法として用い，イギリスとフランスの間の北海周辺についての流れ場推定解析例がある [(4)]．解析モデルの形状を適切に表しながら，要素内における物理量を補間できる有限要素法とカルマンフィルタを融合した手法を用いた流れ解析は，川原らの研究グループにより行われ [(5, 6, 7)]，著者を含む研究グループも，適切な観測点配置に関する調査 [(8)] や，潮流発電ポテンシャルの算定 [(9)] に対する応用等について研究を実施している*．カルマンフィルタでは，推定誤差を最小とするカルマンゲインを算定し，シミュレーションの結果と観測値を適切にブレンド（線形結合）することにより最適推定値を算定するが，非線形のモデルをシステム方程式として使用する場合は，上記の線形結合により推定値を表せず直接適用できないことから，一般にシステム方程式の線形化を行う，あるいは複数のサンプルを用意し，状態変数の確率分布をアンサンブル近似により表し，線形化を行わずに非線形のシステム方程式をカルマンフィルタに適用する方法が用いられる [(10, 11)]．

本研究では，比較的簡便に非線形のシステム方程式を導入することができる拡張カルマンフィルタを適用し，非線形システム方程式の空間方向の離散化に有限要素法を適用するこ

2022 年 10 月 7 日受付，2022 年 11 月 17 日受理

*本研究で対象としている潮流の最適推定解析は，他にも，埋立て事業における流れの予測，取放水管路内の流れの整流検討等への応用も期待できる．



Assumption:
*The current velocity from the water surface to the sea bottom is uniform.
*Water pressure is represented by hydrostatic pressure.

Fig. 1: Illustration of variables of shallow water equation.

とにより潮流推定の解析を行う．カルマンフィルタ有限要素法に関する研究は，地盤解析 [12] や構造解析 [13] を対象としたものについても見受けられるが，観測値は，事前にシミュレーションを実施することで模擬的に作成した値を用いた例が多く，実モデルを対象としたものも見受けられるが [5]，実モデルを対象とし推定精度に関して論じた文献は数少ないものと思われる．そこで，解析モデルとしては，東京湾のモデルを導入し，流入境界からは主要 4 分潮の水位変動の条件を与え，陸岸境界ではスリップ境界条件を適用する．拡張カルマンフィルタにおいて使用する観測値としては，東京・横浜・千葉における検潮所の実水位データを適用し，システム方程式の違いや，数値安定性を考慮して設定するパラメータを変更することで，横須賀における最適推定値に対して推定精度の検証を行うことを本研究の目的とする．

2. 非線形浅水長波方程式に基づく有限要素方程式の導出

本論文では，支配方程式として，式 (1) および式 (2) に示す非線形浅水長波方程式を用いる．流れ場の解析については平面二次元モデルをを対象とする．式 (1) および式 (2) は総和規約により示している．

$$\dot{u}_i + u_j u_{i,j} + g\eta_{,i} - \nu(u_{i,j} + u_{j,i})_{,j} + f u_i = 0 \quad (1)$$

$$\dot{\eta} + ((h+\eta)u_i)_{,i} = 0 \quad (2)$$

ここで，u_i は平面二次元モデルにおける x 軸方向および y 軸方向の流速，g は重力加速度，h は静水時の水深を示す基準水深，η は基準水深からの水位変動量，ν は渦動粘性係数を示す（図 1 参照.）．

式 (1) および式 (2) に対して両辺に重み関数 u^*_{mi}，η^*_m を乗じ，要素領域 Ω_m において積分すると，式 (3) および式 (4) に示す重み付き残差方程式を得る．添え字の m は各要素の番号を示す．

$$\int_{\Omega_m} u^*_{mi}\dot{u}_{mi}d\Omega + \int_{\Omega_m} u^*_{mi}u_{mj}u_{mi,j}d\Omega + g\int_{\Omega_m} u^*_{mi}\eta_{m,i}d\Omega - \nu\int_{\Omega_m} u^*_{mi}(u_{mi,j}+u_{mj,i})_{,j}d\Omega + f\int_{\Omega_m} u^*_{mi}u_{mi}d\Omega = 0 \quad (3)$$

$$\int_{\Omega_m} \eta^*_m\dot{\eta}_m d\Omega + \int_{\Omega_m} \eta^*_m((h_m+\eta_m)u_{mi})_{,i}d\Omega = 0 \quad (4)$$

本論文では，要素領域 Ω_m を三角形領域とし，ガラーキン法に基づき，対象とする要素における状態変数 u_{mi}，η_m および重み関数 u^*_{mi}，η^*_m に対して式 (5)〜式 (8) に示す補間関数を適用する．

$$u_{mi} = N_{m1}u_{mi1} + N_{m2}u_{mi2} + N_{m3}u_{mi3} = \{\Phi_m\}^T\{U_{mi}\} \quad (5)$$

$$\eta_m = N_{m1}\eta_{m1} + N_{m2}\eta_{m2} + N_{m3}\eta_{m3} = \{\Phi_m\}^T\{E_m\} \quad (6)$$

$$u^*_{mi} = N_{m1}u^*_{mi1} + N_{m2}u^*_{mi2} + N_{m3}u^*_{mi3} = \{\Phi_m\}^T\{U^*_{mi}\} \quad (7)$$

$$\eta^*_m = N_{m1}\eta^*_{m1} + N_{m2}\eta^*_{m2} + N_{m3}\eta^*_{m3} = \{\Phi_m\}^T\{E^*_m\} \quad (8)$$

ここで N_{m1}，N_{m2} および N_{m3} は式 (9) から式 (12) により表される三角形要素における形状関数を示している．また A_m は式 (13) により計算される要素面積を表し，(i,j,k) は，$(i,j,k) = (1,2,3),(2,3,1),(3,1,2)$ という組み合わせで変わる変数を示す**.

$$N_{mi} = a_i + b_i x + c_i y \quad (9)$$

$$a_i = \frac{1}{2A_m}(x_j y_k - x_k y_j) \quad (10)$$

$$b_i = \frac{1}{2A_e}(y_j - y_k) \quad (11)$$

$$c_i = \frac{1}{2A_e}(x_k - x_j) \quad (12)$$

$$A_e = \frac{1}{2}[x_1(y_2-y_3) + x_2(y_3-y_1) + x_3(y_1-y_2)] \quad (13)$$

重み付き残差方程式に補間関数を代入することにより，有限要素方程式は式 (14) および式 (15) のように表すことができる．

$$[M_m]\{\dot{U}_{mi}\} + \bar{u}_{mj}[S_{mj}]\{U_{mi}\} + g[S_{mi}]\{E_m\} - \nu([H_{mjj}]\{U_{mi}\} + [H_{mij}]\{U_{mj}\}) + f[M_m]\{U_{mi}\} = \{0\} \quad (14)$$

$$[M_m]\{\dot{E}_m\} + \bar{u}_{mi}[S_{mi}]\{E_{mi}\} + \bar{u}_{mi}[S_{mi}]\{h_m\} + (\bar{h}_m + \bar{\eta}_m)[S_{mi}]\{U_{mi}\} = \{0\} \quad (15)$$

ここに，行列 $[M_m]$，$[S_{mi}]$ および $[H_{mii}]$ は形状関数ベクトル $\{\Phi_m\}$ を用いることにより式 (16)〜式 (18) のように書き表すことができる．

$$[M_m] = \int_{\Omega_m} \{\Phi_m\}^T\{\Phi_m\}d\Omega \quad (16)$$

**式 (9) から式 (12) の計算，および式 (13) の計算に使用される各座標の値 (x_1, y_1)，(x_2, y_2)，(x_3, y_3) は，各要素 m の三角形の頂点の座標を示している．式 (9) の x，y は，対象とする要素 m 内の任意の座標点を示す．

$$[S_{mi}] = \int_{\Omega_m} \{\Phi_m\}^T \{\Phi_{m,i}\} d\Omega \tag{17}$$

$$[H_{mii}] = \int_{\Omega_m} \{\Phi_{m,i}\}^T \{\Phi_{m,i}\} d\Omega \tag{18}$$

ここで，セレクティブ・ランピング法を適用し，式 (14) および式 (15) を時間方向に離散化する．式 (14) および式 (15) の各時間微分項に対して前進差分近似を適用すると式 (19) および式 (20) のよう記述できる．ここに n は時間ステップを表す．

$$\begin{aligned}[M_m]\{{U_{mi}}^{n+1}\} &= ([M_m] - \Delta t {u_{mj}}^{n}[S_{mj}] \\ &+ \Delta t\nu[H_{mjj}] - \Delta t f[M_m])\{{U_{mi}}^{n}\} \\ &+ \Delta t\nu[H_{mij}]\{{U_{mj}}^{n}\} - \Delta t g[S_{mi}]\{E_m^n\}\end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned}[M_m]\{{E_m}^{n+1}\} &= ([M_m] - \Delta t {u_{mi}}^{n}[S_{mi}])\{{E_m}^{n}\} \\ &- \Delta t(\bar{h}_m + {\eta_m}^{n})[S_{mi}]\{U_{mi}^n\} - \Delta t {u_{mi}}^{n}[S_{mi}]\{h_m\}\end{aligned} \tag{20}$$

また，式 (19) および式 (20) における質量行列を，集中化した行列 $[\bar{M}_e]$，混合質量行列 $[\tilde{M}_e]$ に置き換えることにより，式 (21) および式 (22) のように書くことができる．

$$\begin{aligned}[\bar{M}_m]\{{U_{mi}}^{n+1}\} &= ([\tilde{M}_m] - \Delta t {u_{mj}}^{n}[S_{mj}] + \Delta t\nu[H_{mjj}] \\ &- \Delta t f[M_m])\{{U_{mi}}^{n}\} \\ &+ \Delta t\nu[H_{mij}]\{{U_{mj}}^{n}\} - \Delta t g[S_{mi}]\{E_m^n\}\end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}[\bar{M}_m]\{{E_m}^{n+1}\} &= ([\tilde{M}_m] - \Delta t {u_{mi}}^{n}[S_{mi}])\{{E_m}^{n}\} \\ &- \Delta t(\bar{h}_m + {\eta_m}^{n})[S_{mi}]\{U_{mi}^n\} - \Delta t {u_{mi}}^{n}[S_{mi}]\{h_m\}\end{aligned} \tag{22}$$

ここで $[M_m]$，$[\bar{M}_m]$ は式 (23) および式 (24) のように整合質量行列，集中質量行列を示しており，混合質量行列 $[\tilde{M}_m]$ は式 (25) のようにランピングパラメータ e を用いて表す [14]．ランピングパラメータは数値的不安定を回避するように設定するパラメータであり，0 から 1 の間で与えられる．

$$[M_m] = \frac{A_m}{12}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{23}$$

$$[\bar{M}_m] = \frac{A_m}{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{24}$$

$$[\tilde{M}_m] = (1-e)[\bar{M}_m] + e[M_m] \tag{25}$$

ここで，式 (21) および式 (22) を全要素に対して重ね合わせて，得られた式の両辺に重ね合わせ後の集中化質量行列の逆行列を乗じることにより，最終的な有限要素方程式を得ることができる．次章以降の説明のために，式展開後の最終形を式 (26) のように記述する．

$$\{\hat{\phi}^{n+1}\} = [A]\{\hat{\phi}^n\} + \{N^n\} \tag{26}$$

ここに，$\{\hat{\phi}\}$ は通常の数値シミュレーションにおいては，n+1 時間ステップの解であるが，カルマンフィルタでは推定値と捉え，式展開を行うことになる．$\{\hat{\phi}\}^T = \{\{\hat{U}\}^T \quad \{\hat{V}\}^T \quad \{\hat{E}\}^T\}$ により表される．また，$[A]$ は状態遷移行列，$\{N\}^T$ は式 (26) の右辺第 1 項以外の諸量により表されるベクトルを示す．

3. 拡張カルマンフィルタに基づく状態推定解析

3.1. システム方程式および観測方程式

拡張カルマンフィルタにおいて用いるシステム方程式，観測方程式をそれぞれ式 (27)，式 (28) に示す．

$$\{\phi^{n+1}\} = [A]\{\phi^n\} + \{N^n\} + [\Gamma]\{q^n\} \tag{27}$$

$$\{z^{n+1}\} = [H]\{\phi^{n+1}\} + \{r^{n+1}\} \tag{28}$$

ここで $\{\phi\}$ は真値の状態変数ベクトル，$[\Gamma]$ は駆動行列，$\{z\}$ は観測値ベクトル，$[H]$ は観測行列，$\{q^n\}$ はシステムノイズベクトル，$\{r^n\}$ は観測ノイズベクトルを示す．ここに，システムノイズベクトルおよび観測ノイズベクトルは正規分布に従うホワイトノイズにより与える．

3.2. 拡張カルマンフィルタにおける線形化処理および状態推定解析の流れ

カルマンフィルタの計算において，非線形のシステム方程式を用いる場合，システム方程式に対して線形化の処理が行われる．式 (27) のシステムノイズの項を除く右辺に対して，式 (29) に示す処理を施すことにより，線形化された状態遷移行列 $[F^n]$ を得ることができる．線形化された状態遷移行列 $[F^n]$ は，カルマンゲイン行列を求める際に使用される．

$$[F^n] = \frac{\partial([A]\{\phi^n\} + \{N^n\})}{\partial\{\phi^n\}}|_{\{\phi^n\}=\{0\}} \tag{29}$$

拡張カルマンフィルタ理論 [10, 11] に基づく状態推定解析の計算の流れを以下に示す．計算の流れにおけるステップ 7 において，シミュレーションの値をカルマンゲイン行列を使用して補正が行われる．補正前は同化前（シミュレーションのによる算定値），補正後は同化後（最適推定値）と呼び，同化後の値は，同化前の値と観測値をブレンドすることにより算定される（図 2 参照）．

1. 初期値の設定
   $imax$(Time steps)，$[P^0_{(+)}]$，$[\Gamma]$，$[H]$，$\{\hat{\phi}^0_{(+)}\}$，$[F^0]$，$[Q^n]$，$[R^n]$，$\{z^{n+1}\}$，(※初期値を設定する変数内の時間ステップ n については，$n = 0 \sim imax$ の間について設定する．)
2. 線形化した状態遷移行列の計算
   $[F^n] = \frac{\partial([A]\{\phi^n\}+\{N^n\})}{\partial\{\phi^n\}}|_{\{\phi^n\}=\{0\}}$
3. 同化前の誤差共分散行列の計算
   $[P^{n+1}_{(-)}] = [F^n][P^n_{(+)}][F^n]^T + [\Gamma][Q^n][\Gamma]^T$
4. カルマンゲイン行列の計算
   $[K^{n+1}] = [P^{n+1}_{(-)}][H]^T([H][P^{n+1}_{(-)}][H]^T + [R^{n+1}])^{-1}$
5. 同化後の誤差共分散行列の計算
   $[P^{n+1}_{(+)}] = [P^{n+1}_{(-)}] - [K^{n+1}][H][P^{n+1}_{(-)}]$
6. 同化前推定値の計算
   $\{\hat{\phi}^{n+1}_{(-)}\} = [A^n]\{\hat{\phi}^n_{(+)}\} + \{N^n\}$

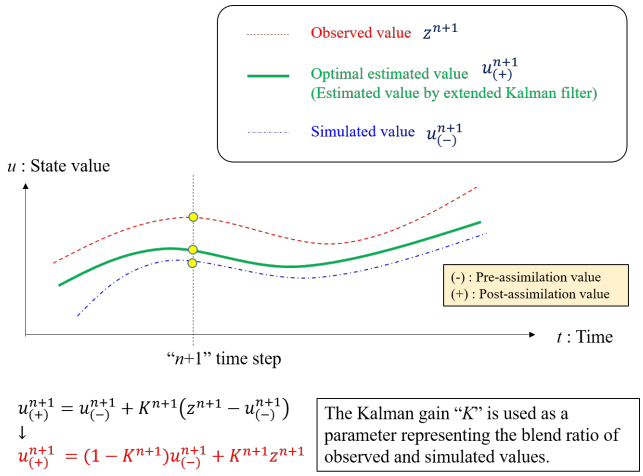


Fig. 2: Illustration for pre-assimilation and post-assimilation values.

7. 最適推定値 (同化後推定値) の計算
$\{\hat{\phi}_{(+)}^{n+1}\} = \{\hat{\phi}_{(-)}^{n+1}\} + [K^{n+1}](\{z^{n+1}\} - [H]\{\hat{\phi}_{(-)}^{n+1}\})$
8. 時間ステップ数の確認
もし $n+1 > imax$ であれば終了，そうでなければ 2 から 8 の計算を繰り返し行う．

4. 東京湾をモデルとした拡張カルマンフィルタ FEM に基づく状態推定解析

4.1. 解析条件

本論文では，東京湾の解析モデルを導入し，拡張カルマンフィルタ FEM を適用し，潮流の推定解析を行う．解析条件を表 1 に示す***．拡張カルマンフィルタ FEM における観測点位置および観測値は，図 3〜図 6 に示すものを使用する****．潮流の推定解析においては，図 7 に示す三角形有限要素メッシュを使用する．解析対象領域における基準水深の分布を図 8 に示す．また，図 9 に示す流入境界において，館山の主要四分潮に基づく水位の経時変化（式 (30)）を与える．表 2 に館山の主要四分潮の各成分を示す．また，陸域境界には，スリップ境界条件を与える [15]．

$$\eta(t) = \sum_{i=1}^{4} a_i \sin(\frac{2\pi t}{T_i} + \kappa_i) \tag{30}$$

4.2. 解析結果

各観測点（東京，千葉，横浜，横須賀）における推定値および観測値の比較について，e=0.7 の場合を図 10〜図 13 に，e=0.8 の場合を図 14〜図 17 に，また，e=0.9 の場合を図 18〜図 21 に示す．今回の推定解析では，横須賀の観測値は含めずに解析を行い，図 13，図 17，図 21 に示す観測値は，推定値との比較のため（推定精度検証のため）に用いている．結果より，各観測点（東京，千葉，横浜）においてランピングパラメータ e を変えた場合に対しても，観測値に近い推定値が得られている事を確認できる．観測点（横須賀）における観測値と推定値の比較（図 13，図 17，図 21）では，比較対象用として，式 (31) および式 (32) に示す線形浅水長波方程式を適用した場合の推定値も合わせて示している†．

$$\dot{u}_i + g\eta_{,i} = 0 \tag{31}$$

$$\dot{\eta} + hu_{i,i} = 0 \tag{32}$$

図 13，図 17，図 21 より，観測点（横須賀）における拡張カルマンフィルタ FEM による推定値 (EKF-FEM) は，e=0.7,0.8,0.9 においてどの場合においても，線形浅水長波方程式を用いた状態推定解析 (KF-FEM) に比べて観測値（Observed value）に近い結果を得ていることを確認できる‡．ここで，ランピン

Table 1: Computational conditions

Time steps ($imax$)	86400
Time increment Δt [s]	1.0
Number of nodes	1052
Number of elements	1731
Lumping parameter e	0.7, 0.8, 0.9
Gravitational acceleration g [m/s^2]	9.8
Constant of the bottom friction f [s^{-1}]	0.002
vortex viscosity coefficient ν [m^2/s]	0.001
Diagonal component of system error covariance matrix [Q]	0.0001
Diagonal component of observation error covariance matrix [R]	0.1

Table 2: Numerical conditions

i	Tidal component	a_i[m]	κ_i[deg]	T_i
1	M_2	0.3605	146.48	12h25m
2	S_2	0.1707	174.36	12h00m
3	K_1	0.2318	177.13	25h49m
4	O_1	0.1823	158.40	23h50m

***ランピングパラメータ e は，0〜1 の間において与えられ，一般に 1 に近い値が用いられる．また，システムノイズは「各節点間において無相関」，観測ノイズは「各観測点間において無相関」と仮定し，システム誤差共分散行列 [Q] および観測誤差共分散行列 [R] は対角行列として設定する．

****観測値は，3.2 節のステップ 7 の $\{z^{n+1}\}$ において使用する．

†式 (31) および式 (32) の離散化手法としては，非線形浅水長波方程式のものと同様の手法を適用している．線形浅水長波方程式を用いた状態推定解析では，システム方程式が線形であるため，拡張カルマンフィルタでは無く，通常のカルマンフィルタを適用している．ランピングパラメータ e は 0.8 としている．

‡拡張カルマンフィルタでは，カルマンゲイン行列を計算開始か

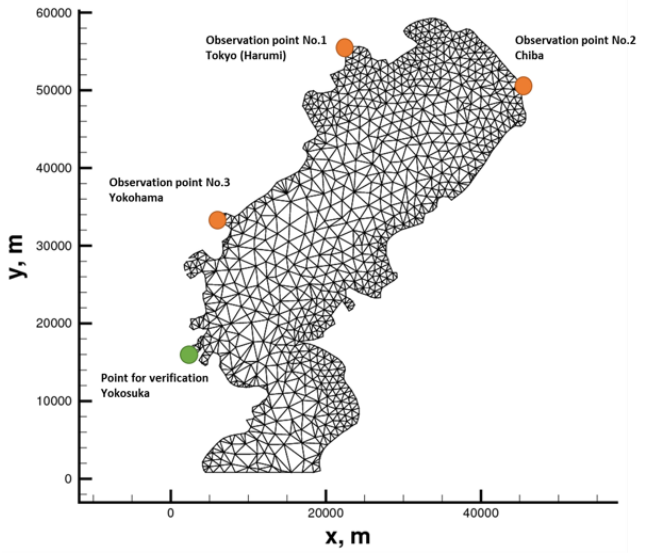


Fig. 3: Position of observation points and estimation point.

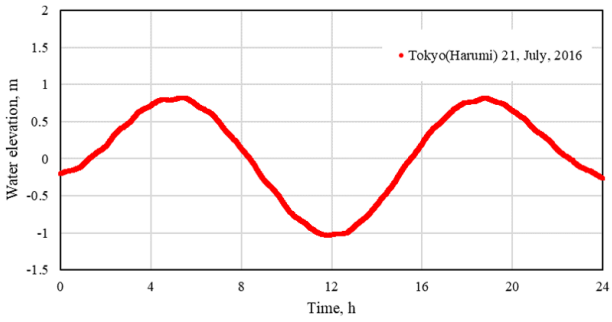


Fig. 4: Observation value at Tokyo.

グパラメータ e の各ケースにおいて，式 (33) により横須賀の観測値 $\eta^n_{obs.}$ と推定値 $\eta^n_{est.}$ に対して残差平方和 RSS(Residual Sum of Squares) を計算し，表 3 に整理する§．$imax$ は時間ステップ数を示す．拡張カルマンフィルタ FEM による推定値においても結果として e=0.8 が最も観測値に良い一致率を示すことを確認できた．

$$RSS = \Sigma_{n=1}^{imax}(\eta^n_{obs.} - \eta^n_{est.})^2 \qquad (33)$$

また，横須賀の結果において，線形の浅水長波方程式を用いた場合に対する推定結果 (KF-FEM) と非線形の浅水長波方程式を用いた場合に対する推定結果 (EKF-FEM) を比較すると，振幅は大きく変わらないが，位相差が異なる結果が得られた．

ら時刻ステップに応じて更新をしていく関係もあり，解析初期の時刻においては，状態推定が適切に行えていないこともある．そのため，t=0.0 付近では，観測値と推定値の結果の一致性が乏しいもの考えられる．

§表 3 の値は，”e=0.8 (KF-FEM)”の RSS の値に対する相対値として示している．

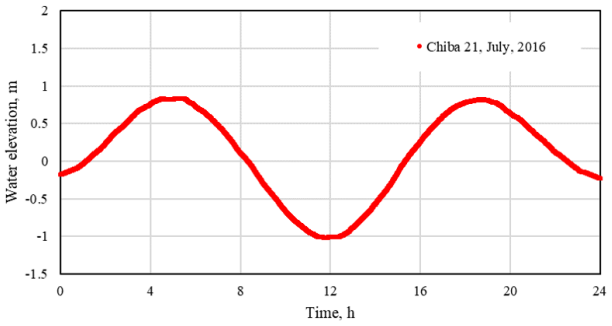


Fig. 5: Observation value at Chiba.

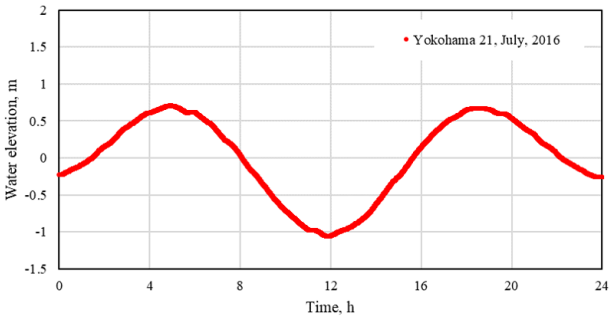


Fig. 6: Observation value at Yokohama.

ここに，e=0.8 の場合における水位変動量と流速ベクトルの分布を図 22〜図 27 に示す．結果として，どの時刻においても，計算が発散することなく，流れ場を推定できていることを確認できる．

5. おわりに

本論文では，拡張カルマンフィルタ有限要素法を用いて，東京湾の解析モデルに対して潮流推定解析を行い，解析結果に関する考察を行った．支配方程式として，非線形浅水長波方程式を導入し，空間方向の離散化手法として，三角形一次要素を用いた有限要素法，時間方向の離散化手法として，セレクティブ・ランピング法を適用した．まず，ランピングパラメータ e を変え実施した検討では，横須賀における結果において，推定値と観測値が良好に一致することを確認できた．観測値と推定値の残差平方和を用いて，観測値と推定値の一致性を確認したところ，e=0.8 の場合の推定値が最も観測値に近いという結果となった．また，線形の浅水長波方程式を用いた場合に対する推定結果と比較すると，振幅は大きく変わらないが，位相差が異なる結果が得られた．横須賀の検潮所における水位波形において，非線形の浅水長波方程式を用いた場合の結果は線形の浅水長波方程式を用いた場合の結果に比べて観測水位に近い結果が得られており，システム方程式の適切性は位相差に影響を与えることがわかった．

本研究において得られた成果をもとに，より広範な領域を対象とした潮流推定解析へ拡張し，解析条件として与える観測点数や観測点位置による推定精度の違いに関する考察も今

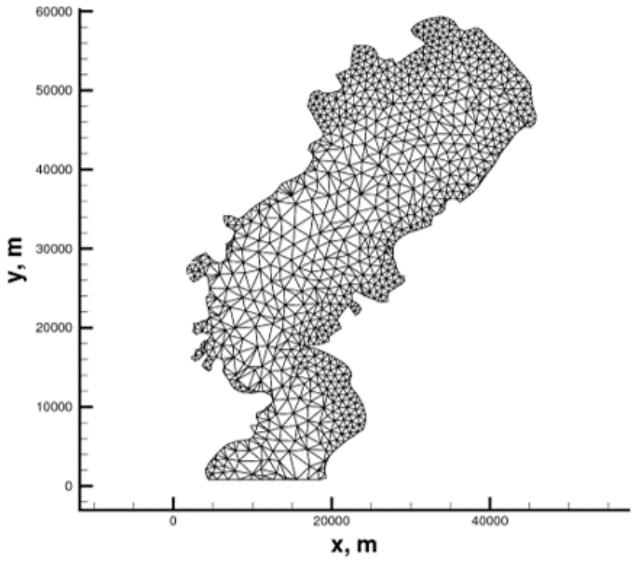


Fig. 7: Finite element mesh. (Number of nodes: 1052, Number of elements: 1731)

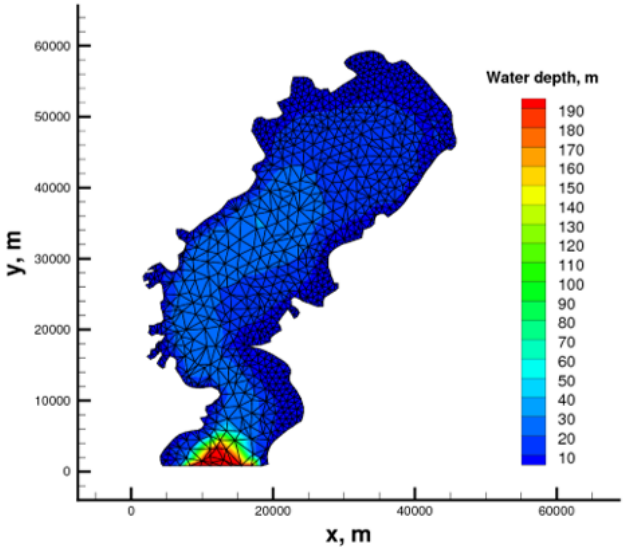


Fig. 8: Distribution of water depth.

Table 3: Comparison of residual sum of squares in each case (Relative value for RSS of "e=0.8 (KF-FEM)".).

e	RSS
0.7 (EKF FEM)	0.289767
0.8 (EKF-FEM)	0.266542
0.9 (EKF-FEM)	0.284777
0.8 (KF-FEM)(Standard value)	1.0

後必要とされる．従来の研究 [8] においても，流れの上流側に観測点を配置することは，下流側に観測点を配置することに比べて重要という知見を得ている．本論文で対象とした東京湾モデルは，閉鎖性の水域であり，上下流の定義は困難であるが，今回検証で設定した横須賀の確認点を別の観測点で実施する必要性もある．確認点と観測点の組み合わせを変えることで，いくつか検討は可能であるが，最後に，将来を見据えた検討の一例として，千葉，横浜，横須賀の観測値を用いて，確認点を東京と設定した場合の水位の履歴の比較結果を紹介しておく．図 28 に結果を示す．結果より，この検討では，通常のカルマンフィルタ FEM では，観測値に比べて少し小さな振幅値になっているが，拡張カルマンフィルタ FEM では，振幅値，位相差ともに良好な一致を示している．このように，観測点と確認点の組み合わせを変えることにより，より観測値と推定値の一致性を高められる可能性がある．本検討において実施した考察をより強固なものとするため，追加検討については，将来的な課題とする．

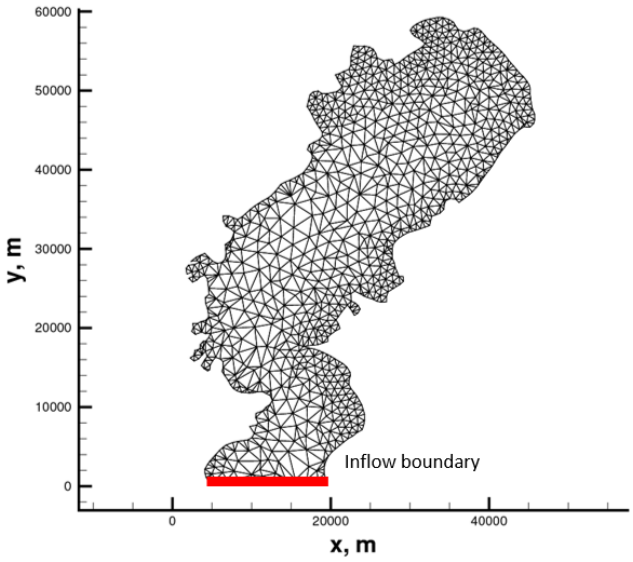


Fig. 9: Inflow boundary

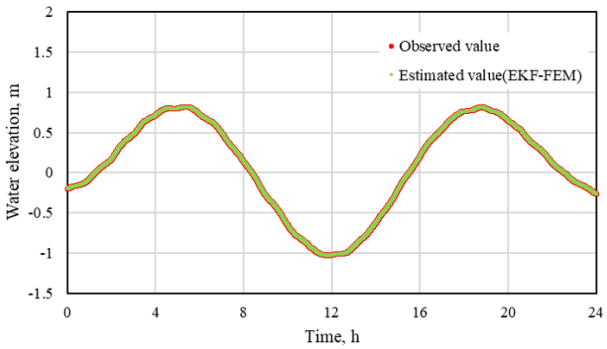


Fig. 10: Comparison of time history of estimated water elevation at Tokyo. (e=0.7.)

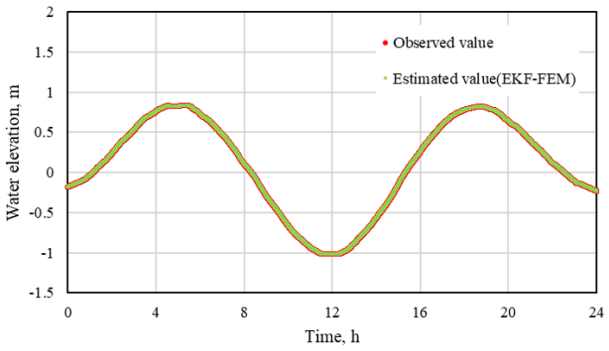


Fig. 11: Comparison of time history of estimated water elevation at Chiba. (e=0.7.)

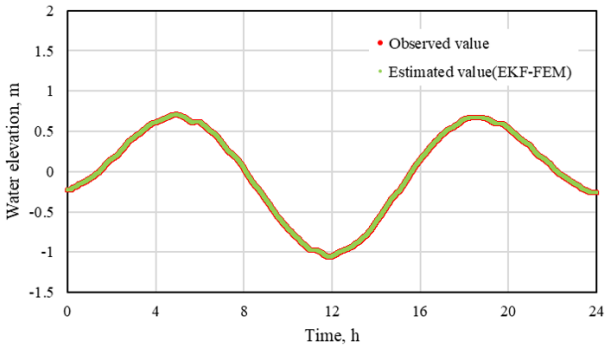


Fig. 12: Comparison of time history of estimated water elevation at Yokohama. (e=0.7.)

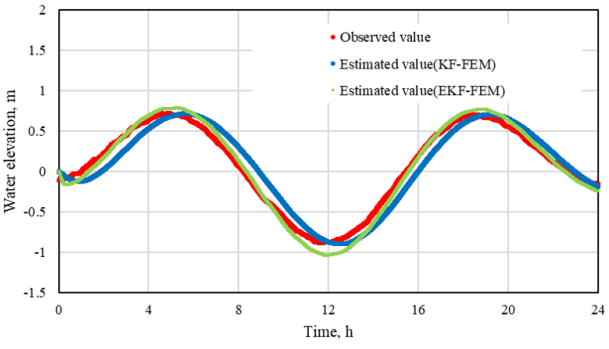


Fig. 13: Comparison of time history of estimated water elevation at Yokosuka. (e=0.7.)

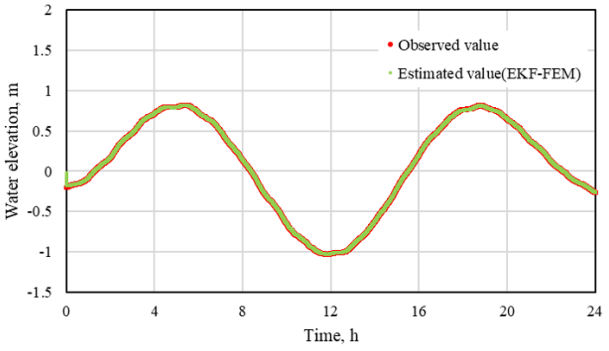


Fig. 14: Comparison of time history of estimated water elevation at Tokyo. (e=0.8.)

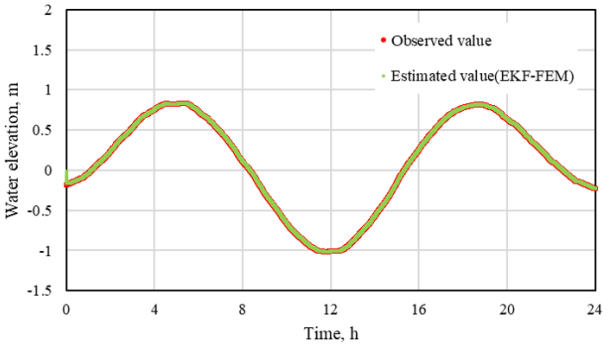


Fig. 15: Comparison of time history of estimated water elevation at Chiba. (e=0.8.)

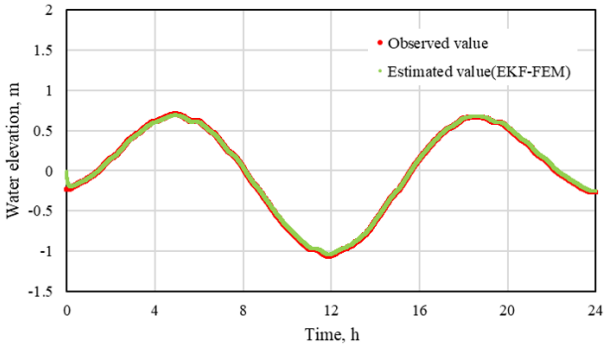


Fig. 16: Comparison of time history of estimated water elevation at Yokohama. (e=0.8.)

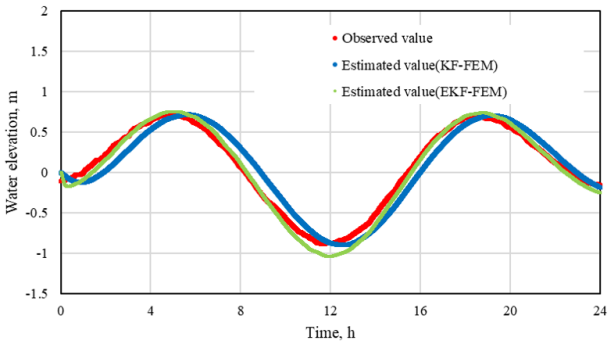


Fig. 17: Comparison of time history of estimated water elevation at Yokosuka. (e=0.8.)

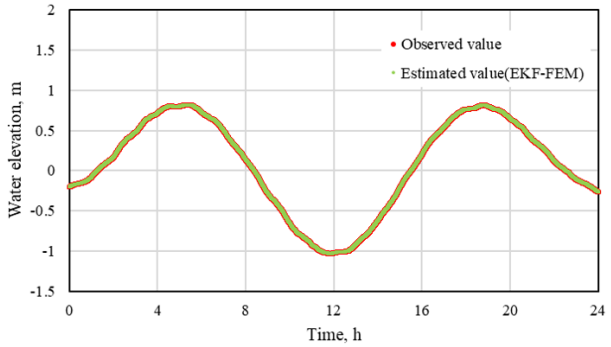


Fig. 18: Comparison of time history of estimated water elevation at Tokyo. (e=0.9.)

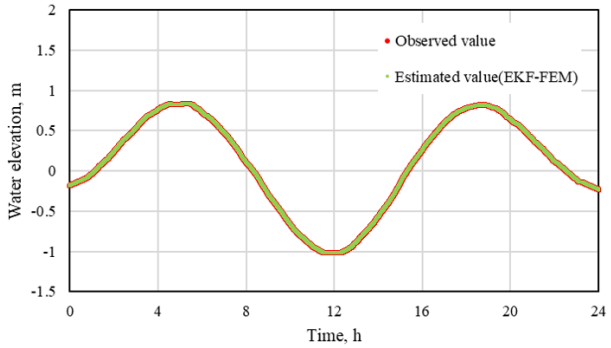


Fig. 19: Comparison of time history of estimated water elevation at Chiba. (e=0.9.)

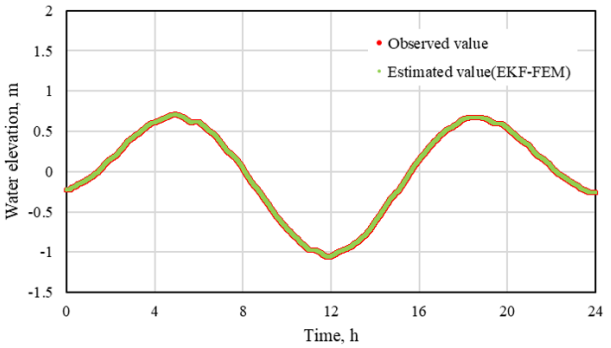


Fig. 20: Comparison of time history of estimated water elevation at Yokohama. (e=0.9.)

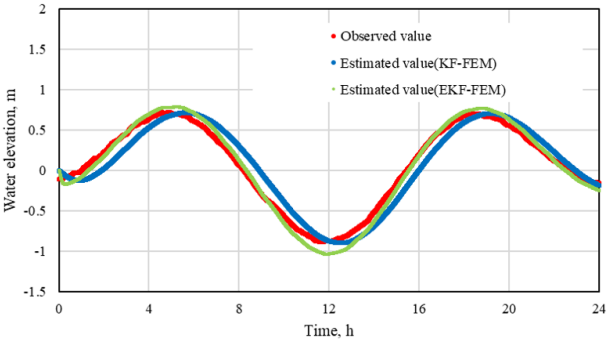


Fig. 21: Comparison of time history of estimated water elevation at Yokosuka. (e=0.9.)

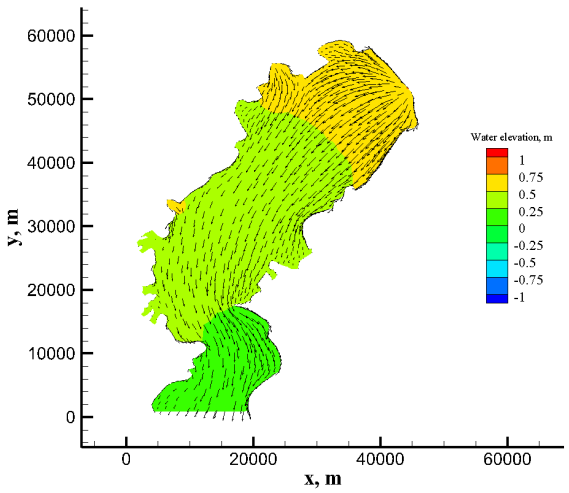


Fig. 22: Distribution of velocities u_x and u_y and water elevation η at $T = 4.0$[h]. (e=0.8.)

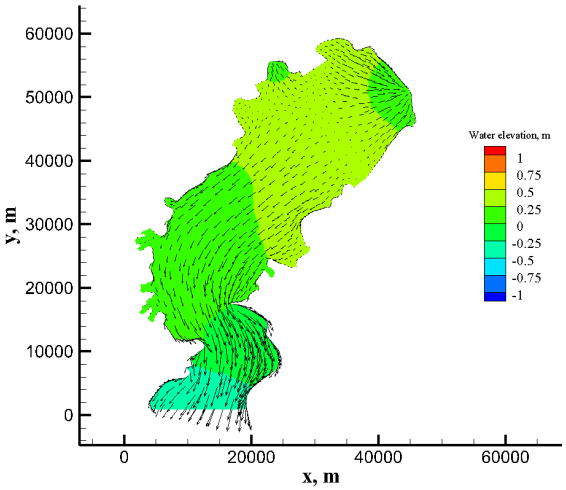


Fig. 23: Distribution of velocities u_x and u_y and water elevation η at $T = 8.0$[h]. (e=0.8.)

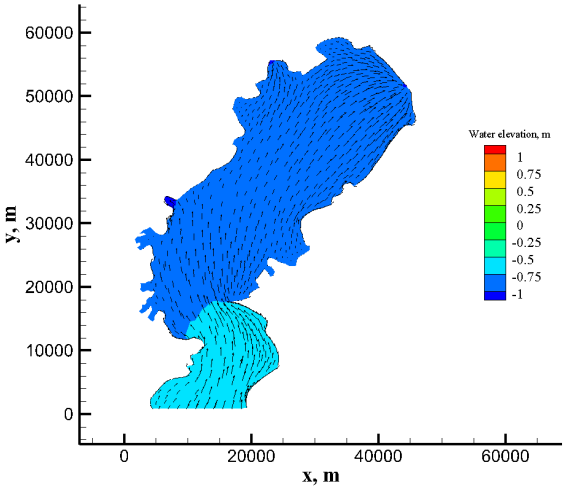


Fig. 24: Distribution of velocities u_x and u_y and water elevation η at $T = 12.0$[h]. (e=0.8.)

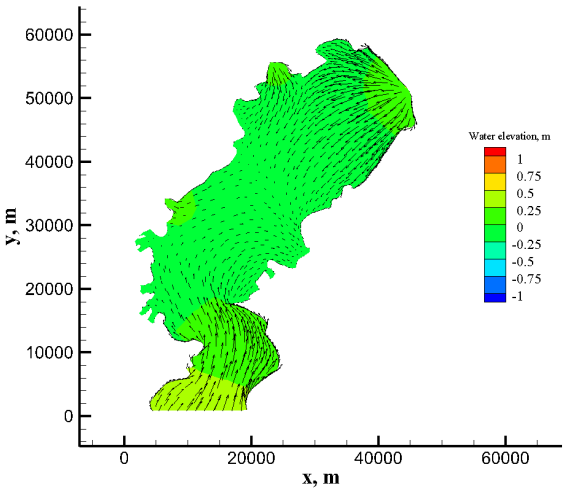


Fig. 25: Distribution of velocities u_x and u_y and water elevation η at $T = 16.0$[h]. (e=0.8.)

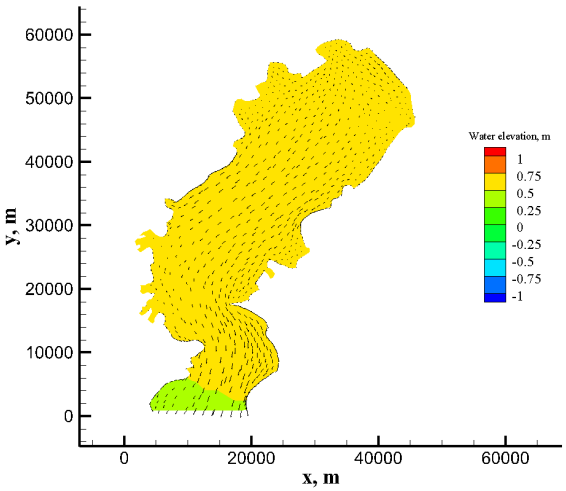


Fig. 26: Distribution of velocities u_x and u_y and water elevation η at $T = 20.0$[h]. (e=0.8.)

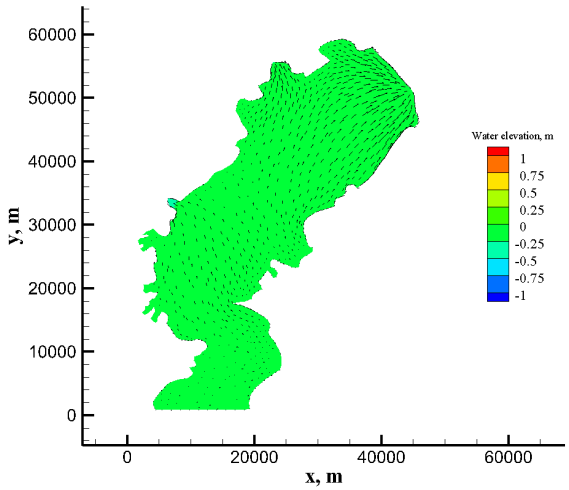


Fig. 27: Distribution of velocities u_x and u_y and water elevation η at $T = 24.0$[h]. (e=0.8.)

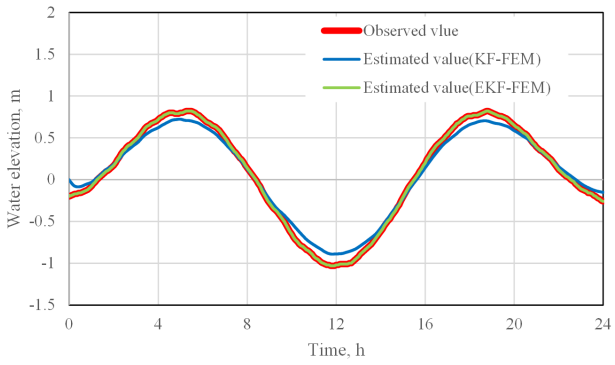


Fig. 28: Comparison of time history of estimated water elevation at Tokyo. (e=0.8.)

また，本論文では東京湾モデルを対象としたが，解析対象領域の変更も視野に入れ，本研究で示した考察の様に，ランピングパラメータ e と観測点数，観測点位置の組み合わせを変えた検討についても，今後の検討課題とする．

謝辞

本研究を実施するにあたり，公益財団法人 TAKEUCHI 育英奨学会からの研究助成を受けた．また，数値実験における検討では，長岡技術科学大学大学院　機械創造工学専攻の修了生である吉荒 太一氏，五十嵐 晃平氏には多大なる協力を頂いた．解析結果については，九州大学情報基盤研究開発センターの研究用計算機システムを使用し，算出したものを示した．また，本論文は，中央大学理工学部都市環境学科 名誉教授 川原睦人 先生のゼミの内容を下に研究を行ったものである．ご関係皆様に対して謝意を表す．

参考文献

(1) R.E.Kalman: A new approach to linear filtering and prediction problems, Transactions of the ASME - Journal of Basic of Engineering, **82**(1960), pp. 35–45.

(2) L.A. McGee and S.F. Schmidt: Discovery of the Kalman filter as a practical tool for aerospace and industry, NASA Technical Memorandom, (1985), pp. 1–21.

(3) 大林茂，三坂孝志，加藤博司，菊池亮太：データ同化流体科学　流動現象のデジタルツイン，(2020)，共立出版．

(4) A.W.Heemink: Two-dimensional shallow water flow identification, Applied Mathematical Modelling, **12**(1998), pp. 109–118.

(5) 高木利光，稲本耕介，早川豊，川原睦人：カルマンフィルター有限要素法による浅水域の流況推定，海岸工学論文集，**43**(1996)，pp. 346–350.

(6) K.Yonekawa, M.Kawahara: Application of Kalman filter finite element method and AIC, International Journal of Computational Fluid Dynamics, **17**(2003), pp. 307–317.

(7) R.Suga and M.Kawahara: Estimation of tidal current using Kalman filter finite-element method, Computers and Mathematics with Applications, **52**(2006), pp. 1289–1298.

(8) 倉橋貴彦，吉荒太一，小林泰秀：カルマンフィルタ有限要素法による浅水域における流れ場の推定精度の検証（計測変数・計測点の数および位置が推定精度に与える影響），日本機械学会論文集, **82**(2016), pp. 1–19.

(9) T.Kurahashi, T.Yoshiara, Y.Kobayashi, N.Yamada: Flow field estimation analysis based on the Kalman filter FEM for selection of tidal stream power generator locations, Journal of Fluid Science and Technology, **12**(2017), pp. 1–10.

(10) 樋口知之，上野玄太，中野慎也，中村和幸，吉田亮：データ同化入門　—次世代のシミュレーション技術—，(2011)，朝倉出版．

(11) 片山徹：非線形カルマンフィルタ，(2011)，朝倉出版．

(12) 呉旭，市川康明：カルマンフィルタ有限要素法による岩盤損傷力学パラメータの逆解析，土木学会論文集, **523**(1995), pp. 1–8.

(13) 秋田剛, 高木亮治, 嶋英志：アンサンブルカルマンフィルタによるモデルパラメータ推定—大変形を伴う非線形複合構造システムへの適用—，日本計算工学会論文集，**2010**(2010), pp. 1–10.

(14) M. Kawahara: Finite element methods in incompressible, adiabatic, and compressible flows: from fundamental concepts to applications (mathematics for industry), (2018)，Springer.

(15) 吉田裕，川原睦人：新体系土木工学 3 －有限要素法，(1983)，丸善出版．

計算数理工学論文集 Vol. 22 (2022 年 12 月)，論文 No. 04-221216 JASCOME

横波ベクトル場の点状散乱体による散乱問題の近似解法
– 定式化 –

APPROXIMATE SOLUTION OF SCATTERING PROBLEM OF TRANSVERSE WAVE VECTOR FIELDS BY POINT-LIKE SCATTERERS
– FORMULATION –

植田　毅 [1)]

Tsuyoshi Ueta

1) 東京慈恵会医科大学物理学研究室　(〒 182-8570　東京都調布市国領町 8-3-1,　E-mail: tsuyoshi_ueta@jikei.ac.jp)

So far, an approximate solution of Dyson's equation for scattering problems of electron waves and vector fields in TM mode, so-called scalar field, by point-like scatterers has been developed and applied to various systems with remarkable results. However, it has never been realized to deal with the scattering problem of the TE mode of a vector field by point-like scatterers, which is essentially a vector field problem, by a simple approximate solution method. In this paper, we extend the formulation of the approximate solution for the scattering problem by point-like scatterers to the case of vector fields.

Key Words: Point-like Scatterers, Scattering Problem, Dyson's Equation, Approximate Solution, Transverse Vector Field

1. はじめに

半導体，絶縁体のヘテロ界面のバリスティクな２次元電子系に導入した列状，格子状アンチドット [(1)]，不純物の存在により普遍的コンダクタンスのゆらぎを示す拡散的伝導をする電子系 [(2)]，構造色を呈する羽毛，昆虫の表皮などスポンジ状の光学素材 [(3, 4, 5)]，消音用のポーラスな音響材料 [(6, 7)] は小さな散乱体が多数存在する散乱問題となる。これらの問題では波のコヒーレンスが現象の重要な因子となっており，多数存在する散乱体について統計平均を取るなどのコヒーレントポテンシャル近似 [(8)] は用いることができない。多数存在する散乱体の配置の状態について支配方程式を解く必要があり，困難なもしくは非常に計算コストのかかる問題の一つである。

この種の問題の中で散乱体の散乱半径が小さな場合について，散乱体を点状散乱体と近似し，容易に取り扱える近似的計算手法が開発された [(1)]。この計算手法では，散乱問題をダイソン方程式を用いて積分方程式を解く際，点状散乱体をデルタ関数と近似している。有限要素法で散乱体を１ノードで表したものと似た扱いであるが，グリーン関数を用いた積分方程式法では，境界のない開放系の計算においては散乱体の存在する点の波動関数のみが未知変数となり圧倒的に未知変数を少なくすることができる。また，境界がある場合の開放系では境界要素法との組み合わせへ容易に拡張できる。実際，この手法は散乱ポテンシャルがある場合の境界要素法として開発されている [(1, 9)]。しかし，グリーン関数を用いた積分方程式であるため，散乱体のある位置の波動関数に関する自己無撞着な方程式では，散乱ポテンシャルをデルタ関数として計算するとグリーン関数の対角成分が発散する。実際の散乱ポテンシャルは有限の大きさを持つため，その積分を正しく行えば発散しない。そこで，開発された近似解法では，グリーン関数の対角成分については近似を上げて積分計算を行い，散乱体の実行散乱半径をパラメータとして導入している。

この近似的な解法は，垂直に一様磁場のかかった２次元電子系のアンチドットアレーにおける飛び石軌道（runaway trajectory）の存在の証明 [(1)]，点状磁性散乱体による電子スピンの反転現象を見出す [(9, 10)] など成功を収めている。

磁性不純物の問題では電子スピンの自由度のため波動関数が２成分のスピノルの方程式となっているが，スカラー場のグリーン関数を用いる本質的にスカラー場の定式化であり，テンソルグリーン関数を用いる必要がある本質的にベクトル場の散乱問題は取り扱えなかった。すなわち，電磁場の問題では TM モードは取り扱えるが，TE モードは取り扱え

2022 年 10 月 7 日受付，2022 年 11 月 25 日受理

なかった。

本論文では点状散乱体による散乱問題の定式化を横波ベクトル場へ拡張する。

2. 支配方程式とベクトル場の積分表現

電磁場を例にとり，横波ベクトル場の積分表現を導出する。透磁率は真空中の値 μ_0 で，比誘電率が $\varepsilon(\boldsymbol{r})$ のように空間的に変化する 3 次元空間を考える。この空間に電流が存在しない場合，2 つのマクスウェル方程式を統合した電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ についての方程式は

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}=-\frac{\varepsilon(\boldsymbol{r})}{c_0^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{E} \tag{1}$$

と表される。ここで，c_0 は真空中での光速である。

電磁場の場合，磁場のみの方程式とすることも可能であり，磁場 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$ の満たす方程式は

$$\boldsymbol{\nabla}\times\left(\frac{1}{\varepsilon(\boldsymbol{r})}\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{H}\right)=-\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{H} \tag{2}$$

となる。式 (2) は式 (1) と異なり，比誘電率の空間微分を含む。誘電体の板の場合のように，比誘電率が矩形状に変化するとき，ステップ関数の微分，すなわちデルタ関数が現れ，計算精度を悪くする。したがって，本論文では電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ についての方程式を用いて定式化する。

定常問題の支配方程式は角周波数を ω として，

$$\left(-\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\nabla}\times+\frac{\omega^2}{c_0^2}\varepsilon(\boldsymbol{r})\right)\boldsymbol{E}=0 \tag{3}$$

$$\begin{aligned}\left(-\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\nabla}\times+\frac{\omega^2}{c_0^2}\right)\boldsymbol{E} &= -\frac{\omega^2}{c_0^2}\left(\varepsilon(\boldsymbol{r})-1\right)\boldsymbol{E} &(4)\\ &\equiv V(\boldsymbol{r})\boldsymbol{E} &(5)\end{aligned}$$

となる。

方程式 (5) の解は一般に

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r})-\int V(\boldsymbol{r}')\mathscr{G}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}';k)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')d\boldsymbol{r}' \tag{6}$$

と書ける。ここで，$\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r})$ は $V(\boldsymbol{r})=0$ の場合の解であり，波数 $k\equiv\omega/c_0$ と定義した。

また，テンソルグリーン関数 $\mathscr{G}$ は以下のように与えられる [11]。

$$\mathscr{G}_{jl}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}';k)\equiv\left(\delta_{jl}+\frac{1}{k^2}\frac{\partial^2}{\partial x_j\partial x_l}\right)G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}';k) \tag{7}$$

ここで，$j,l=x,y,z$ であり，また，$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}';k)$ は

$$\left(\boldsymbol{\nabla}^2+k^2\right)G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}';k)=-\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \tag{8}$$

を満たすヘルムホルツ方程式のグリーン関数である。

3. 点状散乱体

光速が c_0 の媒体で満たされた空間内の点 $\boldsymbol{R}$ に内部の光速が $c(\boldsymbol{R})$ の点状散乱体が存在するとする。点 $\boldsymbol{R}$ を中心とする点状散乱体を半径 a の円形領域での光速を c として

$$v_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{r})=\left\{1-\left(\frac{c_0}{c(\boldsymbol{R})}\right)^2\right\}\pi\left(ka\right)^2\frac{1}{\pi a^2}\Theta\left(a-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R}|\right) \tag{9}$$

と表す。ここで，$\Theta(x)$ はヘヴィサイドの階段関数である。

$$\mathscr{V}(\boldsymbol{R})\equiv\left\{1-\left(\frac{c_0}{c(\boldsymbol{R})}\right)^2\right\}\pi\left(ka\right)^2 \tag{10}$$

がこの散乱体の散乱能となる。

N 個の散乱体がある場合，n 番目の散乱体の位置ベクトルを $\boldsymbol{R}_n$ として，全体の散乱ポテンシャルは

$$\begin{aligned}V(\boldsymbol{r}) &= \sum_{n=1}^{N}v_{\boldsymbol{R}_n}(\boldsymbol{r})\\ &= \sum_{n=1}^{N}\mathscr{V}(\boldsymbol{R}_n)\frac{1}{\pi a^2}\Theta\left(a-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R}_n|\right) &(11)\end{aligned}$$

と書ける。

境界のない開放系で，入射波 $\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r})$ がある場合の電場は式 (6) で与えられる。散乱ポテンシャル $V(\boldsymbol{r})$ は式 (11) で与えられるから

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) &= \boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r})-\int\mathscr{G}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}';k)\sum_{n=1}^{N}\mathscr{V}(\boldsymbol{R}_n)\\ &\quad\times\frac{1}{\pi a^2}\Theta\left(a-|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{R}_n|\right)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')d\boldsymbol{r}'\\ &= \boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r})-\sum_{n=1}^{N}\mathscr{V}(\boldsymbol{R}_n)\int\mathscr{G}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}';k)\\ &\quad\times\frac{1}{\pi a^2}\Theta\left(a-|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{R}_n|\right)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')d\boldsymbol{r}' &(12)\end{aligned}$$

となる [1, 9]。

散乱体の有効散乱半径 a が十分小さいとして，$\mathscr{V}(\boldsymbol{R}_n)$ を一定に保ったまま，$a\to 0$ とすると，$\frac{1}{\pi a^2}\Theta\left(a-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R}_n|\right)\to\delta\left(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R}_n\right)$ となるから

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r})-\sum_{n=1}^{N}\mathscr{G}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{R}_n;k)\mathscr{V}(\boldsymbol{R}_n)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{R}_n) \tag{13}$$

を得る。

点状散乱体の位置 $\boldsymbol{R}_m$ の電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{R}_m)$ に対する自己無撞着な方程式を得るために $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{R}_m$ とすると，式 (13) の右辺の和の中に $\mathscr{G}(\boldsymbol{R}_m,\boldsymbol{R}_n;k)$ が現れるが，$\mathscr{G}(\boldsymbol{R}_m,\boldsymbol{R}_m;k)$ は発散する。しかし，実際には，式 (12) の右辺は発散しないため，$a\to 0$ の極限を取る前の積分

$$\int\mathscr{G}(\boldsymbol{R}_m,\boldsymbol{r}';k)\frac{1}{\pi a^2}\Theta\left(a-|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{R}_m|\right)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')d\boldsymbol{r}' \tag{14}$$

をより正確に評価する必要がある。

定式化をこれより先に進めるためには，具体的な系を想定する必要がある。平行に並んだ円柱状誘電体散乱体と球状誘電体散乱体について具体的な定式化を行う。

4. 平行に並んだ円柱状誘電体散乱体

散乱体として，軸が z 軸方向に向いた無限に長い半径 a の誘電体円柱が複数並んだ系を考える。この系では，電磁波が z 成分のみの TM モードの場合，本質的にスカラー場の問題に帰着するため，電磁波が x, y 成分のみを持つ（$E_z=0$ の）TE モードを考える。入射波が x 軸方向の波数 $k_x>0$ で入射するものとする。電場の成分は，入射波の波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ に

対して，横波の条件 $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}=0$ を満たすように決定される。入射波が誘電体円柱（z 軸）に対して，波数 k_z で斜めに入射する場合，電場の z 依存性を変数分離し，$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{E}(x,y)e^{ik_z z}$ と表す。x-y 平面内の波数 $k_\perp\equiv\sqrt{k_x^2+k_y^2}=\sqrt{k^2-k_z^2}$ を定義すると，波数 $k_\perp$ の波が入射する 2 次元問題となる。この場合には，グリーン関数 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}';k)$ には

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}';k)=\frac{i}{4}H_0^{(1)}\left(k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|\right) \tag{15}$$

を用いる。ここで，$H_0^{(1)}$ は 0 次第 1 種ハンケル関数である。

4.1. テンソルグリーン関数

テンソルグリーン関数 $\mathscr{G}$ は式 (7) で与えられるから

$$\begin{aligned}
\mathscr{G}_{xx} &= \left(1+\frac{1}{k^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}';k) && (16)\\
&= \frac{i}{8k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}\\
&\quad\times\Big[k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|\left\{(x-x')^2+2(y-y')^2\right\}H_0^{(1)}\left(k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|\right)\\
&\qquad -2(y-y')^2H_1^{(1)}\left(k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|\right)\\
&\qquad +k(x-x')^2|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|H_2^{(1)}\left(k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|\right)\Big] && (17)\\
\mathscr{G}_{yy} &= \left(1+\frac{1}{k^2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}';k) && (18)\\
&= \frac{i}{8k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}\\
&\quad\times\Big[k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|\left\{2(x-x')^2+(y-y')^2\right\}H_0^{(1)}\left(k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|\right)\\
&\qquad -2(x-x')^2H_1^{(1)}\left(k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|\right)\\
&\qquad +k(y-y')^2|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|H_2^{(1)}\left(k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|\right)\Big] && (19)\\
\mathscr{G}_{xy} &= \mathscr{G}_{yx}\\
&= \frac{1}{k^2}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}';k) && (20)\\
&= -\frac{i(x-x')(y-y')}{8k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}\\
&\quad\times\Big\{k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|H_0^{(1)}\left(k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|\right)\\
&\qquad -2H_1^{(1)}\left(k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|\right)\\
&\qquad -k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|H_2^{(1)}\left(k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|\right)\Big\}. && (21)
\end{aligned}$$

ここで，$H_1^{(1)}$, $H_2^{(1)}$ はそれぞれ 1 次, 2 次の第 1 種ハンケル関数である。

4.2. $\mathscr{G}(\boldsymbol{R}_n,\boldsymbol{R}_n;k)$ の計算

式 (14) を $\mathscr{G}_{xx},\mathscr{G}_{yy},\mathscr{G}_{xy}$ に対して，散乱体の半径 a が小さいとして近似的に評価する。

$\mathscr{G}_{xx}$ を評価する。点状散乱体内でベクトル場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')$ は変化しないとして，積分の外に出し，また，

$$\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{R}_m=r(\cos\theta,\sin\theta)$$

で定義した極座標を用いて表すと

$$\begin{aligned}
&\int\mathscr{G}_{xx}(\boldsymbol{R}_m,\boldsymbol{r}';k)\frac{1}{\pi a^2}\Theta\left(a-|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{R}_m|\right)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')d\boldsymbol{r}'\\
&\simeq\frac{1}{\pi a^2}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{R}_m)\int\mathscr{G}_{xx}(k|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{R}_m|)\Theta(a-|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{R}_m|)d\boldsymbol{r}'\\
&=\frac{1}{\pi a^2}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{R}_m)\int_0^a\int_0^{2\pi}\mathscr{G}_{xx}(r,\theta;k)rdrd\theta\\
&=\frac{1}{\pi a^2}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{R}_m)\int_0^a\int_0^{2\pi}\frac{i}{8}\Big[\left(1+\sin^2\theta\right)H_0^{(1)}(kr)\\
&\qquad -2\frac{1}{kr}\sin^2\theta H_1^{(1)}(kr)+\cos^2\theta H_2^{(1)}(kr)\Big]rdrd\theta\\
&=\frac{1}{\pi a^2}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{R}_m)\int_0^a\frac{i}{4}\pi H_0^{(1)}(kr)\,rdr\\
&\approx\frac{i}{4a^2}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{R}_m)\int_0^a\left\{1+i\frac{2}{\pi}\left(\ln r+\ln k+\gamma-\ln 2\right)\right\}rdr\\
&=-\frac{1}{4}\left(2\ln\frac{ka}{2}+2\gamma-1-i\pi\right)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{R}_m) \qquad (22)
\end{aligned}$$

のように評価できる。ここで，γ は Euler 定数である。また，最後から 3 行目から 2 行目への変形において

$$H_0^{(1)}(z)\approx 1+i\frac{2}{\pi}\left(\ln z+\gamma-\ln 2\right) \tag{23}$$

なる展開を用いた [12]。

この結果は方向に依存しておらず，$\mathscr{G}_{yy}$ に対する結果も同じになる。したがって，

$$\begin{aligned}
\mathscr{G}_{xx}(\boldsymbol{R}_n,\boldsymbol{R}_n;k) &= \mathscr{G}_{yy}(\boldsymbol{R}_n,\boldsymbol{R}_n;k)\\
&\simeq -\frac{1}{4}\left(2\ln\frac{ka}{2}+2\gamma-1-i\pi\right) && (24)
\end{aligned}$$

とすればよいことが分かる。

同様に，$\mathscr{G}_{xy}$ の場合は

$$\begin{aligned}
&\int\mathscr{G}_{xy}(\boldsymbol{R}_m,\boldsymbol{r}';k)\frac{1}{\pi a^2}\Theta\left(a-|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{R}_m|\right)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')d\boldsymbol{r}'\\
&\simeq\frac{1}{\pi a^2}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{R}_m)\int_0^a\int_0^{2\pi}-\frac{i\cos\theta\sin\theta}{8}\\
&\quad\times\left\{H_0^{(1)}(kr)-\frac{2}{kr}H_1^{(1)}(kr)-H_2^{(1)}(kr)\right\}rdrd\theta\\
&=0 \qquad (25)
\end{aligned}$$

と評価される。したがって，

$$\mathscr{G}_{xy}(\boldsymbol{R}_n,\boldsymbol{R}_n;k)=\mathscr{G}_{yx}(\boldsymbol{R}_n,\boldsymbol{R}_n;k)=0 \tag{26}$$

とすればよい。

以上により，円柱状誘電体散乱体が平行に並んだ場合の定式化が完了した。

4.3. 自己無撞着方程式

まとめると，点状散乱体の位置 $\{\boldsymbol{R}_n\}$ のベクトル場 $\{\boldsymbol{E}(\boldsymbol{R}_n)\}$ を求めるための自己無撞着方程式は以下のように与えられる。

$$\begin{aligned}
E_j(\boldsymbol{R}_m) &= E_{0j}(\boldsymbol{R}_m)\\
&\quad-\sum_{n=1}^{N}\sum_{l=x,y}\mathscr{G}_{jl}(\boldsymbol{R}_m,\boldsymbol{R}_n;k)\mathscr{V}(\boldsymbol{R}_n)E_l(\boldsymbol{R}_n) && (27)
\end{aligned}$$

$$\mathscr{G}_{jl}(\boldsymbol{R}_m,\boldsymbol{R}_n;k)\equiv\begin{cases}\left(\delta_{jl}+\frac{1}{k^2}\frac{\partial^2}{\partial\boldsymbol{R}_{mj}\partial\boldsymbol{R}_{ml}}\right)G(\boldsymbol{R}_m,\boldsymbol{R}_n;k) & m\neq n\\ -\frac{1}{4}\left(2\ln\frac{ka}{2}+2\gamma-1-i\pi\right)\delta_{jl} & m=n\end{cases} \tag{28}$$

$$G(\boldsymbol{R}_m,\boldsymbol{R}_n;k)\equiv\frac{i}{4}H_0^{(1)}\left(k|\boldsymbol{R}_m-\boldsymbol{R}_n|\right) \tag{29}$$

$$j,l=x,y,\quad m,n=1,2,\cdots,N$$

5. 球状誘電体状散乱体

散乱体として，半径 a の誘電体球が複数並んだ系を考える。入射波が x 軸方向の波数 $k_x > 0$ で入射するものとする。電場の成分は，入射波の波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ に対して，横波の条件 $\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{E} = 0$ を満たすように決定される。この問題のグリーン関数 $G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}'; k)$ は

$$G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}'; k) = \frac{1}{4\pi|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \exp\left(ik\left|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'\right|\right) \tag{30}$$

である。

5.1. テンソルグリーン関数

テンソルグリーン関数 $\mathscr{G}$ は式 (7) で与えられるから

$$\begin{aligned}
\mathscr{G}_{xx} &= \frac{e^{ik|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{4\pi k^2 \left|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'\right|^5} \\
&\quad \times \left[(x-x')^2 \left\{k^2\left((y-y')^2 + (z-z')^2\right)\right.\right. \\
&\qquad \left. -2ik\left|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'\right| + 2\right\} \\
&\quad + \left((y-y')^2 + (z-z')^2\right)\left\{k^2\left((y-y')^2 + (z-z')^2\right)\right. \\
&\qquad \left.\left. +ik\left|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'\right| - 1\right\}\right] \qquad (31) \\
\mathscr{G}_{yy} &= \frac{e^{ik|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{4\pi k^2 \left|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'\right|^5} \\
&\quad \times \left[k^2(x-x')^4\right. \\
&\quad + (x-x')^2\left\{k^2\left((y-y')^2 + 2(z-z')^2\right)\right. \\
&\qquad \left. +ik\left|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'\right| - 1\right\} \\
&\quad + (y-y')^2\left\{k^2(z-z')^2 - 2ik\left|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'\right| + 2\right\} \\
&\quad \left. + (z-z')^2\left\{k^2(z-z')^2 + ik\left|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'\right| - 1\right\}\right] \qquad (32) \\
\mathscr{G}_{zz} &= \frac{e^{ik|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{4\pi k^2 \left|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'\right|^5} \\
&\quad \times \left[k^2(x-x')^4 + (x-x')^2\right. \\
&\quad \times \left\{k^2\left(2(y-y')^2 + (z-z')^2\right) + ik\left|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'\right| - 1\right\} \\
&\quad + (y-y')^2\left\{k^2(z-z')^2 + ik\left|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'\right| - 1\right\} \\
&\quad \left. + k^2(y-y')^4 + 2(z-z')^2\left\{1 - ik\left|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'\right|\right\}\right] \qquad (33) \\
\mathscr{G}_{xy} &= \mathscr{G}_{yx} \\
&= \frac{e^{ik|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{4\pi k^2 \left|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'\right|^5} \\
&\quad \times (x-x')(y-y') \\
&\quad \times \left\{k^2\left(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'\right)^2 + 3ik\left|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'\right| - 3\right\} \qquad (34) \\
\mathscr{G}_{xz} &= \mathscr{G}_{zx} \\
&= \frac{e^{ik|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{4\pi k^2 \left|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'\right|^5} \\
&\quad \times (x-x')(z-z') \\
&\quad \times \left\{k^2\left(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'\right)^2 + 3ik\left|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'\right| - 3\right\} \qquad (35) \\
\mathscr{G}_{yz} &= \mathscr{G}_{zy} \\
&= \frac{e^{ik|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{4\pi k^2 \left|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'\right|^5} \\
&\quad \times (y-y')(z-z') \\
&\quad \times \left\{k^2\left(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'\right)^2 + 3ik\left|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'\right| - 3\right\} \qquad (36)
\end{aligned}$$

5.2. $\mathscr{G}(\boldsymbol{R}_n, \boldsymbol{R}_n; k)$ の計算

式 (14) を $\mathscr{G}_{xx}$, $\mathscr{G}_{yy}$, $\mathscr{G}_{zz}$, $\mathscr{G}_{xy}$, $\mathscr{G}_{xz}$, $\mathscr{G}_{yz}$ に対して，散乱体の半径 a が小さいとして近似的に評価する。

点状散乱体内でベクトル場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')$ は変化しないとして，積分の外に出し，また，

$$\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{R}_m = r(\cos\phi\sin\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\theta)$$

で定義した極座標を用いる。

$\mathscr{G}_{xx}$ は

$$\begin{aligned}
&\int \mathscr{G}_{xx}(\boldsymbol{R}_m, \boldsymbol{r}'; k)\frac{3}{4\pi a^3}\Theta\left(a - \left|\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{R}_m\right|\right)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')d\boldsymbol{r}' \\
&\simeq \frac{3}{4\pi a^3}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{R}_m)\int \mathscr{G}_{xx}(k|\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{R}_m|)\Theta(a - |\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{R}_m|)d\boldsymbol{r}' \\
&= \frac{3}{4\pi a^3}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{R}_m)\int_0^a\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \mathscr{G}_{xx}(r, \phi, \theta; k)r^2\sin\theta dr d\phi d\theta \\
&= \frac{3}{4\pi a^3}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{R}_m)\int_0^a\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{e^{ikr}}{32\pi k^2 r^3} \\
&\quad \times \left\{k^2r^2\cos 2(\theta+\phi) + \left(k^2r^2 + 3ikr - 3\right)\cos 2(\theta - \phi)\right. \\
&\qquad + 2\left(k^2r^2 + 3ikr - 3\right)\cos 2\theta \\
&\qquad - 2k^2r^2\cos 2\phi + 6k^2r^2 \\
&\qquad + 3ikr\cos 2(\theta+\phi) - 6ikr\cos 2\phi \\
&\qquad \left. +2ikr - 3\cos 2(\theta+\phi) + 6\cos 2\phi - 2\right\} \\
&\qquad \times r^2\sin\theta dr d\phi d\theta \\
&= \frac{3}{4\pi a^3}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{R}_m)\int_0^a \frac{2}{3}re^{ikr}dr \\
&= \frac{-1 + e^{ika}(1 - ika)}{2\pi a(ka)^2}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{R}_m) \qquad (37)
\end{aligned}$$

のように評価できる。この結果は方向に依存しておらず，$\mathscr{G}_{yy}$, $\mathscr{G}_{zz}$ に対する結果も同じになる。したがって，

$$\begin{aligned}
\mathscr{G}_{xx}(\boldsymbol{R}_n, \boldsymbol{R}_n; k) &= \mathscr{G}_{yy}(\boldsymbol{R}_n, \boldsymbol{R}_n; k) \\
&= \mathscr{G}_{zz}(\boldsymbol{R}_n, \boldsymbol{R}_n; k) \\
&\simeq \frac{-1 + e^{ika}(1 - ika)}{2\pi a(ka)^2} \qquad (38) \\
&\approx \frac{1}{4\pi a}\left(1 + \frac{2}{3}i(ka) - \frac{1}{4}(ka)^2\right) \qquad (39)
\end{aligned}$$

とすればよい。

同様に $\mathscr{G}_{xy}$ を評価すると

$$\begin{aligned}
&\int \mathscr{G}_{xy}(\boldsymbol{R}_m, \boldsymbol{r}'; k)\frac{3}{4\pi a^3}\Theta\left(a - \left|\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{R}_m\right|\right)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')d\boldsymbol{r}' \\
&\simeq \frac{3}{4\pi a^3}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{R}_m)\int_0^a\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \mathscr{G}_{xy}(r, \phi, \theta; k)r^2\sin\theta dr d\phi d\theta \\
&= \frac{3}{4\pi a^3}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{R}_m)\int_0^a\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \\
&\quad \times \frac{e^{ikr}}{4\pi k^2 r^3}\left(-k^2r^2 - 3ikr + 3\right)\sin^2\theta\sin\phi\cos\phi \\
&\qquad \times r^2\sin\theta dr d\phi d\theta \\
&= 0 \qquad (40)
\end{aligned}$$

となる。この結果は方向に寄らないため，

$$\begin{aligned}
\mathscr{G}_{ij}(\boldsymbol{R}_n, \boldsymbol{R}_n; k) &= 0 \qquad (41) \\
i \neq j, &\qquad (i, j = x, y, z)
\end{aligned}$$

を得る。

以上により，球状誘電体状散乱体の場合の定式化が完了した。

5.3. 自己無撞着方程式

まとめると，点状散乱体の位置$\{\boldsymbol{R}_n\}$のベクトル場$\{\boldsymbol{E}(\boldsymbol{R}_n)\}$を求めるための自己無撞着方程式は以下のように与えられる。

$$E_j(\boldsymbol{R}_m) = E_{0j}(\boldsymbol{R}_m) - \sum_{n=1}^{N}\sum_{l=x,y,z} \mathscr{G}_{jl}(\boldsymbol{R}_m,\boldsymbol{R}_n;k)\mathscr{V}(\boldsymbol{R}_n)E_l(\boldsymbol{R}_n) \quad (42)$$

$$\mathscr{G}_{jl}(\boldsymbol{R}_m,\boldsymbol{R}_n;k) \equiv \begin{cases} \left(\delta_{jl} + \frac{1}{k^2}\frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{R}_{mj}\partial \boldsymbol{R}_{ml}}\right) G(\boldsymbol{R}_m,\boldsymbol{R}_n;k) & m \neq n \\ \frac{-1+e^{ika}(1-ika)}{2\pi a(ka)^2}\delta_{jl} & m = n \end{cases} \quad (43)$$

$$G(\boldsymbol{R}_m,\boldsymbol{R}_n;k) \equiv \frac{1}{4\pi|\boldsymbol{R}_m-\boldsymbol{R}_n|}\exp\left(ik\,|\boldsymbol{R}_m-\boldsymbol{R}_n|\right) \quad (44)$$

$$j,l = x,y,z, \quad m,n = 1,2,\cdots,N$$

6. 結論

横波ベクトル波が境界のない自由空間において点状散乱体により散乱される散乱問題について，ベクトル波動場の積分方程式の近似的解法を，電磁場を具体例として円柱状，球状誘電体微小散乱体の場合に定式化した。

本論文では定式化のみで数値計算を実行していない。一般に，電磁場解析において，本論文同様に電場のみでの定式化においても，TM モードに比べ，TE モードの方が計算精度が悪い [13]。したがって，同様の近似を用いたスカラー場の計算手法の計算精度と本論文における定式化を用いた場合の計算精度を比較し精査する必要がある。

また，電磁場を例に定式化を行ったが，散乱ポテンシャルを自由空間中および散乱体内の位相速度の比で表してあるため，従う方程式が同形であればそのまま適用できる。

本論文では境界のない自由空間に複数の点状散乱体がある場合を取り扱ったが，境界のある開放系の中に点状散乱体が複数存在している場合にも，境界でディリクレ，ノイマン境界条件が課されるときには，通常のヘルムホルツ方程式に対する境界要素法と組み合わせることで容易に拡張することができる [1, 9]。この場合，散乱体がないときには，ベクトル場は各成分が独立しているため，スカラー場と同じ境界要素法を用いて解ける。x, y, z の 3 成分の方程式に，点状散乱体の位置のベクトル場を未知変数に加え，方程式に各成分を混合する散乱項を加えて，連立すればよい。

謝辞:

本研究は JSPS 科研費 課題番号 18K04028, 19H00740, 22K03987 の助成を受けて行われました。

参考文献

(1) T. Ueta: Boundary Element Method for Electron Transport in the Presence of Pointlike Scatterers in Magnetic Fields, Phys. Rev. B, **60** (1999), pp. 8213–8217.

(2) P. A. Lee and A. D. Stone: Universal Conductance Fluctuations in Metals, Phys. Rev. Lett., **55** (1985), pp. 1622–1625.

(3) H. Miyazaki, M. Hase, H. T. Miyazaki, Y. Kurokawa and N. Shinya: Photonic Material for Designing Arbitrarily Shaped Waveguides in Two Dimensions, Phys. Rev. B, **67** (2003), 235109.

(4) T. Ueta, G. Fujii, G. Morimoto, K. Miyamoto, A. Kosaku, T. Kuriyama and T. Hariyama: Numerical Study on the Structural Color of Blue Birds by a Disordered Porous Photonic Crystal Model, Euro. Phys. Lett. **107** (2014), 34004.

(5) T. Ueta, G. Fujii and G. Morimoto: Full-model Finite-element Analysis for Structural Color of Tarsiger Cyanurus's Feather Barbs, Forma, **35**, (2020), pp. 21–26.

(6) V. Tournat, V. Pagneux, D. Lafarge and L. Jaouen: Multiple Scattering of Acoustic Waves and Porous Absorbing Media, Phys. Rev. E, **70**, (2004), 026609.

(7) M. A. Kuczmarski and J. C. Johnston: Acoustic Absorption in Porous Materials, NASA/TM, (2011), 216995.

(8) P. Soven: Coherent-Potential Model of Substitutional Disordered Alloys, Phys. Rev., **156** (1967), pp. 809–813.

(9) Y. Miyagawa and T. Ueta: A Novel Numerical Method for the Analysis of Electron Transport in the Presence of Pointlike Magnetic Scatterers, J. Phys.: Condens. Matter, **20** (2008), 365208.

(10) Y. Miyagawa and T. Ueta: Numerical Study on Ballistic Electron Transport in the Presence of Pointlike Magnetic Scatterers, Thin Solid Films, **505**, (2006), pp. 57–59.

(11) K. Ohtaka: Scattering Theory of Low-energy Photon Diffraction, J. Phys. C: Solid State Phys, **13**, (1980), pp. 667–680.

(12) M. Abramowitz and I. A. Stegun (ed.): *Handbook of Mathematical Functions*, (Dover, New York, 1972), pp. 358–360.

(13) K. Ohtaka, T. Ueta and K. Amemiya: Calculation of Photonic Bands Using Vector Cylindrical Waves and Reflectivity of Light for an Array of Dielectric Rods, Phys. Rev. B, **57**, (1998), pp. 2550–2568.

計算数理工学論文集 Vol. 22 (2022 年 12 月)，論文 No. 05-221216 JASCOME

蝶を模した羽ばたき翼–胴体モデルの飛翔における翼基部の柔軟性を考慮した数値シミュレーション

NUMERICAL SIMULATIONS FOR FREE FLIGHTS OF A BUTTERFLY-LIKE FLAPPING WING–BODY MODEL WITH WING ROOT FLEXIBILITY

井口　大地 [1)]，鈴木　康祐 [2)]，吉野　正人 [3)]

Daichi IGUCHI, Kosuke SUZUKI and Masato YOSHINO

1) 信州大学大学院総合理工学研究科　(〒 380-8553　長野県長野市若里 4-17-1,　E-mail: 21w4002j@shinshu-u.ac.jp)
2) 信州大学学術研究院工学系　(〒 380-8553　長野県長野市若里 4-17-1,　E-mail: kosuzuki@shinshu-u.ac.jp)
3) 信州大学学術研究院工学系　(〒 380-8553　長野県長野市若里 4-17-1,　E-mail: masato@shinshu-u.ac.jp)

The effective angle of attack of butterfly's wings changes by not only the pitching angle of the thorax but also the relative angle of the wing chord to the thorax. In the previous study, the butterfly-like flapping wing–body model, which is composed of a thorax, an abdomen, and two wings, was used for the investigation into butterfly's flights [J. Fluid Mech., Vol.767 (2015), pp. 659–695]. In the present study, we modify this model to be able to change the relative angle of the wing chord to the thorax by wing root flexibility. We investigate the relationship between the pitching angle of the thorax and the relative angle of the wing chord to the thorax. Firstly, with the free flight parameters of a fruit fly, we investigate the effectiveness of wing root flexibility on free flights. As a result, the lift and thrust are enhanced for a suitable flexibility, and the model can stably go forward and upward against gravity. Secondly, we calculate free flights with the flight parameters close to a cabbage white butterfly. As a result, the lift and thrust are improved by taking into account the flexibility of the wing root.

Key Words: Flapping Flight, Wing Root Flexibility, Lattice Boltzmann Method, Immersed Boundary Method

1. はじめに

蝶や蝿といった昆虫の羽ばたき飛翔は，生物学においてだけでなく，航空工学においても興味深い問題である．羽ばたき飛翔は，垂直離着陸や空中停止飛行（ホバリング）が可能であり，急旋回や急停止等の運動特性に優れているという点から，超小型飛翔体（Micro Air Vehicle : MAV）の推進機構の一つとして，注目されている [1–3]．こうした工学的応用が，昆虫の羽ばたき運動を研究する大きな動機付けの一つになっている．

昆虫の羽ばたき飛翔の中でも，蝶は他の昆虫にはない特徴を持っている．蝶は，蝿や蜂とは異なり，翼を真下に振り下ろすことにより揚力を，後方に振り上げることにより推力を発生させ，ストローク面を大きく変えて羽ばたく [4]．さらに，ほかの昆虫と比べて，蝶はひらひらと不規則で不安定な飛翔をすることも特徴である．これは，不規則な軌道の飛翔を行い，捕食を回避しているのではないかと考えられている [4]．また，蝶が「不安定な飛翔」ができるのは，不安定な姿勢から素早く姿勢を立て直すことができる優れた姿勢制御方法を有していることを示している．実際の蝶の羽ばたきの様子を確認してみると，翼のリード・ラグ運動や翼の柔軟性，胸部に対する腹部の相対運動など様々な要素によって，飛行中の姿勢制御を行っていると考えられる [5]．しかし，蝶の羽ばたき飛翔は上記の特徴などから，メカニズムが極めて複雑で姿勢制御の方法について十分な解明がされていない．このような蝶の姿勢制御の方法を工学的に応用できれば，MAV の今後の発展につながると予想される．

昆虫の羽ばたき飛翔の研究は，過去 50 年以上に渡り理論，実験，数値計算を用いた様々なアプローチによりなされている．それらの研究の多くでは，昆虫の翼の動きや形状を模した翼モデルや，翼だけでなく胴体まで模した翼–胴体モデル

2022 年 10 月 28 日受付，2022 年 11 月 15 日受理

が用いられている [6–10]．蝶についての研究の例を挙げると，Suzuki et al. [11] は蝶の翼・胴体形状や羽ばたき方を大幅に単純化して，蝶を模した三次元羽ばたき翼–胴体モデルを構築している．この翼–胴体モデルは，翼が正方形の剛体平板で，胴体が棒状である非常に単純なモデルであるものの，実際の蝶の重さを支えるほどの揚力を発生できることが数値計算により示されている [11]．また，蝶を模した三次元羽ばたき翼–胴体モデルは，その単純さゆえに拡張性に富んでおり，翼形状を変更したり，翼の質量，翼の柔軟性を付与したりすることによって，それぞれの要因が推力・揚力に及ぼす影響について調べることができる．

現在までに，Suzuki et al. [11] の蝶を模した三次元羽ばたき翼–胴体モデルを用いて，胸部に対する腹部の相対運動 [11] や，胴体に取り付けた錘の移動による重心移動 [12] を利用した姿勢制御が調べられている．いずれも，安定した前進・上昇飛翔を実現しているが，実際の蝶の動きからは大きく異なる結果となった．この原因の一つとして，モデルと実際の蝶では翼の迎角の表現が違うことが挙げられる．モデルでは胸部を水平に保ったまま，翼の胸部に対する取付角のみで迎角を表現しているのに対し，実際の蝶では胸部のピッチング角が主に迎角を決定しているのに加えて，翼の胸部に対する取付角の変化も実効的に迎角を変えている．従って，モデルを実際の蝶に近づけるには，胸部のピッチング回転を能動的に与えて，さらに翼の胸部に対する取付角を変化させて，実効的な迎角を変える必要がある．

Senda et al. [13] は翼と胴体の取付角が受動的に変化するモデルを構築し，翼の受動的なねじれを考慮することにより，蝶の飛翔安定性が向上することを報告している．Senda et al. [13] のモデルは胸部を固定された蝶の運動をモデル化したもので，その点で実際の蝶の自由飛翔とは異なるが，解剖学的な観点からも，翼の受動的なねじれは無理のない仮定であると考えられる．蝶の筋肉は主に打ち下ろしを担う背縦走筋（Dorsal Longitudinal Muscle : DLM）と打ち上げを担う背腹筋（Dorsal Ventral Muscle : DVM），それぞれ一対ずつの間接飛翔筋で構成されており，それ以外の直接筋はこれら二つの筋肉に比べて小さく [14,15]，翼の姿勢を陽に変えるには頼りない．

以上より，本研究では，胸部のピッチング運動に対する翼基部の柔軟性が飛翔に与える影響を調査する．Suzuki et al. [11] のモデルを拡張し，蝶を模した羽ばたき翼–胴体モデルにおいて，翼基部の筋肉をねじりバネとして単純化し，翼と胸部の取付角が受動的に変化するモデルを構築する．本研究では簡単のため，胸部に対する腹部の相対運動によるピッチング制御は行わず，翼基部のバネと翼と胸部の取付角のみに注目する．

上記のモデルを用いて，(i) 計算負荷が小さい fruit fly のパラメータを使用した，翼基部にバネを導入することによる実効迎角への影響の調査，継続的な自由飛翔の可能性の検証；(ii) 計算パラメータを実際の蝶の値に変更した自由飛翔の二種類の数値計算を行う．

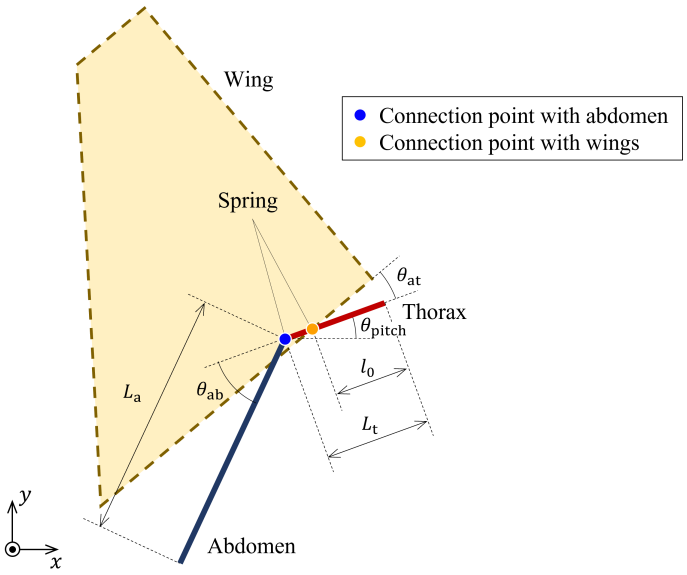


Fig. 1　Butterfly-like flapping wing–body model with two wings and a rod-shaped body.

本論文の構成は以下の通りである．第 2 節では，蝶を模した羽ばたき翼–胴体モデルについて述べる．第 3 節では，本研究の系においての支配方程式と支配パラメータについて記述した上で，本研究で用いるモデルと Suzuki et al. [11] のモデルの対比について述べる．第 4 節では，支配方程式を解くための手法である埋め込み境界–格子ボルツマン法について述べる．第 5 節では，蝶を模した羽ばたき翼–胴体モデルを用いて (i), (ii) を行うことによって得られた結果の考察を行い，最後に第 6 節で本研究の結論と今後の課題について述べる．

2. 計算モデル

2.1. 蝶を模した羽ばたき翼–胴体モデル

蝶を模した羽ばたき翼–胴体モデルを Fig. 1 に示す．このモデルは，Suzuki et al. [11] によって提案されたモデルを拡張したもので，2 枚の翼（wing）と，胸部（thorax）と腹部（abdomen）からなる胴体で構成される．胴体は，胸部と腹部の 2 本の非常に細い棒で構成され，質量と回転摩擦がないバネで接合されているものとする．胸部の長さと質量を L_t, M_t とし，腹部の長さと質量を L_a, M_a とする．胴体全体の長さと質量は，それぞれ $L_b = L_t + L_a$, $M_b = M_t + M_a$ で与えられる．また，2 枚の翼はともに厚みを持たず，柔軟性も持たないものとする．翼と胴体も同様に，質量と回転摩擦のないバネで，胸部の先端から l_0 の点で結合している．本研究では，胴体の長さを $L_b = 0.86L_{ref}$，胸部と腹部の長さの比と質量比がそれぞれ，$L_t : L_a = 3 : 7$, $M_t : M_a = 44 : 51$，胸部の先端からの翼の結合点までの長さを $l_0 = 0.77L_t$ とする．ここで，L_{ref} は代表長さであり，翼面積の平方根である．

2.2. 翼形状

本研究では，台形の形状をした蝶相当台形翼を用いる．蝶

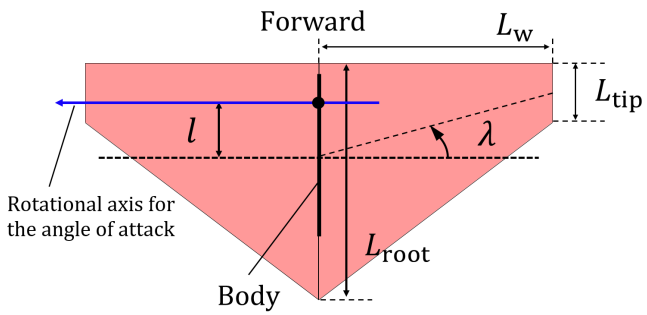


Fig. 2 Trapezoidal wing planform equivalent to an actual butterfly's wing planform in terms of aerodynamic performance.

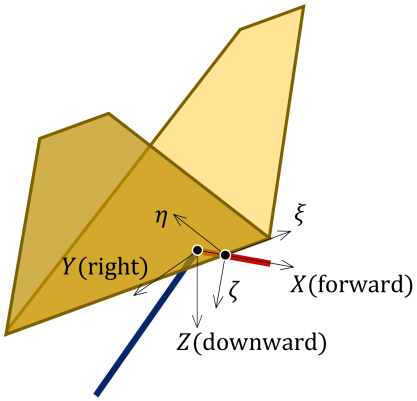


Fig. 3 Two axes fixed to the thorax $\Sigma_t(X-Y-Z)$ and the right wing $\Sigma_{wr}(\xi-\eta-\zeta)$.

相当台形翼の形状を Fig. 2 に示す．この翼形状は，Suzuki and Yoshino [17] がアスペクト比，テーパー比，翼付け根の位置，後退角の 4 つのパラメータを調整し，蝶の翼形状の空力性能に匹敵する台形翼を探索した結果，得られた翼形状である．翼長を L_w，翼端の長さを L_{tip}，翼根の長さを L_{root} とする．Fig. 2 のように，翼根の中点を通り胴体に垂直な直線を基準として，翼の付け根の位置を $l = 0.3L_w$ とする．また，翼根の中心と翼端の中心を結んだ線分と，翼根に垂直な平面との角度を後退角 λ と定義し，本研究では $\lambda = -20.56°$ とする．また，翼の面積は S とする．

翼形状を決定するパラメータとして，アスペクト比は $AR = L_w^2/S = 1.60$，テーパー比は $L_{tip}/L_{root} = 0.25$ とする．この値は，Suzuki and Yoshino が Janatella leucodesma の翼を基に，翼の輪郭をトレースした蝶を模した翼形状 [16] のものと同程度になるよう決定している．この蝶相当台形翼と蝶型翼 [16] の胴体固定時における空力性能を比較したところ，両者の結果が同程度であることがわかっている [17]．したがって，形状が複雑なため翼の質量を考慮することが難しい蝶型翼に代わり，この蝶相当台形翼に質量を考慮することで，蝶型翼の場合と同様の結果が得られると考えられる．

2.3. 羽ばたき方

蝶を模した羽ばたき翼–胴体モデルは，実際の蝶のように，翼を真下に振り下ろすことで揚力を発生させ，翼を真後ろに振り上げることで推力を発生させる．本研究のモデルでは，翼に羽ばたき運動を強制し，迎角は胸部のピッチング回転に加えて，翼と胸部の取付角で決定する．また，胸部にピッチング回転を強制し，翼と胸部の取付角は流体から受けるトルク，および重力によって受動的に変化するものとする．翼の運動を記述するため，Fig. 3 のように，胸部と腹部の結合部に原点を取る座標系と，翼と胴体の結合部に原点を取る座標系の 2 つの座標系を導入する．胸部に固定された座標系は Σ_t で，座標軸を X, Y, Z とする．胸部の中心を原点に X 軸を胴体前向き，Z 軸を胴体下向きに取り，それらと右手系を成すように Y 軸を取る．右翼に固定された座標系は Σ_{wr} で，座標軸を ξ, η, ζ とする．結合部を原点にスパン方向に η 軸を，コード方向翼前方に ξ 軸を取り，それらと右手系を成すように ζ 軸を取る．以上のように座標系を定義することで，翼の運動は Σ_t と Σ_{wr} の 2 つの座標系の関係で表すことができる．なお，左翼の運動は右翼の鏡対称と定義する．次に，翼の運動を 3-2-1 Euler 角を用いて定義する．Σ_t の $[X,\ Y,\ Z]$ 軸方向の基底ベクトルをそれぞれ $[\boldsymbol{e}_X,\ \boldsymbol{e}_Y,\ \boldsymbol{e}_Z]$，$\Sigma_{wr}$ の $[\xi,\ \eta,\ \zeta]$ 軸方向の基底ベクトルをそれぞれ $[\boldsymbol{e}_\xi,\ \boldsymbol{e}_\eta,\ \boldsymbol{e}_\zeta]$ とすると，両者の関係は以下の式で表される．なお，角度 θ_{at} は X 軸と ξ 軸のなす角で，翼と胸部の取付角を表している．

$$[\boldsymbol{e}_\xi,\ \boldsymbol{e}_\eta,\ \boldsymbol{e}_\zeta] = [\boldsymbol{e}_X,\ \boldsymbol{e}_Y,\ \boldsymbol{e}_Z]\, S_3(0) S_2(\theta_{at}(t)) S_1(-\theta(t)), \quad (1)$$

ここで，S_3, S_2, S_1 は以下に表される回転行列である．

$$S_3(\phi) = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

$$S_2(\phi) = \begin{bmatrix} \cos\phi & 0 & \sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\phi & 0 & \cos\phi \end{bmatrix}, \quad (3)$$

$$S_1(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}. \quad (4)$$

回転角度の $\theta(t)$ は，翼の羽ばたき角であり，以下の式で与えられる．

$$\theta(t) = \theta_m \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right), \quad (5)$$

ここで，θ_m は羽ばたき角振幅，T は羽ばたき周期であり，$\theta_m = 45°$ である．

3. 支配方程式系

3.1. 流体の運動

流体の運動の支配方程式は，非圧縮性粘性流体の連続の式および Navier–Stokes 方程式である．

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u}=0, \tag{6}$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t}+(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\boldsymbol{u}=-\frac{1}{\rho_{\mathrm{f}}}\boldsymbol{\nabla}p+\nu\boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{u}, \tag{7}$$

ここで，$\boldsymbol{u}$ は流速，p は圧力，ρ_{f} は流体の密度，ν は動粘性係数である．本研究では，地球大気の 20 ℃における値 $\rho_{\mathrm{f}}=1.205$ [kg/m^3]，$\nu=1.512\times10^{-5}$ [m^2/s] とする．この方程式系の支配パラメータは Reynolds 数 Re であり，翼の付け根から翼長方向へ L_{ref} だけ離れた基準点の平均羽ばたき速さ $U_{\mathrm{ref}}=4\theta_{\mathrm{m}}L_{\mathrm{ref}}/T$ を代表速さとし，以下のように定義する．

$$Re \quad = \quad \frac{U_{\mathrm{ref}}L_{\mathrm{ref}}}{\nu}. \tag{8}$$

3.2. 翼–胴体モデルの運動

翼の羽ばたき運動は胸部に対して与えているため，モデルの運動は胸部–腹部の運動方程式により決定される．本研究では翼に働く流体力は翼と胸部の結合部を通して胴体に伝えられるものとする．胸部の運動は，空間に固定された座標系 Σ_{s} に対する Σ_{t} の位置および回転で表すことができる．Σ_{s} の座標軸として水平前方に x 軸，鉛直上向きに y 軸，それらと右手系を成すように z 軸を取り，$[x,\ y,\ z]$ 軸方向の基底ベクトルをそれぞれ $[\boldsymbol{e}_x,\ \boldsymbol{e}_y,\ \boldsymbol{e}_z]$ とおく．本研究では簡単のため，モデルの運動を前後方向である x 方向，上下方向である y 方向に制限する．また，モデルの対称性を考慮し，回転はピッチング回転 (Σ_{t} の Y 軸周りの回転) のみとする．ここで，x 軸と X 軸のなす角をピッチング角 θ_{pitch} とする．Σ_{s} と Σ_{t} の関係は以下のように表される．

$$[\boldsymbol{e}_X,\ \boldsymbol{e}_Y,\ \boldsymbol{e}_Z]=[\boldsymbol{e}_x,\ \boldsymbol{e}_y,\ \boldsymbol{e}_z]\,S(\boldsymbol{Q}(t)), \tag{9}$$

ここで，$S(\boldsymbol{Q}(t))$ は Σ_{s} から Σ_{t} への変換行列であり，クオータニオン $\boldsymbol{Q}(t)=(q_0,\ q_1,\ q_2,\ q_3)^{\mathrm{T}}$ を用いて，

$$S(\boldsymbol{Q}(t))= \begin{bmatrix} q_0^2-q_2^2-q_3^2+q_1^2 & 2(q_1q_2-q_0q_3) & 2(q_1q_3+q_0q_2) \\ 2(q_1q_2+q_0q_3) & q_0^2-q_3^2-q_1^2+q_2^2 & 2(q_2q_3-q_0q_1) \\ 2(q_1q_3-q_0q_2) & 2(q_2q_3+q_0q_1) & q_0^2-q_1^2-q_2^2+q_3^2 \end{bmatrix}, \tag{10}$$

と表される．ここで，クオータニオン $\boldsymbol{Q}(t)$ の 4 個の変数は拘束条件により，$q_0^2+q_1^2+q_2^2+q_3^2=1$ となる．また，初期において Σ_{t} は Σ_{s} に対して，X 軸周りに 90° 回転させた関係であるから，$\boldsymbol{Q}(0)=(1/\sqrt{2},\ 1/\sqrt{2},\ 0,\ 0)^{\mathrm{T}}$ となる．ここで，前述のピッチング角 θ_{pitch} と $q_0,\ q_1,\ q_2,\ q_3$ の関係は，

$$\theta_{\mathrm{pitch}}=\arctan\left(\frac{2(q_0q_2+q_1q_3)}{2q_0^2+2q_1^2-1}\right), \tag{11}$$

と表される．胸部と腹部の結合点を代表点とし，その位置と速度をそれぞれ $\boldsymbol{X}_{\mathrm{j}}=(x_{\mathrm{j}},\ y_{\mathrm{j}},\ z_{\mathrm{j}})$，$\boldsymbol{U}_{\mathrm{j}}=(U_{\mathrm{j}},\ V_{\mathrm{j}},\ W_{\mathrm{j}})$ とし，Σ_{t} と Σ_{s} に対する角速度ベクトルを $\boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{j}}$ とすると，代表点の位置と速度，および姿勢と各速度の関係式は以下のように表される．

$$\frac{d\boldsymbol{X}_{\mathrm{j}}}{dt}=\boldsymbol{U}_{\mathrm{j}}(t), \tag{12}$$

$$\frac{d\boldsymbol{Q}}{dt}=A(t)\boldsymbol{Q}(t), \tag{13}$$

ただし，$A(t)$ は 4 行 4 列の行列であり，$\boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{j}}=(\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3)^{\mathrm{T}}$ を用いて，

$$A=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -\omega_1 & -\omega_2 & -\omega_3 \\ \omega_1 & 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ \omega_2 & -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_3 & \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{bmatrix}, \tag{14}$$

と記述される．なお，本研究ではピッチング回転のみを考えるため，$\omega_1=\omega_3=0$ となる．

本研究の翼–胴体モデルの運動は，翼 2 枚と胸部と腹部から成る胴体の 4 体連成問題である．しかし，胴体に対する翼の運動を与えるために，胴体と翼の間に適切な拘束力が働いていなければならない．本来，この拘束力を考慮したうえで，翼 2 枚，胸部および腹部の 4 つの運動方程式を立てなければならないが，本研究ではラグランジュ形式で立式することで，拘束力を陽的に求めることなく，翼–胴体系の運動方程式を計算する．モデルの 2 枚の翼，胸部および腹部の合計の運動エネルギーを K，位置エネルギーを U とすると，ラグランジアンは $\mathcal{L}=K-U$ になる．胸部，腹部，翼に作用する流体力をそれぞれ $\boldsymbol{F}^{\mathrm{t}}$，$\boldsymbol{F}^{\mathrm{a}}$，$\boldsymbol{F}^{\mathrm{w}}$，胸部，腹部の重心周り，翼の接合点周りに作用する流体トルクをそれぞれ T^{t}，T^{a}，T^{w} とすると，この系のラグランジュの運動方程式は下式のように表される．

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}_{\mathrm{j}}}\right)-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_{\mathrm{j}}}=\left(\boldsymbol{F}^{\mathrm{t}}+\boldsymbol{F}^{\mathrm{a}}+\boldsymbol{F}^{\mathrm{w}}\right)\cdot\boldsymbol{e}_x, \tag{15}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}_{\rm j}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_{\rm j}} = \left(\boldsymbol{F}^{\rm t} + \boldsymbol{F}^{\rm a} + \boldsymbol{F}^{\rm w}\right) \cdot \boldsymbol{e}_y, \tag{16}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_{\rm ab}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_{\rm ab}} = T^{\rm a} - K_{\rm ab}\theta_{\rm ab} - C_{\rm ab}\dot{\theta}_{\rm ab}, \tag{17}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_{\rm at}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_{\rm at}} = T^{\rm w} - K_{\rm at}\theta_{\rm at} - C_{\rm at}\dot{\theta}_{\rm at}. \tag{18}$$

式 (15)–(18) を変形すると，式 (19) のようになる．

$$\begin{bmatrix} X_x & 0 & X_{\rm r} & X_{\rm a} \\ 0 & Y_y & Y_{\rm r} & Y_{\rm a} \\ R_x & R_y & R_{\rm r} & R_{\rm a} \\ A_x & A_y & A_{\rm r} & A_{\rm a} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_{\rm j} \\ \ddot{y}_{\rm j} \\ \ddot{\theta}_{\rm ab} \\ \ddot{\theta}_{\rm at} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \left(\boldsymbol{F}^{\rm t} + \boldsymbol{F}^{\rm a} + \boldsymbol{F}^{\rm w} + \boldsymbol{F}_{\rm wm} + \boldsymbol{F}_{\rm bm}\right) \cdot \boldsymbol{e}_x \\ \left(\boldsymbol{F}^{\rm t} + \boldsymbol{F}^{\rm a} + \boldsymbol{F}^{\rm w} + \boldsymbol{F}_{\rm wm} + \boldsymbol{F}_{\rm bm} + \boldsymbol{F}_{\rm g}\right) \cdot \boldsymbol{e}_y \\ T^{\rm a} - K_{\rm ab}\theta_{\rm ab} - C_{\rm ab}\dot{\theta}_{\rm ab} + T^{\rm a}_{\rm g} \\ T^{\rm w} - K_{\rm at}\theta_{\rm at} - C_{\rm at}\dot{\theta}_{\rm at} + T^{\rm w}_{\rm g} \end{Bmatrix}, \tag{19}$$

ここで，左辺の 4 行 4 列の行列はこの系に対する質量マトリックスを表している．上付きドットは時間微分を表し，$\theta_{\rm ab}$ と $\theta_{\rm at}$ はそれぞれ，胸部と腹部，胸部と翼の相対角，$\boldsymbol{F}_{\rm wm}$ と $T_{\rm wm}$ はそれぞれ，質量がある翼が羽ばたくことによって胴体が受ける内力と内トルクを表している．また，$\boldsymbol{F}_{\rm bm}$ は胸部や腹部を振ることによって生じる内力を，$\boldsymbol{F}_{\rm g}$ や $T^{\rm a}_{\rm g}$，$T^{\rm w}_{\rm g}$ は重力によって生じる内力と内トルクを表している．$K_{\rm ab}$，$C_{\rm ab}$ は胸部と腹部，$K_{\rm at}$，$C_{\rm at}$ は胸部と翼の接合点に使用するバネのバネ定数，ダンパの減衰係数を表している．

また，この方程式系の支配パラメータは，Froude 数 Fr とモデル全体の無次元質量 $N_{\rm M}$，総質量に対する翼の質量比 WR，無次元バネ定数 $N^{\rm ab}_{\rm K}$，$N^{\rm at}_{\rm K}$，無次元減衰係数 $N^{\rm ab}_{\rm C}$，$N^{\rm at}_{\rm C}$ であり，以下のように定義する．なお，G は重力加速度であり，ここでは $G = 9.807$ [m/s^2] である．また，$M_{\rm w}$ は 2 枚分の翼の質量である．

$$Fr = \frac{U_{\rm ref}}{\sqrt{L_{\rm ref}G}}, \tag{20}$$

$$N_{\rm M} = \frac{M_{\rm t} + M_{\rm a} + M_{\rm w}}{\rho_{\rm f} L^3_{\rm ref}}, \tag{21}$$

$$WR = \frac{M_{\rm w}}{M_{\rm t} + M_{\rm a} + M_{\rm w}}, \tag{22}$$

$$N^{\rm ab}_{\rm K} = \frac{K_{\rm ab}}{\rho_{\rm f} U^2_{\rm ref} L^3_{\rm ref}}, \tag{23}$$

$$N^{\rm at}_{\rm K} = \frac{K_{\rm at}}{\rho_{\rm f} U^2_{\rm ref} L^3_{\rm ref}}, \tag{24}$$

$$N^{\rm ab}_{\rm C} = \frac{C_{\rm ab}}{\rho_{\rm f} U_{\rm ref} L^4_{\rm ref}}, \tag{25}$$

$$N^{\rm at}_{\rm C} = \frac{C_{\rm at}}{\rho_{\rm f} U_{\rm ref} L^4_{\rm ref}}. \tag{26}$$

以上より，系の支配パラメータは Reynolds 数 Re，Froude 数 Fr，無次元質量 $N_{\rm M}$，総質量に対する翼の質量比 WR，無次元バネ定数 $N^{\rm ab}_{\rm K}$，$N^{\rm at}_{\rm K}$，無次元減衰係数 $N^{\rm ab}_{\rm C}$，$N^{\rm at}_{\rm C}$ の 8 つである．翼–胴体モデルの自由運動を計算する際にはこの 8 つのパラメータを指定しなくてはならない．しかし，この 8 つのパラメータは独立に指定できるわけではなく，Re と Fr は以下のような関係を持つ．

$$\frac{Fr}{Re} = \frac{\nu}{\sqrt{L^3_{\rm ref}G}}. \tag{27}$$

式 (27) の右辺のうち，ν と G は物性値である．従って，Froude 数と Reynolds 数の比は，スケール $L_{\rm ref}$ を決定すれば一意に決定することに注意する．なお，本研究では $N^{\rm ab}_{\rm K} = 1.0$，$N^{\rm ab}_{\rm C} = 1.0$，$N^{\rm at}_{\rm C} = 0.0$ とし，翼基部に導入するバネのバネ定数と実効迎角の関係に注目する．

3.3. 胸部のピッチング角

本研究では，胸部のピッチング角 $\theta_{\rm pitch}$ を以下の式で与える．

$$\theta_{\rm pitch}(t) = \begin{cases} 0, & \left(0 \le t < \dfrac{T}{4}\right), \\ \alpha(t), & \left(t \ge \dfrac{T}{4}\right), \end{cases} \tag{28}$$

ここで，$\alpha(t)$ は以下の式で表され，$\alpha_{\rm m}$ は最大ピッチング角，γ は羽ばたき角とピッチング角の位相差である．

$$\alpha(t) = \frac{\alpha_{\rm m}}{2}\left[1 + \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \gamma\right)\right]. \tag{29}$$

本研究では，$\gamma = \pi/2$ とする．これは，Suzuki et al. [11] で用いられている $\alpha(t)$ を参考にしている．また，$\alpha_{\rm m}$ は Suzuki et al. [11] と同じ $\alpha_{\rm m} = 90^\circ$ と，それより小さい $\alpha_{\rm m} = 60^\circ$ を用

Table 1 Comparison of the model by Suzuki et al. [11] and the present model. The angle β denotes the effective angle of attack.

	3-2-1 Euler angle	θ_{pitch}	β
Suzuki et al.	$S_3(0)S_2(\alpha)S_1(-\theta)$	0	α
Present	$S_3(0)S_2(\theta_{\mathrm{at}})S_1(-\theta)$	given by Eq.(28)	$\theta_{\mathrm{pitch}}+\theta_{\mathrm{at}}$

いる．式（28）における時刻 $0 \le t/T < 1/4$ での値が 0 であるのは，もし 0 でなければ，質量のある翼が初期速度を持ってしまい，モデルが翼の質量に応じた初期運動量を持ってしまう．そのため本研究では，モデルや流体が静止した状態からの過渡的な運動を定量的に調査するために，初期状態において，モデルが完全に静止するようにしている．

3.4. モデルの比較

本研究では，Suzuki et al. [11] のモデルを拡張したモデルを使用することから，両モデルの違いについてまとめる．Table 1 にモデルの違いを示す．

Suzuki et al. [11] のモデルは，S_2 の回転角度を $\alpha(t)$ とすることで，翼の取付角を変化させているのに対し，本研究のモデルは，S_2 の回転角度を θ_{at} とし，取付角が受動的に変化する．

また，Suzuki et al. [11] のモデルは，胸部のピッチング角を 0 とすることで翼と胸部の取付角のみによって実効的な迎角が変化するようになっているのに対し，本研究のモデルは，式 (28) で表される胸部のピッチング角 θ_{pitch} に加え，取付角 θ_{at} によって実効的な迎角が変化するようになっている．これらの違いにより，Suzuki et al. [11] のモデルを実際の蝶に近づくように拡張している．

4. 数値計算法と計算条件

4.1. 数値計算法

本研究では，流体の方程式 (6), (7) の数値計算を行うため，埋め込み境界–格子ボルツマン法 [18] を用いた．埋め込み境界–格子ボルツマン法は直交格子上で移動境界を計算でき，かつ圧力の Poisson 方程式を解く必要がないため，計算効率の良い手法であり，蝶を模した三次元羽ばたき翼–胴体モデルの研究 [11,12,16,19]，蜻蛉を模した羽ばたき翼–胴体モデルの研究 [20,21] や 2 次元対称羽ばたき飛翔の研究 [22,23] にも用いられている．また，胴体の運動方程式の数値積分には，2 次精度の Adams–Bashforth 法を用いた．

翼上でのすべりなし条件は，境界近傍に適切な体積力を加えることにより，境界上でのすべりなし条件を満足させる埋め込み境界法を用いる．その体積力は，境界が周囲の流体から受ける力の反力を体積力として表したものであり，境界上でのすべりなし境界条件を満たすように決定される．なお，体積力の決定法は埋め込み境界法の種類によって異なるが，本研究では，パラメータ設定の必要がない Wang et al. [24] による Multi direct forcing method を用いる．

4.2. 計算条件

計算領域は，Fig. 4 に示すような $12L_{\mathrm{ref}} \times 12L_{\mathrm{ref}} \times 12L_{\mathrm{ref}}$ の直方体領域とする．領域の境界条件としては，x 軸に垂直な面は周期条件とし，それ以外の面はすべりなし条件とする．物理的にこの計算条件は無限に長いダクトの中をモデルが羽ばたいていることを意味する．初期においては，モデルの胸部中心は領域の中央 $(x_{\mathrm{t}},\ y_{\mathrm{t}},\ z_{\mathrm{t}}) = (0,\ 0,\ 0)$ に置かれ，領域内の流体およびモデルは静止状態とする．重力は $-y$ 方向に加わっているものとする．本計算において，すべての計算領域を高解像度で計算すると，計算負荷が大きくなってしまう．そこで，翼–胴体モデルの周りに 2 倍の解像度のマルチブロック格子を適用し，計算を行っている．マルチブロック格子の大きさは，$(4.5L_{\mathrm{ref}}\sin(\theta_{\mathrm{m}}) + 2.4L_{\mathrm{a}}) \times 4.5L_{\mathrm{ref}}\sin(\theta_{\mathrm{m}}) \times 4.5L_{\mathrm{ref}}$ としている．また，Table 2 に各 Reynolds 数の計算において用いた空間解像度，時間解像度，計算パラメータを示す．なお，計算（i）では fruit fly の Reynolds 数 $Re = 300$，計算（ii）では Pieris rapae の Reynolds 数 $Re = 1000$ で計算しており，翼質量 WR は実際の蝶を想定し $WR = 0.1$ とする．

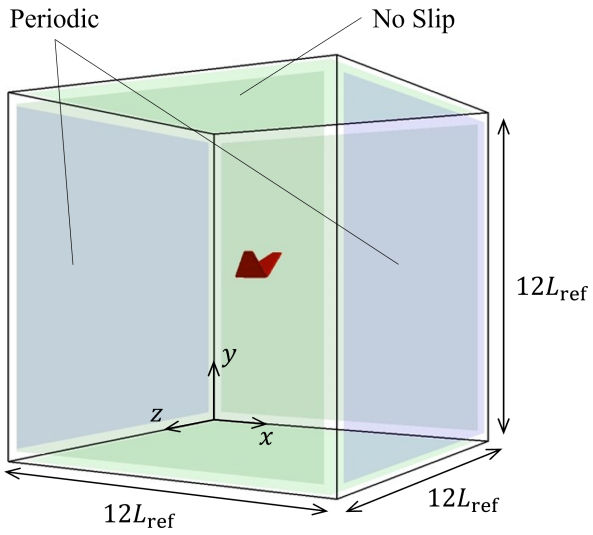


Fig. 4 Computational domain for free flight simulations of a butterfly-like 3D flapping wing–body model.

Table 2 Governing parameters and spatial and temporal resolutions.

Re	Fr	N_{M}	WR	L_{ref}	T
300	8.82	38	0.1	$50\Delta x$	$6000\Delta t$
1000	2.87	5.03	0.1	$120\Delta x$	$12000\Delta t$

5. 計算結果と考察

5.1. fruit fly のパラメータを用いた自由飛翔

本節では，計算負荷が小さい fruit fly のパラメータを使用し，翼基部にバネを導入することによる実効迎角への影響の調査，継続的な自由飛翔の可能性の検証を行う．本研究におけるモデルと翼基部を固定したモデル（$N_{\mathrm{K}}^{\mathrm{at}} \to \infty$ に相当，以下，Rigid model と呼ぶ）による胸部中心の軌跡を示す．胸部の最大ピッチング角 $\alpha_{\mathrm{m}} = 60°$ での結果を Fig. 5(a) に，$\alpha_{\mathrm{m}} = 90°$ での結果を Fig. 5(b) に示す．これより，$N_{\mathrm{K}}^{\mathrm{at}}$ によって飛翔形態が異なり，$N_{\mathrm{K}}^{\mathrm{at}}$ が小さすぎると落下し，適切な $N_{\mathrm{K}}^{\mathrm{at}}$ においては安定した自由飛翔ができることが確認できる．また，Rigid model と比較すると，$N_{\mathrm{K}}^{\mathrm{at}} = 14.0$ では前進・上昇距離ともに向上し，$N_{\mathrm{K}}^{\mathrm{at}} = 30.0$ においては同程度となることがわかる．

さらに，翼基部の無次元バネ定数 $N_{\mathrm{K}}^{\mathrm{at}}$ と $2.0 \leq t/T \leq 7.0$ における飛翔距離の平均値の関係を Fig. 5(c) に示す．これより，$\alpha_{\mathrm{m}} = 60, 90°$ ともに $N_{\mathrm{K}}^{\mathrm{at}} = 4.0, 14.0$ で 2 つのピークがあることがわかる．また，$\alpha_{\mathrm{m}} = 90°$ での結果では，飛翔距離は $N_{\mathrm{K}}^{\mathrm{at}}$ が大きくなるにつれて $N_{\mathrm{K}}^{\mathrm{at}} \to \infty$ の結果に収束していくことが確認できる．これは $N_{\mathrm{K}}^{\mathrm{at}}$ が大きくなることで，取付角があまり変化せず，モデルが $N_{\mathrm{K}}^{\mathrm{at}} \to \infty$ の場合と近い運動をするためだと考えられる．なお，図には記載していないが，$\alpha_{\mathrm{m}} = 60°$ の結果でも同様である．

興味深いことに，$N_{\mathrm{K}}^{\mathrm{at}} = 14.0$，$\alpha_{\mathrm{m}} = 60°$ での結果は，$\alpha_{\mathrm{m}} = 90°$ の Rigid model の結果よりも上昇距離は小さいものの，前進距離は大きくなっている．このことをより詳細に調べるために，$N_{\mathrm{K}}^{\mathrm{at}} = 14.0$，$\alpha_{\mathrm{m}} = 60°, 90°$ の実効迎角と推力・揚力を Rigid model，$\alpha_{\mathrm{m}} = 90°$ と比較する．

$2.0 \leq t/T \leq 3.0$ におけるモデルの胸部のピッチング角 θ_{pitch} と実効迎角 β の時間変化を Fig. 6(a) に示す．網掛け部分は翼の振り下ろし，網掛けのない部分は振り上げを表す．各モデルの自由飛翔の様子を Fig. 6(b) に示す．Fig. 6 より，モデルは θ_{pitch} に加え，翼と胸部の取付角を変化させ，より大きな β を達成していることがわかる．また，$\alpha_{\mathrm{m}} = 90°$ での本モデルと Rigid model の自由飛翔の様子を比較しても，本モデルはより大きな β を達成しながら羽ばたいていることが確認できる．

Fig. 7 に翼基部の無次元バネ定数 $N_{\mathrm{K}}^{\mathrm{at}} = 14.0$ での $2.0 \leq t/T \leq 3.0$ における推力係数 C_{T}，揚力係数 C_{L} の時間変化を示す．なお，C_{T}，C_{L} を以下のように定義し，F_x，F_y はそれぞれモデルに加わる x 方向，y 方向の流体力とする．

$$C_{\mathrm{T}} = \frac{F_x}{0.5\rho_{\mathrm{f}} U_{\mathrm{ref}}^2 L_{\mathrm{ref}}^2}, \tag{30}$$

$$C_{\mathrm{L}} = \frac{F_y}{0.5\rho_{\mathrm{f}} U_{\mathrm{ref}}^2 L_{\mathrm{ref}}^2}. \tag{31}$$

Fig. 7 より，本モデルは Rigid model と比較してより大きな C_{T}，C_{L} のピークがあることがわかる．また，カーブの形も

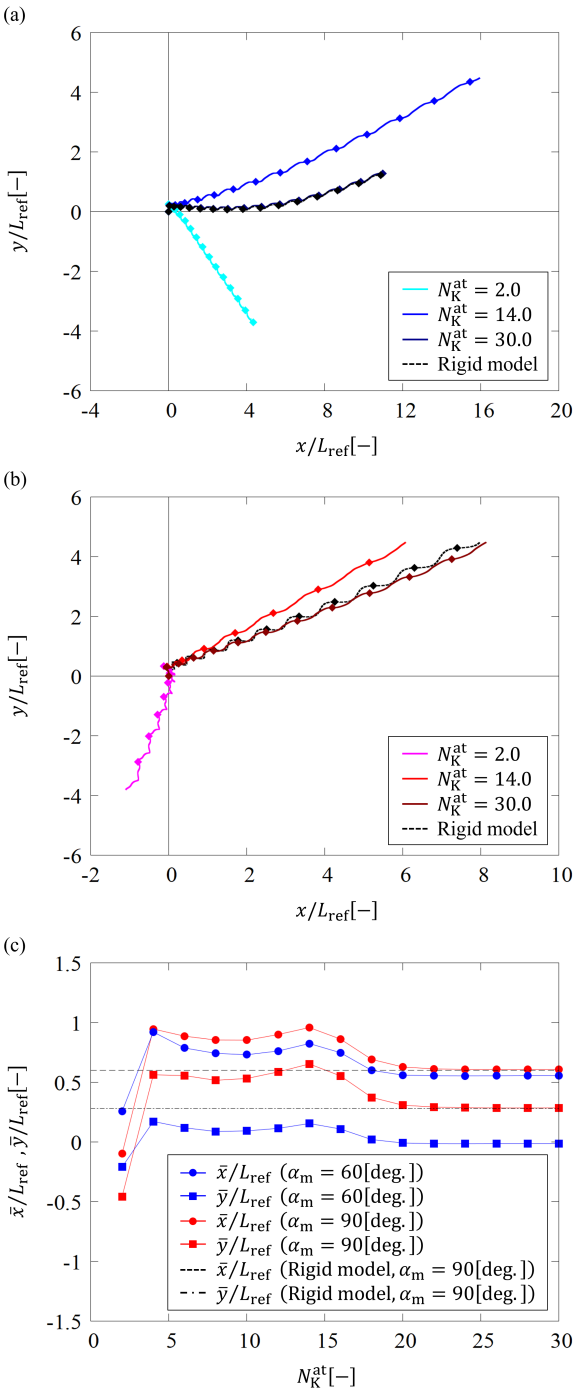


Fig. 5 Trajectories of the center of mass (COM) of the thorax: (a) $\alpha_{\mathrm{m}} = 60°$; (b) $\alpha_{\mathrm{m}} = 90°$. The initial position of the COM is denoted by $(x/L_{\mathrm{ref}}, y/L_{\mathrm{ref}}) = (0, 0)$, and the symbols on the trajectory indicate the position of the COM when the wings are at top dead point. (c) Relationship between the flying distance of the model averaged over $2.0 \leq t/T \leq 7.0$ and the spring constant $N_{\mathrm{K}}^{\mathrm{at}}$ for the wing root flexibility.

Rigid model と大きく異なっており，これは実効迎角の変化によるものだと考えられる．Fig. 6(b) の $t/T = 2.2$ を見る

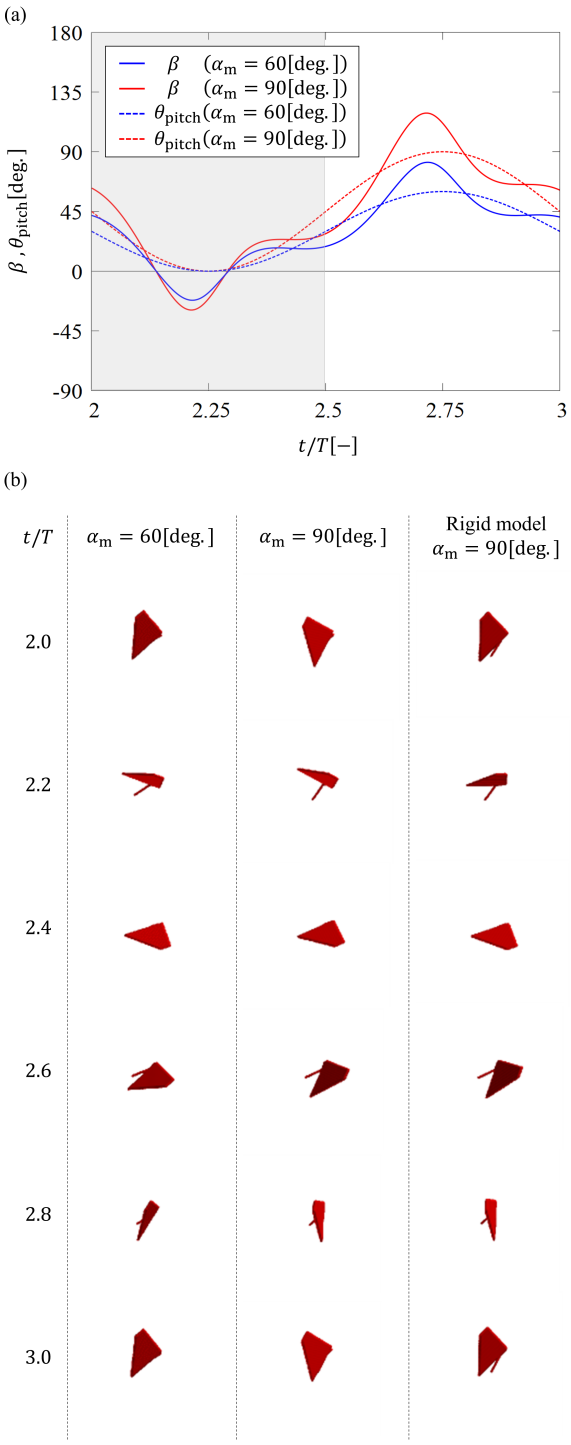


Fig. 6 (a) Time variations of the effective angle of attack and the pitching angle of the thorax for $N_{\mathrm{K}}^{\mathrm{at}} = 14.0$ and $2.0 \leq t/T \leq 3.0$; (b) snapshots of the wing–body model viewed from the right side of the model.

と，Rigid model は翼を真下に振り下ろしているのに対し，本モデルは $\alpha_{\mathrm{m}} = 60, 90^{\circ}$ ともに翼を振り下ろす方向がやや後ろ向きになっている．このため，正の推力が発生し，振り下ろしの際にも C_{T} に小さなピークがみられると考えられる．振り上げの際は，α_{m} により挙動が異なる．Fig. 6(b) の

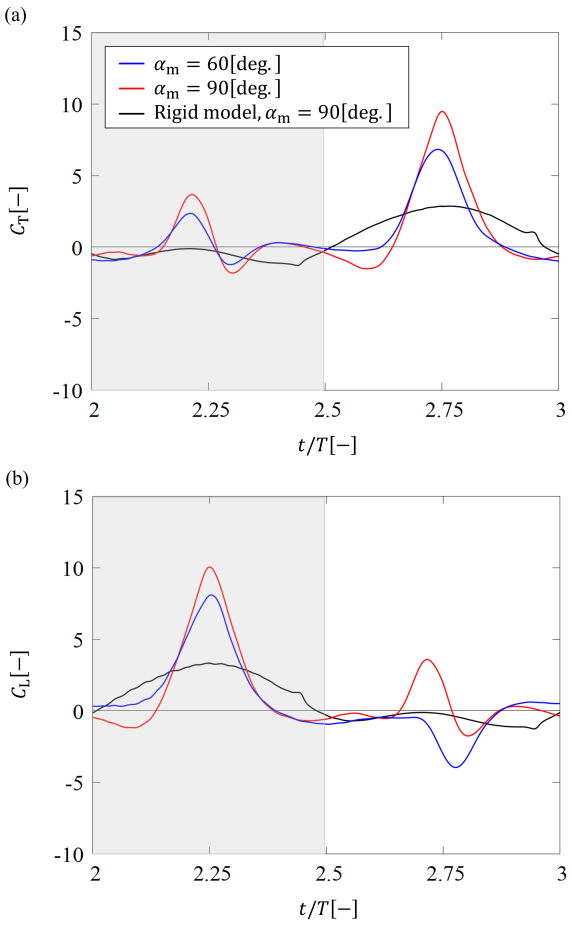


Fig. 7 Time variations of (a) the thrust cofficient C_{T} and (b) the lift cofficient C_{L} for $N_{\mathrm{K}}^{\mathrm{at}} = 14.0$.

$t/T = 2.8$ を見ると，$\alpha_{\mathrm{m}} = 90^{\circ}$ では翼を真後ろに振り上げているが，$\alpha_{\mathrm{m}} = 60^{\circ}$ ではやや上向きに振り上げている．このため，負の揚力が発生し，$\alpha_{\mathrm{m}} = 60^{\circ}$ での飛翔では振り上げ時に揚力に負のピークがみられると考えられる．以上より，Fig. 5 のように，$\alpha_{\mathrm{m}} = 60, 90^{\circ}$ ともに Rigid model よりも大きく前進しているが，上昇距離において $\alpha_{\mathrm{m}} = 60^{\circ}$ では Rigid model よりも小さくなっていると考えられる．

5.2. Pieris rapae のパラメータを用いた自由飛翔

本節では，計算パラメータ (Reynolds 数等) を実際の蝶 (Pieris rapae) を想定したパラメータに変更し，自由飛翔における影響を調べる．本研究におけるモデルと Rigid model による胸部中心の軌跡を示す．胸部の最大ピッチング角 $\alpha_{\mathrm{m}} = 60^{\circ}$ での結果を Fig. 8(a) に，$\alpha_{\mathrm{m}} = 90^{\circ}$ での結果を Fig. 8(b) に示す．なお，翼基部の無次元バネ定数は $N_{\mathrm{K}}^{\mathrm{at}} = 0.27, 1.85, 3.98$ とする．この値は，Fig. 3 に示した台形翼の翼基部回りの固有角振動数と羽ばたき周波数の比が，fruit fly のパラメータにおける $N_{\mathrm{K}}^{\mathrm{at}} = 2.0, 14.0, 30.0$ と同程度になるように設定する (付録 A 参照)．Fig. 8 を見ると，fruit fly の結果と同様に，$N_{\mathrm{K}}^{\mathrm{at}}$ によって飛翔形態が異なることが確認できる．また，Fig. 5 の fruit fly の結果と比較して，胸部の重心が大きく上下に揺れていることがわかる．これは，流体の質量に比べ，

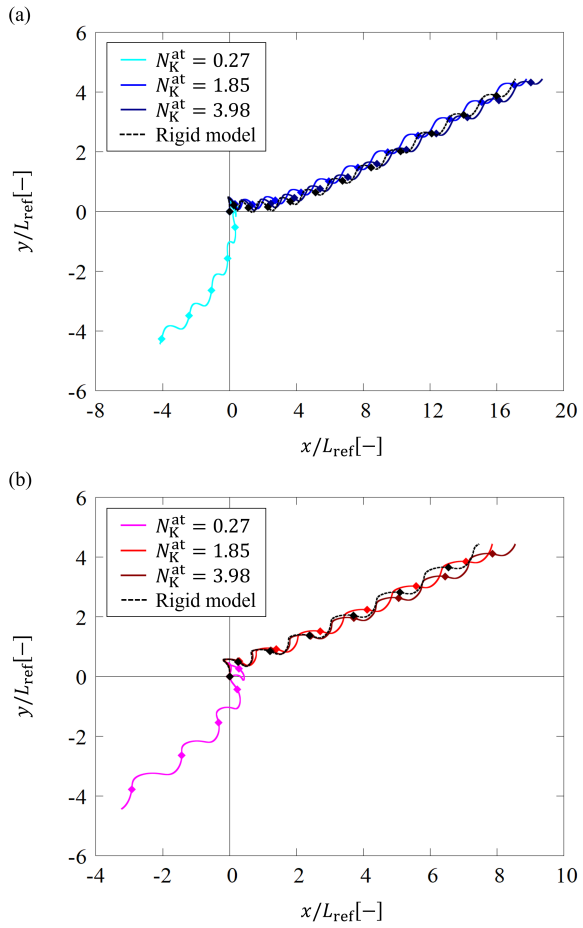


Fig. 8 Trajectories of the center of mass (COM) of the thorax: (a) $\alpha_m = 60°$; (b) $\alpha_m = 90°$. The initial position of the COM is denoted by $(x/L_{ref}, y/L_{ref}) = (0, 0)$, and the symbols on the trajectory indicate the position of the COM when the wings are at top dead point.

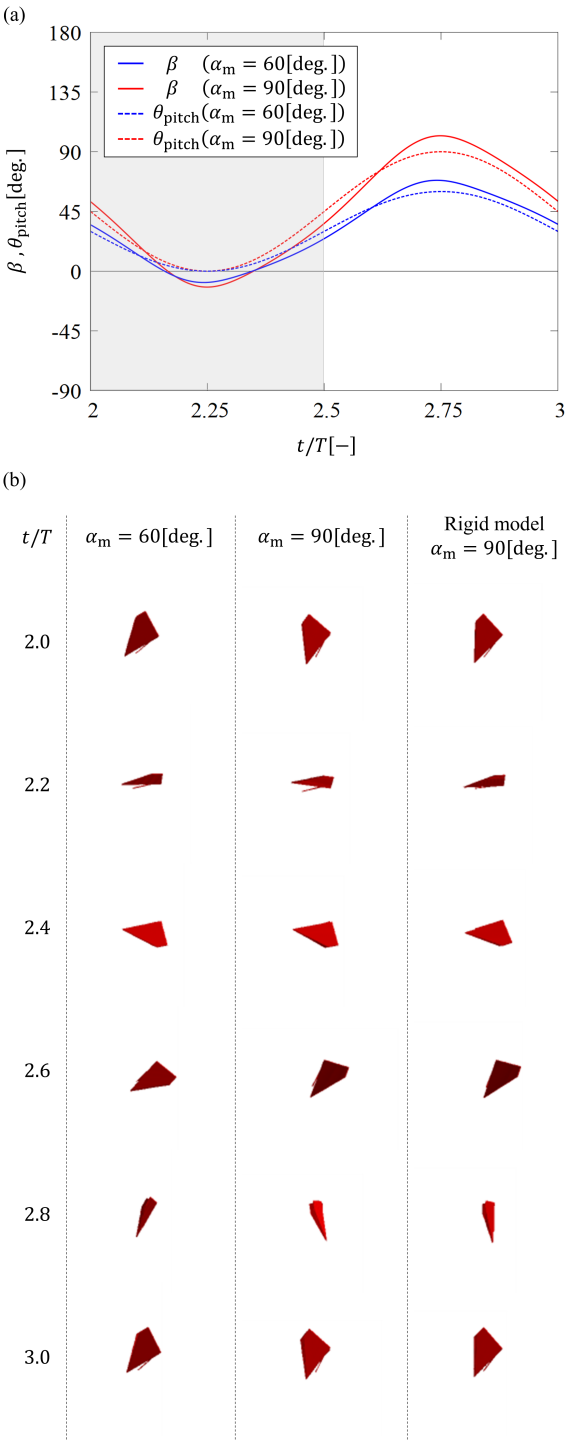


Fig. 9 (a) Time variations of the effective angle of attack and the pitching angle of the thorax for $N_K^{at} = 1.85$ and $2.0 \leq t/T \leq 3.0$; (b) snapshots of the wing–body model viewed from the right side of the model.

モデルの質量が比較的小さいため，翼を振り上げたり振り下ろしたりする際の胴体の移動距離が大きくなることが原因であると考えられる．また，Rigid model と比較すると，本モデルは $N_K^{at} = 1.85$ において前進・上昇距離ともに向上していることがわかる．これより，fruit fly の結果と同様，翼基部にバネを導入することでモデルの飛翔距離が向上することがわかった．

$2.0 \leq t/T \leq 3.0$ における翼基部の無次元バネ定数 $N_K^{at} = 1.85$ でのモデルの胸部のピッチング角 θ_{pitch} と実効迎角 β の時間変化を Fig. 9(a) に示す．胸部の最大ピッチング角 $\alpha_m = 60, 90°$ での本モデル，および Rigid model の自由飛翔の様子を Fig. 9(b) に示す．Fig. 9 を見ると，モデルは θ_{pitch} に加え，翼と胸部の取付角を変化させ，より大きな β を達成していることがわかる．しかし，Fig. 6 の fruit fly の結果と比較すると，Pieris rapae の場合は取付角の変化が小さく，θ_{pitch} と β の差も小さくなっている．これは胴体の振動による翼端速度の減少に伴い，翼に対する抗力が小さくなったことが原因だと考えられる．

Fig. 10 に翼基部の無次元バネ定数 $N_K^{at} = 1.85$ での $2.0 \leq t/T \leq 3.0$ における推力係数 C_T，揚力係数 C_L の時間変化を示す．Fig. 7 の fruit fly の結果と比較して，Pieris rapae の場合は C_T，C_L ともに小さくなっている．これも胴体の振動に

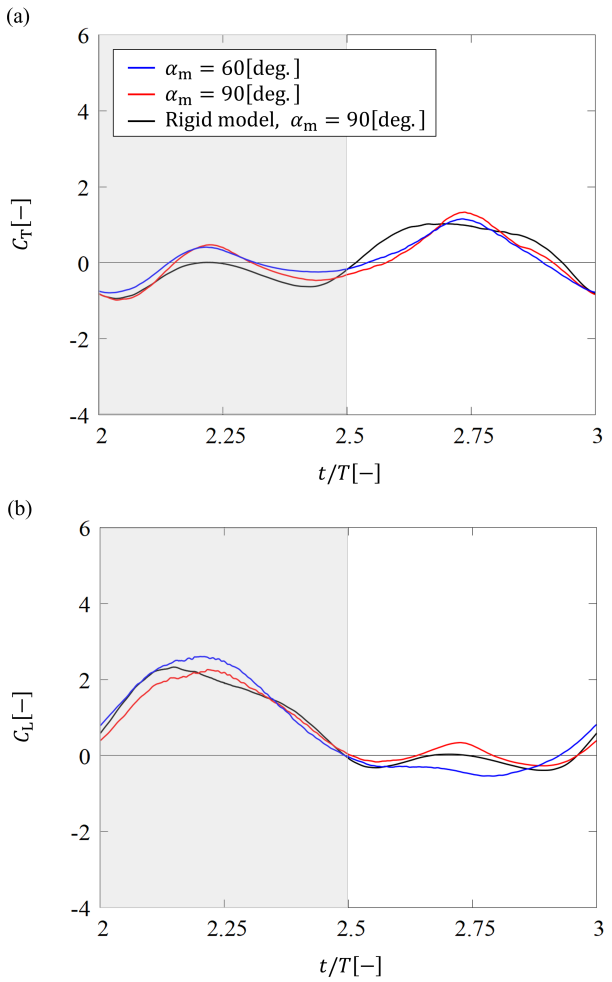


Fig. 10 Time variations of (a) the thrust coffi-cient C_T and (b) the lift cofficient C_L for $N_K^{at} = 1.85$.

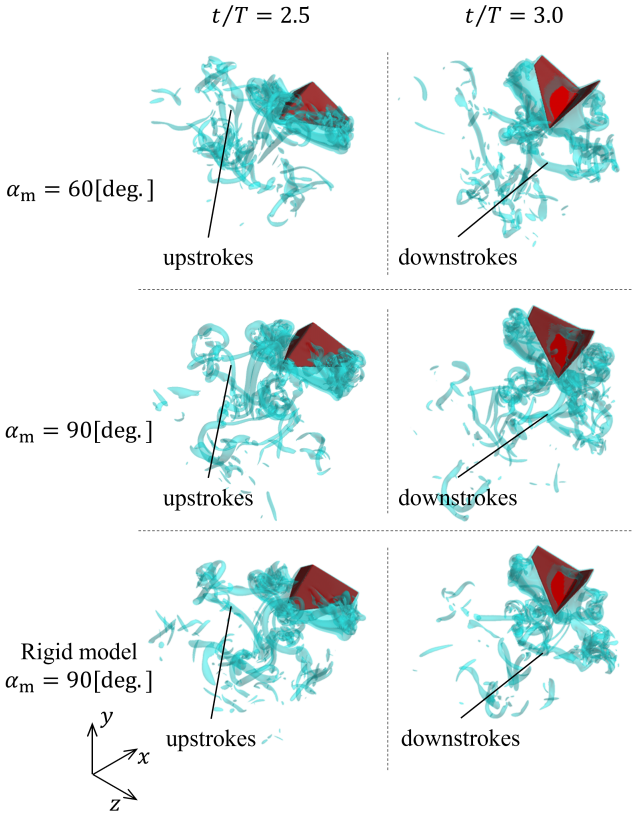


Fig. 11 Vortex structures ($|\nabla \times \boldsymbol{u}| = 10.0U_{ref}/L_{ref}$) around the present model at $t/T = 2.5$ and 3.0.

よる翼端速度の減少が原因であると考えられる．また，胸部の最大ピッチング角 $\alpha_m = 60°$ での飛翔と $\alpha_m = 90°$ での飛翔で比較すると，C_T に関しては大きな違いはみられなかった．C_L に関しては $\alpha_m = 60°$ での飛翔の方が $\alpha_m = 90°$ での飛翔より大きなピークを持つことがわかった．しかし，fruit fly の結果と同様，振り上げの際に負の C_L が発生するため，上昇距離は伸びていないと考えられる．

Fig. 11 に Pieris rapae のパラメータを使用した自由飛翔時の渦の可視化を示す．Fig. 11 より渦は翼の振り下ろし時には，蝶の下方向に剥離し，翼の振り上げ時には蝶の後方に剥離している．胸部の最大ピッチング角 $\alpha_m = 60°$ では $\alpha_m = 90°$ での飛翔に比べて，翼の振り上げ時の渦の剥離がやや上向きになっており，このことからも振り上げ時の揚力低下が説明できる．しかし，いずれの結果も剥離した渦は，渦輪として後方へ流れていき，実際の蝶を用いた可視化実験 [26] と同様に，振り下ろしにより生じた渦輪は地面に平行，振り上げにより生じた渦輪は地面に垂直となっている．以上より，振り下ろし時に揚力，振り上げ時に推力を発生させる渦の剥離の仕方をしている．

このことから，実際の蝶の計算パラメータに変更しても安定して飛翔でき，推力・揚力が向上することがわかった．今後，腹部の相対角による胸部のピッチング制御を加え，より実際の蝶に近づけることが課題である．

6. おわりに

蝶を模した羽ばたき翼–胴体モデルにおいて，翼基部の筋肉をねじりバネとして単純化し，翼と胸部の取付角が受動的に変化するモデルを構築し，自由飛翔の数値計算を行い，胸部のピッチング運動に対する翼基部の柔軟性が飛翔に与える影響を調査した．

まず，翼基部にねじりバネを導入し，翼と胴体の取付角が変化するモデルを用いて，fruit fly を想定したパラメータ ($Re = 300$) に対して計算を行った．その結果，適した柔軟性に対して，推力・揚力が向上することがわかった．

次に，Pieris rapae を想定した計算パラメータに変更し，$Re = 1000$ に対して計算を行った．その結果，実際の蝶に近づけた場合でも，翼基部の柔軟性によって，実効的な迎角が増加し，推力・揚力が向上することがわかった．

今後の課題としては，腹部の相対角による胸部のピッチング制御を加え，より実際の蝶に近づけることが挙げられる．

謝辞

本研究は名古屋大学のスーパーコンピュータ「不老」のHPCI利用制度（課題番号：hp220037）を利用して実施した．

信州大学大学院の石崎攻氏（現所属：スズキ株式会社）に翼基部を固定したモデルに関するプログラムの提供を受けました．

付録 A　蝶のパラメータにおける翼基部のバネの選定

羽ばたき運動中における翼基部の柔軟性とバネ定数の関係はモデルの翼基部回りの固有角振動数と羽ばたき周波数によって変化する．そこで，本研究ではPieris rapaeのパラメータを用いたモデルにおける翼基部のバネ定数を決定する際，モデルの翼基部回りの固有角振動数と羽ばたき周波数の比を用いる．

本モデルにおける羽ばたき周波数 ω_{f} は以下の式で与えられる．

$$\omega_{\mathrm{f}} = \frac{2\pi}{T}. \tag{32}$$

また，翼の固有角振動数 ω_{n} は翼基部回りの慣性モーメント I_{w} を用いて以下の式で表される．

$$\omega_{\mathrm{n}} = \sqrt{\frac{K_{\mathrm{at}}}{I_{\mathrm{w}}}}, \tag{33}$$

ここで，I_{w} は

$$\begin{aligned} I_{\mathrm{w}} = \frac{1}{12L_{\mathrm{tip}} + 12L_{\mathrm{root}}} \Bigg[M_{\mathrm{w}} \Bigg\{ & 12\left(L_{\mathrm{root}} + L_{\mathrm{tip}}\right)\left(L_{\mathrm{t}} - l_0\right)^2 \\ & - 4\left({L_{\mathrm{root}}}^2 + L_{\mathrm{root}}L_{\mathrm{tip}} - 2{L_{\mathrm{tip}}}^2\right)\left(L_{\mathrm{t}} - l_0\right) \\ & + {L_{\mathrm{root}}}^3 + {L_{\mathrm{root}}}^2 L_{\mathrm{tip}} - 2L_{\mathrm{root}}{L_{\mathrm{tip}}}^2 + 2{L_{\mathrm{tip}}}^3 \\ & + {L_{\mathrm{w}}}^2\left(L_{\mathrm{root}} + 3L_{\mathrm{tip}}\right)\left(1 - \cos\left(2\theta(t)\right)\right) \Bigg\} \Bigg], \end{aligned} \tag{34}$$

で表される．なお，L_{t}, l_0 は2.1節で，L_{tip}, L_{root}, L_{w} は2.2節で，θ は2.3節で，M_{w} は3.2節で定義されているものと同じものを用いる．この値はモデルの羽ばたき角 θ によって変化するので，本研究では I_{w} の1周期での時間平均 $\bar{I}_{\mathrm{w}}$ を用いる．以上より，固有角振動数と羽ばたき周波数の比は以下の式で表される．

$$\frac{\omega_{\mathrm{f}}}{\omega_{\mathrm{n}}} = \frac{2\pi}{T}\sqrt{\frac{\bar{I}_{\mathrm{w}}}{K_{\mathrm{at}}}}. \tag{35}$$

この値がfruit flyのパラメータとPieris rapaeのパラメータで一致するようにバネ定数を決定する．

参考文献

(1) Ma, K. Y., Chirarattananon, P., Fuller, S. B. and Wood, R. J. : Controlled flight of a biologically inspired, insect-scale robot, Science, **340**(2013), pp. 603–606.

(2) Ristroph, L. and Childress, S. : Stable hovering of a jellyfish-like flying machine, J. R. Soc. Interface, **11**(2014), 20130992 (7pp).

(3) Chen, Y., Zhao, H., Mao, J., Chirarattananon, P., Helbling, E. F., Hyun, N. P., Clarke, D. R. and Wood, R. J. : The first controlled flight of a microrobot powered by soft artificial muscles, Nature, **575**(2019), pp. 324–329.

(4) 飯間信：昆虫飛翔の物理, 物性研究, **77**(2001), pp. 447–503.

(5) Dudley, R. : The biomechanics of insect flight, Princeton Univercity Press, (2000).

(6) Weis-Fogh, T. : Quick estimates of flight fitness in hovering animals, including novel mechanisms for lift production, J. Exp. Boil., **59**(1973), pp. 169–230.

(7) Lighthill, J. : On the Weis-Fogh mechanism of lift generation, J. Fluid Mech., **60**(1973), pp. 1–17.

(8) Dickinson, M. H., Lehmann, F-O. and Sane, S. P. : Wing rotation and the aerodynamic basis of insect flight, Science, **284**(1999), pp. 1954–1960.

(9) Liu, H. and Kawachi, K. : A numerical study of insect flight, J. Comput. Phys., **146**(1998), pp. 124–156.

(10) Gao, N., Aono, H. and Liu, H. : Perturbation analysis of 6DoF flight dynamics and passive dynamic stability of hovering fruit fly Drosophila melanogaster, J. Theor. Biol., **270**(2011), pp. 98–111.

(11) Suzuki, K., Minami, K. and Inamuro, T. : Lift and thrust generation by a butterfly-like flapping wing–body model: immersed boundary–lattice Boltzmann simulations, J. Fluid Mech., **767**(2015), pp. 659–695.

(12) Nakatani, Y., Suzuki, K. and Inamuro, T. : Flight control simulations of a butterfly-like flapping wing–body model by the immersed boundary–lattice Boltzmann method, Comput. Fluids, **133**(2016), pp. 103–115.

(13) Senda, K., Obara, T., Kitamura, M., Yokoyama, N., Hirai, N. and Iima, M. : Effects of structual flexibility of wings in flapping flight of butterfly, Bioinspir. Biomim., **7**(2012), 025002 (15pp).

(14) Obara, Y. and Nakagoshi, M. : Studies on the mating behavior of the cabbage white butterfly, *Pieris rapae crucivora* boisduval. IV. Anatomical identification of the muscles responsible for the mate-refusal posture, Zoological Magazine, **83**(1974), pp. 231–242.

(15) Obara, Y. : Mating behavior of the cabbage white butterfly, *Pieris rapae crucivora* VI. Electrophysiological decision of muscle functions in wing and abdomen movements and muscle output patterns during flight, J. comp. Physiol., **102**(1975), pp. 189–200.

(16) Suzuki, K. and Yoshino, M. : Numerical simulations for aerodynamic performance of a butterfly-like flapping wing–body model with various wing planforms, Commun. Comput. Phys., **23**(2018), pp. 951–979.

(17) Suzuki, K. and Yoshino, M. : A trapezoidal wing equivalent to a Janatella leucodesma's wing in terms of aerodynamic performance in the flapping flight of a butterfly model, Bioinsp. Biomim., **14**(2019), 036003 (15pp).

(18) Suzuki, K. and Inamuro, T. : Effect of internal mass in the simulation of a moving body by the immersed boundary method, Comput. Fluids, **49**(2011), pp. 173–187.

(19) Suzuki, K., Okada, I. and Yoshino, M. : Effect of wing mass on free flight of a butterfly-like model using immersed boundary–lattice Boltzmann simulations, J. Fluid Mech., **877**(2019), pp. 614–647.

(20) Minami, K., Suzuki, K. and Inamuro, T. : Free flight simulations of a dragonfly-like flapping wing–body model using the immersed boundary–lattice Boltzmann method, Fluid Dyn. Res., **47**(2015), 015505 (17pp).

(21) Hirohashi, K. and Inamuro, T. : Hovering and targeting flight simulation of a dragonfly-like flapping wing–body model by the immersed boundary–lattice Boltzmann method, Fluid Dyn. Res., **49**(2017), 045502 (16pp).

(22) Ota, K., Suzuki, K. and Inamuro, T. : Lift generation by a two-dimensional symmetric flapping wing: immersed boundary–lattice Boltzmann simulations, Fluid Dyn. Res., **44**(2012), 045504 (27pp).

(23) Suzuki, K., Aoki, T. and Yoshino, M. : Effect of wing mass in free flight of a two-dimensional symmetric flapping wing–body model, Fluid Dyn. Res., **49**(2017), 055504 (17pp).

(24) Wang, Z., Fan, J. and Luo, K. : Combined multi-direct forcing and immersed boundary method for simulating flows with moving particles, Int. J. Multiphase Flow, **34**(2008), pp. 283–302.

(25) 稲室隆二, 吉野正人, 鈴木康祐 : 格子ボルツマン法入門 –複雑境界および移動境界流れの数値計算法–, 丸善出版 (2020), pp. 52–58.

(26) Johansson, L. C. and Henningsson, P. : Butterflies fly using efficient propulsive clap mechanism owing to flexible wings, J. R. Soc. Interface, **18**(2021), 20200854 (10pp) .

計算数理工学論文集 Vol. 22 (2022 年 12 月)，論文 No. 06-221216 JASCOME

壁面から飛び立つ蝶の方向転換時における飛翔解析：計測実験とCFDシミュレーション

FLIGHT ANALYSIS OF A BUTTERFLY FLYING AWAY FROM A WALL WHILE CHANGING ITS FLIGHT DIRECTION : MEASUREMENT EXPERIMENTS AND CFD SIMULATIONS

木村　晃樹 [1)]，小澤 俊哉 [2)]，糀　真哉 [3)]，鈴木　康祐 [4)]，吉野　正人 [5)]

Koki KIMURA, Shunya OZAWA, Masaya KOUJI, Kosuke SUZUKI and Masato YOSHINO

1) 信州大学大学院総合理工学研究科 (〒 380-8553 長野県長野市若里 4-17-1, E-mail: 21w4029a@shinshu-u.ac.jp)
2) 信州大学大学院総合理工学研究科 (〒 380-8553 長野県長野市若里 4-17-1, E-mail: 22w4020a@shinshu-u.ac.jp)
3) 信州大学大学院総合理工学研究科 (〒 380-8553 長野県長野市若里 4-17-1, E-mail: 20w4021a@shinshu-u.ac.jp)
4) 信州大学学術研究院工学系 (〒 380-8553 長野県長野市若里 4-17-1, E-mail: kosuzuki@shinshu-u.ac.jp)
5) 信州大学学術研究院工学系 (〒 380-8553 長野県長野市若里 4-17-1, E-mail: masato@shinshu-u.ac.jp)

The motion of a cabbage white butterfly flying away from a wall while changing its flight was measured, and numerical simulations were performed using a computational model reflecting its motion. Firstly, the motions of the monitor points on the butterfly's wing and body were measured, and time series data of yawing angle, pitching angle, rolling angle, flapping angle, abdominal angle, angle of attack, and lead–lag angle were obtained. As a result, when the butterfly turned rightward, the lead–lag angle of the left wing increased, and the angle of attack of the right wing increased. Secondly, a computational model reflecting the measured motion was constructed to calculate the flow field. As a result, wing-tip and leading-edge vortices were formed on the wings of the butterfly model, and they were released in the direction opposite to the direction of motion. Thirdly, the aerodynamic and inertial torques of the left and right wings were calculated. The results showed that the symmetry of the aerodynamic and inertial torques of the left and right wings was greatly broken during the change of direction. In other words, the butterfly rotates its body and changes the direction with asymmetric aerodynamic and inertial torques of its left and right wings.

Key Words: Flapping Flight, Butterfly, Turning Flight, Lattice Boltzmann Method, Immersed Boundary Method

1. はじめに

蝶や蝿といった昆虫の羽ばたき飛翔は，生物学においてだけでなく，航空力学においても興味深い問題である．近年では，羽ばたき飛翔は，垂直離着陸や空中停止飛行（ホバリング）が可能であり，急旋回や急発進，急停止等の運動特性に優れているという点から，超小型飛翔体（Micro Air Vehicle, MAV）の推進機構の一つとして注目されている．実際に最近では，羽ばたき運動を利用した MAV[(1)] や，トンボの動きを参考にして羽ばたく MAV[(2)] がホバリングするのに安定した力を生み出せることが報告されており，羽ばたき飛翔の MAV への応用が盛んになってきている．このような工学的応用が，昆虫の羽ばたき運動を研究する大きな動機付けの一つとなっている．

特に，蝶は他の昆虫（蝿や蜂など）とは異なり，ひらひらとした不規則で不安定な飛翔をしている．これは，蝶が不安定な姿勢から素早く姿勢を回復する優れた姿勢制御能力を有していることを意味しており，飛翔メカニズムを解明することで MAV の発展に役立つと考えられる．このメカニズム解明のため，実験による計測と計算モデルを用いた数値計算がいくつか行われている．Bimbard et al.[(3)] は飛び立つ蝶の動きを計測し，胴体中心の座標変位から蝶に加わる力を計算した．さらに，羽ばたく動きを実際の蝶を模した翼形状の剛

2022 年 10 月 27 日受付，2022 年 11 月 14 日受理

体翼 2 枚で構成されるモデルに強制させ，運動方程式を解くことで蝶に加わる力を求めた．この 2 つを比較することで飛び立ち時に羽ばたきで生じる流体力だけでなく，足の力も働いていると考えた．Suzuki et al.[4] は水平面からの飛び立ち時における自由飛翔する蝶の動きを計測し，蝶の計算モデルを構築した．このモデルは胴体と翼の慣性力が考慮されており，胴体中心の位置だけでなく姿勢も計算することができる．これにより測定した関節の動きを反映させて計算を行うと，飛び立ち後 1 周期の間は実験で得られた軌跡や姿勢とおおよそ一致した．このように水平面からの飛び立ちや，水平飛翔の研究は盛んに行われている．また，Bode-Oke and Dong[5] は，壁面から飛び立ち，後方飛翔する蝶を対象に測定実験をした．計測結果を基に，移動距離や推力，揚力を求めた．また渦の可視化を行い，蝶の前進飛翔時との比較を行った．しかし，いずれの研究も方向転換については調べていない．方向転換は運動の自由度が高いため，観測やモデル化が難しく，非常にチャレンジングな課題である．

そこで本研究では，壁面から飛び立つ蝶の方向転換時の飛翔について詳細に調べるために，自由飛翔する蝶の動きを計測する．そしてその動きを反映させた数値モデルを構築し，実現象を理解することを目的とする．

本研究ではまず，実験により壁面から飛び立つ蝶の方向転換時の動きを計測し，特徴点の三次元座標の時間変化について調べる．次に，測定した蝶の大きさや翼形状から蝶を模した計算モデルを構築し，数値計算を行う．これより，実験より得た蝶の関節の動きを用いて，渦の可視化を行い，羽ばたく動きとの関係性を調べる．

2. 実験対象および実験方法

2.1. 実験対象

本研究では 2021 年 10 月 21 日に長野県長野市の裾花川近辺で捕獲したモンシロチョウ（*Pieris rapae*）を実験対象とした．理由は，モンシロチョウが日本で長期間生息しており捕獲しやすいことと羽が白く翼の輪郭を捉えやすいためである．Table 1 に本実験で用いた個体の蝶のパラメータと実験環境の物性値を示す．個体の質量比に関しては実際の蝶の質量を測定している Suzuki et al.[4] の値を参考にした．

2.2. 実験装置

実験装置は，Fig. 1 に示すように，段ボール製の箱（535 × 370 × 425 mm^3），段ボール製の台，3 台のハイスピードカメラ（DITECT，HAS-U2，1000 fps），三脚（SLIK，U9800），電球（60 W）により構成される．段ボール製の箱は二面を切り抜き，切り抜いた面を透明なアクリル板で塞ぎ，アクリル板を通して蝶の撮影を行った．また，蝶を見やすくするため，箱の内側には白色の模造紙をはり，電球の光を反射させた．

2.3. 実験方法

2.3.1. カメラキャリブレーション

蝶を撮影する前に，直方体キャリブレータ（DITECT）を用いて，カメラのキャリブレーションを行う．直方体キャリブレータには 8 点のコントロールポイントがあり，それぞれ

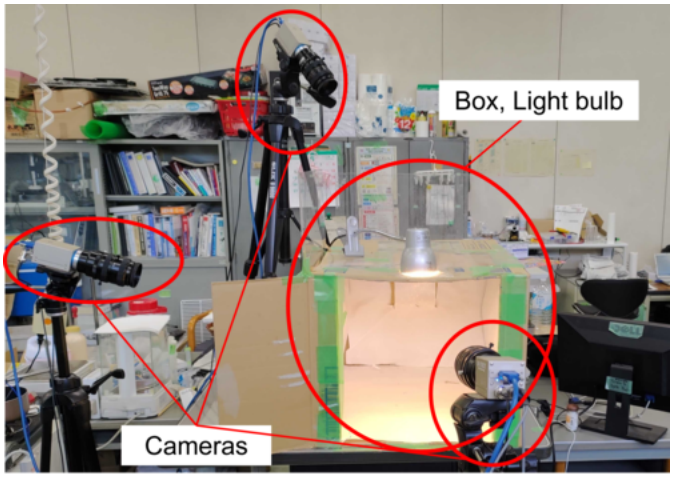


Fig. 1　Experimental appartus.

Table 1　Physical properties of a butterfly and experiment environment.

Variable	Symbol	Unit	Value
Wing length	L	m	18.3×10^{-3}
Thorax length	l_{th}	m	4.6×10^{-3}
Thorax width	w_{th}	m	2.0×10^{-3}
Abdomen length	l_{abd}	m	10.5×10^{-3}
Abdomen width	w_{abd}	m	2.0×10^{-3}
Time-averaged wing-tip velocity	u_0	m/s	1.31
Flapping period	T	s	122×10^{-3}
Total mass	M	kg	4.5×10^{-5}
Atmospheric temperature	–	℃	19.9
Humidity	–	%	40.0
Density of air	ρ_{f}	kg/m^3	1.19
Kinematic viscosity of air	ν	m^2/s	1.52×10^{-5}
Reynolds number	Re	-	1305

100 mm の間隔で設置されている．蝶を撮影する位置でカメラを固定し，3 台のカメラにキャリブレータのコントロールポイント 8 点がすべて収まるように撮影する．次に，運動解析ソフトウェア（DITECT，DIPP-MotionV）を用いて，撮影したキャリブレータのコントロールポイント 8 点を入力し，カメラの外部パラメータ，内部パラメータを決定する．ここで，運動解析ソフトウェアは，動画より動体追跡を行い，画面上での二次元座標を出力し，複数の二次元座標のデータを三次元座標に変換することができるソフトウェアである．なお，カメラの内部パラメータはレンズの歪みと光学中心に関する値であり，外部パラメータはカメラが設置されている位置に関する値である．

2.3.2. 撮影

実験では Fig. 1 に示すように，箱に対して側面と前面，上面にカメラを設置して 3 方向から撮影した．カメラには飛び立ちから 2 周期までの飛翔が写るようになっている．また，高速度カメラの撮影速度を 1000 fps とし，解像度が 640×480

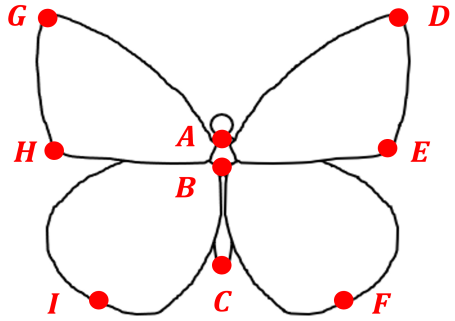


Fig. 2　Monitor points on a butterfly.

px の動画を出力するように設定した．

2.3.3. 動体追跡

撮影した動画より運動解析ソフトウェアを用いて，動体追跡を行う．まず，Fig. 2 に示した点を蝶の特徴点として定義し実験を行った．この特徴点を動体追跡することでカメラ 3 台分の二次元座標を求めた．また，運動解析ソフトウェアは色の差分から自動で動体追跡ができるが，蝶の動きにより計測点が隠れる場合や，黒一色である胴体の追跡は難しい．そのため，自動で追跡できない場合は，手動で特徴点の追跡を行った．

2.3.4. 三次元化およびデータの処理

動体追跡により得られた二次元座標から三次元座標を求める．Sec. 2.3.1 より求めた内部パラメータ，外部パラメータをもとに，Sec. 2.3.3 より求めたカメラ 3 台分の二次元座標から運動解析ソフトウェアを用いて三次元座標を求める．また，求めた三次元座標に対して，39 次の最小二乗多項式近似を行い，時間的に連続的なデータとした．

2.4. 各種値の計算

Fig. 3(a) に座標軸を x, y, z とする静止座標系 Σ を示す．これは x 軸，z 軸を水平方向，y 軸を鉛直上方向とする右手座標系である．また，ある時間 t での Fig. 2 で示す特徴点の位置ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{A}(t), \boldsymbol{B}(t), \boldsymbol{C}(t), \boldsymbol{D}(t), \boldsymbol{E}(t), \boldsymbol{F}(t), \boldsymbol{G}(t), \boldsymbol{H}(t), \boldsymbol{I}(t)$ とし，胸部中心の位置ベクトルを $\boldsymbol{x}_{\mathrm{c}}(t)$ として以下の式で定義する．

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{c}}(t) = \frac{\boldsymbol{A}(t) + \boldsymbol{B}(t)}{2}. \tag{1}$$

この胸部中心の位置ベクトル $\boldsymbol{x}_{\mathrm{c}}$ を含めた 10 個の位置ベクトルから，蝶の飛び立ち時の姿勢と関節の角度 (Fig. 3(b))，移動距離の時間変化を求める．

2.5. 角度

計測した三次元座標から，ヨーイング角，ピッチング角，ローリング角，羽ばたき角，腹部角の計 5 つの角度を求める．

各特徴点の位置ベクトルの $\boldsymbol{x}_{\mathrm{c}}(t)$ からの相対ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{A}_{\mathrm{c}}(t), \boldsymbol{B}_{\mathrm{c}}(t), \boldsymbol{C}_{\mathrm{c}}(t), \boldsymbol{D}_{\mathrm{c}}(t), \boldsymbol{E}_{\mathrm{c}}(t), \boldsymbol{F}_{\mathrm{c}}(t), \boldsymbol{G}_{\mathrm{c}}(t), \boldsymbol{H}_{\mathrm{c}}(t), \boldsymbol{I}_{\mathrm{c}}(t)$ とする．以下に代表として $\boldsymbol{A}_{\mathrm{c}}(t)$ を示す．

$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{c}}(t) = \boldsymbol{A}(t) - \boldsymbol{x}_{\mathrm{c}}(t). \tag{2}$$

2.5.1. ヨーイング角

ヨーイング角は，x 軸負方向から見た時の $\boldsymbol{A}_{\mathrm{c}}(t)$ と y 軸のなす角を表し，x 軸に関して回転する角度である．まず，$\boldsymbol{A}_{\mathrm{c}}(t)$ を yz 平面へ射影する．射影後の位置ベクトル $\boldsymbol{A}'_{\mathrm{c}}(t)$ は以下のように表せる．

$$\boldsymbol{A}'_{\mathrm{c}}(t) = \boldsymbol{a}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ a_y(t) \\ a_z(t) \end{bmatrix}. \tag{3}$$

よって，ヨーイング角 $\theta_{\mathrm{yaw}}(t)$ は以下のように表せる．

$$\theta_{\mathrm{yaw}}(t) = \mathrm{atan2}\left(a_z(t), a_y(t)\right). \tag{4}$$

なお，atan2 関数の定義は付録 A で説明する．

2.5.2. ピッチング角

ピッチング角は，各ベクトルをヨーイング角分だけ回転させ，z 軸正方向から見た時の $\boldsymbol{A}_{\mathrm{c}}(t)$ と x 軸のなす角を表し，z 軸に関して回転する角度である．ピッチング角を求めるために，

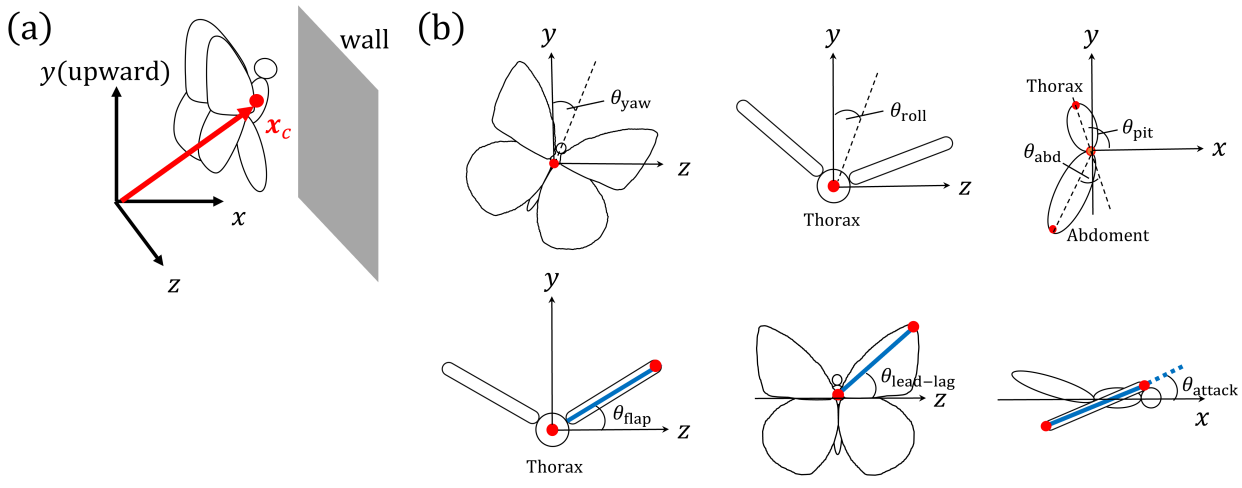


Fig. 3　(a) Geostationary system $\sum$; (b) definition of angles.

特徴点の位置ベクトルを x 軸に関してヨーイング角分だけ回転させる．x 軸回転の回転行列 $\boldsymbol{S}_1$（付録 A 参照）を用いた回転後のベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{A}_{\rm yaw}(t), \boldsymbol{B}_{\rm yaw}(t), \boldsymbol{C}_{\rm yaw}(t), \boldsymbol{D}_{\rm yaw}(t), \boldsymbol{E}_{\rm yaw}(t), \boldsymbol{F}_{\rm yaw}(t), \boldsymbol{G}_{\rm yaw}(t), \boldsymbol{H}_{\rm yaw}(t), \boldsymbol{I}_{\rm yaw}(t)$ とする．以下に代表として $\boldsymbol{A}_{\rm yaw}(t)$ を示す.

$$\boldsymbol{A}_{\rm yaw}(t) = \boldsymbol{S}_1(\theta_{\rm yaw}(t))\boldsymbol{A}_{\rm c}(t), \tag{5}$$

ここで，$\boldsymbol{A}_{\rm yaw}(t)$ の z 成分は 0 である．したがって，ベクトル $\boldsymbol{A}_{\rm yaw}(t)$ は以下のように表せる．

$$\boldsymbol{A}_{\rm yaw}(t) = \boldsymbol{b}(t) = \begin{bmatrix} b_x(t) \\ b_y(t) \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{6}$$

よって，ピッチング角 $\theta_{\rm pit}(t)$ は以下のように表せる．

$$\theta_{\rm pit}(t) = \mathrm{atan2}\left(b_y(t), b_x(t)\right). \tag{7}$$

2.5.3. ローリング角

ローリング角は，各ベクトルをピッチング角分だけ回転させ，x 軸正方向から見た時の $\boldsymbol{D}_{\rm c}(t)$ と $\boldsymbol{G}_{\rm c}(t)$ のなす角を表し，x 軸に関して回転する角度である．ローリング角を求めるために, 特徴点の位置ベクトルを z 軸に関してピッチング角分だけ回転させる．z 軸回転の回転行列 $\boldsymbol{S}_3$（付録 A 参照）を用いた回転後のベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{A}_{\rm pit}(t), \boldsymbol{B}_{\rm pit}(t), \boldsymbol{C}_{\rm pit}(t), \boldsymbol{D}_{\rm pit}(t), \boldsymbol{E}_{\rm pit}(t), \boldsymbol{F}_{\rm pit}(t), \boldsymbol{G}_{\rm pit}(t), \boldsymbol{H}_{\rm pit}(t), \boldsymbol{I}_{\rm pit}(t)$ とする．以下に代表として $\boldsymbol{A}_{\rm pit}(t)$ を示す.

$$\boldsymbol{A}_{\rm pit}(t) = \boldsymbol{S}_3(-\theta_{\rm pit}(t))\boldsymbol{A}_{\rm yaw}(t). \tag{8}$$

$\boldsymbol{D}_{\rm pit}(t)$ と $\boldsymbol{G}_{\rm pit}(t)$ を yz 平面へ射影したベクトルを $\boldsymbol{D}'_{\rm pit}(t)$, $\boldsymbol{G}'_{\rm pit}(t)$ とする．したがって，$\boldsymbol{G}'_{\rm pit}(t) - \boldsymbol{D}'_{\rm pit}(t)$ は次のように表せる．

$$\boldsymbol{G}'_{\rm pit}(t) - \boldsymbol{D}'_{\rm pit}(t) = \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ c_y \\ c_z \end{bmatrix}. \tag{9}$$

ローリング角は $\boldsymbol{D}_{\rm c}(t)$, $\boldsymbol{G}_{\rm c}(t)$ の距離 ($|\boldsymbol{G}_{\rm c}(t) - \boldsymbol{D}_{\rm c}(t)|$) の影響により誤差が大きくなってしまう．そこで 2 通りの方法で求める．

・20[mm]≤$|\boldsymbol{D}_{\rm c}(t) - \boldsymbol{G}_{\rm c}(t)|$ の場合

ローリング角 $\theta_{\rm rol}(t)$ は以下のように表せる．

$$\theta_{\rm rol}(t) = \mathrm{atan2}\left(-c_y(t), c_x(t)\right). \tag{10}$$

・0[mm]≤$|\boldsymbol{D}_{\rm c}(t) - \boldsymbol{G}_{\rm c}(t)|$<20[mm] の場合

点 $\boldsymbol{D}'_{\rm pit}(t), \boldsymbol{G}'_{\rm pit}(t)$ の中点を点 $\boldsymbol{P}$ とし，以下のように表す.

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 0 \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}. \tag{11}$$

よって，ローリング角 $\theta_{\rm rol}$ は次のように表せる．

$$\theta_{\rm rol}(t) = \mathrm{atan2}\left(p_z(t), p_y(t)\right). \tag{12}$$

2.5.4. 羽ばたき角

羽ばたき角は, 各ベクトルをヨーイング, ピッチング, ローリング角分回転させ，x 軸負方向から見た時の $\boldsymbol{D}_{\rm c}(t)$ と $\boldsymbol{E}_{\rm c}(t)$ が張る平面の法線ベクトルと z 軸のなす角を表し，x 軸に関して回転する角度である．羽ばたき角を求めるために, 特徴点の位置ベクトルを x 軸に関してローリング角分だけ回転させる．x 軸回転の回転行列 $\boldsymbol{S}_1$（付録 A 参照）を用いた回転後のベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{A}_{\rm rol}(t), \boldsymbol{B}_{\rm rol}(t), \boldsymbol{C}_{\rm rol}(t), \boldsymbol{D}_{\rm rol}(t), \boldsymbol{E}_{\rm rol}(t), \boldsymbol{F}_{\rm rol}(t), \boldsymbol{G}_{\rm rol}(t), \boldsymbol{H}_{\rm rol}(t), \boldsymbol{I}_{\rm rol}(t)$ とする．以下に代表として $\boldsymbol{A}_{\rm rol}(t)$ を示す.

$$\boldsymbol{A}_{\rm rol}(t) = \boldsymbol{S}_1(-\theta_{\rm rol}(t))\boldsymbol{A}_{\rm pit}(t), \tag{13}$$

ここで，ベクトル $\boldsymbol{D}_{\rm rol}(t)$ とベクトル $\boldsymbol{E}_{\rm rol}(t)$ の外積をとり，平面 $\boldsymbol{D}_{\rm rol}\boldsymbol{E}_{\rm rol}$ の単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}_0(t)$ を求める．

$$\boldsymbol{n}_0(t) = \frac{\boldsymbol{D}_{\rm rol}(t) \times \boldsymbol{E}_{\rm rol}(t)}{|\boldsymbol{D}_{\rm rol}(t) \times \boldsymbol{E}_{\rm rol}(t)|} = \begin{bmatrix} n_x(t) \\ n_y(t) \\ n_z(t) \end{bmatrix}. \tag{14}$$

単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}_0(t)$ を yz 平面に射影する．射影後のベクトル $\boldsymbol{n}'_0(t)$ は以下のように表せる．

$$\boldsymbol{n}'_0(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ n_y(t) \\ n_z(t) \end{bmatrix}. \tag{15}$$

よって，羽ばたき角 $\theta_{\rm flap}(t)$ は以下のように表せる．

$$\theta_{\rm flap}(t) = 90^\circ + \mathrm{atan2}\left(n_y(t), n_z(t)\right). \tag{16}$$

左翼の羽ばたき角についても，ベクトル $\boldsymbol{G}_{\rm rol}(t)$ とベクトル $\boldsymbol{H}_{\rm rol}(t)$ を用いて同様に求める．なお，回転方向を逆とする．

2.5.5. 腹部角

腹部角は, 各ベクトルをヨーイング, ピッチング, ローリング角分回転させ, z 軸正方向から見た時の $\boldsymbol{C}_{\rm c}(t) - \boldsymbol{B}_{\rm c}(t)$ と x 軸とのなす角を表し，z 軸に関して回転する角度である．ここで，$\boldsymbol{B}_{\rm rol}(t)$，$\boldsymbol{C}_{\rm rol}(t)$ の z 成分は 0 である．したがって，ベクトル $\boldsymbol{C}_{\rm rol}(t) - \boldsymbol{B}_{\rm rol}(t)$ は以下のように表せる．

$$\boldsymbol{C}_{\rm rol}(t) - \boldsymbol{B}_{\rm rol}(t) = \boldsymbol{c}(t) = \begin{bmatrix} c_x(t) \\ c_y(t) \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{17}$$

よって，腹部角 $\theta_{\rm abd}(t)$ は以下のように表せる．

$$\theta_{\rm abd}(t) = \mathrm{atan2}\left(c_y(t), -c_x(t)\right). \tag{18}$$

2.5.6. 迎角，リード・ラグ角

右翼の迎角，リード・ラグ角を求めるために右翼の羽ばたき角分，追跡点を x 軸に関して回転させる．x 軸回転の回転行列 $\boldsymbol{S}_1$（付録 A 参照）を用いた回転後のベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{A}_{\rm flap}(t), \boldsymbol{B}_{\rm flap}(t), \boldsymbol{C}_{\rm flap}(t), \boldsymbol{D}_{\rm flap}(t), \boldsymbol{E}_{\rm flap}(t), \boldsymbol{F}_{\rm flap}(t), \boldsymbol{G}_{\rm flap}(t), \boldsymbol{H}_{\rm flap}(t), \boldsymbol{I}_{\rm flap}(t)$ とする．以下に代表として $\boldsymbol{A}_{\rm flap}(t)$ を示す.

$$\boldsymbol{A}_{\rm flap}(t) = \boldsymbol{S}_1(\theta_{\rm flap}(t))\boldsymbol{A}_{\rm rol}(t). \tag{19}$$

迎角は羽を真横から見たときの羽と x 軸のなす角を表しており，z 軸に関して回転する角度である．まず，$\boldsymbol{D}_{\mathrm{flap}}(t)$, $\boldsymbol{E}_{\mathrm{flap}}(t)$ を xy 平面へ垂直に射影する．射影後の追跡点を $\boldsymbol{D}'_{\mathrm{flap}}(t), \boldsymbol{E}'_{\mathrm{flap}}(t)$ とするとベクトル $\boldsymbol{D}'_{\mathrm{flap}}(t) - \boldsymbol{E}'_{\mathrm{flap}}(t)$ は次のように表せる．

$$\boldsymbol{D}'_{\mathrm{flap}}(t) - \boldsymbol{E}'_{\mathrm{flap}}(t) = \boldsymbol{d} = \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{20}$$

よって，迎角 $\theta_{\mathrm{attack}}(t)$ は次のように表せる．

$$\theta_{\mathrm{attack}}(t) = \mathrm{atan2}\left(d_x(t), d_y(t)\right). \tag{21}$$

リード･ラグ角は羽を真上から見たときに羽の前縁先端と z 軸のなす角を表しており，y 軸に関して回転する角度である．まず，蝶の追跡点 $\boldsymbol{D}_{\mathrm{flap}}(t)$ を垂直に zx 平面へ射影する．射影後の追跡点を $\boldsymbol{D}''_{\mathrm{flap}}(t)$ とするとベクトル $\boldsymbol{D}''_{\mathrm{flap}}(t) - \boldsymbol{A}_{\mathrm{flap}}(t)$ は次のように表せる．

$$\boldsymbol{D}''_{\mathrm{flap}}(t) - \boldsymbol{A}_{\mathrm{flap}}(t) = \boldsymbol{e} = \begin{bmatrix} e_x \\ 0 \\ e_z \end{bmatrix}. \tag{22}$$

よって，リード・ラグ角 $\theta_{\text{lead-lag}}(t)$ は次のように表せる．

$$\theta_{\text{lead-lag}}(t) = \mathrm{atan2}\left(e_x(t), e_z(t)\right). \tag{23}$$

2.6. 平均翼端速さ

蝶の羽ばたく速さを調べるために左右翼の平均翼端速さを調べる．右翼の平均翼端速さ u_{0_r} は蝶の羽ばたき周期 $T = 0.122$ [s] を用いて以下のように求める．なお羽ばたき周期 T は，羽ばたき角 θ_{flap} が最初に最大値を取ってから次に最大値を取るまでの時間として定義している．これは，本来左右の翼で異なる値を取るが，今回の計測では，右翼と左翼の羽ばたき周期はほぼ同じであった．

$$u_{0_r} = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{|\boldsymbol{u}_{\mathrm{D}}(t)| + |\boldsymbol{u}_{\mathrm{E}}(t)|}{2} dt, \tag{24}$$

ただし，$\boldsymbol{u}_{\mathrm{D}}(t)$, $\boldsymbol{u}_{\mathrm{E}}(t)$ はそれぞれ特徴点 D, E の速度を表し，$\boldsymbol{D}_{\mathrm{pit}}(t)$, $\boldsymbol{E}_{\mathrm{pit}}(t)$ の一次後退差分を用いて計算する．左翼の翼端平均速さ u_{0_l} についても，追跡点 G, H を用いて同様に求める．

3. 実験結果

3.1. 角度

Fig. 4(a) に蝶の運動の時系列写真を示す．これより，$0 \leq t/T \lesssim 0.8$ で後方飛翔し，$0.8 \lesssim t/T \lesssim 1.2$ で右方向に大きく方向転換している．

Fig. 4(b) にヨーイング角 $\theta_{\mathrm{yaw}}(t)$，ピッチング角 $\theta_{\mathrm{pit}}(t)$，ローリング角 $\theta_{\mathrm{rol}}(t)$，右翼の羽ばたき角 $\theta_{\mathrm{flap}_{\mathrm{right}}}(t)$，左翼の羽ばたき角 $\theta_{\mathrm{flap}_{\mathrm{left}}}(t)$，腹部角 $\theta_{\mathrm{abd}}(t)$ の時間変化を示す．ただし，ヨーイング角 $\theta_{\mathrm{yaw}}(t)$ は，初期状態からの変位を示す．また，Fig. 4 の横軸は，羽ばたき角の時間変化より求めた羽ばたき周期 $T = 0.122$ [s] で無次元化している．グラフでの黒い網掛けは翼の振り下ろし，白い網掛けは振り上げを示している．また，赤い網掛けは方向転換を示している．

羽ばたき角 $\theta_{\mathrm{flap}_{\mathrm{right}}}$，$\theta_{\mathrm{flap}_{\mathrm{left}}}$ の時間変化より，右翼と左翼の羽ばたき角に大きな差は無くほぼ同じであることがわかる．$t/T = 0$ 付近では約 $90°$，$t/T = 0.6$ 付近では約 $-80°$ となっており，蝶は大きく翼を上下させ飛翔することがわかる．また，翼を振り下ろす時間と振り上げる時間を比較すると，飛び立ち時は振り下ろす時間の方が長いことがわかる．ヨーイング角 θ_{yaw} は，方向転換しているときに大きく変化している．ピッチング角 θ_{pit} に注目すると，水平面に対して常に $45°$ 以上傾けていることがわかる．方向転換時は $90°$ を超えていることもあり，水平面に対して垂直な姿勢のまま方向を変えていることが読み取れる．ローリング角 θ_{rol} は，方向転換時に大きく減少している．このことから，方向転換するときに大きく身体を回転させていることがわかる．腹部角 θ_{abd} は振り下ろしの後半で大きく増加し始め, 振り上げ時に減少していくことがわかる．

3.2. 重心の軌跡

Fig. 4(c) に蝶の重心の軌跡の時間変化を示す．これより，x 方向の変位に注目すると，重心が大きく後退していることがわかる．また振り下ろし時に x 方向の速さが増加している．y 方向の変位に注目すると, 方向転換時から y 方向の変位が大きく増加していることがわかる．このことから，身体の向きを変えながら上昇したことが読みとれる．一方，z 方向の変位には，振り下ろし時や振り上げ時で大きな差はなく，初期の飛翔方向から逸れて飛翔したことがわかる．

3.3. 方向転換と翼運動の関係

Fig. 4(d), (e) に左右翼それぞれのリード･ラグ角 $\theta_{\text{lead-lag}}(t)$，迎角 $\theta_{\mathrm{attack}}(t)$ の時間変化を示す．リード・ラグ角 $\theta_{\text{lead-lag}}$ は，方向転換時に左翼の方が大きいことがわかる．リード・ラグ角 $\theta_{\text{lead-lag}}$ が大きくなると前翼と後翼の重なる部分が小さくなるため，実効翼面積が大きくなると考えられる．ここで実効翼面積とは，前翼と後翼のそれぞれの面積の和から前翼と後翼の重なっている部分の面積を引いたものである．一方，迎角 θ_{attack} は方向転換時に右翼の方が大きいことがわかる．すなわち，羽ばたく方向に対して右翼が平行に近くなっていることがわかる．また，左右翼の翼端平均速さを比較したところ，右翼の翼端平均速さは $u_{0_r} = 1.12$[m/s]，左翼の翼端平均速さは $u_{0_l} = 0.92$[m/s] であった．

以上の結果から，方向転換時では Fig. 5 に示すように，左翼では実効翼面積が大きくなることで空気抵抗が大きくなり，結果的に流体トルクが大きくなる．また翼端平均速さが小さくなることで左翼の慣性トルクが小さくなる．一方，右翼では羽ばたく方向に対して平行に近いため空気抵抗が小さくなり，結果的に流体トルクが小さくなる．また，翼端平均速さが大きくなることで右翼の慣性トルクが大きくなる．これにより，左右翼の流体トルクと慣性トルクが非対称になるため方向転換していると考えられる．

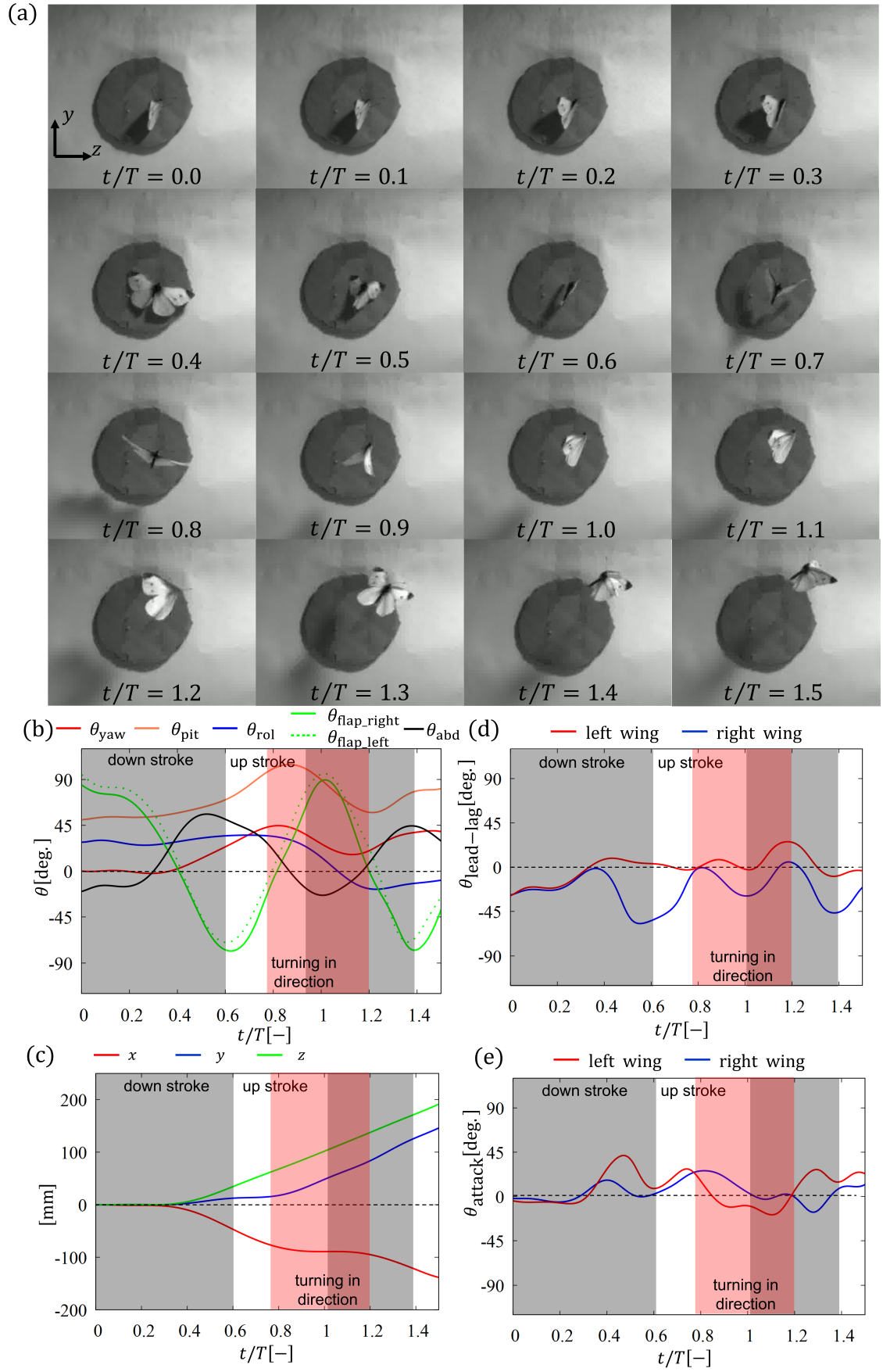


Fig. 4 Experimental results: (a) body movement of a butterfly flying away from a wall from $t/T = 0.0$ to 1.5 in the experiment. (b) time variations of the yawing angle θ_{yaw}, pitching angle θ_{pit}, rolling angle θ_{rol}, flapping angle θ_{flap} and abdominal angle θ_{abd}; (c) time variations of the trajectory of center of mass in the x-, y- and z-directions; (d) time variations of the lead–lag angle $\theta_{\text{lead-lag}}$ of the right and left wings; (e) time variations of the angle of attack θ_{attack} of the right and left wings.

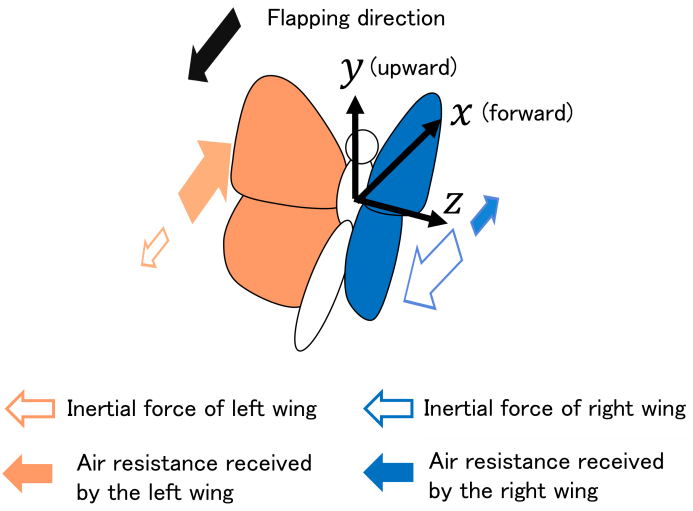


Fig. 5 Schematic diagram of forces received by the left and right wings while changing its flight direction.

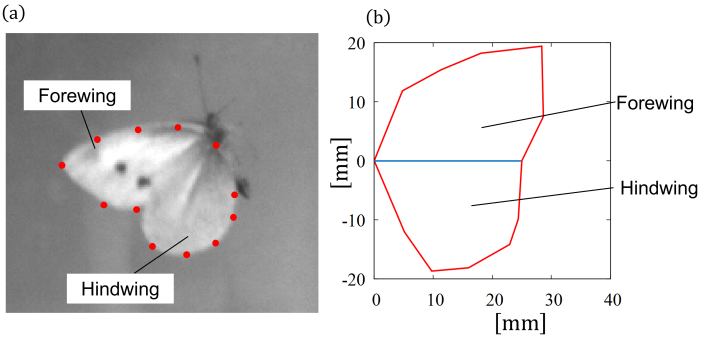


Fig. 6 Shapes of the right forewing and hindwing: (a) photo image; (b) numerical model.

4. 計算モデル

Suzuki et al.[4] の手法を用いて，計測実験より求めた特徴点の三次元座標から蝶の計算モデルを構築する．

4.1. モデルの構成

計算モデルは計測実験で用いた蝶の大きさ，翼形状を求めて構築する．翼の形状は Fig. 6(a) に示す初期の翼周りの三次元座標を計測し，Fig. 6(b) に示すような翼形状を求めた．計測した点が Fig. 6(a) の赤丸であり，それらを線で結んだものを翼形状とした．なお，数値計算において，翼は Fig. 6(b) の青線で折れ曲がるようになっており，前翼と後翼を近似的に区別している．

本研究で用いる蝶のモデルを Fig. 7 に示す．このモデルは，前翼と後翼からなる左右 2 枚の翼と胸部と腹部から構成される．2 枚の翼はともに厚みを持たず，各翼は翼長を L とし，Fig. 6(b) で示す形状を用いる．

4.2. モデルの動き

4.2.1. 羽ばたき方

モデルの羽ばたき方は，実験より求めた特徴点の三次元座標を用いて表す．詳細は参考文献 [4] を参照されたい．なお，参考文献 [4] では左右の翼の運動は対称であるとしていたが，

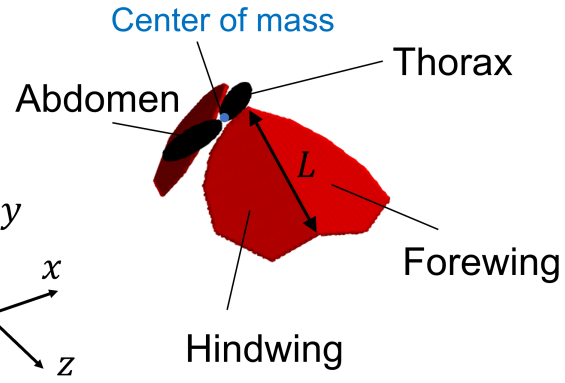


Fig. 7 Butterfly model with two wings consisting of forewing and hindwing, an ellipsoidal thorax and an ellipsoidal abdomen.

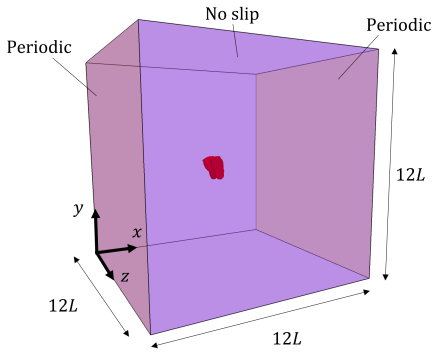


Fig. 8 Computational domain for simulations of a butterfly model.

本研究では左右の翼の運動は非対称である．

4.2.2. 胸部・腹部の振り

実験より求めたヨーイング角 $\theta_{\mathrm{yaw}}(t)$，ピッチング角 $\theta_{\mathrm{pit}}(t)$，ローリング角 $\theta_{\mathrm{rol}}(t)$，腹部角 $\theta_{\mathrm{abd}}(t)$ を用いることで動きを強制する．胴体固定座標が固定されている胸部を $\theta_{\mathrm{yaw}}(t)$，$\theta_{\mathrm{pit}}(t)$，$\theta_{\mathrm{pit}}(t)$ で回転させ，胸部と接続されている腹部を $\theta_{\mathrm{abd}}(t)$ で回転させる．なお，胸部・腹部の振りによる速度は一次後退差分より求める．

4.2.3. 胴体中心の移動

胴体中心の移動は，実験より求めた胴体の軌跡を用いることで動きを強制する．なお，胴体中心の速度は一次後退差分より求める．

5. 支配方程式と数値計算法

5.1. 流体の運動

流体の運動の支配方程式は，非圧縮性粘性流体の連続の式および Navier–Stokes 方程式である．

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0, \tag{25}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} = -\frac{1}{\rho_{\mathrm{f}}}\nabla p + \nu \nabla^2 \boldsymbol{u}, \tag{26}$$

ここで，$\boldsymbol{u}$ は流速，p は圧力，ρ_{f} は流体の密度，ν は動粘性係数である．本研究では実験時の室温は 19.9 ℃，湿度は 40.0

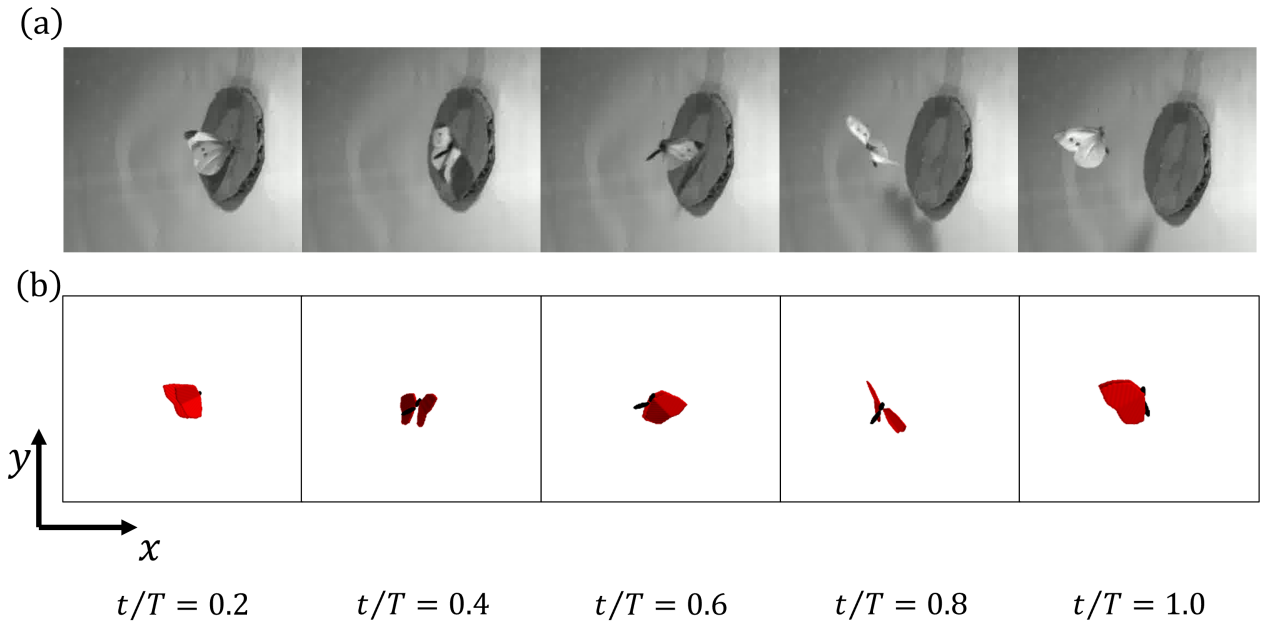


Fig. 9　Body movement of a butterfly flying away from a wall from $t/T = 0.2$ to 1.0 in (a) the experiment and (b) the simulation.

%であった．そのため，理科年表 [6] より，一次補間で求めた値 $\rho_f = 1.19$ [kg/m^3]，$\nu = 1.52 \times 10^{-5}$ [m^2/s] を用いる．

この方程式系の支配パラメータは Reynolds 数 Re であり，平均翼端速さ u_0 を代表速さとし，以下のように定義する．

$$Re = \frac{u_0 L}{\nu}, \tag{27}$$

ただし，平均翼端速さ u_0 は，Eq. (24) を用いて以下のように求めた．

$$u_0 = \frac{u_{0_r} + u_{0_l}}{2}. \tag{28}$$

5.2. 数値計算法

本研究では，流体の運動方程式である Eqs. (25)，(26) を数値計算するために，埋め込み境界–格子ボルツマン法 [7] を用いた．埋め込み境界–格子ボルツマン法は，直交格子上で移動境界流れを計算でき，かつ圧力の Poisson 方程式を解く必要がない効率の良い手法であり，蝶を模した羽ばたき翼–胴体モデルの研究 [8–12] やトンボを模した羽ばたき翼–胴体モデルの研究 [13–15] にも用いられている．この手法の詳細は参考文献 [7] を参照されたい．

計算領域は，Fig. 8 に示す通り $12L \times 12L \times 12L$ の立方体領域とする．立方体領域の境界条件としては，x 軸に垂直な面は周期境界とし，それ以外の面はすべりなし条件とする．初期においては，モデルの胴体中心は領域の中央 $(x,\ y,\ z) = (0,\ 0,\ 0)$ に置かれ，領域内の流体は静止状態とする．本研究では，マルチブロック格子を用いることで計算負荷を軽減し [16]，その領域の大きさは，$4L \times 4L \times 4L$ とする．また，Sec. 5.1 より Reynolds 数 $Re = 1305$ と求められた．しかし，計算コストを抑えるため，動粘性係数 ν を変更し，$Re = 1000$ で計算を行う．なお，空間解像度，時間解像度はそれぞれ $L = 120\Delta x$，$T = 18300\Delta t$ とした．

6. 計算結果

6.1. 蝶の運動，渦構造

まず，妥当性を確認するためモデルの運動を示す．その後，モデルが羽ばたくことによって発生する周りの渦の様子を示す．

Fig. 9 に撮影した蝶と計算モデルの 1 回目の翼の振り下ろしから振り上げまでの様子を示す．これより，本研究の計算モデルは実際の動きをよく表すことができている．

次に，Fig. 10 に蝶の壁面からの飛び立つ方向転換時の周りの渦構造を可視化した様子を示す．Fig. 10(a)，(b) はそれぞれ蝶を右後方，右前方から見たものである．Fig. 10(c) は蝶を左前方から見たものであり，渦の剥離の様子を示している．これより，蝶は $t/T = 0.6$ までの翼の振り下ろしによって，翼の上面に渦を形成し，$t/T = 0.6$ で翼から剥離させていることがわかる．また，$t/T = 0.6$ から $t/T = 1.0$ までの翼の振り上げによって，翼の下面に渦を形成し，$t/T = 1.0$ で翼から剥離させていることがわかる．ここで，剥離させた渦は蝶の進行方向と逆向きに移動しており，$t/T = 0.6$ や $t/T = 1.0$ などの渦を剥離させたタイミングで蝶の移動距離が大きくなることがわかる (Fig. 4(c) も参照)．これより，蝶は羽ばたきによって形成した渦を進行方向と逆向きに剥離させ，飛翔していると考えられる．また，後方飛翔をしている $t/T = 0.8$ 付近までの渦構造は蝶の胴体を軸として左右で対称に近い構造をしているが，方向転換をしている $t/T = 0.8$ 以降の渦構造を見ると，左右の対称性が大きく崩れていることがわかる．

6.2. 翼の慣性トルク

Fig. 11 に左右それぞれの翼と両翼の慣性トルクを示す．Fig. 11(a) は x 軸まわり (ローリング)，Fig. 11(b) は y 軸まわり (ヨーイング)，Fig. 11(c) は z 軸まわり (ピッチング) であ

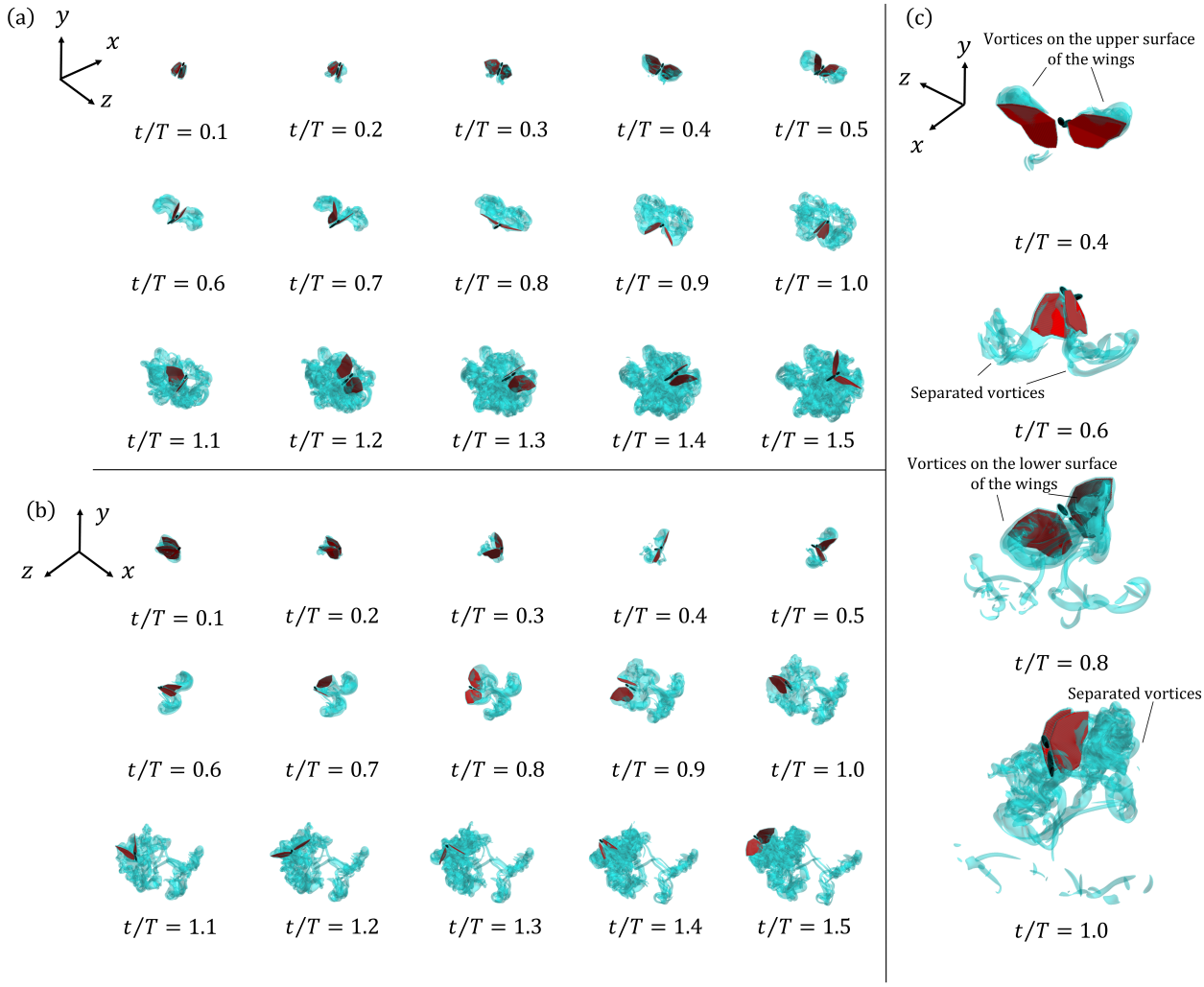


Fig. 10　Results in the vortex visualization for $Re = 1000$: (a) isosurface of the magnitude of the vorticity ($|\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{u}| = 2u_0/L$) around the butterfly model from $t/T = 0.1$ to 1.5 viewed from the right rear of the butterfly model; (b) isosurface of the magnitude of the vorticity ($|\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{u}| = 2u_0/L$) around the butterfly model from $t/T = 0.1$ to 1.5 viewed from the right front of the butterfly model; (c) isosurface of the magnitude of the vorticity ($|\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{u}| = 8u_0/L$) around the butterfly model at $t/T = 0.4$, 0.6, 0.8 and 1.0 viewed from the left front of the butterfly model.

る．Fig. 11(a)，(b) より，蝶が方向転換しているときにローリング方向とヨーイング方向の左右翼の慣性トルクの対称性が大きく崩れていることがわかる．さらに，方向転換の後半では左右それぞれの翼の慣性トルクの方向が同じことが読みとれるため，同じ方向に回転しようとしていることがわかる．また，方向転換しているときに右翼の慣性トルクと両翼の慣性トルクの方向が一致している．したがって，右翼の慣性トルクが支配的に働いていると考えられる．Fig. 11(c) より，ピッチング方向の慣性トルクは他の方向に比べ左右それぞれの翼の慣性トルクの対称性の崩れが小さいことがわかる．したがって，ピッチング方向の翼の慣性トルクが方向転換に及ぼす影響は他と比べて小さいと考えられる．

以上のことから，Fig. 5 で考察したように，蝶は左右翼の速さを変え，ローリング方向とヨーイング方向の翼の慣性トルクを非対称にすることで身体を回転させて，方向転換をしていると言える．

6.3. 翼が受ける流体トルク

Fig. 12 に左右それぞれの翼と両翼が受ける流体トルクを示す．Fig. 12(a) は x 軸まわり，Fig. 12(b) は y 軸まわり，Fig. 12(c) は z 軸まわりである．Fig. 12 より蝶が方向転換しているとき，左右翼の受ける流体トルクの対称性が大きく崩れていることがわかる．さらに，それぞれの方向に対して，方向転換している間は左翼が受ける流体トルクが両翼の受ける流体トルクの方向と一致しているため，左翼の流体トルクが支配的に働いていることが考えられる．また，方向転換開始後に右翼の受けるヨーイング方向の流体トルクの大きさが大きく減少するのは Sec. 3.3 で述べたように，右翼の迎角が大きくなることで空気抵抗が小さくなったことが原因だと考えられる．同様に，方向転換開始後に左翼の受けるヨーイング方向の流体トルクの大きさが大きく増加するのは，左翼の

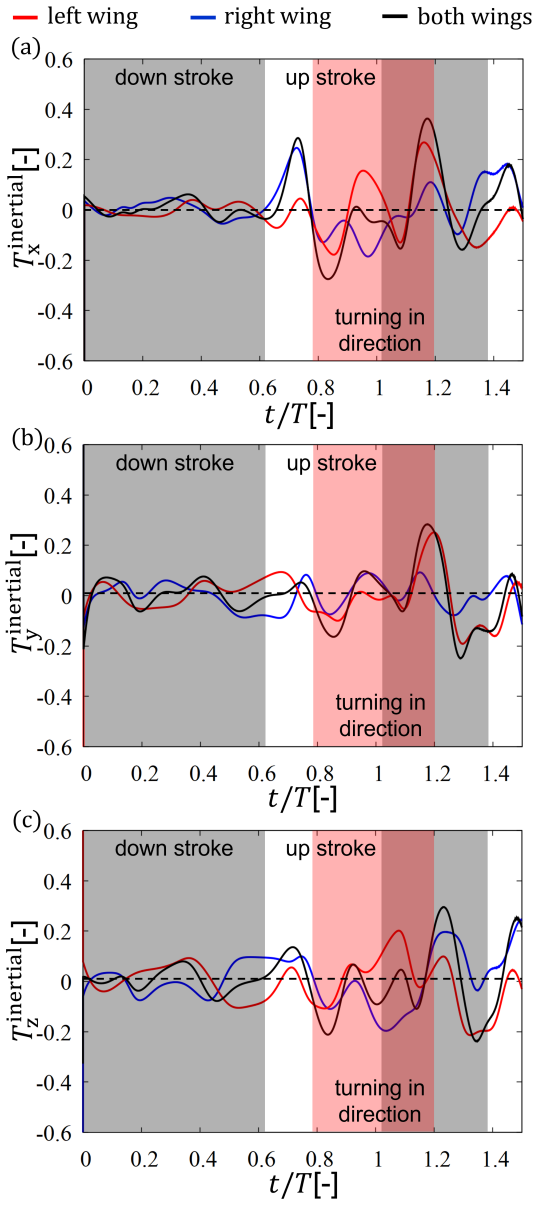


Fig. 11　Time variations of the inertial torque of the wings around (a) the x-axis, (b) the y-axis and (c) the z-axis.

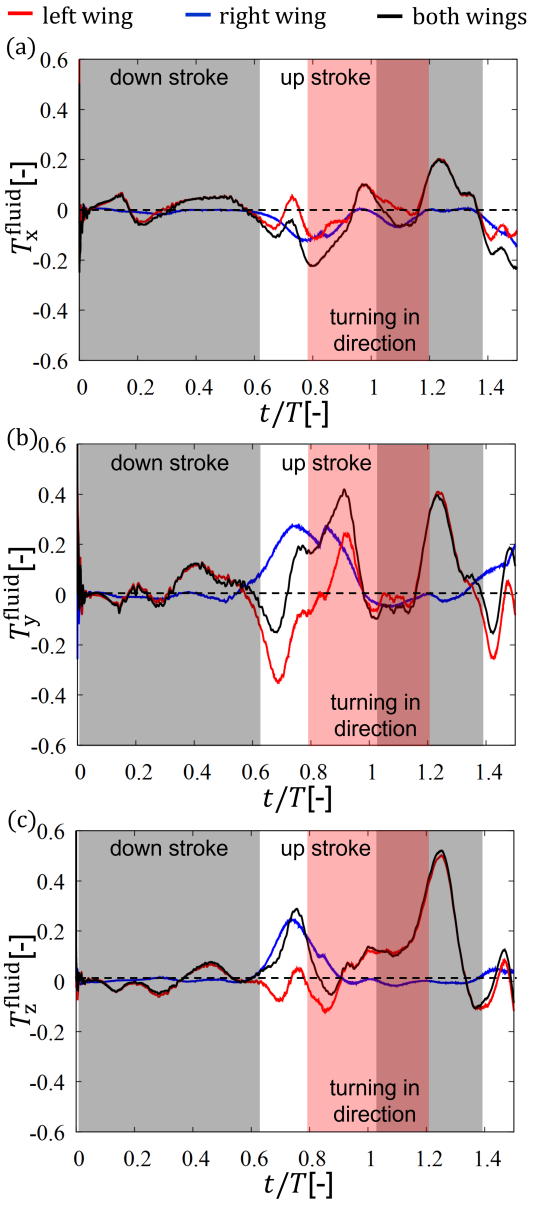


Fig. 12　Time variations of the fluid torque of the wings around (a) the x-axis, (b) the y-axis and (c) the z-axis.

迎角が小さくなることで空気抵抗が大きくなったことが原因だと考えられる．なお，Sec. 3.3 ではリード・ラグ角による実効翼面積の変化の影響について考察したが，本モデルでは翼形状を 1 つに決定しているため，翼面積の変化は考慮していない．翼面積が変化するモデル作成は今後の課題とする．

以上のことから，Fig. 5 で考察したように，蝶は右翼と左翼の実効翼面積と空気抵抗を変えることによって，それぞれの翼が受ける流体トルクを非対称にすることで方向転換していると言える．

7. おわりに

壁面から飛び立つ蝶の方向転換時の飛翔解析と計測実験モデルを用いた数値計算を行った．

まず，計測実験では，前進飛翔における蝶の特徴点の三次元座標を計測した．この三次元座標より，ヨーイング角，ピッチング角，ローリング角，羽ばたき角，腹部角，迎角，リード・ラグ角，重心の軌跡の時間変化と翼端平均速さを求めた．その結果，リード・ラグ角は方向転換時に左翼の方が大きい値であり，迎角は方向転換時に右翼の方が大きい値であることがわかった．翼端平均速さは右翼の方が大きいことがわかった．これらより，左右翼の慣性トルクと流体トルクが非対称になり，方向転換していると考えられる．

次に，計測した動きを数値計算の蝶のモデルに反映させ，渦構造の可視化を行った．その結果，蝶のモデルは翼の振り下ろし時に翼上面に渦を形成し，振り下ろし終了時に進行方向と逆向きに剥離させることがわかった．同様に，振り上げ時に翼下面に渦を形成し，振り上げ終了時に進行方向と逆向きに剥離させることがわかった．また，壁から飛び立って後方飛翔している間は右翼と左翼の渦構造は対称だが，方向転

換時では右翼と左翼の渦構造の対称性が大きく崩れていることがわかった．

次に，翼の慣性トルクを求めた．翼の慣性トルクからは，方向転換時には左右翼の慣性トルクの対称性が大きく崩れており，右翼の慣性トルクが支配的に働いていることがわかった．したがって，蝶は左右翼の速さを変え，翼の慣性トルクを非対称にすることで身体を回転させて，方向転換をしていることがわかった．

最後に，翼が受ける流体トルクを求めた．翼が受ける流体トルクからは，方向転換時には左右翼の受ける流体トルクの対称性が大きく崩れており，左翼の受ける流体トルクが支配的に働いていることがわかった．したがって，蝶は左右翼の実効翼面積と空気抵抗を変え，翼の受ける流体トルクを非対称にすることで方向転換をしていることがわかった．

今回の実験を通して，蝶の方向転換を調べたが，予備実験において方向転換する頻度は少なく，基本的に蝶は左右対称な動きをすることが多かった．従って，蝶が翼を非対称に動かすのは，外敵から逃げる際などの緊急時に限るのではないかと考えられる．また，他の昆虫が数周期かけて方向転換するのに対し，蝶は 1 周期で方向転換する点が興味深いと言える．

今後の課題としては，運動方程式を解くことによる自由飛翔計算，翼面積が変化する蝶のモデルの作成などがあげられる．

8. 謝辞

本研究は名古屋大学のスーパーコンピュータ「不老」の HPCI 利用制度を利用し，課題番号 hp220037 の一部として実施しました．

付録 A　atan2 関数，回転行列

角度の導出には関数 atan2 を用いる．逆三角関数 arctan では -90° から 90° の範囲しか計算することができないが，関数 atan2 を用いると -180° から 180° の範囲を計算できる．逆三角関数 arctan と関数 atan2 の関係は実数 a, b を用いて以下のように表せる．

$$\mathrm{atan2}(b,a) = \begin{cases} \arctan(b/a) & (a>0) \\ 180^\circ + \arctan(b/a) & (a<0,\, b>0) \\ -180^\circ + \arctan(b/a) & (a<0,\, b<0) \end{cases} . \tag{29}$$

また，回転行列 $\boldsymbol{S}_1$, $\boldsymbol{S}_2$, $\boldsymbol{S}_3$ は以下で定義する．

$$\boldsymbol{S}_1(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}, \tag{30}$$

$$\boldsymbol{S}_2(\phi) = \begin{bmatrix} \cos\phi & 0 & \sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\phi & 0 & \cos\phi \end{bmatrix}, \tag{31}$$

$$\boldsymbol{S}_3(\phi) = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{32}$$

参考文献

(1) Chen, Y., Zhao, H., Mao, J., Chirarattananon, P., Helbling, E., Hyoun, N, Clarke, D. and Wood, R. : Controlled flight of a microrobot powered by soft artificial muscles, Nature, **575** (2019), pp. 324–329.

(2) Jang, J. and Yang, G. : Design of wing root rotation mechanism for dragonfly-inspired micro air vehicle, Appl. Sci., **8** (2018), 1868 (18pp).

(3) Bimbard, G., Kolomenskiy, D., Bouteleux, O., Casas, J. and Godoy-Diana, R. : Force balance in the take-off of a pierid butterfly: relative importance and timing of leg impulsion and aerodynamic forces, J. Exp. Biol., **216** (2013), pp. 3551–3563.

(4) Suzuki, K., Nakamura, M., Kouji, M. and Yoshino, M. : Revisiting the flight dynamics of take-off of a butterfly: experiments and CFD simulations for a cabbage white butterfly, Biol. Open, **11** (2022), 059136 (12pp).

(5) Bode-Oke, A.T. and Dong, H. : The reverse flight of a monarch butterfly (Danaus plexippus) is characterized by a weight-supporting upstroke and postural changes, J. R. Soc. Interface, **17** (2020), 20200268 (14pp).

(6) 国立天文台編：理科年表　平成 29 年　(机上版), 丸善出版株式会社, (2016).

(7) Suzuki, K. and Inamuro, T. : Effect of internal mass in the simulation of a moving body by the immersed boundary method, Comput. Fluids, **49** (2011), pp. 173–187.

(8) Suzuki, K., Minami, K. and Inamuro, T. : Lift and thrust generation by a butterfly-like flapping wing–body model: immersed boundary–lattice Boltzmann simulations, J. Fluid Mech., **767** (2015), pp. 659–695.

(9) Suzuki, K. and Yoshino, M. : Numerical simulations for aerodynamic performance of a butterfly-like flapping wing-body model with various wing planforms, Commun. Comput. Phys., **23** (2018), pp. 951–979.

(10) Suzuki, K. and Yoshino, M. : A trapezoidal wing equivalent to a Janatella leucodesma's wing in terms of aerodynamic performance in the flapping flight of a butterfly model, Bioinspir. Biomim., **14** (2019), 036003 (15pp).

(11) Suzuki, K., Aoki, T. and Yosino, M. : Effect of chordwise wing flexibility on flapping flight of a butterfly model using immersed–boundary lattice Boltzmann simulations, Phys. Rev. E, **100** (2019), 013104 (16pp).

(12) Suzuki, K. and Yoshino, M. : Effect of wing mass on the free fight of a butterfly-like model using immersed boundary–lattice Boltzmann simulations, J. Fluid Mech., **877** (2019), pp. 614–647.

(13) Minami, K., Suzuki, K. and Inamuro, T. : Free flight simulations of a dragonfly-like flapping wing–body model using the immersed boundary–lattice Boltzmann method, Fluid Dyn. Res., **47** (2015), 015505 (17pp).

(14) Hirohashi, K. and Inamuro, T. : Hovering and targeting flight simulations of a dragonfly-like flapping wing–body model by the immersed boundary–lattice Boltzmann method, Fluid Dyn. Res., **49** (2017), 045502 (16pp).

(15) Hino, H. and Inamuro, T. : Turning flight simulations of a dragonfly-like flapping wing–body model by the immersed boundary–lattice Boltzmann method, Fluid Dyn. Res., **50** (2018), 065501 (18pp).

(16) Inamuro, T. : Lattice Boltzmann methods for moving boundary flows, Fluid Dyn. Res., **44** (2012), 024001 (21pp).

計算数理工学論文集 Vol. 22 (2022 年 12 月)，論文 No. 07-221216 JASCOME

融解・凝固を考慮した応力テンソルの不連続に基づく埋め込み境界–格子ボルツマン法の開発と妥当性検証

DEVELOPMENT AND VALIDATION OF THE STRESS TENSOR DISCONTINUITY-BASED IMMERSED BOUNDARY–LATTICE BOLTZMANN METHOD WITH MELTING/SOLIDIFICATION

遠藤　円 [1)]，鈴木　康祐 [2)]，吉野　正人 [3)]

Madoka ENDO, Kosuke SUZUKI and Masato YOSHINO

1) 信州大学大学院 総合理工学研究科 工学専攻 (〒 380-8553 長野市若里 4-17-1, E-mail: 21w4009f@shinshu-u.ac.jp)
2) 信州大学学術研究院 工学系 (〒 380-8553 長野市若里 4-17-1, E-mail: kosuzuki@shinshu-u.ac.jp)
3) 信州大学学術研究院 工学系 (〒 380-8553 長野市若里 4-17-1, E-mail: masato@shinshu-u.ac.jp)

Melting and solidification can be seen in various engineering problems such as ice slurry and metal casting. Huang and Wu [J. Comput. Phys., **277** (2014), pp. 305-319] proposed the immersed boundary–lattice Boltzmann method to simulate solid-liquid phase change problems. However, the force acting on the solid phase cannot be correctly calculated in the method. Suzuki and Yoshino [Comput. Fluids, **172** (2018), pp. 593-608] proposed the stress tensor discontinuity-based immersed boundary–lattice Boltzmann method. In this method, we can obtain the force locally acting on the boundary from the stress tensor of one side of the fluids divided by the boundary. In the present study, we incorporated the method by Huang and Wu into the stress tensor discontinuity-based immersed boundary–lattice Boltzmann method. We validated the present method through some benchmark problems. As a result, the present method has a good agreement with other numerical results and analytical solutions. In addition, we confirmed that this method can calculate the fluid force acting on the solid phase which deforms due to melting/solidification.

Key Words : Immersed Boundary Method, Lattice Boltzmann Method, Melting/Solidification, Heat Transfer

1. はじめに

融解・凝固は様々な工学的問題に見られる現象であり，融解・凝固が熱流動に与える影響を調査することは，熱交換効率や品質向上のために重要な課題である．さらに，氷スラリー流 [(1)] のように，固相が移流しながら融解・凝固して体積変化する系は，実験による観測が困難である場合が多いため，数値計算によるアプローチが有効と考えられる．

融解・凝固を伴う熱流動の数値計算法は，大きく分けて (i) 流れ場の計算，(ii) 温度場の計算，および (iii) 固液界面の移動計算の 3 つの部分に分けられ，これらの連成によって成立している．近年，(i) と (ii) の流れ場・温度場の効率の良い計算手法として，格子ボルツマン法（Lattice Boltzmann method: LBM）[(2)] が多く用いられている．また，Samanta et al.[(3)] の最近のレビュー論文では，融解・凝固計算のための LBM は，(iii) の手法の種類によって，Enthalpy-based LBM, Phase-field-based LBM, Immersed-boundary-based LBM に分類されている．

Enthalpy-based LBM[(4)] は，(ii) で得られた温度場からエンタルピー場を計算，あるいは温度場の代わりに直接エンタルピー場を計算し，得られたエンタルピー場により各セルの液相体積分率を計算し，固液界面を捉える方法である．その単純さのため多くの研究に用いられており，近年でも多孔質内の PCM（phase change material）の融解・凝固計算に用いられている [(5)]．Phase-field-based LBM[(6)] は，(iii) の計算法として，固相・液相を区別する秩序パラメータの場（phase field）を計算し，固液界面を直接的に追跡することなく形成する手法である．また，固液界面でのすべりなし条件を満た

2022 年 10 月 28 日受付，2022 年 11 月 24 日受理

すために，界面周辺に体積力を分布している．この手法は，その開発当初より現在まで，デンドライト結晶の成長および移流計算 [7] に多く適用されている．

Immersed-boundary-based LBM[8] は比較的新しい手法で，(iii) の計算として埋め込み境界法（immersed boundary method: IBM）を用いている．IBM では，固相とともに移動する Lagrangian 点で固液界面を離散化し，その点上ですべりなし条件・等温条件を満足させるための適切な体積力・熱量を計算して周囲に分配することで，体積力と熱量の場として固液界面を表現している．Huang and Wu[8] は，IBM による熱量が融解・凝固による熱量と等しいと考えて，融解・凝固による界面の変形を計算する手法を提案し，既存の研究と良い一致を示している．本研究では，固液界面におけるすべりなし条件を精度よく満たすことが出来る点と，氷スラリー流のような固相同士が衝突・付着するような系の計算 [9, 10] において，Langrangian 点を用いた衝突・付着の計算モデルとの親和性が良い点から，Immersed-boundary-based LBM に注目して研究を行っている．

上記のように，Huang and Wu[8] は，Immersed-boundary-based LBM を提案し，既存の研究と良い一致を示している．しかし，課題として，変形する固相が液相から受ける力を正しく計算できていないことが挙げられる．埋め込み境界法では，固液界面のすべりなし条件を満足させるために，境界近傍に適切な体積力を分配している．そして，固相が液相から受ける力は体積力の反作用であると物理的に解釈される．この解釈により，体積力の総和を用いることで，変形しない界面が受けるトータルの流体力は計算することができる．しかし，変形する界面の場合にはこの方法を用いることができず，局所的な流体力の計算が必要であるのにも関わらず，Huang and Wu の手法では変形しない界面と同様の方法で流体力を形式的に計算している．従って，変形する界面に関して流体力を正しく計算できているとは言えない．

局所的な流体力を正しく計算できる手法として，応力テンソルの不連続に基づく埋め込み境界–格子ボルツマン法 [11, 12] が挙げられる．この手法では，格子ボルツマン法における bounce-back 法と埋め込み境界法を組み合わせることで，境界上の速度分布関数から境界上の応力テンソルを計算することを可能にした．境界が受ける局所的な流体力は，境界上の応力テンソルが分かれば計算することができる．そのため，体積変化の影響を受けずに流体力の計算を行うことができると予想される．

そこで本研究では，応力テンソルの不連続に基づく埋め込み境界–格子ボルツマン法 [11, 12] に対して，温度場の計算 [13] と融解・凝固による境界の移動計算 [8] を導入し，融解・凝固を伴う熱流動問題を解析する新たな手法を開発することを目的とした．

2. 計算手法

2.1. 支配方程式

本研究において，流体の運動は以下に示す非圧縮性粘性流体の連続の式および Navier–Stokes 方程式で記述される．

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\hat{\boldsymbol{u}}=0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial\hat{\boldsymbol{u}}}{\partial\hat{t}}+(\hat{\boldsymbol{u}}\cdot\boldsymbol{\nabla})\hat{\boldsymbol{u}}=-\frac{1}{\hat{\rho}_{\mathrm{f}}}\boldsymbol{\nabla}\hat{p}+\hat{\nu}\boldsymbol{\nabla}^2\hat{\boldsymbol{u}}, \tag{2}$$

ここで，$\hat{\boldsymbol{u}}(\hat{\boldsymbol{x}},\hat{t})$，$\hat{p}(\hat{\boldsymbol{x}},\hat{t})$，はそれぞれ位置 $\hat{\boldsymbol{x}}$, 時刻 $\hat{t}$ における流速および圧力，$\hat{\rho}_{\mathrm{f}}$ は流体の密度，$\hat{\nu}$ は動粘性係数である．また，温度は次の移流–拡散方程式に従う．

$$\frac{\partial\hat{T}}{\partial\hat{t}}+\hat{\boldsymbol{u}}\cdot\boldsymbol{\nabla}\hat{T}=\hat{\alpha}\boldsymbol{\nabla}^2\hat{T}, \tag{3}$$

ここで，$\hat{T}(\hat{\boldsymbol{x}},\hat{t})$ は位置 $\hat{\boldsymbol{x}}$, 時刻 $\hat{t}$ における流体の温度，$\hat{\alpha}$ は温度伝導係数である．

2.2. 熱を考慮した格子ボルツマン法

LBM とは，流体を有限個の速度をもつ多数の仮想粒子の集合体として近似し，各仮想粒子の衝突と並進とを粒子の速度分布関数を用いて逐次計算し，得られた速度分布関数のモーメントから巨視的変数（流速，圧力，温度など）を求める数値計算手法である [2]．本節では，非圧縮性粘性流体に対する LBM について述べる．なお，使用される物理量の無次元化については付録 A を参照されたい．

格子気体モデルとして，Fig. 1 に示す 2 次元 9 速度モデル，および Fig. 2 に示す 3 次元 15 速度モデルを用いた．2 次元 9 速度モデルの粒子速度 $\boldsymbol{c}_i$ $(i=1,2,...,9)$ は，以下のように与えられる．

$$\begin{aligned}&[\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{c}_2,\boldsymbol{c}_3,\boldsymbol{c}_4,\boldsymbol{c}_5,\boldsymbol{c}_6,\boldsymbol{c}_7,\boldsymbol{c}_8,\boldsymbol{c}_9]\\&=\begin{bmatrix}0&1&0&-1&0&1&-1&-1&1\\0&0&1&0&-1&1&1&-1&-1\end{bmatrix}.\end{aligned} \tag{4}$$

また，3 次元 15 速度モデルの粒子速度 $\boldsymbol{c}_i$ $(i=1,2,...,15)$ は，以下のように与えられる．

$$\begin{aligned}&[\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{c}_2,\boldsymbol{c}_3,\boldsymbol{c}_4,\boldsymbol{c}_5,\boldsymbol{c}_6,\boldsymbol{c}_7,\boldsymbol{c}_8,\boldsymbol{c}_9,\boldsymbol{c}_{10},\boldsymbol{c}_{11},\boldsymbol{c}_{12},\boldsymbol{c}_{13},\boldsymbol{c}_{14},\boldsymbol{c}_{15}]=\\&\begin{bmatrix}0&1&0&0&-1&0&0&1&-1&1&1&-1&1&-1&-1\\0&0&1&0&0&-1&0&1&1&-1&1&-1&-1&1&-1\\0&0&0&1&0&0&-1&1&1&1&-1&-1&-1&-1&1\end{bmatrix}.\end{aligned} \tag{5}$$

本手法では，流れ場と温度場を表現するため，座標 $\boldsymbol{x}$ および時刻 t における速度 $\boldsymbol{c}_i$ をもつ仮想粒子の速度分布関数 $f_i(\boldsymbol{x},t)$, $g_i(\boldsymbol{x},t)$ を導入する．速度分布関数 f_i, g_i の時間発展は以下の式で与えられる．

$$\begin{aligned}f_i(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{c}_i\Delta x,t+\Delta t)=&f_i(\boldsymbol{x},t)-\frac{1}{\tau_f}[f_i(\boldsymbol{x},t)\\&-f_i^{\mathrm{eq}}(p(\boldsymbol{x},t),\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t))],\end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}g_i(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{c}_i\Delta x,t+\Delta t)=&g_i(\boldsymbol{x},t)-\frac{1}{\tau_g}[g_i(\boldsymbol{x},t)\\&-g_i^{\mathrm{eq}}(T(\boldsymbol{x},t),\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t))],\end{aligned} \tag{7}$$

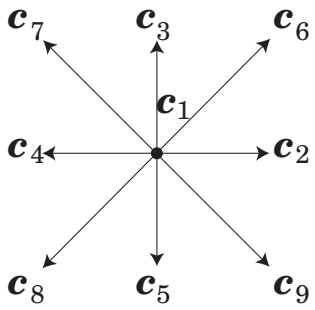


Fig. 1　Two-dimensional 9-velocity model.

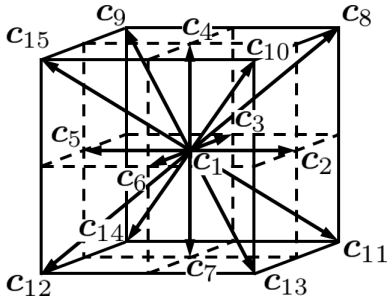


Fig. 2　Three-dimensional 15-velocity model.

ここで，Δx は格子間隔，Δt は時間刻み，τ_f, τ_g は緩和時間である．また式 (6)，(7) 中の局所平衡分布関数 f_i^{eq}, g_i^{eq} は次式で与えられる．

$$f_i^{\mathrm{eq}}(p,\boldsymbol{u}) = E_i\left[3p + 3\boldsymbol{c}_i\cdot\boldsymbol{u} + \frac{9}{2}(\boldsymbol{c}_i\cdot\boldsymbol{u})^2 - \frac{3}{2}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}\right], \quad (8)$$

$$g_i^{\mathrm{eq}}(T,\boldsymbol{u}) = E_i T\left(1 + 3\boldsymbol{c}_i\cdot\boldsymbol{u}\right), \quad (9)$$

ここで，E_i は，2 次元 9 速度モデルでは

$$\begin{aligned} &E_1 = 4/9, \\ &E_2 = \cdots = E_5 = 1/9, \\ &E_6 = \cdots = E_9 = 1/36, \end{aligned} \quad (10)$$

3 次元 15 速度モデルでは

$$\begin{aligned} &E_1 = 2/9, \\ &E_2 = \cdots = E_7 = 1/9, \\ &E_8 = \cdots = E_{15} = 1/72, \end{aligned} \quad (11)$$

で与えられる．巨視的変数である圧力 p，流速 $\boldsymbol{u}$ および温度 T は，以下のように計算される．

$$p = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{b} f_i, \quad (12)$$

$$\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{b} \boldsymbol{c}_i f_i, \quad (13)$$

$$T = \sum_{i=1}^{b} g_i, \quad (14)$$

ここで，2 次元では $b = 9$，3 次元では $b = 15$ である．動粘性係数 ν，温度伝導係数 α および熱伝導係数 λ は，以下のように与えられる．

$$\nu = \frac{1}{3}\left(\tau_f - \frac{1}{2}\right)\Delta x, \quad (15)$$

$$\alpha = \frac{1}{3}\left(\tau_g - \frac{1}{2}\right)\Delta x, \quad (16)$$

$$\lambda = \frac{1}{3}\tau_g \Delta x. \quad (17)$$

なお，外力および熱量を考慮する場合では，$\boldsymbol{g}$ を体積力，q を熱量とすると以下のように時間発展する．

1. 外力，熱量なしで時間発展する．

$$\begin{aligned} f_i^*(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}_i\Delta x, t + \Delta t) =& f_i(\boldsymbol{x},t) - \frac{1}{\tau_f}[f(\boldsymbol{x},t) \\ &- f_i^{\mathrm{eq}}(p(\boldsymbol{x},t),\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t))], \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} g_i^*(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}_i\Delta x, t + \Delta t) =& g_i(\boldsymbol{x},t) - \frac{1}{\tau_g}[g(\boldsymbol{x},t) \\ &- g_i^{\mathrm{eq}}(T(\boldsymbol{x},t),\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t))]. \end{aligned} \quad (19)$$

2. f_i^*, g_i^* を外力，熱量によって補正する．

$$f_i(\boldsymbol{x}, t + \Delta t) = f_i^*(\boldsymbol{x}, t + \Delta t) + 3\Delta x E_i \boldsymbol{c}_i \cdot \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, t + \Delta t), \quad (20)$$

$$g_i(\boldsymbol{x}, t + \Delta t) = g_i^*(\boldsymbol{x}, t + \Delta t) + \frac{\alpha}{\lambda}\Delta x E_i q(\boldsymbol{x}, t + \Delta t), \quad (21)$$

ここで，λ/α は見かけの熱容量である．

2.3. 埋め込み境界法

本研究では，任意形状の境界上ですべりなし境界条件および等温境界条件を満たすために，IBM を用いる．流れ場における IBM は，境界の内外が同種の非圧縮性粘性流体で満たされているとみなし，境界近傍に適切な体積力を加えることにより，境界上でのすべりなし境界条件を満足させる方法である．同じく，温度場における IBM は，境界近傍に適切な熱量を加えることにより，境界上の等温境界条件を満足させる方法である．

2.3.1. 流れ場に対する埋め込み境界法

本研究では，流れ場に対する IBM として，Suzuki et al. [11] による応力テンソルの不連続に基づく埋め込み境界–格子ボルツマン法 (immersed boundary–lattice Boltzmann method: IB-LBM) を用いる．

この手法において，Suzuki et al. は流線が境界を貫通してしまう問題を解決するために，Smoothed-Profile Method

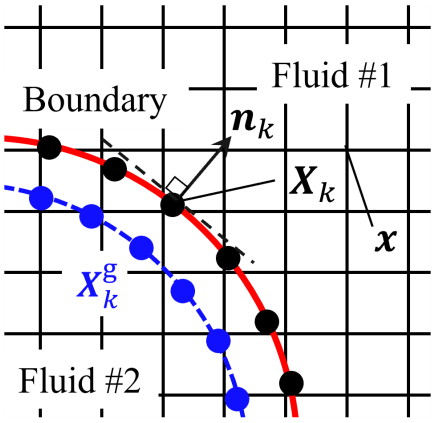


Fig.3　Illustration of boundary Lagrangian points $\boldsymbol{X}_k$, ghost points $\boldsymbol{X}_k^{\mathrm{g}}$, unit normal vector $\boldsymbol{n}_k$ to the boundary at $\boldsymbol{X}_k$, and lattice points $\boldsymbol{x}$.

(SPM) [14] を用いた前処理を行った．SPM は，物体内部の流体（内部流体）の速度を，物体自身の速度に強制するように，内部流体に体積力を加える手法である．その体積力の分布が，物体内部と外部で滑らかにつながるように，滑らかなプロファイル関数を使っていることが特徴である．しかし，本研究では物体が変形するためプロファイル関数を定義することができない．そこで本研究では，物体の内部に仮想的な境界を設定し，適切な体積力を加え，すべりなし条件を強制することで物体内部の流速を物体自身の速度に強制する前処理を行う．

はじめに，時刻 t における物体境界と共に移動する境界点とその速度，およびその点における境界の単位法線ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{X}_k$，$\boldsymbol{U}_k$，$\boldsymbol{n}_k$ $(k=1,2,...,N)$ とし，それらの時刻 $(t+\Delta t)$ における値が既知であるとする．なお，境界を隔てて一方の側の流体を流体 1，もう一方の側の流体を流体 2 として，単位法線ベクトルは常に流体 2 から流体 1 へ向かう方向とする（Fig. 3 参照）．次に，境界の内側の法線方向に格子間隔ずつ離れた点を内部点 $\boldsymbol{X}_k^{\mathrm{g}}$ $(k=1,2,\ldots,N)$ として以下の様に定義する．

$$\boldsymbol{X}_k^{\mathrm{g}} = \boldsymbol{X}_k - \Delta x \boldsymbol{n}_k. \tag{22}$$

内部点は流線の貫通を防ぐためのものであり，そのために強制すべき速度を設定する．ここでは，内部点上の強制すべき速度 $\boldsymbol{U}_k^{\mathrm{g}}$ $(k=1,2,...,N)$ は境界点の速度 $\boldsymbol{U}_k$ と等しいものとする．前処理のための内部点 $\boldsymbol{U}_k^{\mathrm{g}}$ における体積力の決定には，Wang et al. [15] により提案された Multi-Direct Forcing Method (MDFM) を用いる．また，MDFM [15] では境界上のすべりなし条件を強く強制するために反復計算を行う．予備計算より，3 回程度の反復ですべりなし条件を十分強制できることがわかっている．このようにして求めた体積力 $\boldsymbol{g}^{\mathrm{pre}}(\boldsymbol{x},t+\Delta t)$ を式 (20) に代入し，補正することで二次的な速度分布関数 $f_i^{**}(\boldsymbol{x},t+\Delta t)$ を求める．

次に，応力テンソルの不連続に基づく IB-LBM により，境界点 $\boldsymbol{X}_k$ における体積力を決定する．前処理後の二次的な速度分布関数 $f_i^{**}(\boldsymbol{x},t+\Delta t)$ が既知であるとする．境界点 $\boldsymbol{X}_k$ は格子点 $\boldsymbol{x}$ に一般には一致しないため，境界点上での二次的な速度分布関数 $f_i^{**}(\boldsymbol{X}_k,t+\Delta t)$ を，以下のように周囲の格子点から内挿して求める．

$$f_i^{**}(\boldsymbol{X}_k,t+\Delta t) = \sum_{\boldsymbol{x}} f_i^{**}(\boldsymbol{x},t+\Delta t) W(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{X}_k)(\Delta x)^d, \tag{23}$$

ここで，2 次元では $d=2$，3 次元では $d=3$ であり，$\sum_{\boldsymbol{x}}$ は全ての格子点 $\boldsymbol{x}$ についての和を表す．また，W は重み関数を表し，3 次元では以下で与えられるような関数である [16]．

$$W(x,y,z) = \frac{1}{\Delta x} w\left(\frac{x}{\Delta x}\right) \cdot \frac{1}{\Delta x} w\left(\frac{y}{\Delta x}\right) \cdot \frac{1}{\Delta x} w\left(\frac{z}{\Delta x}\right), \tag{24}$$

$$w(r) = \begin{cases} \frac{1}{8}\left(3-2|r|+\sqrt{1+4|r|-4r^2}\right), & (|r|\le 1), \\ \frac{1}{8}\left(5-2|r|-\sqrt{-7+12|r|-4r^2}\right), & (1\le|r|\le 2), \\ 0, & (|r|>2). \end{cases} \tag{25}$$

境界点で満たすべき速度分布関数は bounce-back 法 [2] により計算する．しかし，単純に bounce-back 法を適用するだけでは，跳ね返る仮想粒子の速度分布関数の組が境界の向きによって離散的に変わるため，境界上の応力に非物理的な振動が発生してしまうという問題がある．この問題を改善するために，境界の法線ベクトルの角度に応じた bounce-back 条件の緩和を行う [12]．具体的には，流体 1 および 2 が境界点 $\boldsymbol{X}_k$ で満たすべき速度分布関数 $f_i^{[1]}(\boldsymbol{X}_k,t+\Delta t)$ および $f_i^{[2]}(\boldsymbol{X}_k,t+\Delta t)$ を，それぞれ以下のように計算する．

$$f_i^{[1]} = \begin{cases} F_i^{\mathrm{not}}, & (\boldsymbol{n}_k\cdot\boldsymbol{c}_i \le 0), \\ (1-\gamma)F_i^{\mathrm{not}} + \gamma F_i^{\mathrm{bb}}, & (0<\boldsymbol{n}_k\cdot\boldsymbol{c}_i \le |\boldsymbol{c}_i|\sin\chi), \\ F_i^{\mathrm{bb}}, & (\boldsymbol{n}_k\cdot\boldsymbol{c}_i > |\boldsymbol{c}_i|\sin\chi), \end{cases} \tag{26}$$

$$f_i^{[2]} = \begin{cases} F_i^{\mathrm{not}}, & (\boldsymbol{n}_k\cdot\boldsymbol{c}_i \ge 0), \\ (1-\gamma)F_i^{\mathrm{not}} + \gamma F_i^{\mathrm{bb}}, & (-|\boldsymbol{c}_i|\sin\chi \le \boldsymbol{n}_k\cdot\boldsymbol{c}_i < 0), \\ F_i^{\mathrm{bb}}, & (\boldsymbol{n}_k\cdot\boldsymbol{c}_i < -|\boldsymbol{c}_i|\sin\chi), \end{cases} \tag{27}$$

ここで，F_i^{not} と F_i^{bb} は，仮想粒子が bounce-back せず境界を通過した場合の速度分布関数と，bounce-back して境界で跳ね返った場合の速度分布関数であり，以下で定義する．

$$F_i^{\mathrm{not}} = f_i^{**}(\boldsymbol{X}_k,t+\Delta t), \tag{28}$$

$$F_i^{\mathrm{bb}} = f_i^{**}(\boldsymbol{X}_k,t+\Delta t) + 6E_i\boldsymbol{c}_i\cdot\boldsymbol{U}_k, \tag{29}$$

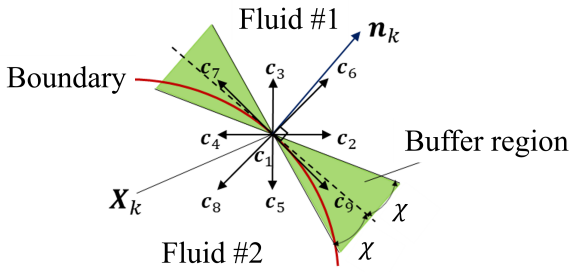


Fig. 4　Illustration of the buffer region for a relaxation of the bounce-back condition.

ここで，$\bar{i}$ は $\boldsymbol{c}_{\bar{i}} = -\boldsymbol{c}_i$ となる番号である．また，χ は bounce-back 条件を緩和する範囲，γ は緩和関数であり，境界の法線ベクトル $\boldsymbol{n}_k$ に応じて連続的に緩和できるように，以下のように求める．

$$\gamma = \frac{|\boldsymbol{n}_k \cdot \boldsymbol{c}_i|}{|\boldsymbol{c}_i| \sin\chi}. \tag{30}$$

これは，境界に接平面から角度 χ だけ傾いた平面の間に出来る領域をバッファ領域（Fig. 4 参照）として，そのバッファ領域中で，境界を通過した場合の速度分布関数と境界で跳ね返った場合の速度分布関数を，重み γ で足し合わせることで，bounce-back 条件を緩和することが狙いである．本研究では，$\chi = 22.5°$ とする [12]．これは，緩和する範囲が狭すぎると応力に非物理的な振動が発生してしまい，逆に広すぎると境界を通過してしまう仮想粒子が多くなり応力が適切に計算出来ないことから，その兼ね合いで決定している．

この $f_i^{[1]}$ および $f_i^{[2]}$ を用いて，流体 1 および 2 の境界点 $\boldsymbol{X}_k$ における応力テンソル $\sigma_{\alpha\beta}^{[1]}(\boldsymbol{X}_k)$ および $\sigma_{\alpha\beta}^{[2]}(\boldsymbol{X}_k)$ が以下のように計算できる．

$$\sigma_{\alpha\beta}^{[\ell]} = -\frac{1}{2\tau_f} p^{[\ell]} \delta_{\alpha\beta} - \frac{\tau_f - 1/2}{\tau_f} \left[\sum_{i=1}^{b} f_i^{[\ell]} (c_{i\alpha} - U_{k\alpha})(c_{i\beta} - U_{k\beta}) - (3p^{[\ell]} - 1) U_{k\alpha} U_{k\beta} \right], \quad (\ell = 1, 2), \tag{31}$$

ここで，$\alpha, \beta = x, y, z$ は総和規約に従い，$p^{[\ell]}$ は，$f_i^{[\ell]}$ を用いて式 (12) から計算される圧力である．

IBM における体積力 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{X}_k, t + \Delta t)$ と，境界における応力テンソルの不連続 $\boldsymbol{\sigma}^{[1]}(\boldsymbol{X}_k) - \boldsymbol{\sigma}^{[2]}(\boldsymbol{X}_k)$ は，

$$\boldsymbol{g} dV = -(\boldsymbol{\sigma}^{[1]} - \boldsymbol{\sigma}^{[2]}) \cdot \boldsymbol{n} dS, \tag{32}$$

で表されるように等価である [11]．そこで式 (32) より，流体 1 および 2 の境界点 $\boldsymbol{X}_k$ における応力テンソルの差から，境界点 $\boldsymbol{X}_k$ で加えるべき体積力を以下のように決定する．

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, t + \Delta t) \Delta V = -[\boldsymbol{\sigma}^{[1]}(\boldsymbol{X}_k) - \boldsymbol{\sigma}^{[2]}(\boldsymbol{X}_k)] \cdot \boldsymbol{n}_k \Delta S, \tag{33}$$

ここで，ΔS は面積要素で，境界の表面積を S とすると，$\Delta S = S/N$ で与えられる．本手法では，$\Delta S \lesssim \Delta x$ となるように境界点の個数 N を決定する．また，体積力は境界点一点にのみ加わるのではなく，境界点近傍の微小な領域に平均的に分布していると考え，その領域の体積を ΔV で表す．本手法では，$\Delta V = \Delta S \times \Delta x$ で与える．

最後に，この体積力を周囲の格子点に以下のように分配する．

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{X}_k, t + \Delta t) = \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{g}(\boldsymbol{X}_k, t + \Delta t) W(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{X}_k) \Delta V, \tag{34}$$

ここで，内挿と同じ重み関数 W を用いている．この分配した体積力を用いて，式 (20) と同様に以下のように速度分布関数を補正する．

$$f_i(\boldsymbol{x}, t + \Delta t) = f_i^{**}(\boldsymbol{x}, t + \Delta t) + 3\Delta x E_i \boldsymbol{c}_i \cdot \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, t + \Delta t). \tag{35}$$

2.3.2. 温度場に対する埋め込み境界法

本研究では，温度場に対する IBM として，Wang et al. [17] による Multi-Direct Heat Source Method を用いる．時刻 t における速度分布関数 $g_i(\boldsymbol{x}, t)$，流速 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$ および温度 $T(\boldsymbol{x}, t)$ が既知であるとすると，これらの値から式 (14)，(21) より，格子点上での一時的な温度 $T^*(\boldsymbol{x}, t + \Delta t)$ が求められる．

Step 0. はじめに，境界点における一時的な温度を計算する．格子点上の温度 $T^*(\boldsymbol{x}, t + \Delta t)$ を用いて境界点上の一時的な温度 $T^*(\boldsymbol{X}_k, t + \Delta t)$ は以下のように内挿される．

$$T^*(\boldsymbol{X}_k, t + \Delta t) = \sum_{\boldsymbol{x}} T^*(\boldsymbol{x}, t + \Delta t) W(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{X}_k) (\Delta x)^d. \tag{36}$$

次に，境界温度 T_k と $T^*(\boldsymbol{X}_k, t + \Delta t)$ の差から境界点に反復の初期において加わる熱量 $q_0(\boldsymbol{X}_k, t + \Delta t)$ を計算する．

$$q_0(\boldsymbol{X}_k, t + \Delta t) = \frac{\lambda}{\alpha} Sh \frac{T_k - T^*(\boldsymbol{X}_k, t + \Delta t)}{\Delta t}, \tag{37}$$

ここで，$Sh (= \Delta t / \Delta x)$ はストローハル数である（付録 A 参照）．この手法は，等温境界条件をより強く強制するために，反復的に熱量を求める．境界点 $\boldsymbol{X}_k$ での反復 l 回までの熱量 $q_l(\boldsymbol{X}_k, t + \Delta t)$ を既知としたとき，以下に示す Step で熱量 $q_{l+1}(\boldsymbol{X}_k, t + \Delta t)$ を導出する．

Step 1. 格子点へ熱量を分配する．

$$q_l(\boldsymbol{x}, t+\Delta t) = \sum_{k=1}^{N} q_l(\boldsymbol{X}_k, t+\Delta t) W(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{X}_k)\Delta V, \tag{38}$$

ここで，熱量は境界点一点にのみ加わるのではなく，境界点近傍の微小な領域に平均的に分布していると考え，流れ場の場合と同様にその領域の体積を ΔV とする．

Step 2. 格子点での温度を補正する．

$$T_l(\boldsymbol{x}, t+\Delta t) = T^*(\boldsymbol{x}, t+\Delta t) + \frac{\alpha}{\lambda}\frac{\Delta t}{Sh} q_l(\boldsymbol{x}, t+\Delta t). \tag{39}$$

Step 3. 境界点での温度を内挿する．

$$T_l(\boldsymbol{X}_k, t+\Delta t) = \sum_{\boldsymbol{x}} T_l(\boldsymbol{x}, t+\Delta t)\, W(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{X}_k)(\Delta x)^d. \tag{40}$$

Step 4. T_k からの残差によって，境界点での熱量を補正する．

$$q_{l+1}(\boldsymbol{X}_k, t+\Delta t) = q_l(\boldsymbol{X}_k, t+\Delta t) + \frac{\lambda}{\alpha} Sh \frac{T_k - T_l(\boldsymbol{X}_k, t+\Delta t)}{\Delta t}. \tag{41}$$

以下，Step の 1 から 4 までを反復することによって，残差を減らしていく．また，文献 [13] によれば，反復回数が 5 回程度で境界上での等温条件を十分強制することができると報告されているため，本論文での反復回数は，$l = 5$ とする．このようにして得られた熱量 $q(\boldsymbol{x}, t+\Delta t)$ を式 (21) に代入し，温度場を計算する．

2.4. 物体が周囲の流体から受ける力およびトルク

物体が境界点 $\boldsymbol{X}_k$ 周りの微小面積を介して周囲の流体から受ける応力 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{X}_k)$ は，物体の外側の流体を流体 1 としたとき，流体 1 の側の応力テンソルを用いて，以下のように計算される．

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{X}_k) = \boldsymbol{\sigma}^{[1]}(\boldsymbol{X}_k) \cdot \boldsymbol{n}_k. \tag{42}$$

また，物体が周囲の流体から受ける正味の力 $\boldsymbol{F}$ は，式 (42) を用いて以下のように計算される．

$$\boldsymbol{F} = \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{P}(\boldsymbol{X}_k)\Delta S. \tag{43}$$

同様にして，物体が周囲の流体から受ける，点 $\boldsymbol{X}_c$ 周りの正味のトルク $\boldsymbol{T}$ は，以下のように計算される．

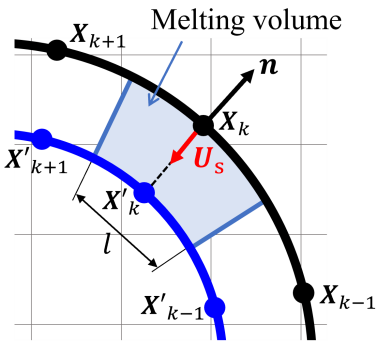


Fig. 5　Illustraion of melting process.

$$\boldsymbol{T} = \sum_{k=1}^{N} (\boldsymbol{X}_k - \boldsymbol{X}_c) \times \boldsymbol{P}(\boldsymbol{X}_k)\Delta S. \tag{44}$$

2.5. 物体の運動計算

物体が流体中を自由に運動するような場合には，式 (43) で与えられる力 $\boldsymbol{F}$ と式 (44) で与えられるトルク $\boldsymbol{T}$ を用いて，物体の運動方程式を計算する．物体の運動方程式の詳細については，文献 [11, 18] を参照されたい．本研究では，物体の運動計算の時間刻みは，流体の運動計算と同じにとり，流体と物体の運動計算を交互に行う弱連成を用いる．また，物体の運動方程式の離散化には，オイラーの陽解法を用いる．

2.6. 融解・凝固の計算

融解・凝固の計算には，Huang and Wu[8] によって提案された手法を用いた．Huang and Wu[8] の手法は，融解・凝固によって生じる体積変化を，境界点 $\boldsymbol{X}_k$ を法線方向の速度 $\boldsymbol{U}_s$ で移動させることで再現する．この $\boldsymbol{U}_s$ は融解・凝固する体積がもつ融解熱と，IBM にて境界点が分配する熱量 q (2.3.2 項参照) が等しいと仮定し導出する．以下に導出方法を示す．本節では融解する場合のみ導出するが，凝固する場合についても同様に計算することができる．

まず，Fig. 5 のようにある時刻において境界が黒線の位置にあり，Δt 後に融解により境界点が速度 $\boldsymbol{U}_s$ で青線へ移動する場合を考える．すなわち，境界点 $\boldsymbol{X}_k$ は $\boldsymbol{X}'_k$ へ移動し，融解体積は Fig. 5 の青帯の領域となる．このとき，境界点間距離 S/N が十分に小さいため，この領域を長方形として近似する．よって融解体積 V_{melt} は，

$$V_{\mathrm{melt}} = -(\boldsymbol{U}_s \cdot \boldsymbol{n})\Delta t \, \frac{S}{N}, \tag{45}$$

となる．ここで，$\boldsymbol{n}$ は単位法線ベクトルである．従って，この領域が放出した融解熱 Q は，

$$Q = \rho_s L V_{\mathrm{melt}} = -\rho_s L (\boldsymbol{U}_s \cdot \boldsymbol{n})\Delta t \, \frac{S}{N}, \tag{46}$$

である．ここで，ρ_s は固相の密度，L は融解潜熱である．

また，IBM によって境界点 $\boldsymbol{X}_k$ が周囲に分配した熱量 Q は，分配する単位時間・単位体積当たりの熱量 $q(\boldsymbol{X}_k, t+\Delta t)$ を用いて，

$$Q = -q(\boldsymbol{X}_k, t+\Delta t)\Delta t \Delta V, \tag{47}$$

となる．

よって，式 (46) と式 (47) の熱量は等しいため，

$$-\rho_s L(\boldsymbol{U}_s \cdot \boldsymbol{n})\Delta t \frac{S}{N} = -q(\boldsymbol{X}_k, t+\Delta t)\Delta t \Delta V, \tag{48}$$

が成り立つ．従って $\boldsymbol{U}_s$ は，

$$\boldsymbol{U}_s = \frac{q(\boldsymbol{X}_k, t+\Delta t)}{\rho_s L}\Delta x\ \boldsymbol{n}, \tag{49}$$

と計算することができる．

2.7. 固液境界における法線ベクトル

応力テンソルの不連続に基づく IB-LBM（2.3.1 項）および融解・凝固の計算（2.6 節）において，固液の境界における単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ を使用している．本研究では，法線ベクトルは，Huang and Wu[8] の二次元の計算法に倣って計算する．境界点 $\boldsymbol{X}_k$ における番号が増えていく方向の接線ベクトル $\boldsymbol{\tau}_k$ は，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\tau}_k &= \begin{pmatrix} \tau_x \\ \tau_y \end{pmatrix} \\ &= \frac{\delta_{k-1}^2 [\boldsymbol{X}_{k+1} - \boldsymbol{X}_k] + \delta_k^2 [\boldsymbol{X}_k - \boldsymbol{X}_{k-1}]}{\delta_{k-1}\delta_k(\delta_{k-1}+\delta_k)},\end{aligned} \tag{50}$$

となる．ここで δ_k は k 番目の境界点と $k+1$ 番目の境界点との距離である．Fig. 5 のように，境界点 $\boldsymbol{X}_k$ の番号が増えていく方向に対して右側の領域を液相，左側の領域を固相とすると，法線ベクトル $\boldsymbol{n}_k$ は，接線ベクトル $\boldsymbol{\tau}$ を時計回りに回転させる方向なので，

$$\boldsymbol{n}_k = \frac{1}{\sqrt{\tau_x^2 + \tau_y^2}} \begin{pmatrix} \tau_y \\ -\tau_x \end{pmatrix}, \tag{51}$$

と計算することができる．液相と固相の位置が逆の場合は，上式の逆方向となる．

3. 妥当性検証

本手法の妥当性を確認するために，Huang and Wu[8] を参考に，一次元領域における融解・凝固問題，二次元正方領域における融解・凝固問題，二次元円管領域における融解・凝固問題，三次元半無限領域における融解・凝固問題の解析を行った．

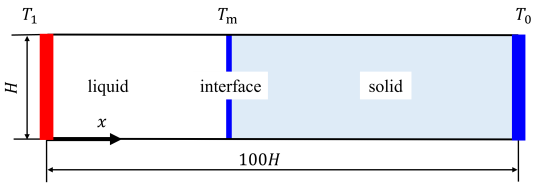


Fig. 6　Computational domain for a one-dimensional melting problem in a semi-infinite area.

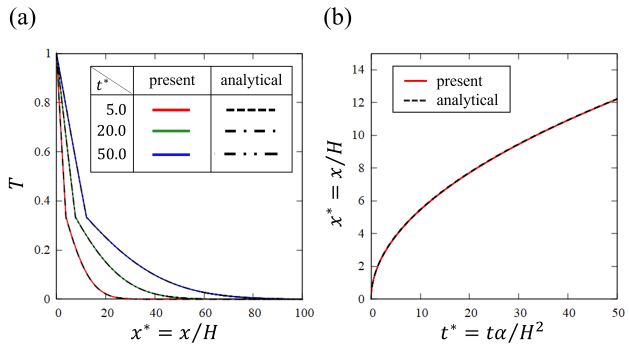


Fig. 7　Comparisons between the present numerical results and analytical solutions: (a) temperature; (b) location of solid–liquid interface.

3.1. 一次元領域における融解・凝固問題

3.1.1. 計算条件

無限に長い一次元領域内が，初期においてすべて固相で満たされており，温度が $T_0 = 0$ で一様であるとする（Fig. 6 参照）．この系の左端を $T_1 = 1$ で加熱することにより，固相が液相へと融解する計算を行う．本手法は二次元領域を扱うため，領域を縦 H，横 $100H$ とすることで無限に長い一次元領域を再現する．境界条件として，流れ場に対しては左右の壁にはすべりなし条件，上下壁には周期境界条件を適用し，温度場に対しては左壁には $T = T_1$，右壁には $T = T_0$ の等温条件，上下壁には周期境界条件を適用する．また，凝固点温度は $T_m = 1/3$ とする．支配パラメータは，液相のステファン数 $St_l = c_{pf}(T_1 - T_m)/L$，固相のステファン数 $St_s = c_{pf}(T_m - T_0)/L$ である．ここで，c_{pf} は定圧比熱である．本計算においては，それぞれ $St_l = 0.2$，$St_s = 0.1$ とし，その他のパラメータを $H = 10\Delta x$，$\alpha = 0.05\Delta x$，$c_{pf} = 13.3$，$L = 44.3$ とした．なお，c_{pf} の値は見かけの熱容量 λ/α から算出した．

3.1.2. 厳密解

熱物性値が固相と液相で一定である場合，固液境界の位置は以下の式で求めることができる [19]．

$$X_k(t) = 2k\sqrt{\alpha t}, \tag{52}$$

ここで，k は以下の方程式より求まる値である．

$$\frac{St_l}{\exp(k^2)\mathrm{erf}(k)} - \frac{St_s}{\exp(k^2)\mathrm{erfc}(k)} = k\sqrt{\pi}, \tag{53}$$

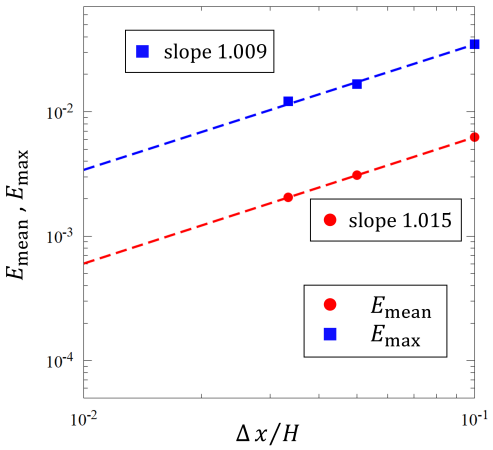


Fig. 8　Mean error E_{mean} and maximum error E_{max} of the temperature in a one-dimentional melting problem.

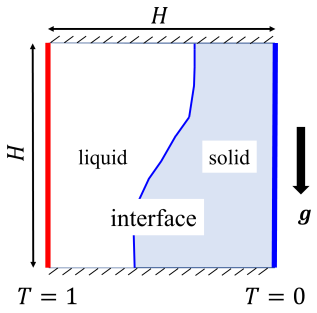


Fig. 9　Computational domain for a two-dimensional melting problem in a square area.

ここで，$\mathrm{erf}(k)$ は誤差関数，$\mathrm{erfc}(k)(= 1 - \mathrm{erf}(k))$ は相補誤差関数である．また，温度分布は以下の式で求めることができる [19]．

$$T(x,t) = \begin{cases} T_1 - \dfrac{(T_1 - T_{\mathrm{m}})\mathrm{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right)}{\mathrm{erf}(k)}, \\ \qquad\qquad (0 < x \le X_k(t),\ t > 0), \\ T_0 + \dfrac{(T_{\mathrm{m}} - T_0)\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right)}{\mathrm{erfc}(k)}, \\ \qquad\qquad (x \ge X_k(t),\ t > 0). \end{cases} \tag{54}$$

3.1.3. 計算結果と厳密解の比較

本計算結果と，式 (52) および (54) で求められる値との比較を行う．まず，温度場の比較結果を Fig. 7(a) に示す．Fig. 7(a) より，どの時刻においても温度場が良く一致していることがわかる．次に，固液境界の位置の比較結果を Fig. 7(b) に示す．Fig. 7(b) より，境界の位置が良く一致していることがわかる．よって，一次元領域において本手法の妥当性を確認することができる．

最後に，Fig. 8 に温度場に対する誤差評価の結果を示す．図中の E_{mean}，E_{max} はそれぞれ平均誤差，最大誤差を表している．Fig. 8 よりこの計算手法が，最大誤差と平均誤差の両方について空間一次精度をもつことがわかった．

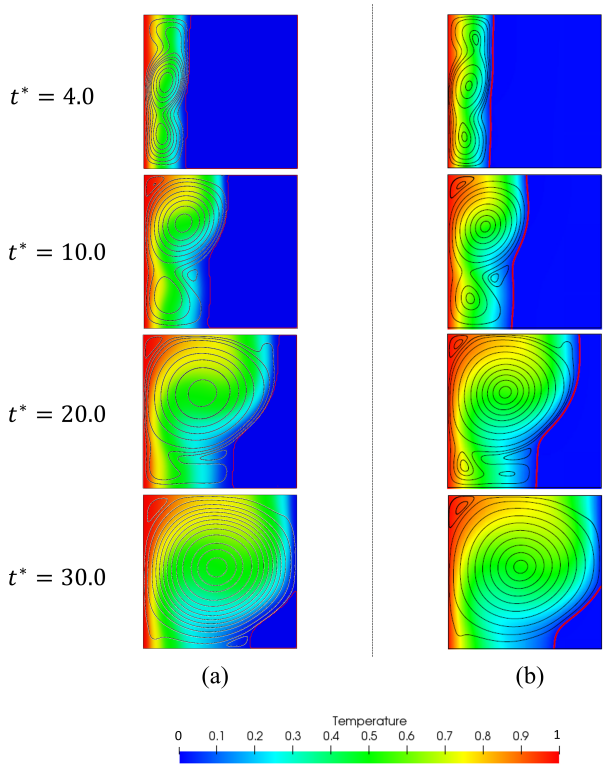


Fig. 10　Temperature and flow fields at $t^* = 4.0$, 10.0, 20.0 and 30.0: (a) the present results; (b) the results by Huang and Wu[8] ($t^* = \alpha t/H^2$). The red solid line denotes the location of solid–liquid interface.

3.2. 二次元正方領域における融解・凝固問題

3.2.1. 計算条件

一辺の長さが H の正方領域中が，初期においてすべて固相で満たされ，凝固点温度 $T_0 = 0$ で一様であるとする（Fig. 9 参照）．この領域の左壁を $T_1 = 1$ で加熱することにより，固相が液相へと融解する計算を行う．また，下向きに重力加速度 g が作用するため，液相内には熱膨張による自然対流が発生する．境界条件として，流れ場に対してはすべての壁ですべりなし条件を適用し，温度場に対しては，左壁には $T_1 = 1$，右壁には $T_0 = 0$ の等温条件，上下の壁には断熱条件を適用する．固相の表面には，IBM によりすべりなし境界条件および等温境界条件 $T = T_0$ を適用する．支配パラメータは，プラントル数 $Pr = \nu/\alpha$，レイリー数 $Ra = g\beta(T_1 - T_0)H^3/(\nu\alpha)$ およびステファン数 $St = c_{\mathrm{pf}}(T_1 - T_0)/L$ である．ここで，β は体積膨張率である．本計算では，$Pr = 0.02$，$Ra = 2.5 \times 10^4$，$St = 0.01$ とし，その他のパラメータを $H = 128\Delta x$，$\nu = 0.00859\Delta x$，$\alpha = 0.429\Delta x$，$g\beta\Delta x = 4.39 \times 10^{-5}$，$c_{\mathrm{pf}} = 1.39$，$L = 139$ とした．なお，c_{pf} の値は見かけの熱容量 λ/α から算出した．

3.2.2. 計算結果

まず，各無次元時間における温度場の様子を Fig. 10 に示す．同図には，(a) に本計算結果，(b) に Huang and Wu[8] の結果を示す．また，いずれの結果も流れ場を流線で表している．Fig. 10 より，温度場および流れ場が定性的によく一致していることがわかる．

固液境界の時間変化を Fig. 11(a) に示す．Fig. 11(a) より，

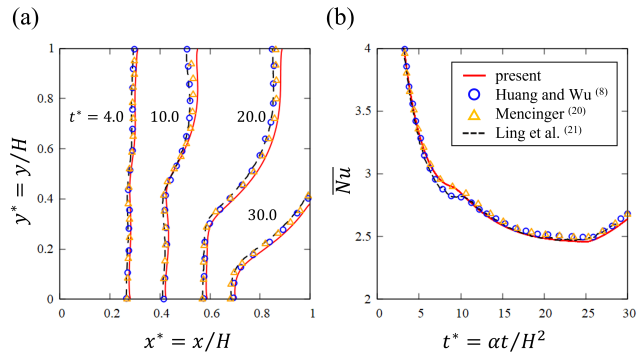


Fig. 11　(a) Comparisons of the location of the solid–liquid interface at $t^* = 4.0,\ 10.0,\ 20.0$ and 30.0 ($t^* = \alpha t/H^2$); (b) time variations of the averaged Nusselt number on the left wall of the cavity.

どの無次元時刻においても境界の位置が既存の研究と良く一致していることがわかる．次に，以下の式で定義される左壁面の平均ヌッセルト数を比較した．

$$\overline{Nu} = \frac{1}{H}\int_0^H \left[-\frac{H}{(T_1 - T_0)} \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0} \right] dy. \tag{55}$$

結果を Fig. 11(b) に示す．Fig. 11(b) より，本計算結果と既存の研究が良く一致していることがわかる．よって，二次元領域での固相が自由運動しない場合において妥当性を確認することができた．

3.3. 二次元円管領域における融解・凝固問題

3.3.1. 計算条件

計算領域は一辺の長さが $D+d$ の正方領域とし，その内部に埋め込み境界法によって直径 $D+2\xi$ の円管を設ける（Fig. 12 参照）．その円管内部が初期においてすべて固相で満たされ，凝固点温度 $T_0 = 0$ で一様であるとする．そして，円管壁面を $T_1 = 1$ で加熱することで，徐々に固相が液相へと融解する計算を行う．本研究では，固相が計算領域の中心に固定されている場合と自由運動する場合の計算を行った．また，下向きに重力加速度 g が作用するため，液相内には熱膨張による自然対流が発生する．しかし，固相の密度は液相の密度と等しいものとするため，重力は固相の運動に影響を与えない．境界条件として，IBM によって円管壁面にはすべりなし条件と等温条件 $T = T_1$，固相表面にはすべりなし条件と等温条件 $T = T_0$ を適用する．また，円管外の壁については鏡面条件と断熱条件を適用する．

支配パラメータはプラントル数 $Pr = \nu/\alpha$，レイリー数 $Ra = g\beta(T_1 - T_0)D^3/(\nu\alpha)$，およびステファン数 $St = c_{\mathrm{pf}}(T_1 - T_0)/L$ である．本計算では，$Pr = 0.02$，$Ra = 2.5 \times 10^4$，$St = 0.01$ とし，その他のパラメータを $D = 128\Delta x$，$\xi = 2\Delta x$，$\nu = 0.00859\Delta x$，$\alpha = 0.429\Delta x$，$g\beta\Delta x = 4.39 \times 10^{-5}$，$c_{\mathrm{pf}} = 1.39$，$L = 139$ とした．なお，c_{pf} の値は見かけの熱容量 λ/α から算出した．

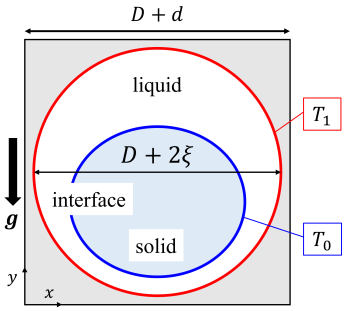


Fig. 12　Computational domain for a two-dimensional melting problem in a circular cylinder.

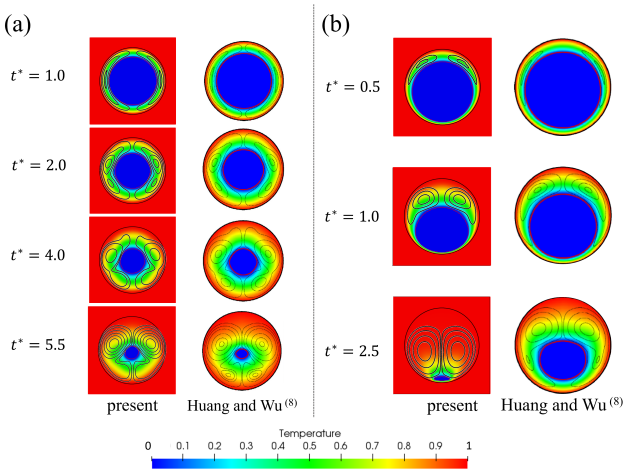


Fig. 13　Temperature and flow fields: (a) the solid phase is fixed; (b) the solid phase is free ($t^* = \alpha t/D^2$).The red solid line denotes the location of solid–liquid interface.

3.3.2. 計算結果

まず，各無次元時間における温度場の様子を Huang and Wu[8] の結果と比較したものを Fig. 13 に示す．同図には，(a) では固相が固定されている場合，(b) では固相が自由運動する場合の結果を示しており，いずれの結果も流れ場は流線で表されている．Fig. 13(a) より，固相が固定されている場合では，温度場および流れ場が定性的によく一致していることがわかる．その一方で，Fig. 13(b) から，固相が自由運動する場合では，Huang and Wu[8] の結果に比べ本計算結果の固相の融解が早く進んでいることがわかる．

次に，円管壁面の平均ヌッセルト数の比較を行う．なお，平均ヌッセルト数は以下のように計算される [13]．

$$\overline{Nu} = \frac{Q_{\mathrm{tot}}}{\pi\lambda(T_1 - T_0)}, \tag{56}$$

ここで，Q_{tot} は円管壁面において，IBM によって境界点が周囲に分配した熱量の総和である．Fig. 14 に平均ヌッセルト数の時間変化を示す．同図には，(a) では固相が固定されている場合，(b) では固相が自由運動する場合の結果を示している．Fig. 14(a) より，固相が固定されている場合では，本計算結果が既存の研究結果とよく一致することがわかる．し

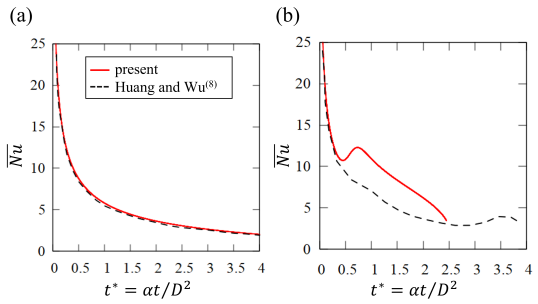


Fig. 14　Time variations of the space-averaged Nusselt number on the circular cylinder wall: (a) the solid phase is fixed; (b) the solid phase is free.

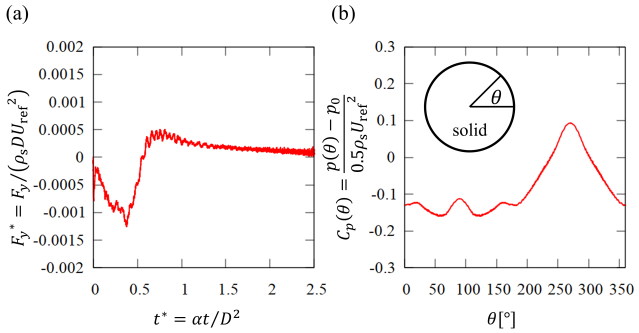


Fig. 15　(a) Time variation of the fluid force acting on the ice particle; (b) distribution of the pressure coefficient at $t^* = 0.5$.

かし Fig. 14(b) より，固相が自由運動する場合では，本計算結果と既存の研究結果では定量的にも差異があることがわかる．これは，固相が受ける流体力が手法によって異なり，結果的に固相の運動が異なることに起因する．ただし，Huang and Wu[8] の手法では，内部質量の影響 [18] を計算していないため，流体力を正しく評価できていないと考えられることに注意する．また，Huang and Wu[8] の手法では，固相の変形に伴い，境界点 $\boldsymbol{X}_k$ の個数を増減させる処理を行っているのに対し，本手法では，この処理は行っていない．しかし，固相が固定されている場合の結果は Huang and Wu[8] の結果と良い一致を示していることから，この処理の影響はほとんどない．従って，固相が自由運動する場合における，本計算結果と Huang and Wu[8] の結果の差異に，この処理は関係していないと考えられる．

最後に，固相が自由運動する場合について，固相にかかる流体力を調べた．Fig. 15(a) に流体力の時間変化を示す．Fig. 15(a) より，若干の時間的振動があるものの流体力を計算できていることが確認できた．また，Fig. 15(b) より，局所的な圧力も計算できることが確認できた．

3.4. 三次元半無限領域における融解・凝固問題

3.4.1. 計算条件

無限に長い三次元領域内が，初期においてすべて固相で満たされており，温度が $T_0 = 0$ で一様であるとする（Fig. 16 参照）．この系の左端を $T_1 = 1$ で加熱することにより，固相が液相へと融解する計算を行う．この計算は 3.1 節の問題と

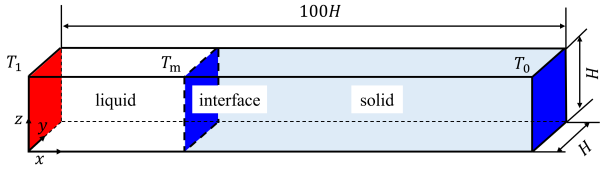


Fig. 16　Computational domain for a three-dimensional melting problem in a semi-infinite area.

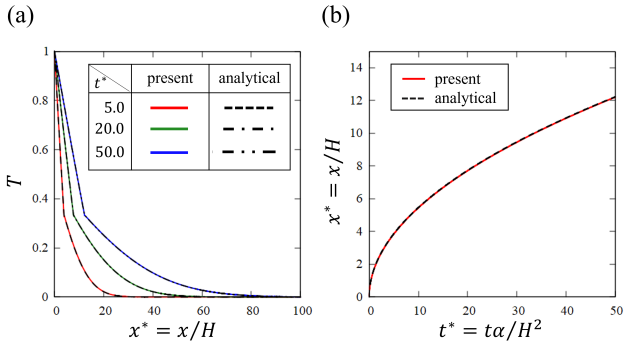


Fig. 17　Comparisons between the present method and analytical solutions: (a) temperature; (b) location of solid–liquid interface.

本質的には同じであるが，三次元計算であることに注意する．また，この問題では温度場の計算に optimal two-relaxation-times thermal LBM[22] を用いる．本計算では，領域を縦 H，横 $100H$，高さ H とすることで無限に長い三次元領域を再現する．境界条件として，流れ場に対しては左右の壁にはすべりなし条件，上下および左右壁には周期境界条件を適用し，温度場に対しては左壁には $T = T_1$，右壁には $T = T_0$ の等温条件，上下および左右壁には周期境界条件を適用する．また，凝固点温度は $T_m = 1/3$ とする．支配パラメータ，その他のパラメータは 3.1 節と同様に設定する．

また，この計算は三次元計算であるため，2.7 節に示した二次元の固液境界上の法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ の計算方法を用いることができない．そこで，境界点 $\boldsymbol{X}_k$ の近傍の境界点の相対位置ベクトルを計算し，それらの外積から法線ベクトルを求める．

3.4.2. 計算結果

本計算結果と，式 (52) および (54) で求められる値との比較を行う．まず，温度場の比較結果を Fig. 17(a) に示す．Fig. 17(a) より，どの時刻においても温度場が良く一致していることがわかる．次に，固液境界の位置の比較結果を Fig. 17(b) に示す．Fig. 17(b) より，境界の位置が良く一致していることがわかる．よって，三次元の一様な領域において本手法の妥当性を確認することができる．また，3.1 節同様に誤差の収束性を確認したところ，空間一次精度をもつことがわかった．

4. 結言

応力テンソルの不連続に基づく埋め込み境界–格子ボルツマン法 [11] に対して，温度場の計算 [13] と融解・凝固によ

る境界の移動計算 [8] を導入し，融解・凝固を伴う熱流動問題を解析する新たな手法の開発および妥当性検証を行った．一次元半無限領域，二次元正方領域および三次元半無限領域における融解・凝固問題の解析を行い，解析解および既存の研究結果とよく一致することを確認した．よって固相が固定されている場合における妥当性を得た．二次元円管領域における融解・凝固問題では，Huang and Wu [8] の結果と，流体力の計算方法に起因すると考えられる差異があった．しかし，本研究で開発した手法を用いて，変形する固相にかかる流体力を計算できることを確認できた．

今後の課題として，三次元問題への拡張，および氷スラリー流れなどへの応用が挙げられる．

謝辞

本研究の一部は，JSPS 科研費 JP21K03873 の助成を受けたものです．

付録 A　無次元量の定義

本手法で用いる無次元変数の定義を以下に示す．使用される物理量はすべて，代表長さ $\hat{L}_0$，粒子の代表速さ $\hat{c}$，時間スケール $\hat{t}_0 = \hat{L}_0/\hat{U}_0$（$\hat{U}_0$: 流れの代表速さ），基準密度 $\hat{\rho}_\mathrm{f}$，基準温度差 $\Delta\hat{T}_0$，基準温度 $\hat{T}_0$ および定圧比熱 $\hat{c}_\mathrm{pf}$ を用いて無次元化したものである．

$$
\left.
\begin{array}{ll}
\boldsymbol{c}_i = \hat{\boldsymbol{c}}_i/\hat{c}, & \boldsymbol{x} = \hat{\boldsymbol{x}}/\hat{L}_0, \\
t = \hat{t}/\hat{t}_0, & \Delta x = \Delta\hat{x}/\hat{L}_0, \\
\Delta t = \Delta\hat{t}/\hat{t}_0, & f_i = \hat{f}_i/\hat{\rho}_\mathrm{f}, \\
g_i = (\hat{g}_i - \hat{T}_0)/\Delta\hat{T}_0, & \rho = \hat{\rho}/\hat{\rho}_\mathrm{f}, \\
p = \hat{p}/(\hat{\rho}_\mathrm{f}\hat{c}^2), & \boldsymbol{u} = \hat{\boldsymbol{u}}/\hat{c}, \\
T = (\hat{T} - \hat{T}_0)/\Delta\hat{T}_0, & \nu = \hat{\nu}/(\hat{c}\hat{L}_0), \\
\alpha = \hat{\alpha}/(\hat{c}\hat{L}_0), & \lambda = \hat{\lambda}/(\hat{\rho}_\mathrm{f}\hat{c}_\mathrm{pf}\hat{c}\hat{L}_0), \\
\boldsymbol{g} = \hat{\boldsymbol{g}}\hat{L}_0/(\rho_\mathrm{f}\hat{c}^2), & q = \hat{q}\hat{L}_0/(\hat{\rho}_\mathrm{f}\hat{c}_\mathrm{pf}\Delta\hat{T}_0\hat{c}), \\
\boldsymbol{X}_k = \hat{\boldsymbol{X}}_k/\hat{L}_0, & \boldsymbol{U}_k = \hat{\boldsymbol{U}}_k/\hat{c}, \\
T_k = (\hat{T}_k - \hat{T}_0)/\Delta\hat{T}_0, & L = \hat{L}/(\hat{c}_\mathrm{pf}\Delta\hat{T}_0), \\
\boldsymbol{F} = \hat{\boldsymbol{F}}/(\hat{\rho}_\mathrm{f}\hat{c}^2\hat{L}_0^2), & \boldsymbol{T} = \hat{\boldsymbol{T}}/(\hat{\rho}_\mathrm{f}\hat{c}^2\hat{L}_0^3), \\
\beta = \hat{\beta}\Delta\hat{T}_0, &
\end{array}
\right\} \quad (57)
$$

ここで，$\hat{}$ は有次元量を表す．なお，ストローハル数 Sh を $Sh = \hat{U}_0/\hat{c}$ と定義すると，$Sh = \Delta t/\Delta x$ であることに注意されたい．

参考文献

(1) J. Wang, F. Battaglia, S. Wang, T. Zhang and Z. Ma: Flow and heat transfer characteristics of ice slurry in typical components of cooling systems: A review, Int. J. Heat Mass Transf., **141** (2019), pp. 922–939.

(2) 稲室隆二，吉野正人，鈴木康祐: 格子ボルツマン法入門-複雑境界および移動境界流れの数値計算法，丸善出版，(2020).

(3) R. Samanta, H. Chattopadhyay and C. Guha: A review on the application of lattice Boltzmann method for melting and solidification problems, Compt. Mater. Sci., **206** (2022), 111288 (22pp).

(4) W.-S. Jiaung, J.-R. Ho and C.-P. Kuo: Lattice-Boltzmann method for the heat conduction problem with phase change, Numer. Heat Transf. Part B Fundam., **30** (2001), pp. 167–187.

(5) M. Jourabian, A.A.R. Darzi, O.A. Akbari and D. Toghraie: The enthalpy-based lattice Boltzmann method (LBM) for simulation of NePCM melting in inclined elliptical annulus, Physica A, **548** (2020), 123887 (16pp).

(6) W. Miller, S. Succi and D. Mansutti: Lattice Boltzmann model for anisotropic liquid–solid phase transition, Phys. Rev. Lett., **86** (2001), pp. 3578–3581.

(7) R. Rojas, T. Takaki and M. Ohno: A phase-field-lattice Boltzmann method for modeling motion and growth of a dendrite for binary alloy solidification in the presence of melt convection, J. Comput. Phys., **298** (2015), pp. 29–40.

(8) R. Huang and H. Wu: An immersed boundary–thermal lattice Boltzmann method for solid–liquid phase change, J. Comput. Phys, **277** (2014), pp. 305–319.

(9) K. Suzuki, T. Kawasaki, T. Asaoka and M. Yoshino: Numerical simulations of solid–liquid and solid–solid interactions in ice slurry flows by the thermal immersed boundary–lattice Boltzmann method, Int. J. Heat Mass Transf., **121** (2018), pp. 1099–1117.

(10) K. Suzuki, T. Kuroiwa, T. Asaoka and M. Yoshino: Particle-resolved simulations of ice slurry flows in a square duct by the thermal immersed boundary–lattice Boltzmann method, Comput. Fluids, **228** (2021), 105064(18pp).

(11) K. Suzuki and M. Yoshino: A stress tensor discontinuity-based immersed boundary–lattice Boltzmann method, Comput. Fluids, **172** (2018), pp. 593–608.

(12) K. Suzuki, K. Ishizaki and M. Yoshino: Local force calculations by in improved stress tensor discontinuity-based immersed boundary–lattice Boltzmann method, Phys. Fluids, **33** (2021), 047104(17pp).

(13) K. Suzuki, T. Kawasaki, N. Furumachi, Y. Tai and M. Yoshino: A thermal immersed boundary–lattice Boltzmann method for moving-boundary flows with Dirichlet and Neumann conditions, Int. J. Heat Mass Transf., **121** (2018), pp. 1099–1117.

(14) Y. Mino, H. Shinto, S. Sakai and H. Matsuyama: Effect of internal mass in the lattice Boltzmann simulation of moving solid bodies by the smoothed-profile method, Phys. Rev. E, **95** (2017), 043309(10pp).

(15) Z.L. Wang, J.R. Fan and K. Luo: Combined multi-direct forcing and immersed boundary method for simulating flows with moving particles, Int. J. Multiphase Flow, **34** (2008), pp. 283–302.

(16) C.S. Peskin: The immersed boundary method, Acta Numer., **11** (2002), pp. 479–517.

(17) Z.L. Wang, J.R. Fan, K. Luo and K Cen: Immersed boundary method for the simulation of flows with heat transfer, Int. J. Heat Mass Transf., **52** (2009), pp. 4510–4518.

(18) K. Suzuki and T. Inamuro: Effect of internal mass in the simulation of a moving body by the immersed boundary method, Comput. Fluids, **49** (2011), pp. 173–187.

(19) A. Solomon: Some remarks on the Stefan problem, Math. Comput., **20** (1996), pp. 347–360.

(20) J. Mencinger: Numerical simulation of melting in two-dimensional cavity using adaptive grid, J. Comput. Phys., **198** (2004), pp. 243–264.

(21) K. Ling and W.Q. Tao: A sharp-interface model coupling VOSET and IBM for simulations on melting and solidification, Comput. Fluids, **178** (2019), pp. 113–131.

(22) I. Ginzburg, D. d'Humières and A. Kuzmin: Optimal stability of advection-diffusion lattice Boltzmann models with two relaxation times for positive/negative equilibrium, J. Stat. Phys., **139** (2010), pp. 1090–1143.

計算数理工学論文集 Vol. 22 (2022 年 12 月)，論文 No. 08-221216 JASCOME

Dirichlet-to-Neumann 有限要素法と Sakurai–Sugiura 法に基づく 3 次元音響導波路の複素固有値解析

COMPLEX EIGENVALUE ANALYSIS OF THREE-DIMENSIONAL ACOUSTIC WAVEGUIDES BASED ON A DIRICHLET-TO-NEUMANN FINITE ELEMENT METHOD AND SAKURAI–SUGIURA METHOD

松島　慶 [1)]，野口　悠暉 [2)]，山田　崇恭 [3)]

Kei MATSUSHIMA, Yuki NOGUCHI and Takayuki YAMADA

1) 東京大学大学院工学系研究科　(〒 113-8656　東京都文京区弥生 2-11-16,　E-mail: matsushima@mech.t.u-tokyo.ac.jp)
2) 東京大学大学院工学系研究科　(〒 113-8656　東京都文京区弥生 2-11-16,　E-mail: noguchi@mech.t.u-tokyo.ac.jp)
3) 東京大学大学院工学系研究科　(〒 113-8656　東京都文京区弥生 2-11-16,　E-mail: t.yamada@mech.t.u-tokyo.ac.jp)

In this paper, we propose a numerical method for calculating complex eigenvalues of semi-infinite acoustic waveguides based on a finite element method and the Dirichlet-to-Neumann (DtN) map. We first show that the DtN map is given by the transverse modal expansion in a homogeneous waveguide with an arbitrary cross section. Subsequently, the DtN map is incorporated into the variational equation of the Helmholtz equation, which yields a nonlinear eigenvalue problem in terms of the complex frequency. We solve this nonlinear eigenvalue problem using Sakurai–Sugiura method. Finally, we demonstrate some numerical examples to verify the proposed method.

Key Words: Complex Eigenvalue, Waveguide, Helmholtz Equation, Finite Element Method, Sakurai–Sugiura Method

1. 緒言

電磁波・音波・弾性波などの波の伝搬・散乱の特性は，系の固有値（固有周波数）と密接に関係していることが知られている．例えば，エネルギーの損失・利得がない系（エルミート系）では時間調和を仮定して得られる周波数域での境界値問題の固有値はすべて実数であり，この周波数で境界値問題の一意可解性は失われる．これは物理現象の共鳴に対応し，固有値が実数であることは共鳴の Q 値と寿命が無限大であることを意味する．一方，非エルミート系，すなわち系に損失あるいは利得がある場合，一般に境界値問題の固有値は複素数となる．この固有値の虚部の大きさは共鳴の減衰あるいは発散の速さを表し，時間域における散乱問題の解の性質は固有値の複素平面内の分布に大きく依存することになる．

特に，非エルミート系の複素固有値と共鳴は近年注目を集めている分野である．例えば，非エルミート系では固有値と対応する固有モードが同時に重複し得ることが報告されており，このような特異な重複が生じるパラメータ空間上の点は例外点（非エルミート縮退点）と呼ばれる [1]．固有関数が完全正規直交系を成す通常のエルミート系では生じ得ない現象であり，非エルミート系特有の物理として近年多くの研究が進められている．

非エルミート系の代表として Parity-Time（PT）対称系が挙げられる [2]．PT 対称系とは，パリティ反転操作（空間座標反転）と時間反転操作（複素共役）の組み合わせに対して不変な系であり，損失と利得が空間的に対称に配置された系は PT 対称となる．PT 対称系は前述の例外点の他に，PT 相転移 [3]，coherent perfect absorption (CPA)/lasing [4]，非対称反射や一方向クローキング [5–8] などの多くの応用が考案されており，理論・応用の双方から近年多くの成果が報告されている．

波が伝搬する媒質に起因する損失のみならず，無限遠での放射によっても系のエルミート性は失われる．この種の開放系では，複素固有値は scattering pole あるいは quasinormal mode frequency とも呼ばれる [9]．多くの場合，非有界領域で放射する解は遠方で平面波や（球）Hankel 関数の和で展開することができ，これらが共鳴のエネルギーを無限遠に放射することで寿命が生じる．これに起因する複素固有値は同様

2022 年 10 月 27 日受付，2022 年 11 月 21 日受理

に例外点を示すことが 2 次元 Helmholtz 方程式 [10]，3 次元 Maxwell 方程式 [11] について調べられている．また，周期散乱や導波路など遠方での放射モードにカットオフがある場合，放射の存在に関わらず寿命が無限大の共鳴（複素固有値の虚部が厳密に零）が実現可能であり，このような共鳴モードは bound state in the continuum あるいは embedded/trapped mode と呼ばれる [12].

このような背景から，放射条件が課された定常振動場の固有値計算は重要である一方で，その数値解析は容易ではない．1 次元問題を除いて，実数周波数で用いられる Sommerfeld の放射条件は複素固有モードに対して成り立たないため，放射条件の近似として広く用いられる Robin 境界条件は固有値解析に使用できない [13].

境界積分方程式に基づく境界要素法は，この種の固有値問題の解法として有力であり，様々な外部問題の固有値解析に用いられている [14–17]．一方で，導波路や周期構造などの複雑な系では放射条件を満たす Green 関数の計算が一般に容易ではなく，複素周波数についての計算は特に注意を要する．

有限要素法を用いて複素固有値を計算する場合，主な方法として (1) Perfectly Matched Layer (PML) に基づく方法，(2) 無限要素を用いる方法，(3) Dirichlet-to-Neumannn (DtN) 写像に基づく方法の 3 つが挙げられる．(1) の PML は実装が容易であり，離散化して得られる代数固有値問題が線形になる利点があるが，PML に起因する偽の固有値が複素平面に多く混在し，その判別が困難となる問題がある [18]. (2) の無限要素に基づく方法は，放射場の基底の選び方に依って固有値問題が非線形になる場合 [19] や PML と同様の偽固有値が混在する場合があり [13]，また他と比較して実装は煩雑となる．(3) の DtN 写像に基づく方法は，離散化された固有値問題が非線形となり，係数行列の疎性が一部失われる欠点はあるが，実装が簡単であり，PML などと比較して偽固有値が現れにくい利点がある [18].

しかし，DtN 有限要素法は $\mathbb{R}^2$ や $\mathbb{R}^3$ に有界な散乱体が置かれた問題の複素固有値の計算に用いた例 [20–22] は報告されている一方，導波路問題に関しては散乱解析への適用に限られている [23, 24].

そこで，本研究は DtN 写像に基づく有限要素法と，非線形固有値解析アルゴリズムである Sakurai–Sugiura 法 (SSM) [25] を組み合わせて 3 次元導波路で定義される Helmholtz 方程式の複素固有値を計算する手法を提案する．まず，Neumann 境界条件が課された任意形状の断面の導波路を伝わる波のモード展開について述べ，これを用いて DtN 写像を表現する．この DtN 写像を Helmholtz 方程式の弱形式と組み合わせて離散化することで，外部問題の有限要素法を構成する．得られる連立一次方程式は周波数に関する非線形項を含むため，SSM を用いて非線形固有値問題を一般化固有値問題に置き換えて数値的に解く．数値例として，まず解析解が求まる問題に対して提案法による固有値解析を実行し，その誤差を検証する．その後，複雑形状の導波路構造を対象として

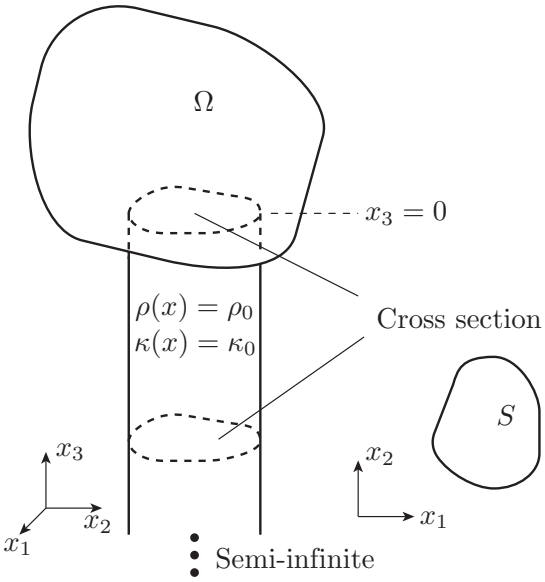


Fig. 1 Semi-infinite acoustic waveguide with cross section S.

複素固有値分布を計算し，bound state in the continuum や CPA-laser モードなどの特異な固有モードが現れることを確認する．

2. 3 次元音響導波路

2.1. 境界値問題

Fig. 1 に示すように，半無限的に伸びる導波路の終端に有界領域が接続した構造を考える．すなわち，断面を $S \subset \mathbb{R}^2$ とする半無限導波路を $\Omega_\infty = S \times (-\infty, 0)$，終端の領域を $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ として，Ω と Ω_∞ を界面 $\tilde{S} = \{(x, 0)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x \in S\}$ で接続した領域について考える．ここで，u に関する次の境界値問題を解く．

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho}\nabla u\right) + \frac{\omega^2}{\kappa}u = -g \quad \text{in } \Omega \tag{1}$$

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho_0}\nabla u\right) + \frac{\omega^2}{\kappa_0}u = 0 \quad \text{in } S \times (-\infty, 0) \tag{2}$$

$$u|_+ = u|_- \quad \text{on } \tilde{S} \tag{3}$$

$$n \cdot \nabla u|_+ = n \cdot \nabla u|_- \quad \text{on } \tilde{S} \tag{4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{on } \partial(\Omega \cup \Omega_\infty \cup \tilde{S}) \tag{5}$$

ここに，$\omega \in \mathbb{C}$ は角周波数，$\rho(x)$ は質量密度分布，$\kappa(x)$ は体積弾性率分布，$g(x)$ は外力を表す．質量密度と体積弾性率は導波路内で一様であり，それぞれ $\rho_0 > 0$ と $\kappa_0 > 0$ である．また，$\frac{\partial}{\partial n} = n \cdot \nabla$ は外向き単位法線ベクトル n で定義される法線方向微分である．さらに，導波路と Ω の界面 $\tilde{S}$ に関して $\tilde{S} \subset \partial\Omega$ を仮定する．質量密度と体積弾性率は $\tilde{S}$ を跨いで連続であり，$\rho|_+ = \rho_0$，$\kappa|_+ = \kappa_0$ とする．ここに，$u|_\pm$ は $\tilde{S}$ への u の Ω の内側，外側からのトレースである．

2.2. 導波路内のモード展開と DtN 写像

等断面半無限導波路内の 3 次元 Helmholtz 方程式 (2) の解

のうち，次のように変数分離できるものについて考える．

$$u(x_1,x_2,x_3)=u_{1,2}(x_1,x_2)u_3(x_3) \tag{6}$$

これを Helmholtz 方程式 (2) に代入し，次式を得る．

$$0=u_3\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)u_{1,2}+u_{1,2}\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2}+\frac{\omega^2}{c^2}u_{1,2}u_3 \tag{7}$$

ここに，$c=\sqrt{\kappa_0/\rho_0}>0$ は導波路内の平面波の位相速度である．さらに両辺を $u_{1,2}u_3$ で除することで次式を得る．

$$0=\frac{1}{u_{1,2}}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)u_{1,2}+\frac{1}{u_3}\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2}+\frac{\omega^2}{c^2} \tag{8}$$

ここで，分離定数を $\lambda\in\mathbb{C}$ と置くことで次の二つの独立した微分方程式を得る．

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)u_{1,2}+\lambda u_{1,2}=0 \tag{9}$$

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2}+\left(\frac{\omega^2}{c^2}-\lambda\right)u_3=0 \tag{10}$$

ここで，次の固有値問題から得られる固有値を $\lambda_m\geq 0$，対応する固有関数を $\psi_m:S\to\mathbb{R}$ $(m=1,2,\ldots)$ とする．

$$\nabla^2\psi_m+\lambda_m\psi_m=0 \quad \text{in } S \tag{11}$$

$$\frac{\partial\psi_m}{\partial n}=0 \quad \text{on } \partial S \tag{12}$$

式 (10) の一般解は

$$u_3(x_3)=\exp(\pm \mathrm{i}x_3\sqrt{\omega^2/c^2-\lambda}) \tag{13}$$

であるから，導波路内の一般解 u は次式で表すことができる．

$$u(x)=\sum_{m=1}^{\infty}A_m\psi_m(x_1,x_2)\exp(+\mathrm{i}K_m x_3)+\sum_{m=1}^{\infty}B_m\psi_m(x_1,x_2)\exp(-\mathrm{i}K_m x_3) \tag{14}$$

ここに，A_m, $B_m\in\mathbb{C}$ は定数列であり，K_m は次式で定義される．

$$K_m(\omega)=\sqrt{\omega^2/c^2-\lambda_m} \tag{15}$$

時間依存に $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$ を選び，角周波数 ω を実数として $x>0$ に対して $\sqrt{-x}=\mathrm{i}\sqrt{x}$ と定義すると，式 (14) 右辺の A_m に関する和の各項は $+x_3$ 方向に進行する伝搬波と $x_3\to\infty$ で減衰するエバネッセント波を表す．同様に，B_m に関する和の各項は $-x_3$ 方向に進行する伝搬波と $x_3\to-\infty$ で減衰するエバネッセント波を表す．すなわち，A を既知として入射波

$$u^{\mathrm{in}}(x)=\sum_{m=1}^{\infty}A_m\psi_m(x_1,x_2)\exp(+\mathrm{i}K_m x_3) \tag{16}$$

を導波路に与えた際の反射の解析は，境界値問題 (1)–(5) を満たす B を求める問題に帰着する．

また，式 (14) のモード展開を利用して DtN 写像を構成することができる．式 (14) と固有関数の正規直交性

$$\int_S\psi_m\psi_{m'}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2=\delta_{mm'} \tag{17}$$

により，B は次式で求められる．

$$B_m=\int_S(u(x_1,x_2,0)-u^{\mathrm{in}}(x_1,x_2,0))\psi_m(x_1,x_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 \tag{18}$$

よって，$\tilde{S}$ 上の関数 ϕ に関して作用素 T を

$$(T\phi)(x)=-\mathrm{i}\sum_{m=1}^{\infty}K_m\psi_m(x_1,x_2)\times\int_S\phi(y_1,y_2,0)\psi_m(y_1,y_2)\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2 \tag{19}$$

で定義すると，$u-u^{\mathrm{in}}$ は次式を満たす．

$$\frac{\partial}{\partial x_3}(u-u^{\mathrm{in}})=T(u-u^{\mathrm{in}}) \quad \text{on } \tilde{S} \tag{20}$$

すなわち，T は $\tilde{S}$ 上の DtN 写像である．導波路に関する DtN 写像 T の詳細に関しては，例えば [23] を参照されたい．

3. 有限要素法

3.1. 定式化

2.2 節で導入した DtN 写像を用いて，次の境界値問題を有限要素法を用いて解く．

$$\nabla\cdot\left(\frac{1}{\rho}\nabla u\right)+\frac{\omega^2}{\kappa}u=-g \quad \text{in } \Omega \tag{21}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_3}(u-u^{\mathrm{in}})=T(u-u^{\mathrm{in}}) \quad \text{on } \tilde{S} \tag{22}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}=0 \quad \text{on } \partial\Omega\setminus\overline{\tilde{S}} \tag{23}$$

この境界値問題に対応する弱形式は次式となる．

$$\begin{aligned}0&=\int_\Omega\frac{1}{\rho}\nabla\tilde{u}\cdot\nabla u\mathrm{d}x-\omega^2\int_\Omega\frac{1}{\kappa}\tilde{u}u\mathrm{d}x-\int_\Omega g\tilde{u}\mathrm{d}x-\int_{\partial\Omega}\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial n}\tilde{u}\mathrm{d}S\\&=\int_\Omega\frac{1}{\rho}\nabla\tilde{u}\cdot\nabla u\mathrm{d}x-\omega^2\int_\Omega\frac{1}{\kappa}\tilde{u}u\mathrm{d}x-\int_\Omega g\tilde{u}\mathrm{d}x\\&\quad+\int_{\tilde{S}}\frac{1}{\rho}\tilde{u}T(u-u^{\mathrm{in}})\mathrm{d}S+\int_{\tilde{S}}\frac{1}{\rho}\tilde{u}\frac{\partial u^{\mathrm{in}}}{\partial x_3}\mathrm{d}S\end{aligned} \tag{24}$$

ここに，$\tilde{u}$ は試験関数である．通常通り，解 u を Ω 上の形状関数 N_i を用いて

$$u(x)\simeq\sum_j U_jN_j(x) \tag{25}$$

で離散化する．ここに，U_i は節点値である．

Galerkin 法により $\tilde{u}=N_i$ を選ぶと，弱形式 (24) 右辺第 1–3 項は次式となる．

$$\begin{aligned}&\int_\Omega\frac{1}{\rho}\nabla\tilde{u}\cdot\nabla u\mathrm{d}x-\omega^2\int_\Omega\frac{1}{\kappa}\tilde{u}u\mathrm{d}x-\int_\Omega g\tilde{u}\mathrm{d}x\\=&\sum_j(G_{ij}-\omega^2M_{ij})U_j-b_i\end{aligned} \tag{26}$$

ここに，行列 G,M とベクトル b はそれぞれ次式で定義される．

$$G_{ij}=\int_\Omega\frac{1}{\rho}\nabla N_i\cdot\nabla N_j\mathrm{d}x \tag{27}$$

$$M_{ij}=\int_\Omega\frac{1}{\kappa}N_iN_j\mathrm{d}x \tag{28}$$

$$b_i=\int_\Omega gN_i\mathrm{d}x \tag{29}$$

弱形式 (24) 右辺第 4 項は式 (18), (19) を用いて次式となる．

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial\Omega} \frac{1}{\rho}\tilde{u}T(u-u^{\mathrm{in}})\mathrm{d}S \\
&= -\mathrm{i}\sum_{m=1}^{\infty} K_m \left(\int_S (u(x_1,x_2,0)-u^{\mathrm{in}}(x_1,x_2,0))\psi_m(x)\mathrm{d}x\right) \\
&\quad\times\left(\int_{\tilde{S}} \frac{1}{\rho}\tilde{u}(x)\psi_m(x)\mathrm{d}x\right) \\
&= -\mathrm{i}\sum_{m=1}^{\infty} K_m B_m \frac{1}{\rho_0}\int_{\tilde{S}} N_i(x)\psi_m(x)\mathrm{d}x \\
&= -\sum_m C_{im}H_{mm}B_m \qquad (30)
\end{aligned}$$

ここに，行列 C と H は次式で定義した．

$$C_{im} = \int_{\tilde{S}} N_i(x)\psi_m(x_1,x_2)\mathrm{d}S \qquad (31)$$

$$H(\omega) = \mathrm{diag}_m\, \mathrm{i}K_m(\omega)/\rho_0 \qquad (32)$$

同様に弱形式 (24) 右辺第 5 項は次式となる．

$$\begin{aligned}
\int_{\tilde{S}} \frac{1}{\rho}\tilde{u}\frac{\partial u^{\mathrm{in}}}{\partial x_3}\mathrm{d}S &= \mathrm{i}\sum_{m=1}^{\infty} K_m A_m \frac{1}{\rho_0}\int_{\tilde{S}} \tilde{u}(x)\psi_m(x)\mathrm{d}x \\
&= \sum_m C_{im}H_{mm}A_m \qquad (33)
\end{aligned}$$

式 (24), (26), (30), (33) をまとめると，未知の節点値 U_i と係数列 B_m に関して次式が成り立つ．

$$\begin{aligned}
0 = \sum_j (G_{ij}-\omega^2 M_{ij})U_j - b_i - \sum_m C_{im}H_{mm}B_m \\
+ \sum_m C_{im}H_{mm}A_m \qquad (34)
\end{aligned}$$

また，式 (18) より U_i と B_m に関して次式が成り立つ．

$$0 = \sum_j C_{jm}U_j - B_m - A_m \qquad (35)$$

式 (34), (35) をまとめると，節点値 U_j と反射係数 B_m は次の連立一次方程式を解くことで求められる．

$$\begin{bmatrix} G-\omega^2 M & -CH(\omega) \\ C^T & -I \end{bmatrix}\begin{pmatrix} U \\ B \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -CH(\omega) \\ I \end{bmatrix} A + \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (36)$$

3.2. SSM による固有値解析

境界値問題 (21)–(23) の固有値解析は，方程式 (36) が $A = b = 0$ で非自明解をもつときの角周波数 $\omega \in \mathbb{C}$ と対応する解 (U, B) を求める非線形固有値問題となる．

本研究は，この非線形固有値問題を SSM を用いて数値的に解く．SSM は，複素行列値関数 $F(z)$ で定義される非線形固有値問題 $F(z)y = 0$ の解 (z, y) を，複素平面内の単純閉曲線 γ 上の周回積分で定義されるモーメント

$$\int_\gamma W^H F^{-1}(z)V\mathrm{d}z \qquad (37)$$

を並べた行列に関する一般化固有値問題を解くことで，γ 内部の固有値 ω と対応する固有ベクトルを探索する．ここに，行列 V と W は疑似乱数により計算される．詳細は文献 [25] を参照されたい．

式 (36) の場合，左辺の係数行列全体を行列 $F(\omega)$ と置くことも可能であるが，本研究では自由度の削減のため，A を $A = 0$ で固定した際の線形変換 $b \mapsto U$ の表現行列を F^{-1} として SSM を適用する．

積分路 γ は $F(\omega)$ の分岐截線を跨いではならず，求めたい固有値の範囲に応じて適切に多価関数の分岐截線を定めなければならない．式 (36) の場合，$F(\omega)$ の多価性は H に含まれる $K_m = \sqrt{\omega^2/c^2 - \lambda_m}$ に由来する．そこで，定数 $\lambda \geq 0$ に対して $f(z) = \sqrt{z^2 - \lambda}$ と定義して，この多価関数について議論する．まず，散乱問題の解の放射条件から，任意の $\lambda \geq 0, \omega \in \mathbb{R}^+$ で $\mathrm{Im}[\sqrt{\omega^2/c^2 - \lambda}] \geq 0$ を満たす主値を選ぶ必要がある．ここで，$\sqrt{z}$ の分岐截線に負の虚軸を選び，その主値を $Q(z) = \sqrt{|z|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arg'(z)/2}$ とする．ここに，$\arg'(z)$ は $(-\pi/2, 3\pi/2]$ に値を取る z の偏角である．この主値を用いて，2 価関数 $f(z)$ の主値に $f_1(z) = Q(z^2 - \lambda)$ を選ぶ．この際の f の分岐截線と 2 値 $f_1(z), f_2 = -f_1(z)$ をプロットしたものを Fig. 2 に示す．この図から確かなように，f の分岐截線は分岐点 $\pm\sqrt{\lambda}$ から出発し，第 2・4 象限で $\mathrm{Re}\,[z] + \mathrm{Im}\,[z] = 0$ に漸近する双曲線となることが分かる．

4. 数値例

4.1. 計算精度の数値的検証

まず，固有値が解析的に求まる簡単な問題を対象として提案法の検証を行う．

導波路の断面を原点中心の半径 $R > 0$ の円，すなわち $S = B_R(0) \subset \mathbb{R}^2$ とする．また，終端部を高さ $2h$ の円筒 $B_R(0)\times(0, 2h)$ として，内部の材料定数分布を次式で定める．

$$\rho(x) = \begin{cases} \rho_1 & (x_3 > h) \\ \rho_0 & (x_3 < h) \end{cases}, \quad \kappa(x) = \begin{cases} \kappa_1 & (x_3 > h) \\ \kappa_0 & (x_3 < h) \end{cases} \qquad (38)$$

ここに，ρ_1, κ_1 は定数である．このとき，$c_1 = \sqrt{\kappa_1/\rho_1}$ とすると固有値の一部は次式で与えられる．

$$\omega = \frac{c_1}{2h}\left((2n+1)\pi - \mathrm{i}\log\frac{c_1\rho_1 + c\rho_0}{c_1\rho_1 - c\rho_0}\right) \quad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (39)$$

Fig. 3 のように，$h = R$, $\rho_1 = 4\rho_0$, $\kappa_1 = \kappa_0$ として提案法により計算された固有値の誤差を評価する．ここでは，式 (39) で $n = 1$ として計算された固有値 $\omega_{\mathrm{exact}} = (2.356194 - 0.2746531\mathrm{i})c/R$ を対象とする．提案法による計算では，SSM の複素 ω 平面上の積分路は中心 ω_{exact}，半径 $0.01c/R$ の円を用いた．S の固有値 $\lambda_m \geq 0$ は小さいものから順に 40 個用いた（$\lambda_1 R^2 = 0, \ldots, \lambda_{40}R^2 = 137.07$）．また，有限要素法の離散化に関しては，領域 Ω を四面体要素の集合で近似して，u を探す関数空間を四面体の頂点と辺の中点に節点を置く四面体二次要素からなる有限要素空間で近似した．同様に，2 次元領域 S は三角形要素の集合で近似し，その上の関数空間の近似には三角形二次要素を用いた．式 (36) の各種行列・ベクトルの構築および式 (11), (12) の S で斉次 Neumann 条件を課すラプラシアンの固有値 λ_m の計算は FreeFem++ [26] を用いて行った．SSM に要する連立一次方程式の求解には Intel

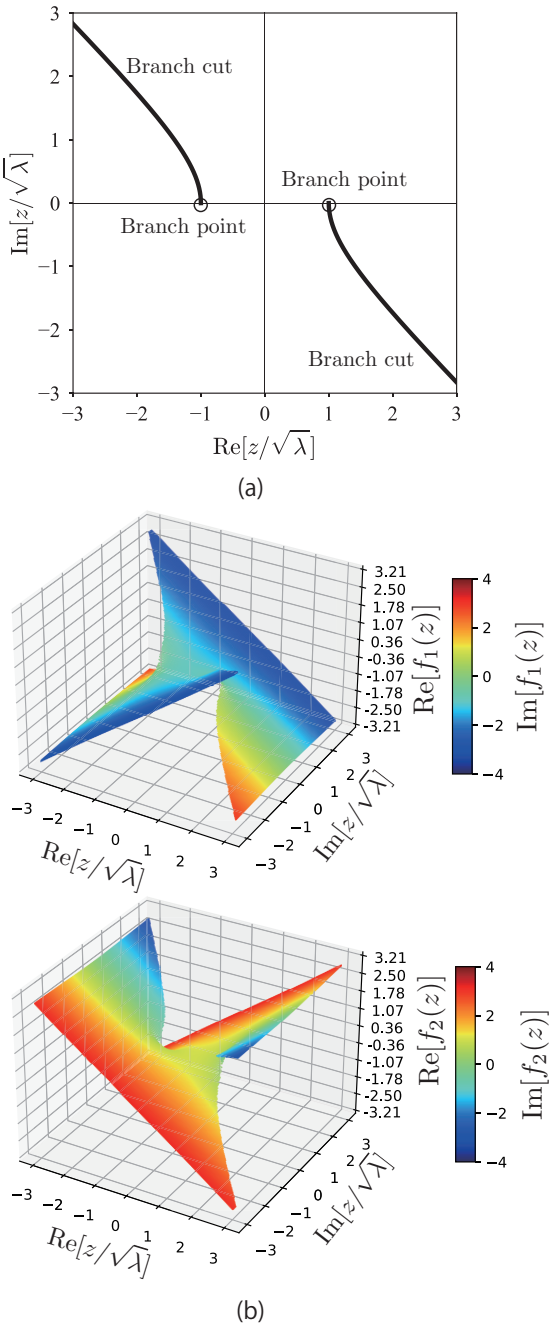


Fig. 2 (a) Branch points and cuts of $f(z) = \sqrt{z^2 - \lambda}$ with $\lambda \geq 0$. (b) Plot of the multivalued function f on the complex plane.

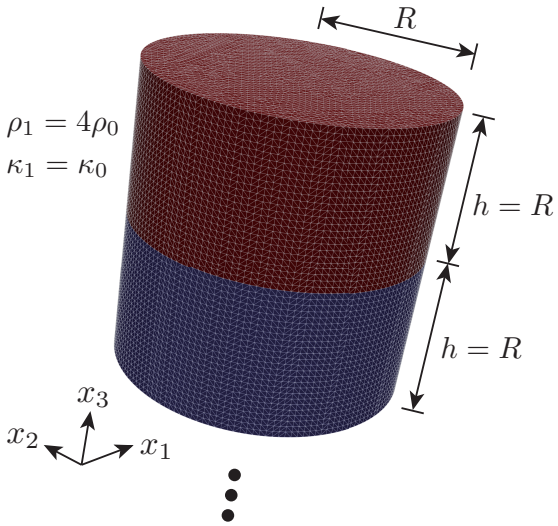


Fig. 3 Finite element mesh inside the cylinder $B_R(0) \times (0, 2h)$ with $N_h = 50$.

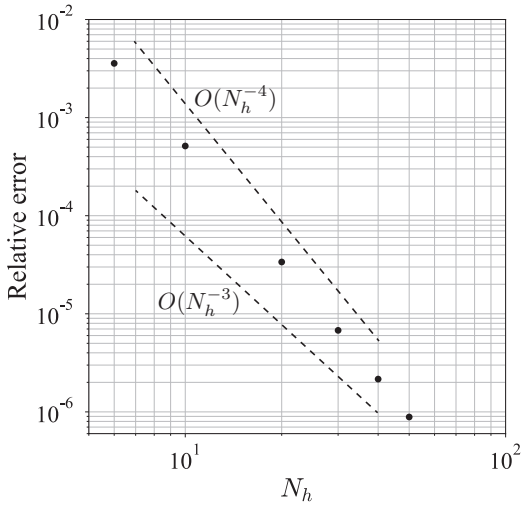


Fig. 4 Relative error of the eigenvalue ω versus the mesh parameter N_h.

MKL ライブラリに含まれる PARDISO を用いた．SSM に関しては，著者らが Python で実装したプログラムを用いた．FreeFem++と Python 間のインターフェースはテキストファイル経由のものを実装した．Python から FreeFem++にはパラメータ ω とベクトル v をファイル経由で渡し，FreeFem++は $F^{-1}(\omega)v$ を計算しファイルに出力する．Python が再度このファイルを読み込み，SSM を実行する．

有限要素メッシュの細かさを変化させた際の有限要素法の誤差計算の結果を Fig. 4 示す．ここで，有限要素法により計算された固有値を ω_{FEM} として，その相対誤差を $|\omega_{\mathrm{FEM}} - \omega_{\mathrm{exact}}|/|\omega_{\mathrm{exact}}|$ で定義した．四面体要素メッシュは円筒の高さ方向 (x_3 方向) に N_h 等分するように生成した．この結果から，高さ方向の分割数 N_h の増加に従って $O(N_h^{-4})$ 程度で単調に誤差が減少する傾向が見られ，提案手法の妥当性が確認された．

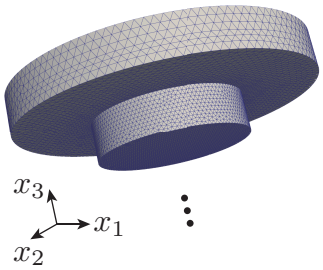


Fig. 5　Two-stage cylinder and finite element mesh.

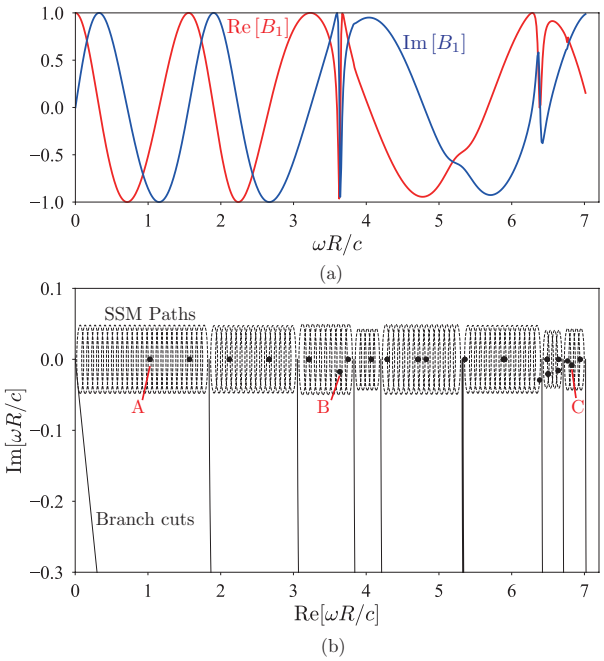


Fig. 6　(a) Spectrum of the reflectance coefficient B_1. (b) Complex eigenvalues of the two-stage cylinder.

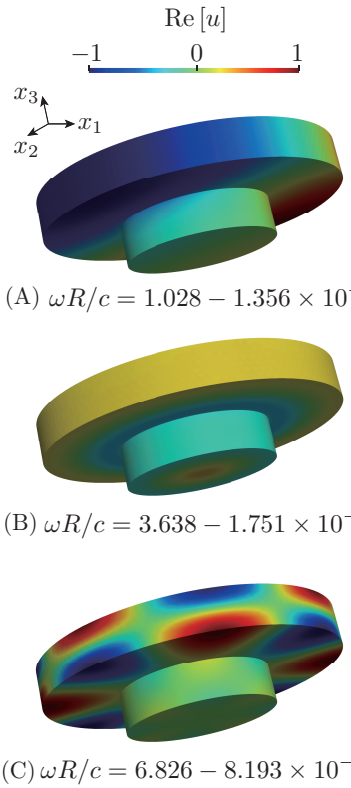


Fig. 7　Eigenmodes corresponding to the complex eigenvalues A–C shown in Fig. 6 (b).

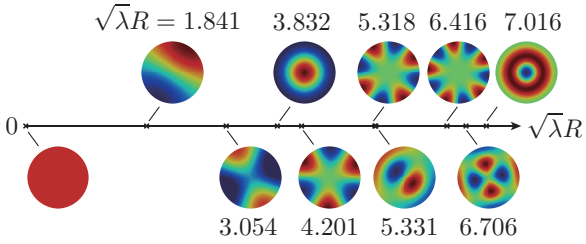


Fig. 8　Neumann eigenvalues and eigenmodes of the disk $B_R(0) \subset \mathbb{R}^2$. The values correspond to the branch points in Fig. 6 (b).

4.2. 2 段円筒形状

次に，固有値が解析的に求まらない形状を対象として固有値計算を行った例を示す．

終端領域を $\Omega = B_R(0) \times (0, R/2] \cup B_{2R}(0) \times (R/2, R)$ として，その内部の材料分布は一様に $\rho(x) = \rho_0$，$\kappa(x) = \kappa_0$ とする．導波路の断面 S は前小節と同様に $S = B_R(0)$ である．この形状および使用する有限要素メッシュを Fig. 5 に示す．

この系に平面入射波 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x_3/c}$ を与えたときの反射係数 B_1 のスペクトルと，複素周波数平面内の実軸付近の固有値の分布を計算する．SSM の各積分路上の積分点数は 80 点とし，その他の計算条件は前小節と同じとした．

Fig. 6 に結果を示す．この結果から，複素固有値は実軸上に分布するものと，下半面に分布するものの二種に分類できることが分かる．実軸上に分布する固有値は bound state in the continuum に対応する固有値であると推測される．これを確かめるため，例として Fig. 6 の固有値 A について考察する．この固有値 A に対応する固有モードを Fig. 7 に示す．この図から，固有モードの Ω 内部の分布は円筒の軸に関して双極子的であることが分かる．一方で，半無限導波路の断面の固有モード（Fig. 8）を計算した結果，双極子モードの最小固有値は $\sqrt{\lambda}R = 1.841$ であり，これは固有値 A の実部 1.028 より大きい．この周波数で唯一の導波路モードとなる $\lambda = 0$ に対応するモードは対称性より励起されず，結果として導波路内はエバネッセント波のみが分布し，エネルギーはまったく放射されない．このように，放射モードのカットオフと対称性に起因して固有値の虚部が零となった固有モードは symmetry-protected bound state in the continuum と呼ばれ [12]，固有値 A はその一例であると考えられる．なお，この種の固有値は導波路のみならず，周期構造中の散乱問題にも現れることが確かめられている [27]．

反対に，このような条件を満たさない固有値は非零の虚部

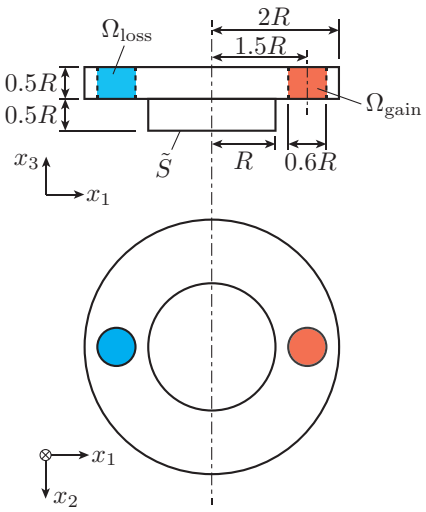


Fig. 9　Shape of a PT-symmetric structure.

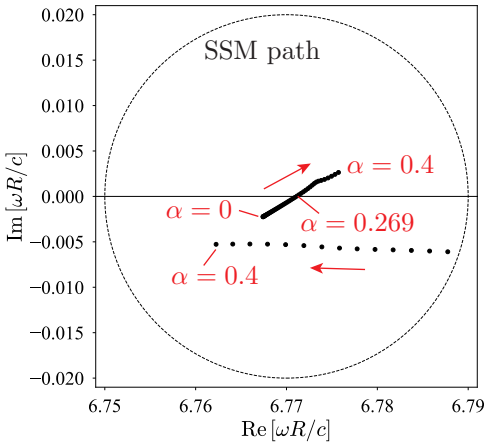


Fig. 10　Trajectories of complex eigenvalues inside the circular SSM path as α increases from $\alpha = 0$ to $\alpha = 0.4$.

を有する可能性がある．例として，Fig. 6 の固有値 B,C について考える．Fig. 7 の対応する固有モードは，それぞれ同一の対称性を有する導波路モードがカットオフされていないため，共鳴モードは Ω 内に束縛されない．一方，これは導波路モードを入射波として与えた際に共鳴が励起されることを意味しており，Fig. 6(a) の $\omega R/c = 3.6$ 付近の反射係数の急激な変化は複素固有値 B に起因していると推測される．

4.3. PT 対称系

最後に，前小節で解析した 2 段円筒形状に PT 対称な損失と利得を与えた際の複素固有値の挙動について議論する．

Fig. 9 のように，2 段円筒形状の内部に 2 つの円筒領域 Ω_{gain} と Ω_{loss} を定義し，質量密度分布を次式に置き換える．

$$\rho(x) = \begin{cases} \rho_0(1 - \mathrm{i}\alpha) & \text{in } \Omega_{\text{gain}} \\ \rho_0(1 + \mathrm{i}\alpha) & \text{in } \Omega_{\text{loss}} \\ \rho_0 & \text{elsewhere} \end{cases} \tag{40}$$

ここに，$\alpha \geq 0$ は定数である．このとき，$\rho(x)$ は x_3 軸周りの PT 対称性 $\rho(-x_1, -x_2, x_3) = \bar{\rho}(x_1, x_2, x_3)$ を満たす．

SSM の積分路を中心 $\omega R/c = 6.77$，半径 0.02 の円として，α を 0 から 0.4 まで変化させた際のこの円の内部の複素固有値の軌跡を計算した結果を Fig. 10 に示す．この結果から，$\alpha = 0.269$ 付近で複素固有値の一つが実軸と交わっていることが分かる．よって，この PT 対称系は適切な大きさの損失・利得を与えることで虚部が零となる固有値を持つと推測できる．これはレーザのメカニズムの一種であり，時間域で定常的に単一のモードの波を放射し続ける現象に対応する．また，PT 対称性のために，この固有モードの時間反転，すなわち複素共役も同一の Helmholtz 方程式の解となる．これはレーザの時間反転であり，CPA あるいは anti-laser と呼ばれる現象を表す [4]．PT 対称系では CPA モードと laser モードが同一周波数で実現する（散乱行列の極と零点が一致する）ことから，CPA-laser モードと呼ばれる [3]．

5. 結言

本研究は，3 次元音響導波路構造の複素固有値を計算する手法を新たに提案した．提案手法は有限要素法と DtN 写像に基づき，離散化して得られる非線形固有値問題を SSM で一般化固有値問題に置き換えることで，複素平面上で定められた経路内の複素固有値の計算を可能とした．数値例を通して，提案法が高い精度で固有値を計算できることを確認した．また，非エルミート系特有の現象である bound state in the continuum と CPA-laser モードが生じることを数値的に示した．今後の課題として，提案手法の計算コストの詳細な検証が挙げられる．

謝辞

本研究は JSPS 科研費 JP22K14166 の助成を受けたものです．

参考文献

(1) Miri, M.A. and Alù, A. Exceptional points in optics and photonics. *Science*, Vol. 363, No. 6422, p. eaar7709, 2019.

(2) El-Ganainy, R., Makris, K.G., Christodoulides, D.N., and Musslimani, Z.H. Theory of coupled optical PT-symmetric structures. *Optics Letters*, Vol. 32, No. 17, pp. 2632–2634, 2007.

(3) Krasnok, A., Baranov, D., Li, H., Miri, M.A., Monticone, F., and Alú, A. Anomalies in light scattering. *Advances in Optics and Photonics*, Vol. 11, No. 4, pp. 892–951, 2019.

(4) Chong, Y.D., Ge, L., Cao, H., and Stone, A.D. Coherent perfect absorbers: Time-reversed lasers. *Physical Review Letters*, Vol. 105, No. 5, p. 053901, 2010.

(5) Lin, Z., Ramezani, H., Eichelkraut, T., Kottos, T., Cao, H., and Christodoulides, D.N. Unidirectional invisibility

induced by $\mathcal{PT}$-symmetric periodic structures. *Physical Review Letters*, Vol. 106, No. 21, p. 213901, 2011.

(6) Zhu, X., Feng, L., Zhang, P., Yin, X., and Zhang, X. One-way invisible cloak using parity-time symmetric transformation optics. *Optics Letters*, Vol. 38, No. 15, pp. 2821–2824, 2013.

(7) Sounas, D.L., Fleury, R., and Alù, A. Unidirectional cloaking based on metasurfaces with balanced loss and gain. *Physical Review Applied*, Vol. 4, No. 1, p. 014005, 2015.

(8) Matsushima, K., Noguchi, Y., and Yamada, T. Unidirectional invisibility in a PT-symmetric structure designed by topology optimization. *Optics Letters*, Vol. 47, No. 13, pp. 3315–3318, 2022.

(9) Dyatlov, S. and Zworski, M. *Mathematical Theory of Scattering Resonances*. American Mathematical Society, 2019.

(10) Kullig, J., Yi, C.H., Hentschel, M., and Wiersig, J. Exceptional points of third-order in a layered optical microdisk cavity. *New Journal of Physics*, Vol. 20, No. 8, p. 083016, 2018.

(11) Bulgakov, E., Pichugin, K., and Sadreev, A. Exceptional points in a dielectric spheroid. *Physical Review A*, Vol. 104, No. 5, p. 053507, 2021.

(12) Hsu, C.W., Zhen, B., Stone, A.D., Joannopoulos, J.D., and Soljačić, M. Bound states in the continuum. *Nature Reviews Materials*, Vol. 1, No. 9, pp. 1–13, 2016.

(13) Hohage, T. and Nannen, L. Hardy space infinite elements for scattering and resonance problems. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, Vol. 47, No. 2, pp. 972–996, 2009.

(14) Durán, M., Miguez, M., and Nédélec, J.C. Numerical stability in the calculation of eigenfrequencies using integral equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 130, No. 1, pp. 323–336, 2001.

(15) Durán, M., Nédélec, J.C., and Ossandón, S. An efficient Galerkin BEM to compute high acoustic eigenfrequencies. *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 131, No. 3, p. 031001, 2009.

(16) Steinbach, O. and Unger, G. Convergence analysis of a Galerkin boundary element method for the Dirichlet Laplacian eigenvalue problem. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, Vol. 50, No. 2, pp. 710–728, 2012.

(17) Misawa, R., Niino, K., and Nishimura, N. Boundary integral equations for calculating complex eigenvalues of transmission problems. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, Vol. 77, No. 2, pp. 770–788, 2017.

(18) Araujo-Cabarcas, J.C. and Engström, C. On spurious solutions in finite element approximations of resonances in open systems. *Computers & Mathematics with Applications*, Vol. 74, No. 10, pp. 2385–2402, 2017.

(19) Gerdes, K. A summary of infinite element formulations for exterior Helmholtz problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 164, No. 1, pp. 95–105, 1998.

(20) Lenoir, M., Vullierme-Ledard, M., and Hazard, C. Variational formulations for the determination of resonant states in scattering problems. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, Vol. 23, No. 3, pp. 579–608, 1992.

(21) Araujo-Cabarcas, J.C., Engström, C., and Jarlebring, E. Efficient resonance computations for Helmholtz problems based on a Dirichlet-to-Neumann map. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 330, pp. 177–192, 2018.

(22) Araújo C., J.C. and Engström, C. On spurious solutions encountered in Helmholtz scattering resonance computations in $\mathbb{R}^d$ with applications to nano-photonics and acoustics. *Journal of Computational Physics*, Vol. 429, p. 110024, 2021.

(23) Goldstein, C.I. A finite element method for solving Helmholtz type equations in waveguides and other unbounded domains. *Mathematics of Computation*, Vol. 39, No. 160, pp. 309–324, 1982.

(24) Givoli, D., Patlashenko, I., and Keller, J.B. Discrete Dirichlet-to-Neumann maps for unbounded domains. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 164, No. 1, pp. 173–185, 1998.

(25) Asakura, J., Sakurai, T., Tadano, H., Ikegami, T., and Kimura, K. A numerical method for nonlinear eigenvalue problems using contour integrals. *JSIAM Letters*, Vol. 1, pp. 52–55, 2009.

(26) Hecht, F. New development in freefem++. *Journal of Numerical Mathematics*, Vol. 20, No. 3-4, pp. 251–266, 2012.

(27) Matsushima, K., Isakari, H., Takahashi, T., and Matsumoto, T. A topology optimization of open acoustic waveguides based on a scattering matrix method. *Wave Motion*, Vol. 113, p. 102987, 2022.

計算数理工学論文集 Vol. 22 (2022 年 12 月)，論文 No. 09-221216 JASCOME

有限長スラブ軌道の効率的分散解析法

AN EFFICIENT DISPERSION ANALYSIS METHOD FOR A PERIODIC SLAB TRACK

塚本　夢菜 [1)]，阿部　和久 [2)]，紅露　一寛 [3)]

Yumena TSUKAMOTO, Kazuhisa ABE and Kazuhiro KORO

1) 新潟大学大学院　(〒 950-2181　新潟市西区五十嵐 2 の町 8050 番地，E-mail:f22e041h@mail.cc.niigata-u.ac.jp)
2) 新潟大学工学部　(〒 950-2181　新潟市西区五十嵐 2 の町 8050 番地，E-mail:abe@eng.niigata-u.ac.jp)
3) 新潟大学工学部　(〒 950-2181　新潟市西区五十嵐 2 の町 8050 番地，E-mail:kouro@eng.niigata-u.ac.jp)

This paper presents an efficient dispersion analysis method for a railway track supported by discontinuous slabs. Reduction of the computational effort is realized by replacing the discontinuous slabs with a continuous one. The discontinuity is represented by nodal forces acting on the nodes at slab ends. This problem is solved by the aid of Floquet transformation with respect to the periodicity of sleeper spacing. The dispersion analysis is then reduced to a nonlinear eigenvalue problem of a matrix which gives the relationship between the external and the internal nodal forces at slab ends. Through numerical examples, efficiency of the developed method and influence of the slab length on the dispersion curves are discussed.

Key Words: rail-slab interaction, under-slab sheet, sleeper spacing periodicity, Floquet transformation

1. はじめに

地下鉄や高速鉄道では，レールを支持する構造としてコンクリートスラブが多用されている．なお，スラブ下の緩衝材には，主にセメントアスファルト (CA) モルタルが用いられている．この場合，スラブの支持剛性は比較的高く，列車走行に伴う振動の低減効果は限定的となる．これに対し，スラブをバネ等で支持するフローティングスラブ [(1)] や，低剛性ウレタンマットで支持する防振マット工法 [(2)] などの振動低減策も，近年国内外で採用される様になってきている．

軌道の防振対策におけるこれらの工法や支持剛性の検討に当り，軌道系の卓越周波数や振動・波動モードの把握などが重要である．そのためには，軌道内に発生し得る波動モードの波数–周波数空間における分布性状を表す分散曲線が有用となる．一般にレールはまくらぎ等により等間隔に支持されているため，軌道はその支持間隔 (まくらぎ間隔) の周期性を持つ．この様な周期場内を伝播する波動モードは，周期構造の最小単位である 1 ユニットセルの問題に帰着して解くことができる [(3)]．Gupta & Degrande[(1)] は，フローティングスラブを用いた地下鉄軌道を対象に，その動特性について検討している．なお，無限長連続スラブの分散曲線は，まくらぎ間隔 (0.6m) を 1 ユニットとした解析で求めることができるが，有限長スラブ軌道の場合はスラブ長 (6m) を 1 周期として解析する必要がある．また，Sheng ら [(4)] は，CA モルタルで支持された有限長 (6.5m) スラブ軌道を対象に，その動特性を調べている．文献 (4) では無数に配置されたスラブと無限長レールとの連成問題を直接的に定式化している．その下で得られる行列を対象に，波数–周波数平面全域で行列式の値を求め，そのゼロ点分布の様子から分散曲線を得ている．しかし，比較的高い周波数域における分散曲線が不鮮明で，その分布が判別しづらくなっている．

阿部ら [(2)] は，防振マット工法を用いた地下鉄軌道 (防振マット軌道) を対象に，定点加振応答解を求めた．なお当該軌道のスラブ長は 30m 程と長いため，所定の減衰設定下で，それを無限長スラブで近似した．しかし分散曲線を求める場合，無減衰系が対象となる．そのため，スラブの長短に関わらず防振マット軌道の分散曲線は，スラブ端部からの反射波の影響により，無限長スラブのそれと本質的に異なるものになると考えられる．

本研究では，有限長スラブの防振マット軌道を対象に分散曲線を求め，当該軌道の基本振動特性について調べる．ただし，軌道系の周期長が約 30m と長くなるため，前述の様な従来法を用いる場合，1 ユニットセルの長尺化による計算負荷の増大が懸念される．そこで，2 次元周期場を対象に提案された効率的分散解析法 [(5)] の軌道系への適用を試みる．具体的には，有限長スラブを無限長スラブに置き換え，スラブ

2022.10.15 受付，2022.11.15 受理

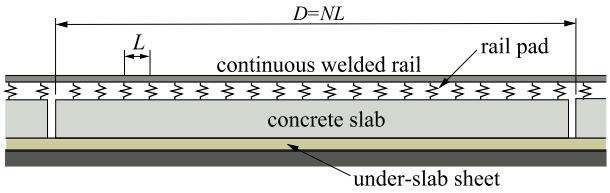


Fig. 1　Track with discontinuous slabs supported by under-slab sheet

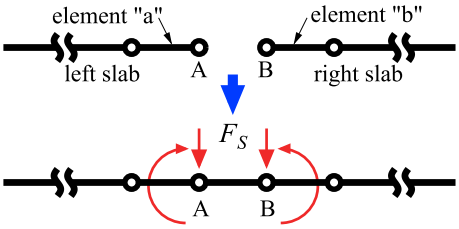


Fig. 2　Replacement with continuous slab

端からの反射波を等価な加振力で表現する．無限長スラブ軌道であれば，まくらぎ間隔をその周期長として設定できる．当該問題にまくらぎ間隔に基づいた Floquet 変換 [6, 7] を適用することで，まくらぎ 1 区間で与えられるユニットセルの加振問題に帰着して解くことが可能となり，解析領域を大幅に縮小できる．なお，本定式化における分散解析は，スラブ端の加振力と内部節点力との関係を与える行列に関する非線形固有値問題として与えられる．そこで鮮明な分散曲線を得るために，非線形固有値問題の数値解法である Block S-S 法 [8] を適用する．解析例を通し，本手法の有効性や，スラブ長が分散特性に及ぼす影響などについて検討する．

2. 分散解析法

2.1. 対象とする軌道

本研究で対象とする防振マット軌道を Fig.1 に示す．レールは無限長とし，まくらぎ間隔 L で軌道パッドを介してコンクリートスラブ上に直接離散支持されている直結軌道を考える．コンクリートスラブは有限長とし，隣接スラブ間のスリット (間隙) を含めて 1 区間の長さ D をまくらぎ間隔の整数倍で与え，その値を N とおく．また，当該スラブは防振マットで剛基礎上に連続支持されているものとする．この時，軌道は周期長 $D = NL$ の無限周期構造で与えられる．

本解析では，レールとスラブを Timoshenko ばりでモデル化する．また，軌道パッドは離散バネで，防振マットは連続支持バネで与える．

2.2. 効率的な分散解析法の概要

本研究は分散解析を目的としているので，円振動数 ω における定常波動場を対象とする．Fig.2 上図の様に，隣接する左右のスラブをモデル化したはり要素端の節点を，それぞれ A, B，それを節点に持つ端部要素をそれぞれ「要素 a」および「要素 b」と呼ぶこととする．なお実際の離散化では，Fig.1 の様にレールと連結した連成系を対象としている．本来は節点 A, B 間には隙間が存在しているので，それらの節点力はゼロとなる．当該問題を，Fig.2 下図の様に，両節点間にもはり要素を設けた連続なスラブに置き換える．その下で，左右のスラブに対応する領域内の波動場が本来の有限長スラブのそれと一致する様に，A, B 点に一連の節点力ベクトル $\{\mathbf{F}_S\}$ を設定したい．なお，Floquet 原理 [9] より，本定常波動場における加振力 $\{\mathbf{F}_S\}$ は次の条件を満たす．

$$\{\mathbf{F}_S(x+D)\} = e^{-ikD}\{\mathbf{F}_S(x)\} \tag{1}$$

ここで，x は軌道長手方向座標，k は Floquet 波数である．

Fig.2 下図の加振問題において，節点 A, B に作用している節点力ベクトル $\{\mathbf{F}_S\}$ による，要素 a の A 点および要素 b の B 点での内部節点力を並べたベクトルを $\{\mathbf{F}_0\}$ とおく．これらの関係が次式で与えられているものとする．

$$[\mathbf{B}]\{\mathbf{F}_S\} = \{\mathbf{F}_0\} \tag{2}$$

なお，加振力は，式 (1) に従う様に全スラブ端に作用させている．行列 $[\mathbf{B}]$ の導出については後程述べる．

Fig.2 下図の加振問題が上図の有限長スラブの応答を再現しているものであるならば，A, B 点の内部節点力 $\{\mathbf{F}_0\}$ はゼロとなる．したがって，有限長スラブ軌道における波動モードの存在条件は次式で与えられる．

$$[\mathbf{B}]\{\mathbf{F}_S\} = \{\mathbf{0}\} \tag{3}$$

式 (3) は，円振動数 ω と Floquet 波数 k に関する固有値問題を与える．当該固有値問題を解くことで有限長スラブ軌道の分散曲線を求めることができる．

2.3. 行列 [B] の導出

節点 A, B に対応する全スラブ端節点の加振力として，その何れか 1 成分にのみ単位調和加振力を与え，他の成分はゼロとしたものを設定する．なお，前述のとおりスラブを Timoshenko ばりでモデル化しているが，ここではたわみを 3 次 Hermite で，断面回転角を 2 次 Lagrange で補間する TIM7 要素 [10] により離散化する．この場合，節点変位は，たわみ，たわみ角および断面回転角の 3 成分で与えられる．よって，節点力もそれらに対応する 3 成分から成り，スラブ端点 (A, B 点) 加振力は合計 6 成分で構成される．長さ D の各スラブ区間に対して，x 軸方向に順に番号 $n, (n \in \mathbb{Z})$ を付し，0 番区間における非ゼロ加振力成分 P_0 を 1 と設定すると，それに対応する n 番区間の加振力成分 P_n は，式 (1) より次式で与えられる．

$$P_n = e^{-iknD} \tag{4}$$

なお，時間因子 $e^{i\omega t}$ は省略している．

この加振問題を解き，節点 A, B における内部節点力 6 成分から成るベクトルを求める．6 つの加振力成分を式 (4) に従い順次設定して，同様に内部節点力ベクトルを求め，これらを縦ベクトル成分に持つ 6×6 の行列 $[\mathbf{F}]$ を作成する．加振力ベクトルを縦ベクトル成分に持つ 6×6 の行列を $[\mathbf{P}]$ とおくと，式 (2) の関係より，次式が成り立つ．

$$[\mathbf{B}][\mathbf{P}] = [\mathbf{F}] \tag{5}$$

ここで，[**P**] は 6 成分の内の一つを順次 1 に設定した縦ベクトルから構成されているので，恒等行列を与える．したがって，次式が成り立ち，行列 [**B**] は [**F**] で与えられることとなる．

$$[\mathbf{B}] = [\mathbf{F}] \tag{6}$$

以上より，行列 [**B**] の導出は上述の加振問題に帰着する．

2.4. 加振問題の求解

本加振問題は，スリットの無い無限長スラブ軌道が対象となるので，当該構造の周期長はまくらぎ間隔 L で与えられる．そこで，次の長さ L に関する Floquet 変換 [6, 7] を適用して解く．

$$\tilde{u}(x,\kappa) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(x+nL)e^{in\kappa L} \tag{7}$$

ここで，u は軌道変位，$\tilde{u}$ はその Floquet 変換，κ は $0 \le \kappa < 2\pi/L$ で定義された Floquet 波数である．

式 (7) の $\tilde{u}$ は次の周期条件を満たす．

$$\tilde{u}(x+L,\kappa) = e^{-i\kappa L}\tilde{u}(x,\kappa) \tag{8}$$

なお，逆 Floquet 変換は次式で与えられる．

$$u(x+nL) = \frac{L}{2\pi}\int_0^{2\pi/L} \tilde{u}(x,\kappa)e^{-in\kappa L}\,\mathrm{d}\kappa \tag{9}$$

本問題の加振力は式 (1) を満たしているので，応答解 u も次式を満たす．

$$u(x+nD) = e^{-inkD}u(x) \tag{10}$$

式 (10) の関係を式 (7) の $u(x+nL)$ に適用すると，$\tilde{u}(x,\kappa)$ は次式で与えられることとなる．

$$\begin{aligned}
\tilde{u}(x,\kappa) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(x+nL)e^{in\kappa L} \\
&= \cdots \\
&\quad + u(x) + u(x+L)e^{i\kappa L} + \\
&\qquad \cdots + u(x+(N-1)L)e^{i\kappa(N-1)L} \\
&\quad + u(x+D)e^{i\kappa D} + u(x+D+L)e^{i\kappa D}e^{i\kappa L} + \cdots \\
&\quad + u(x+2D)e^{i\kappa 2D} + u(x+2D+L)e^{i\kappa 2D}e^{i\kappa L} + \cdots \\
&\quad + \cdots \\
&= \{\cdots u(x) + u(x+L)e^{i\kappa L} + u(x+2L)e^{i\kappa 2L}\cdots\} \\
&\quad \times \{\cdots + 1 + e^{i(\kappa-k)D} + e^{i(\kappa-k)2D} + \cdots\} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} u(x+nL)e^{i\kappa nL} \times \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{i(\kappa-k)mD}
\end{aligned} \tag{11}$$

ここで，次式が成り立つ．

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{i(\kappa-k)mD} = \frac{2\pi}{D}\delta_{\frac{2\pi}{D}}(\kappa-k) \tag{12}$$

なお，$\delta_{\frac{2\pi}{D}}$ は，$2\pi/D$ を周期とした周期デルタ関数である．

式 (11)，式 (12) より次式を得る．

$$\tilde{u}(x,\kappa) = \frac{2\pi}{D}\delta_{\frac{2\pi}{D}}(\kappa-k)\hat{u}(x,\kappa) \tag{13}$$

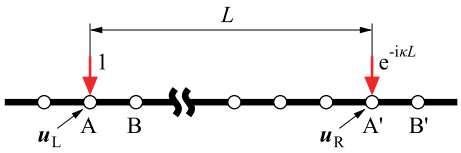


Fig. 3　Harmonic loading of unit cell

ここで $\hat{u}(x,\kappa)$ は次式で定義する．

$$\hat{u}(x,\kappa) = \sum_{n=0}^{N-1} u(x+nL)e^{i\kappa nL} \tag{14}$$

なお，式 (8) より，$\hat{u}$ は次式を満たす．

$$\hat{u}(x+L,\kappa) = e^{-i\kappa L}\hat{u}(x,\kappa) \tag{15}$$

$\hat{u}$ は，長さ L のユニットセル両端に式 (15) の周期条件を課し，当該ユニットセル内の節点 A, B に相当する節点に単位加振力を順次設定して解くことで得られる．u は $\tilde{u}$ の逆 Floquet 変換で求める．その際に式 (13) の関係を用いると，次式を得る．

$$\begin{aligned}
u(x+mL) &= \frac{L}{2\pi}\int_0^{2\pi/L} \tilde{u}(x,\kappa)e^{-i\kappa mL}\,\mathrm{d}\kappa \\
&= \frac{L}{2\pi}\int_0^{2\pi/L} \frac{2\pi}{D}\delta_{\frac{2\pi}{D}}(\kappa-k)\hat{u}(x,\kappa)e^{-i\kappa mL}\mathrm{d}\kappa
\end{aligned} \tag{16}$$

ここで，$\delta_{\frac{2\pi}{D}}(\kappa-k)$ は $\kappa = k + 2n\pi/D (n = 0, \cdots, N-1)$ に特異点を持つ．よって，式 (16) はさらに次式の様になる．

$$\begin{aligned}
u(x+mL) &= \frac{L}{D}\sum_{n=0}^{N-1} \hat{u}(x, k+n\frac{2\pi}{D})e^{-imL(k+n\frac{2\pi}{D})} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \hat{u}(x, k+\frac{n}{N}\frac{2\pi}{L})e^{-i(k+\frac{n}{N}\frac{2\pi}{L})mL}
\end{aligned} \tag{17}$$

式 (17) より，$u(x+mL)$ は長さ L のユニットセルの加振問題を $\kappa = k + 2n\pi/LN (n = 0, \cdots, N-1)$ について解き，それらの解を重ね合わせることで求めることが出来る．

2.5. ユニットセルの加振解析

行列 [**B**] 作成のための加振問題の解は，式 (17) に示したとおり，最終的にはまくらぎ間隔 L で与えられるユニットセルの加振問題を N 回解くことで求めることができる．ここでは，その具体的問題設定と定式化について述べる．

式 (8) の周期条件の下，Fig.3 に示すユニットセルの調和加振問題を設定する．以下の説明では Fig.3 の様に，Fig.2 の節点 A をユニット左端に置いている場合を対象としているが，本来は長さ L の 1 ユニット内における節点 A の位置は任意である．なお，Fig.3 では，A 点を加振する場合を例示している．以下では，その場合について述べる．

当該ユニットセルの運動方程式は次式で与えられる．

$$[\delta\tilde{\mathbf{u}}]^{\mathbf{T}}\begin{bmatrix}\mathbf{K}'_{LL} & \mathbf{K}'_{LM} & \mathbf{K}'_{LR}\\ \mathbf{K}'_{ML} & \mathbf{K}'_{MM} & \mathbf{K}'_{MR}\\ \mathbf{K}'_{RL} & \mathbf{K}'_{RM} & \mathbf{K}'_{RR}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\hat{\mathbf{u}}_L\\ \hat{\mathbf{u}}_M\\ \hat{\mathbf{u}}_R\end{Bmatrix} = [\delta\tilde{\mathbf{u}}]^{\mathbf{T}}\begin{Bmatrix}\hat{\mathbf{F}}_L\\ \mathbf{0}\\ \hat{\mathbf{F}}_R\end{Bmatrix} \tag{18}$$

ここで，下付き添字の L, R, M は，それぞれ 1 ユニットセルの左端節点，右端節点，およびそれ以外の内部節点に関する成分を意味している．$[\mathbf{K}']$ は，剛性行列 $[\mathbf{K}]$ と質量行列 $[\mathbf{M}]$ より次式により与えられる行列である．

$$[\mathbf{K}'] = [\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}] \tag{19}$$

また，$\{\delta\hat{\mathbf{u}}\}$ は仮想節点変位ベクトル，$(\bar{\cdot})$ は複素共役，$[\cdot]^T$ は転置である．

式 (8) の周期条件より次式が成り立つ．

$$\hat{\mathbf{u}}_R = \hat{\mathbf{u}}_L e^{-i\kappa L}, \quad \delta\bar{\hat{\mathbf{u}}}_R = \delta\bar{\hat{\mathbf{u}}}_L e^{i\kappa L} \tag{20}$$

式 (8) を考慮すると，$e^{i\kappa L}\hat{F}_R$ は Fig.3 の節点 A における左側要素節点力を与える．よって，単位加振力を受けているユニットセル左右端の内部節点力成分に対して，力のつり合い条件より次の関係式を得る．

$$\hat{F}_L + e^{i\kappa L}\hat{F}_R = 1 \tag{21}$$

式 (20), (21) を式 (18) に代入し，右端節点に関する項を消去すると，次の Hermite 行列に関する求解式を得る．

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}'_{LL} + \mathbf{K}'_{LR}e^{-i\kappa L} + \mathbf{K}'_{RL}e^{i\kappa L} + \mathbf{K}'_{RR} & \mathbf{K}'_{LM} + \mathbf{K}'_{RM}e^{i\kappa L} \\ \mathbf{K}'_{ML} + \mathbf{K}'_{MR}e^{-i\kappa L} & \mathbf{K}'_{MM} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_L \\ \hat{\mathbf{u}}_M \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \tag{22}$$

ただし，$\{\mathbf{1}, \mathbf{0}\}$ は Fig.3 の節点 A, B の加振成分のみ 1 で他は全てゼロとなる節点力ベクトルである．

3. 解析結果

3.1. 解析条件

有限長スラブ軌道の分散解析において，スラブ幅は 2.5m，スラブ厚は 0.4m とした．ただし，対称条件によりコンクリートスラブの幅は本来のスラブ幅の半分 (レール 1 本分) に設定した．スラブに関する他の解析条件を Table 1 に示す．ここで，ρA は単位長さ当たりの質量，ρI は単位長さ当たりの慣性モーメント，EI は曲げ剛性，GAK はせん断弾性係数 G と断面積 A およびせん断係数 K の積である．また，レールは 60kg レールを対象とした．レールの諸条件を Table 2 に示す．

軌道パッドのバネ定数は 30MN/m，防振マットの単位面積当たりの動的等価剛性は 12.5MN/m^3 とした [(2)]．まくらぎ間隔は 0.6m とし，精度を確認の上，レールはまくらぎ 1 区間を 2 要素で，スラブは 10 要素で離散化した．その下で，Fig.2 上図の節点 A, B 間の間隙を 1 要素 (6cm) で与えた．

3.2. 本手法の有効性の検討

提案手法の，有限長スラブ軌道の分散解析に対する有効性について検討する．なお，解析は Table 1, Table 2 の条件で行った．

分散解析に当り，Floquet 波数 k を順次走査して，各 k の下で式 (3) を円振動数 ω に関する固有値問題として設定し，

Table 1　Slab characteristics

ρA	1200kg/m
ρI	16.1kgm
EI	217MNm^2
GAK	4.5GN

Table 2　Rail characteristics

ρA	60.8kg/m
ρI	0.242kgm
EI	6.37MNm^2
GAK	209MN

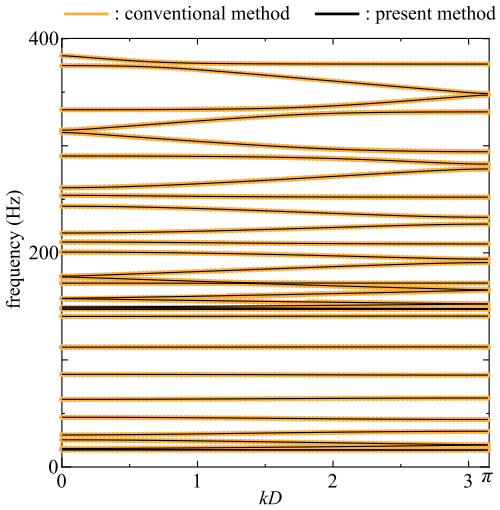


Fig. 4　Dispersion curves obtained by present method and conventional method (D=18m)

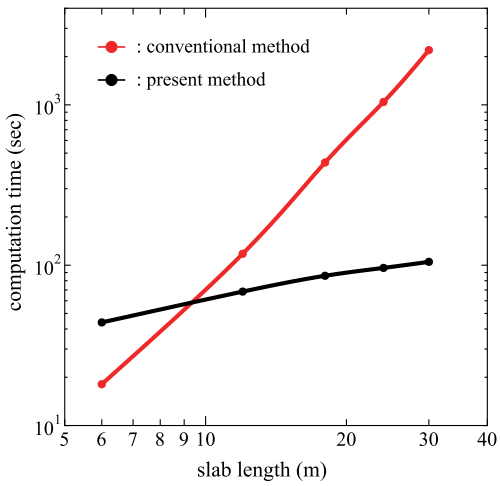


Fig. 5　Comparison of computation time spent for dispersion analysis by the present method with the conventional method

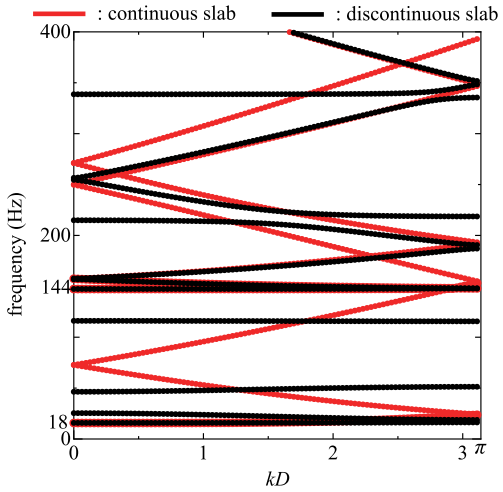


Fig. 6　Dispersion curves of continuous and discontinuous (D=6m) slabs

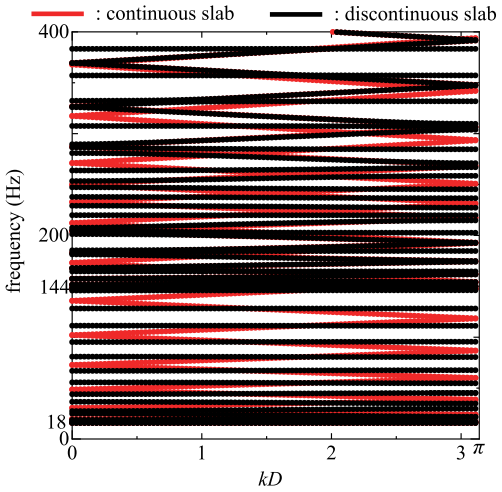


Fig. 7　Dispersion curves of continuous and discontinuous (D=30m) slabs

それを Block S-S 法 [8] を用いて解いた．なお，スラブ 1 区間を周期長とした従来法による場合，当該問題は ω^2 に関する Hermite 行列の標準的な線形固有値問題 [3] として与えられるので，それを解いて分散曲線を求めた．

まず本手法の妥当性を確認する目的で，18m の有限長スラブ軌道を対象に，スラブ長を 1 ユニットとした従来法と，まくらぎ間隔 L を 1 ユニットとした本手法とで分散曲線を求めた．その結果を Fig.4 に示す．この図には，従来法で求めた分散曲線をオレンジ色で，本手法で求めたものを黒で示した．両者はほぼ完全に一致しており，本手法の妥当性が確認できる．

続いて，スラブ長 D を 6m から 30m まで変化させて，分散解析に要した計算時間を求めた．本手法と従来法とで比較を行った結果を Fig.5 に示す．スラブ長 6m の場合は，従来法の方が解析時間が短い結果となったものの，その 2 倍以上のスラブ長においては，提案法の方が計算時間が短くなっている．例えばスラブ長が 30m の場合，従来法では約 2200sec を要したのに対し，本手法では約 105sec となっており，20 倍以上の高速化が図られている．ちなみに，従来法では Householder 変換による行列の三重対角化を用いた固有値計算法を採用しており，計算時間は概ね自由度の 3 乗に比例している．一方，本手法の場合，式 (17) に示した様に計算時間はスラブ長 D とまくらぎ間隔 L との比 N に概ね比例するため，Fig.5 に示した様に長尺なスラブ軌道の解析において特に有効となる．なお，従来法ではスラブ長 D を 1 ユニットとしており本手法の N 倍のサイズの問題を対象としているが，Block S-S 法の適用により計算時間をある程度短縮可能と考えられる．また，本手法で対象とする式 (3) の固有値問題は，スラブ長によらずそのサイズが常に 6×6 と非常に小さく，この固有値問題の計算自体には殆ど時間を要しない点に特徴がある．

3.3. スラブ長が分散曲線に及ぼす影響

スラブ長の違いによる分散曲線の差異を確認するため，スラブ長 6m および 30m の 2 ケースについて分散解析を行った．これらに対して求めた分散曲線を，Fig.6 と Fig.7 にそれぞれ示す．なお両図には，比較のため連続スラブ軌道の分散曲線も赤線で示した．

Fig.6 より，連続スラブ軌道の分散曲線が，約 18Hz から始まるものと，144Hz から始まるものの 2 種類から構成されている様子が窺える．前者は防振マットとスラブとから成るバネ・質点系の固有振動数に概ね一致し，後者は軌道パッドとレールから構成される系の固有振動数に一致していることを別途行った計算により確認した．このことから，これらの分散曲線が，それぞれスラブおよびレールが主体的に振動するモードに対応していることが推測できる．

一方，有限長スラブの分散曲線では，特に 144Hz 以下の周波数域において分散曲線が波数に依存せずほぼ一定の周波数に離散的に分布している．これは，前述のとおり当該周波数域のモードがスラブ主体のものであるため，レールを介した波動伝播の影響はごくわずかであり，有限長スラブの固有振動モードが支配的となることに起因しているものと考えられる．これに対し 144Hz 以上の周波数域では，スラブ主体の振動に加え，レール内を伝播する波動が支配的となるモードが混在しており，分散曲線が広い周波数域にわたり分布している．

スラブ長 D=30m に対する Fig.7 の分散曲線においても，18Hz と 144Hz が各モードの下端周波数を与えている様子が確認できる．なお，赤線で示した無限長スラブの分散曲線は，本来 Fig.6 のそれと同じである．ただし，Fig.7 の横軸の範囲は $0 \le k \le \pi/30$(1/m) であり，Fig.6 の分散曲線を $k = \pi/30$(1/m) の間隔で折りたたんだ図が得られる．例えば，低周波数側から i 番目の周波数域における分散モードを特徴付ける調和振動波形の波数を k_i と置くと，Floquet 波数 k に対し次の関係が成り立つことが知られている [3]．

$$k_1 = k, \quad k_2 = -k + \frac{2\pi}{D}, \quad k_3 = k + \frac{2\pi}{D}, \\ k_4 = -k + \frac{4\pi}{D}, \quad k_5 = k + \frac{4\pi}{D}, \cdots \tag{23}$$

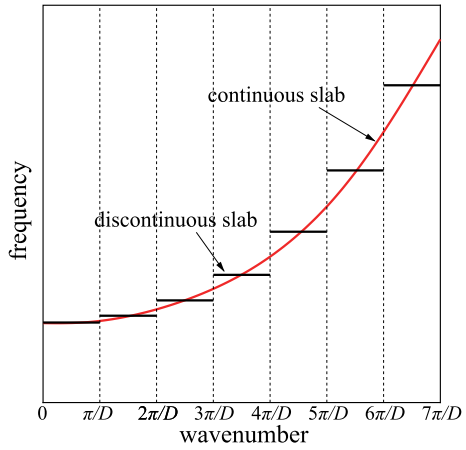


Fig. 8 Schematic illustration of unfolding of dispersion curves for discontinuous slab track

そのため，D=30m に対する Fig.7 では，D=6m に対する Fig.6 より狭い周波数間隔で分散曲線が分布する．また，黒線で示した有限長スラブの分散曲線も，同程度の周波数間隔で分布している．なお，Fig.4(D=18m) との比較からも，スラブ長が長くなるにしたがって分散曲線の周波数間隔が狭くなる傾向が確認できる．

Fig.7 に示した 144Hz 以下のスラブ主体のモードでは，その分散曲線と無限長スラブの分散曲線とが $kD = \pi/2$ 付近で交差している．このことより，以下の様な傾向が推測できる．有限長スラブ軌道におけるスラブ振動主体の分散曲線は，前述のとおり，当該スラブの固有振動数に概ね対応して周波数方向に離散的に分布する．これを式 (23) に従い波数方向に展開すると，Fig.8 に示すイメージ図の様に，無限長スラブ軌道の分散曲線に対する区間一定近似が得られる．したがって，スラブ長 D を長くしていくと，分散曲線は無限長スラブ軌道のそれに収束することが推測できる．

4. おわりに

まくらぎ間隔とスラブ長の 2 つの異なる周期長を持つ軌道の分散曲線を，前者の周期性を利用して効率的に求める手法を構成した．本手法と，スラブ長を 1 周期長とする従来法とで分散解析を実施した結果，両者は良好な一致を示し提案法の妥当性を確認することができた．また，本手法の計算量はスラブ長に対して概ね 1 次関数的に増加し，スラブ長が長い程，従来法に比べより短い時間で計算可能であることがわかった．さらに, 無限長スラブ軌道と有限長スラブ軌道の分散曲線の比較より，スラブ長が長くなる程，有限長スラブ軌道の分散曲線が無限長スラブ軌道のそれに近づく傾向が認められた．

参考文献

(1) Gupta, S. and Degrande, G.: Modelling of continuous and discontinuous floating slab tracks in a tunnel using a periodic approach, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.329, pp. 1101-1125, 2010.

(2) 阿部和久，山田高也，古田勝，末原美智子，紅露一寛: 地下鉄トンネル・地盤連成系の三次元加振応答解析，土木学会論文集 A2（応用力学），Vol.74，No.2（応用力学論文集 Vol.21），pp. I_523-I_534，2018.

(3) 阿部和久，古屋卓稔，紅露一寛: まくらぎ支持された無限長レールの波動伝播解析，応用力学論文集，Vol.10, pp. 1029-1036, 2007.

(4) Sheng, X., Xiao, X., Li, Y. and Zhong, T.: Resonance and propagation characteristics of slab high-speed railway tracks used in China, Proc. of 12th International Workshop on Railway Noise, pp. 342-357, 2016.

(5) 阿部和久，筧拓哉，紅露一寛 : 等間隔に欠陥が存在する周期場を対象とした効率的分散解析手法，土木学会論文集 A2（応用力学），Vol.73，No.2（応用力学論文集 Vol.20），pp. I_133-I_141，2017.

(6) Clouteau, D., Arnst, M., Al-Hussaini, T.M. and Degrande, G.: Freefield vibrations due to dynamic loading on a tunnel embedded in a stratified medium, *Journal of Soundand Vibration*, Vol.283, pp. 173-199, 2005.

(7) Clouteau, D., Elhabre, M.L. and Aubry, D.: Periodic BEM and FEM-BEM coupling, Application to seismic behaviour of very long structures, *Computational Mechanics*, 25, pp. 567-577, 2000.

(8) Asakura, J., Sakurai, T., Tadano, H., Ikegami, T. and Kimura, K. : A numerical method for nonlinear eigenvalue problems using contour integrals, *JSIAM Letters*, Vol.1, pp. 52-55, 2009.

(9) Brillouin, L.: Wave propagation in periodic structures, Dover Publications, New York, 1953.

(10) Nickel, R.E. and Secor, G.A.: Convergence of consistently derived Timoshenko beam finite elements, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.5(2), pp. 243-253, 1972.

計算数理工学論文集 Vol. 22 (2022 年 12 月)，論文 No. 10-221216 JASCOME

修正加速勾配法に基づく軸受け表面のテクスチャ形状の最適化
（オイルクリアランスを考慮した摩擦係数の最小化問題に対する考察）

PROPOSAL OF A MODIFIED ACCELERATION GRADIENT METHOD FOR SHAPE OPTIMIZATION PROBLEM OF TEXTURE ON BEARING SURFACE (CONSIDERATIONS FOR MINIMIZATION PROBLEM OF FRICTION COEFFICIENT CONSIDERING OIL ClEARANCE)

新田　大晃 [1)]，岸田　真幸 [2)3)]，倉橋　貴彦 [4)]

Hiroaki ARATA, Masayuki KISHIDA and Takahiko KURAHASHI

1) 長岡技術科学大学大学院工学研究科 (〒 940-2137 新潟県長岡市上富岡 1603-1, E-mail: s193009@stn.nagaokaut.ac.jp)
2) 長岡技術科学大学大学院工学研究科 (〒 940-2137 新潟県長岡市上富岡 1603-1, E-mail: s173029@stn.nagaokaut.ac.jp)
3) 岐阜工業高等専門学校 助教 (〒 501-0495 岐阜県本巣市上真桑 2236-2, E-mail: kishida@gifu-nct.ac.jp)
4) 長岡技術科学大学技学研究院 准教授 (〒 940-2137 新潟県長岡市上富岡 1603-1, E-mail: kurahashi@mech.nagaokaut.ac.jp)

In this paper, we present some numerical results for the texture shape optimization problem using a modified acceleration gradient method. The modified acceleration gradient method is derived based on the concept of the Taylor expansion, and it is known that the convergence rate of this method is faster than the conventional acceleration gradient method, i.e., Nesterov's accelerated gradient method. In previous studies, the basic oil film thickness was adjusted so that the load is constant in the texture shape optimization. However, there are restrictions on the value of oil clearance equivalent to the basic oil film thickness. It is also necessary to dispense with the adjustment of the basic oil film thickness in order to investigate the change of the load capacity by shape optimization. Therefore, texture shape optimization was performed in the case of dispensing with the basic oil film thickness adjustment in this paper by using the present method. All numerical calculations were carried out based on the finite element method using FreeFEM++. As the result, it was found that the effect of reducing the friction coefficient by increasing the load capacity is greater than that by decreasing the friction force.

Key Words: Modified acceleration gradinent method, Shape optimization, Texture, Friction coefficient

1. 序論

摩擦や摩耗による経済的な損失は，各国の国内総生産の約 2〜7 %を占めている [(1)]．これらを低減する方法として表面テクスチャリングと呼ばれる表面改質技術が挙げられる．この方法は，流体中を移動する物体に微細な凹凸を加工することで、摩擦などの抵抗を低減させる技術である．近年, レーザー加工等の微細加工技術の発達によって，高精度かつ低コストなテクスチャの加工が可能になりつつあるため，メカニカルシール，スラストベアリング，ピストンリング，磁気メモリデバイスなどの機械部品へのテクスチャの適用が進んでいる [(2)]．Hamilton(1966) らは，微細な凹凸を付与した平行平板について実験および解析を実施し，微細な凹凸によって負荷容量が増加することを発見した [(3)]．Etsion(1996) らは，半球状の規則的なテクスチャを付与したメカニカルシールの性能を予測できる数学的モデルを提案し，摩擦トルクを低減させるためにテクスチャの大きさと密度を適切に選択する必要があることを示した [(4)]．1996 年以降，表面テクスチャリングは幅広い用途でトライボロジー特性の改善に有効であることが示されているが，特定の部品や動作条件への依存度が高いため，それらに合わせてテクスチャのパラメータ（形状，サイズ，分布）を設計する必要がある [(5)]．そのため，

2022 年 10 月 27 日受付，2022 年 11 月 28 日受理

テクスチャの機械部品への適用において，特定の部品や動作条件の範囲を想定した最適化解析の実施が求められている．Sasaoka et al.(2020) は，摩擦係数の最小化を目的としたテクスチャ深さの形状最適化を実施し，半球状の形状が摩擦係数を減少させることを示した [6]．また，Zhirong（2021) らは，負荷容量の最大化を目的としたテクスチャの表面形状の最適化を実施し，シェブロン型の形状が負荷容量を増加させることを示した [7]．これらの最適化解析では，勾配を用いた反復計算によって設計変数を更新し，最適な形状が求められる．この方法は，一般的に最急降下法と呼ばれており広く知られている．最急降下法の問題点として，反復計算に時間がかかる点が挙げられる．そのため，ネステロフの加速勾配法 (1983)[8] やモメンタム法 (1986)[9] などの改善策が提案された．Sasaoka et al.(2020) は，最急降下法に対してテイラー展開の概念を導入した新しい更新式を提案し，反復計算にかかる時間を削減した [6]．また，本研究グループでは文献 [6] に対して更なる拡張をし，摩擦係数の最小化を目的としたテクスチャの形状最適化において，ネステロフの加速勾配法にテイラー展開の概念を導入した修正加速勾配法の提案をした [10]．これまでのテクスチャの摩擦係数の最小化の検討では，摩擦係数の分母である負荷容量が一定となるように基本油膜厚さの調整をアルゴリズに加えていた．しかし，実際の軸受等の基本油膜厚さに相当するオイルクリアランス [11]（Fig.1 参照）は，軸受の設計段階において決められる．また，焼付き防止および騒音防止の観点から，軸径 d およびオイルクリアランス C の比の目安が定められている [12]．したがって，テクスチャの形状最適化において基本油膜厚さの調整を行うことで予め定められたオイルクリアランスの値にならない場合が考えられる．そのため，本論文では，オイルクリアランスを考慮し，基本油膜厚さの調整を行わない場合において，摩擦係数の最小化問題に修正加速勾配法を適用し，検討および考察を実施した．尚，本論文における全ての数値計算は，FreeFEM++により実施した [13]．また，本論文では，Sasaoka et al.(2020) が検討した解析モデルと同様の平行平板間におけるテクスチャモデルを採用する [6]．

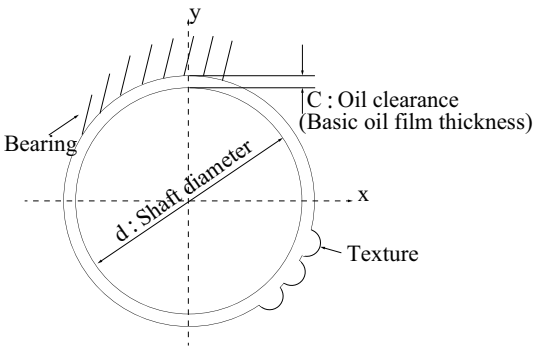


Fig. 1　Image diagram of oil clearance.

2. 形状最適化問題の理論

本章では，形状最適化問題の理論，摩擦係数の最小化のための定式化および形状更新式のアルゴリズについて述べる．目的関数の最小化または最大化のための物体の形状最適化に関する研究は，1970 年代が始まりである [14]．最適化問題では，目的を満足する設計変数を求めるための反復計算おいて設計変数に対する感度を求める必要がある．感度を求める方法として，ラグランジュ未定乗数法に基づく感度解析手法が挙げられる．ラグランジュ未定乗数法では，目的関数とラグランジュ未定乗数を乗じた制約関数の足し合わせによりラグランジュ関数を定義する．ラグランジュ関数を定義することにより，制約のある目的関数の最小化問題を無制約条件下のラグランジュ関数の最小化問題に置き換えることができる [15]．また，ラグランジュ関数について全ての変数で偏微分することにより，ラグランジュ関数の第一変分を求めることができる．ラグランジュ関数の第一変分は，停留条件よりゼロとなる．停留条件を満たす場合において，ラグランジュ関数の第一変分より状態方程式，随伴方程式および感度方程式が求まり，状態方程式および随伴方程式を解くことにより得られる状態変数および随伴変数から感度を求めることができる．最急降下法などの一次法により，感度を用いて設計変数を更新することで目的を満足する未知変数を求めることができる．

2.1. 摩擦係数の最小化問題に対する定式化

Fig.2 に本論文におけるテクスチャの計算モデルを示す．本論文における計算モデルは，Sasaoka et al.(2020)[6] が実施したテクスチャの形状最適化の拡張検討であるため，Sasaoka et al.(2020)[6] と同様の半径 R のテクスチャが四角形領域に 9 つある計算モデルを採用した．なお，テクスチャの間隔やテクスチャの面積率，テクスチャの圧力変化の相互作用等を考慮するため, テクスチャを 9 つとしている．計算モデルは，四角形領域を Ω とし，その境界を Γ_1 としている．四角形領域内に 9 つの円形テクスチャを等間隔に配置し，四角形領域の面積に対してテクスチャの面積率 A が約 50% とする．また，テクスチャ部の領域を ω とし，その境界を Γ_2 と定義する．ここで，h_{dep}，h_0 および $h(x,y)$ は，テクスチャの深さ，基本油膜厚さおよび油膜厚さの分布を示す．

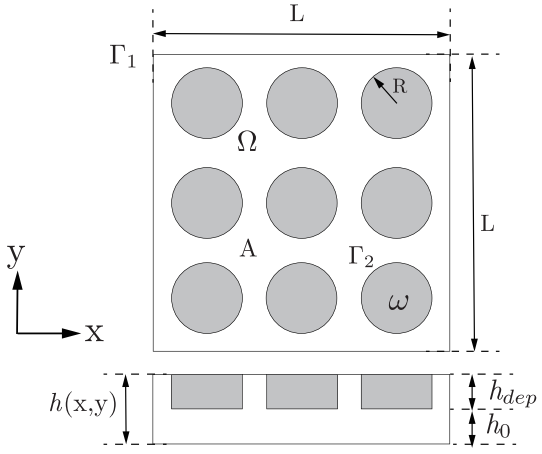


Fig. 2　Numerical model.

本論文では，摩擦係数 μ の最小化を目的とする．一般に，最小化または最大化の対象を目的関数とするが，本研究グループで行われた過去の検討では摩擦力 F を目的関数とし，基本油膜厚さの調整により負荷容量 W を一定とする条件を加えることで式（1）に示す摩擦係数を評価していた [6]．本論文では，摩擦力を目的関数と定義し，基本油膜厚さの調整を除いた場合において摩擦係数の評価を行う．尚，テクスチャの形状更新による圧力分布の変化によって負荷容量が変化するが，初期の負荷容量における基本油膜厚さは変化しない．目的関数 J を式 (2) に示す．本解析モデルでは，潤滑剤などの薄い流体膜が介在する摺動面を仮定するため，状態方程式を式（3）に示すレイノルズ方程式とする [16]．レイノルズ方程式は，膜厚さを h として，油膜に作用する圧力 p の分布を求めるための状態方程式である．レイノルズの仮定を以下に示す．(1) 流体は, 非圧縮性ニュートン流体である．(2) 流体の慣性力は粘性力に比べて小さく，無視できる．(3) すきま内の流れは層流で，粘度は一定である．(4) 潤滑膜は極めて薄く，厚さ方向の圧力変化は無視できる．(5) 固体表面と流体との間ですべりは起こらない．ここで，η は粘性係数，U は摺動速度である．また，その境界条件を式（4）に示す．なお，境界条件は，領域の外周部をゼロとしている.[17] したがって，制約関数はレイノルズ方程式となるため，ラグランジュ関数 L は式（5）のように定義できる．λ はラグランジュ未定乗数である．

$$\mu = \frac{F}{W} = \frac{\int_\Omega \left(\frac{\eta U}{h} + \frac{h}{2}\frac{dp}{dx}\right) d\Omega}{\int_\Omega p d\Omega} \tag{1}$$

$$\text{minimize} \quad J = F = \int_\Omega \left(\frac{\eta U}{h} + \frac{h}{2}\frac{dp}{dx}\right) \mathrm{d}\Omega \tag{2}$$

$$\int_\Omega \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(h^3\frac{\partial p}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(h^3\frac{\partial p}{\partial y}\right) - 6\eta U\frac{\partial h}{\partial x}\right] d\Omega = 0 \tag{3}$$

$$p = 0 \quad \text{on} \quad \Gamma_1 \tag{4}$$

L=J

$$+\int_\Omega \lambda\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(h^3\frac{\partial p}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(h^3\frac{\partial p}{\partial y}\right) - 6\eta U\frac{\partial h}{\partial x}\right] d\Omega \tag{5}$$

次に，ラグランジュ関数の第一変分を求めることにより，式 (6) および式 (8) に示す随伴方程式および感度方程式が得られる．式 (7) に随伴方程式の境界条件を示す．

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial p} &= -\frac{1}{2}\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial^2\lambda}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\lambda}{\partial y^2} - \frac{3}{h}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial y}\right)\\ &+ \frac{3\lambda}{h^2}\left(\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial y}\right)\\ &- \frac{3\lambda}{h}\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\right) = 0 \quad \text{in} \quad \Omega\end{aligned} \tag{6}$$

$$\lambda = 0 \quad \text{on} \quad \Gamma_1 \tag{7}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial h} &= -\frac{\eta U}{h^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{3}{h}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial p}{\partial y}\right)\\ &- \frac{3\lambda}{h}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2}\right) + \frac{6\eta U}{h^3}\frac{\partial\lambda}{\partial x}\end{aligned} \tag{8}$$

式（8）に示す感度を直接用いて形状を更新する場合，一般に形状の波打ち現象が発生する．したがって，本論文では，楕円型偏微分方程式であるポアソン方程式を使用して感度を平滑化する [18]．またこのほかに、ヘルムホルツ方程式による平滑化法（詳細は付録を参照）があるが，本論文では，比較検討のために Sasaoka et al.(2020)[6] と同様にポアソン方程式を用いた．式 (27) に平滑化後の感度を示す．また，テクスチャ領域においてのみ形状更新を行うため，平滑後の感度を式（10）に示すように境界 Γ_2 においてゼロと定義する．ここで境界 Γ_2 は，テクスチャの縁を示す．尚，チルダ記号の付いた感度を平滑後の感度と定義する．

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\tilde{\partial L}}{\partial h}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\tilde{\partial L}}{\partial h}\right) = \frac{\partial L}{\partial h} \quad \text{in} \quad \omega \tag{9}$$

$$\left(\frac{\tilde{\partial L}}{\partial h}\right) = 0 \quad \text{on} \quad \Gamma_2 \tag{10}$$

2.2. 形状更新式のアルゴリズム

本節では，最急降下法およびネステロフの加速勾配法などの一次法および提案手法について述べる．式（11）に最急降下法（GD）による形状更新式を示す．ここで，h はテクスチャ内部の油膜厚さの分布であり，本論文における設計変数である．最急降下法は，感度の減少方向に対して設計変数を更新し，感度が収束するまで更新を繰り返す方法である．ここで，α はステップ幅である．

$$h^{(l+1)} = h^{(l)} - \alpha\left(\frac{\tilde{\partial L}}{\partial h}\right)^{(l)} \tag{11}$$

以下に，ネステロフの加速勾配法（NAG）による形状更新式を示す [8]．この方法は，式（13）によって，慣性による更新を行った後に式（12）によって，仮想点 H から最急降下法によって更新を行う方法である．ここで γ はモメンタム係数であり，式（14）に示す [19]．

$$h^{(l+1)} = H^{(l)} - \alpha\left(\frac{\tilde{\partial L}}{\partial H}\right)^{(l)} \tag{12}$$

$$H^{(l)} = h^{(l)} + \gamma^{(l)}(h^{(l)} - h^{(l-1)}) \tag{13}$$

$$\gamma^{(l)} = \frac{l-1}{l+2} \tag{14}$$

次に，本研究グループで開発を行った修正加速勾配法（MAG）による形状更新式の導出について述べる．まず，式（12）に式（13）を代入する．ここで，Δh は，式（16）により計算される．

$$h^{(l+1)} = h^{(l)} + \gamma^{(l)}\Delta h - \alpha\left(\frac{\tilde{\partial L}}{\partial H}\right)^{(l)} \tag{15}$$

$$\Delta h = h^{(l)} - h^{(l-1)} \tag{16}$$

ここで，式の導出において，後退差分ではなく前進差分により Δh の定義を以下のように改める．

$$\Delta h = h^{(l+1)} - h^{(l)} \tag{17}$$

次に，式 (17) を式 (15) に代入し，以下のように整理する．

$$\begin{aligned}\left(\frac{\tilde{\partial L}}{\partial H}\right)^{(l)} &= -\frac{h^{(l+1)} - h^{(l)} - \gamma^{(l)}(h^{(l+1)} - h^{(l)})}{\alpha} \\ &= -\frac{h^{(l+1)}(1-\gamma^{(l)}) - h^{(l)}(1-\gamma^{(l)})}{\alpha} \\ &= -(1-\gamma^{(l)})\frac{h^{(l+1)} - h^{(l)}}{\alpha}\end{aligned} \tag{18}$$

ここで，式（18）の右辺について，設計変数 h のステップ幅 α に対する微分として解釈し，以下のように定義する．

$$\frac{h^{(l+1)} - h^{(l)}}{\alpha} = \frac{\partial h}{\partial \alpha} \tag{19}$$

式（18）に式（19）を代入すると，式 (20) が得られる．

$$\frac{\partial h}{\partial \alpha} = -\frac{1}{(1-\gamma^{(l)})}\left(\frac{\tilde{\partial L}}{\partial H}\right)^{(l)} \tag{20}$$

また，式（20）をステップ幅 α で微分すると以下のようになる．

$$\frac{\partial^2 h}{\partial \alpha^2} = -\frac{\partial}{\partial \alpha}\frac{1}{(1-\gamma^{(l)})}\left(\frac{\tilde{\partial L}}{\partial H}\right)^{(l)} \tag{21}$$

ここで，設計変数 h に対して二階微分までのテイラー展開を考えると，式（22）の様に表すことができる．

$$h^{(l+1)} = h^{(l)} + \alpha\left(\frac{\partial h}{\partial a}\right)^{(l)} + \frac{\alpha^2}{2}\left(\frac{\partial^2 h}{\partial \alpha^2}\right)^{(l)} \tag{22}$$

次に，式（22）に，上述において誘導した式（20）および式（21）を代入すると式（23）が得られる．

$$\begin{aligned}h^{(l+1)} &= h^{(l)} - \frac{\alpha}{(1-\gamma^{(l)})}\left(\frac{\tilde{\partial L}}{\partial H}\right)^{(l)} \\ &- \frac{\alpha^2}{2}\frac{\partial}{\partial \alpha}\frac{1}{(1-\gamma^{(l)})}\left(\frac{\tilde{\partial L}}{\partial H}\right)^{(l)}\end{aligned} \tag{23}$$

ここで，式（23）の第三項目について，後退差分を適用すると以下のようになる．

$$\begin{aligned}h^{(l+1)} &= h^{(l)} - \frac{\alpha}{(1-\gamma^{(l)})}\left(\frac{\tilde{\partial L}}{\partial H}\right)^{(l)} \\ &- \frac{\alpha^2}{2}\frac{1}{(1-\gamma^{(l)})}\frac{\left(\frac{\tilde{\partial L}}{\partial H}\right)^{(l)} - \left(\frac{\tilde{\partial L}}{\partial H}\right)^{(l-1)}}{\alpha}\end{aligned} \tag{24}$$

上記の式を整理すると，式（25）のようになる．

$$\begin{aligned}h^{(l+1)} &= h^{(l)} - \frac{\alpha}{1-\gamma^{(l)}}\left(\frac{\tilde{\partial L}}{\partial H}\right)^{(l)} \\ &\quad -\frac{\alpha}{2(1-\gamma^{(l)})}\left\{\left(\frac{\tilde{\partial L}}{\partial H}\right)^{(l)} - \left(\frac{\tilde{\partial L}}{\partial H}\right)^{(l-1)}\right\} \\ &= h^{(l)} - \frac{\alpha}{2(1-\gamma^{(l)})} \\ &\quad \left\{3\left(\frac{\tilde{\partial L}}{\partial H}\right)^{(l)} - \left(\frac{\tilde{\partial L}}{\partial H}\right)^{(l-1)}\right\}\end{aligned} \tag{25}$$

ここで，ネステロフの加速勾配法にテイラー展開を適用しているため，$h^{(l)}$ は，式（13）による更新後の $H^{(l)}$ であると定義できる．したがって，式（26）が求まる．

$$\begin{aligned}h^{(l+1)} &= H^{(l)} \\ &- \frac{\alpha}{2(1-\gamma^{(l)})}\left\{3\left(\frac{\tilde{\partial L}}{\partial H}\right)^{(l)} - \left(\frac{\tilde{\partial L}}{\partial H}\right)^{(l-1)}\right\}\end{aligned} \tag{26}$$

式（26）が本研究グループで開発を行った修正加速勾配法による形状更新式である．

3. テクスチャの形状最適化問題に対する数値解析

3.1. 計算条件

計算条件を Table1 に示す．有限要素メッシュを Fig.3 に示す．初期のテクスチャ深さの分布を Fig.4 に示す．

Table 1　Numerical conditions.

Number of nodes	4300
Number of elements	8398
Load capacity W	10 [N]
Velocity in x direction U	0.01 [m/s]
Viscosity of fluid η	0.08 [Pa·s]
Radius of a texture R	5.35×10^{-3} [m]
Analysis area size $L \times L$	1.6×10^{-3} [m^2]
Ratio of texture A	50 [%]
Initial depth of a texture h_{dep}	$1{\times}10^{-5}$ [m]
Step size α	10^{-3}
Convergence judgment parameter ε	5×10^{-4}

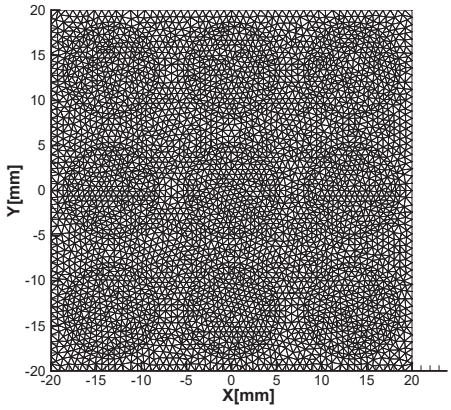


Fig. 3　Finite element mesh.

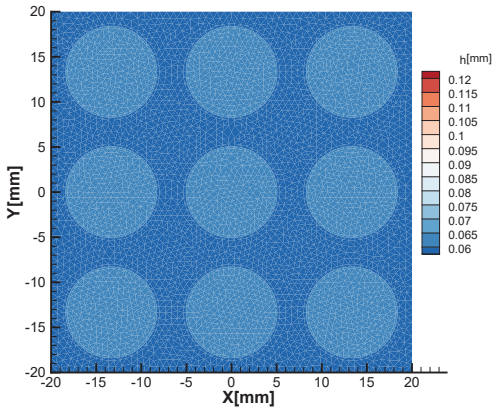


Fig. 4　Initial distribution of texture depth.

3.2. 形状最適化の流れ

以下に，テクスチャの形状最適化の流れを示す．

1. 初期条件および初期のテクスチャ深さの分布を与える．
2. レイノルズ方程式を解き状態変数 p を求める．
3. 摩擦係数を計算し，収束判定 $|\frac{\mu^{(l+1)}-\mu^{(l)}}{\mu^{(0)}}| < \varepsilon$ を満たす場合は，解析を終了する．
4. 随伴方程式を解き，随伴変数 λ を求める．
5. 感度を計算し，感度の平滑化を行う．
6. 形状更新式により，設計変数 h を更新する．
7. 2 へ戻る．

尚，本論文では，摩擦力を目的関数としているため，本来であれば摩擦力によって収束判定を行うべきであるが，本論文では，収束判定において負荷容量の変化の影響も考慮する必要がある．そこで，本研究では負荷容量を含む摩擦係数によって収束判定を行う．また，Table2 に本論文の計算アルゴリズム示す．まず，ステップ幅および初期膜厚さ等の初期条件を入力する．次に，モメンタム係数を計算する．その後，反復計算により，モメンタム係数および仮想点 H と感度の計算を行い，それらを修正加速勾配法による形状更新式に代入することで，設計変数の更新が行われる．

Table 2　Algorithm for texture shape optimization.

Modified Acceleration Gradient Method
Require: α: Step size, $\gamma^{(0)} = 0$,
$h^{(0)}$:Initial oil film thickness
for $l = 0, 1, 2, \ldots$ do
$\gamma^{(l)} = l - 1/l + 2$
$H^{(l)} = h^{(l)} + \gamma^{(l)}(h^{(l)} - h^{(l-1)})$
$\left(\frac{\tilde{\partial L}}{\partial H}\right)^{(l)}$
$h^{(l+1)} = H^{(l)} - \frac{\alpha}{2(1-\gamma^{(l)})}\left\{3\left(\frac{\tilde{\partial L}}{\partial H}\right)^{(l)} - \left(\frac{\tilde{\partial L}}{\partial H}\right)^{(l-1)}\right\}$
end for

3.3. 結果

本論文では，摩擦係数の最小化を目的にテクスチャの深さの最適化を実施した．以下に，Figs.5〜8 に摩擦力，摩擦係数，負荷容量および相対誤差の履歴をそれぞれ示す．また，Figs.9〜11 に GD, NAG および MAG による形状更新後のテクスチャ深さの分布をそれぞれ示す．

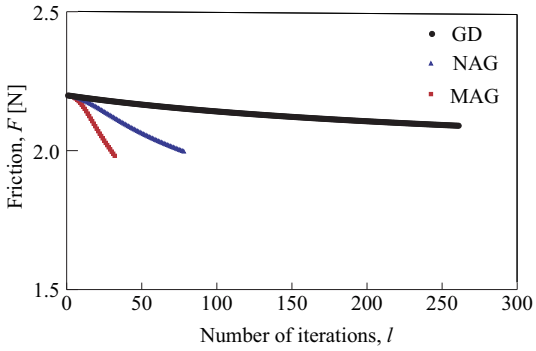


Fig. 5　History of friction coefficient by GD, NAG and MAG.

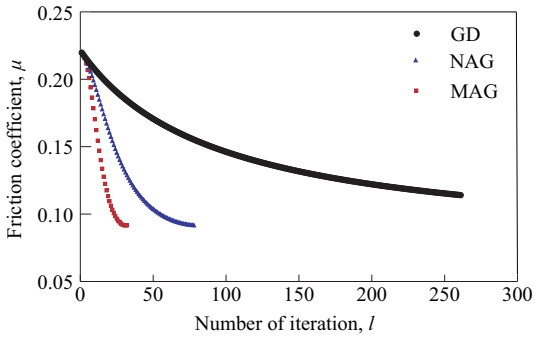


Fig. 6　History of friction coefficient by GD, NAG and MAG.

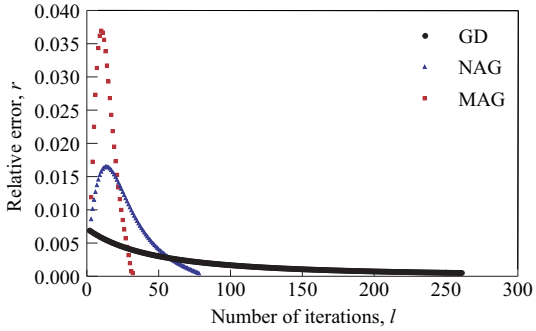


Fig. 7　History of relative error by GD, NAG and MAG.

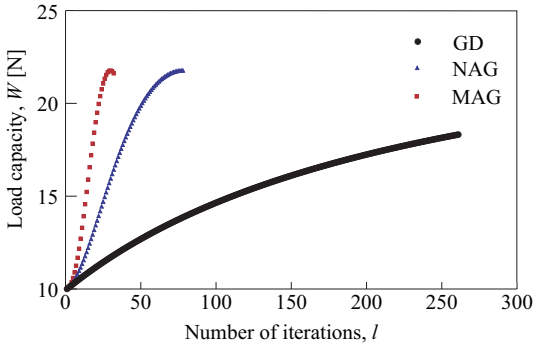


Fig. 8　History of load capacity by GD, NAG and MAG.

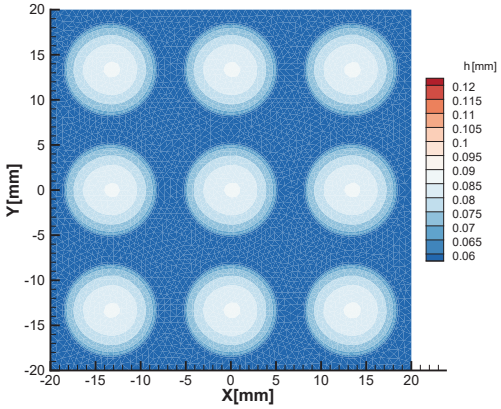


Fig. 9　Distribution of texture depth by GD.

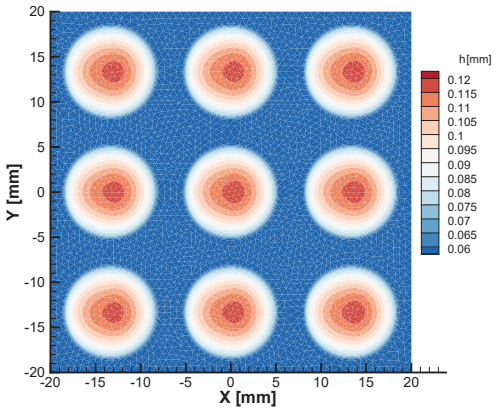


Fig. 10　Distribution of texture depth by NAG.

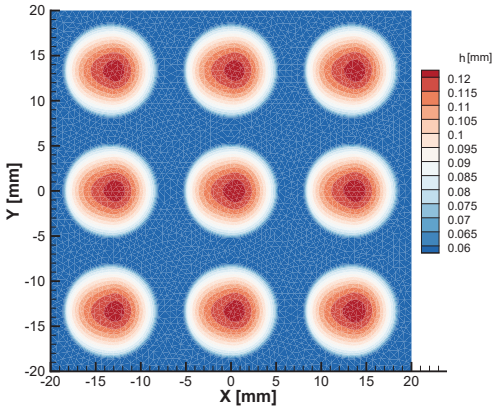


Fig. 11　Distribution of texture depth by MAG.

Fig.5 より，摩擦力は約 10%減少していることがわかる．また，Fig.6 より，摩擦係数は，初期の摩擦係数に比べて約 60%減少しており，Fig.7 に示す相対誤差の値も収束判定を満たしていることがわかる．また，Fig.8 より，負荷容量は初期の負荷容量に比べて約 2.2 倍に上昇しており，グラフの傾向から摩擦係数と同様に収束していることがわかる．また，負荷容量と摩擦係数との間には逆相関の関係があることがわかる．これらのことから，摩擦力は約 10%減少するのに対して，負荷容量は約 2.2 倍になることから，摩擦係数が 60%減少した要因として，負荷容量の影響が大きいことがわかる．

次に，得られたテクスチャ深さの分布について述べる．Figs.9〜11 を比べると，Fig.9 のテクスチャ深さは他に比べて浅い分布であることがわかる．この要因は，収束判定定数を各手法において等しくしているためであり，形状更新が他の手法に比べて遅いことを示している．また，Figs.10 および 11 では，深さの中央がどちらも右寄りになっており，Fig.11 の方が，深い箇所の範囲が広いことがわかる．ここで，Fig.6 において収束時の摩擦係数は，NAG が 0.09176，MAG が 0.09166 である．したがって，MAG の摩擦係数は NAG よりも僅かに低いことから，摩擦係数が小さくなるとテクスチャ深さが右寄りに増し，深い箇所の範囲が広くなると言える．

また，Fig.7 に示す相対誤差の履歴から収束傾向について述べる．Fig.7 の相対誤差の履歴では,GD は単調に減少し収束に向かうのに対して，NAG および MAG では，一度，相対誤差が上昇し，その後，減少に向かうことがわかる．これは，NAG と MAG の共通点である式（13）による更新の影響であると推測される．また，NAG と MAG を比べると，MAG の方が相対誤差の上昇幅が大きいことがわかる．これは，テイラー展開によって導出された追加項による影響であると推測される．

3.4. 負荷容量の上昇要因

Fig.12 に初期の圧力分布，Figs.13〜15 に各手法における収束後の圧力分布を示す．従来は，基本油膜さの調整によっ

て負荷容量が一定となるようにしていた．本論文では，基本油膜厚さの調整を除いたため，負荷容量が変化した．圧力分布から，テクスチャの流速方向の前方の圧力が高いことがわかる．これは，摩擦力の最小化によって，テクスチャの深さが流速方向の前方で深くなることで，テクスチャの流速方向の前方に圧力が集中していると考えられる．また，Figs.9 および 10 に示すようにテクスチャの深さや範囲が深くなることでより強い圧力が生じていると考えられる．

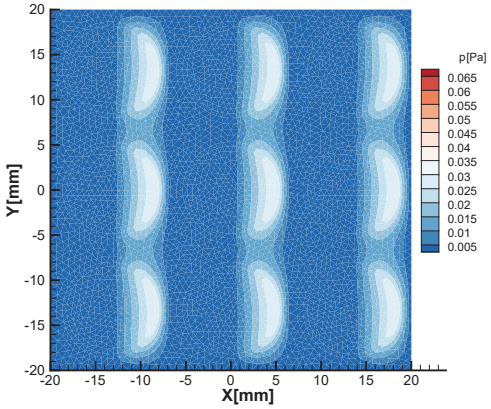


Fig. 12　Initial distribution of pressure.

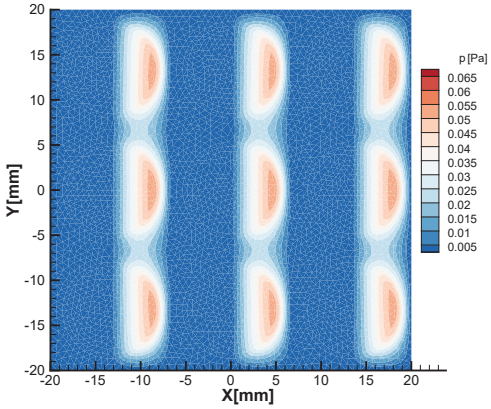


Fig. 13　Distribution of pressure by GD.

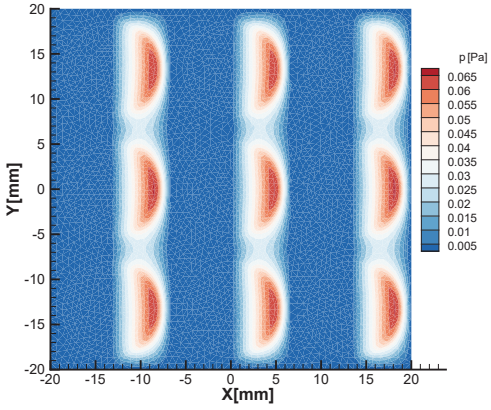


Fig. 14　Distribution of pressure by NAG.

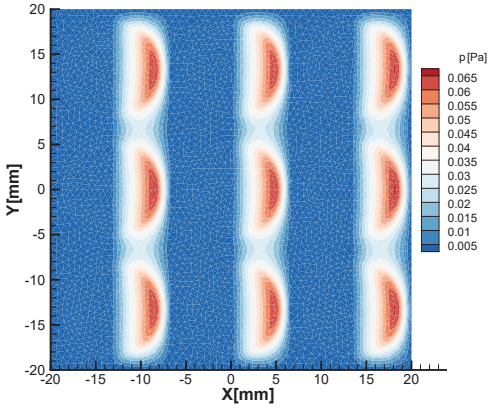


Fig. 15　Distribution of pressure by MAG.

3.5. 基本油膜さの調整による影響評価

Fig.16 に，基本油膜厚さの調整を実施した場合と調整しない場合の摩擦係数の結果の比較を示す．また，Figs.17 および 18 に基本油膜さの調整を実施した場合の油膜さの分布および基本油膜さの調整を実施しない場合の油膜厚さの分布を示す．

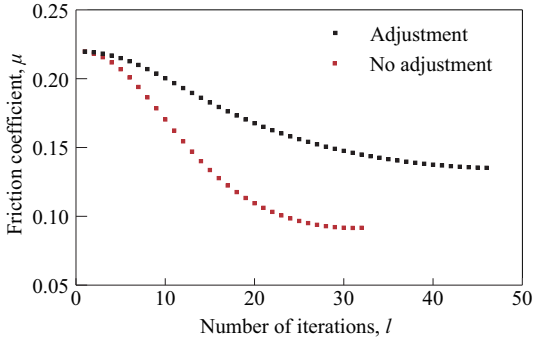


Fig. 16　Comparison of friction coefficients with and without adjustment of basic oil film thickness.

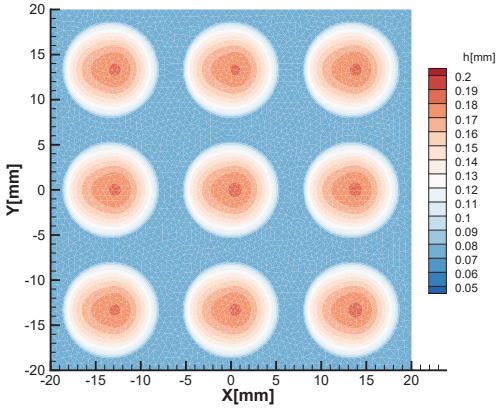


Fig. 17　Distribution of texture depth (Adjustment).

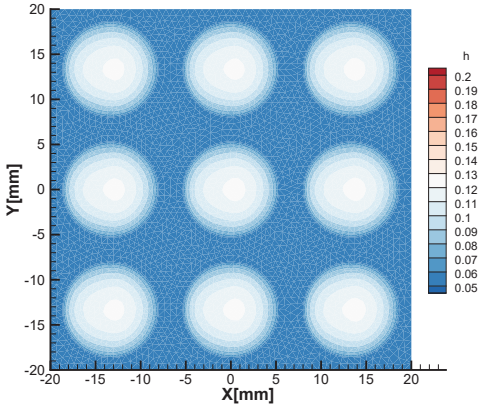


Fig. 18　Distribution of texture depth (No adjustment).

Fig.16 より，基本油膜さの調整を行わないことで，負荷容量の上昇による効果から摩擦係数が大幅に削減されていることがわかる．また，Figs.17 および 18 の比較から、得られた形状の特徴は同様であるが，基本油膜厚さの調整をしない場合のほうが，テクスチャの深さが浅いことがわかる．したがって，負荷容量の増加によって従来よりもテクスチャの深さが浅い場合でも摩擦係数の低減効果があることが判明した．

4. 結論

本論文では，基本油膜厚さの調整を実施しない場合において，摩擦係数の低減を目的に修正加速勾配法によるテクスチャの深さの形状最適化を実施した．以下に，本論文で得られた知見を示す．

- テクスチャ（円形）の深さ形状は，単純な半球状の形状ではなく，流速方向に対して後方よりも前方を深くすることで摩擦係数の低減効果が得られる．
- 摩擦係数と負荷容量は逆相関の関係にあり，摩擦係数が最小となるとき，負荷容量は最大となる．
- 摩擦力の下降率よりも負荷容量の上昇率の方が高いため，負荷容量の上昇による摩擦係数の低減効果のほうが大きい．
- 基本油膜厚さの調整を行わない場合，テクスチャの深度が浅い場合でも負荷容量の上昇によって摩擦係数の低減効果が得られる．

なお，本論文では，Sasaoka et al.(2020)[6] と同様に外周部において圧力をゼロとする境界条件で解析を行ったが，外周部の境界条件を周期境界条件とした場合の方が，より現実的な問題として扱えると考えられる．したがって，周期境界条件を考慮したテクスチャの解析は今後の課題である．

謝辞

本研究の実施に当たり，長岡技術科学大学大学院 機械創造工学専攻の修了生 笹岡 修太氏より多大なる助言を受けた．ここに謝意を表す．

付録

ここでは，ヘルムホルツ方程式による感度の平滑化の一例を示す．以下にヘルムホルツ方程式による感度の平滑化式を示す [20]．R は任意定数である．以下の解析例では，$R = 1.9$ で解析を実施した．Fig.19 に摩擦係数の履歴を示す．Fig.6 と Fig.19 を比較した場合，収束の傾向は同様であることがわかる．また，Figs.20〜22 に示すテクスチャ深さの図と Figs.9〜11 に示すテクスチャ深さの図を比較すると，テクスチャ深さが最も深くなる位置がテクスチャの前方から中心に変わっていることがわかる．これは，平滑化手法やパラメータの設定による違いであると考えられる．したがって，これらの平滑化手法による形状の違いについても，将来的な検討課題とする．

$$-R\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial h}\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial h}\right)\right]+\left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial h}\right)=\frac{\partial L}{\partial h} \quad \text{in} \quad \omega \tag{27}$$

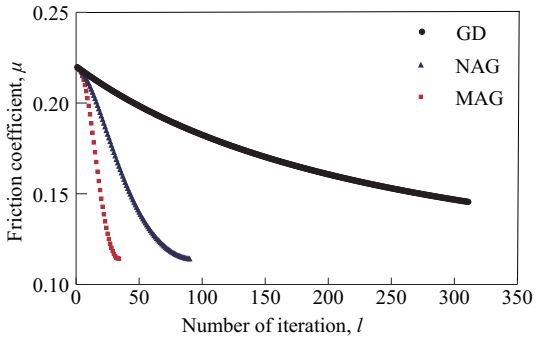


Fig. 19　History of friction coefficient by GD, NAG and MAG.

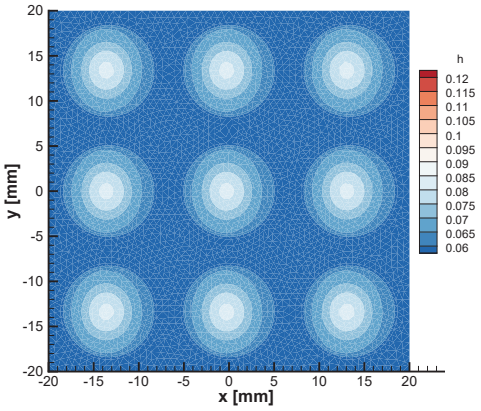


Fig. 20　Distribution of texture depth by GD.

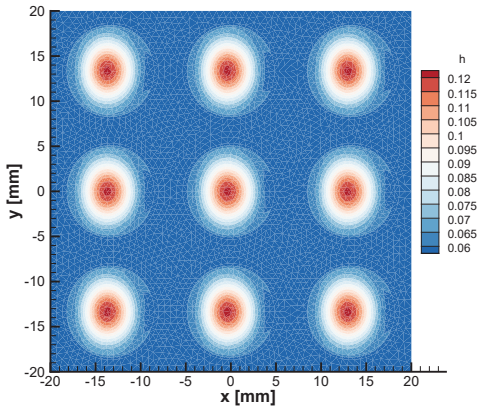


Fig. 21　Distribution of texture depth by NAG.

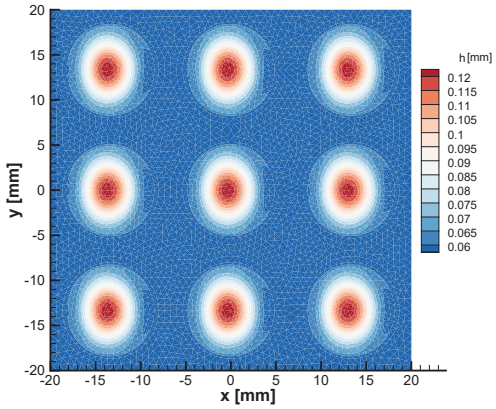


Fig. 22　Distribution of texture depth by MAG.

参考文献

(1) Luo, J., Liu, M. and Ma, L. : Origin of friction and the new frictionless technology—Superlubricity: Advancements and future outlook, Nano Energy, Vol.86 (2021), pp. 92–106.

(2) Mao, B., Siddaiah, A., Liao, Y. and Menezes, P.L. : Laser surface texturing and related techniques for enhancing tribological performance of engineering materials: A review, Journal of Manufacturing Processes, Vol.53 (2020), pp. 153–173.

(3) Hamilton, D. B., Walowit, J. A. and Allen, C. M. : A Theory of Lubrication by Microirregularities, Journal of Basic Engineering, Vol.88, Issue 1 (1966), pp. 311–336.

(4) Etsion, I. and Burstein, L. : A Model for Mechanical Seals with Regular Microsurface Structure, Tribology Transactions, Vol.7, Issue 2 (1964), pp. 149–154.

(5) Gropper, D., Wang, L. and Harvey, T.J.:Hydrodynamic lubrication of textured surfaces: A review of modeling techniques and key findings, Tribology International, Vol.94 (2016), pp. 509–529.

(6) Sasaoka, S. and Kurahashi, T. : Proposal of texture shape optimization algorithm under constant load condition and considerations on new shape update equation (Texture shape optimization for minimization of friction coefficient), Journal of Fluid Science and Technology, Vol.15, No.3 (2020), pp. 1–20.

(7) Zhirong, T., Xiangkai, M., Yi, M. and Xudong, P. : Shape optimization of hydrodynamic textured surfaces for enhancing load-carrying capacity based on level set method, Tribology International, Vol.162 (2021), pp. 107–136.

(8) Nesterov, Y.E. : A method for solving the convex programming problem with convergence rate o $(1/k^2)$, Dokl. Akad. Nauk SSSR, Vol.269 (1983), pp. 543–547.

(9) Sutton, R. S. : Two problems with backpropagation and other steepest-descent learning procedures for networks, Proc. 8th Annual Conf. Cognitive Science Society, (1986).

(10) Arata, H., Kishida, M. and Kurahashi, T. : Texture shape optimization analysis using a new acceleration gradient method based on the Taylor expansion and conjugate direction, Journal of Fluid Science and Technology, Vol.17 No.4 (2022), pp. 1–13.

(11) Lais Bittencourt Visnadi, Helio Fiori de Castro. : Influence of bearing clearance and oil temperatue uncertainties on the stability threshold of cylindrical journal bearings Mechanism and Machine Theory, Vol.134 (2019), pp. 57–73.

(12) 大豊工業（株）軸受研究グループ：機械要素活用マニュアル すべり軸受, 株式会社工業調査会, pp. 52-53.(1998).

(13) Hecht, F. : New development in freefem++, Journal of Numerical Mathematics, Vol.20 No.3-4 (2012), pp. 251–265.

(14) Watson, S.R. : Toward the minimum drg on a body of given volume in slow viscous flow, Institute of Mathematics and its applications, Vol.7 (1971), pp. 367–376.

(15) 篠原主勲. : 形状微分と物質微分による随伴法を用いた形状最適化, 大同大学紀要, 第 49 巻 (2013), pp. 89–111.

(16) Reynolds, O. : On the theory of lubrication and its application to Mr. Beauchamp Towers experiments, including an experimental determination of the viscosity of olive oil, Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Vol.177 (1886), pp. 157–234.

(17) Masaki Oda, Katsumi Iwamoto, Kentaro Tanaka and Toshikazu Fujino：Lubrication Characteristics of sliding Surfaces with Dimple or Grooves-In the case of surface Texturing Applied on Parallel Surfaces, Journal of the JIME, vol.53, No.5(2018).

(18) 畔上秀幸：領域最適化問題の一解法, 日本機械学会論文集 A 編, 60 巻, 574 号 (1994), pp. 165–172.

(19) Tseng, P. : On accelerated proximal gradient methods for Convex-concave optimization, Siam Journal on Optimization, (2008).
(20) 荒瀬浩平 : PDE フィルターを援用したトポロジー最適化によるアウターローター型 SPM モーターの構造複雑性低減に関する研究, 法政大学大学院紀要, 理工学・工学研究科編, Vol.62 (2021).

計算数理工学論文集 Vol. 22 (2022 年 12 月), 論文 No. 11-221216 JASCOME

連成型仮想的物理モデルに基づいた オーバーハング制約付きトポロジー最適化

TOPOLOGY OPTIMIZATION WITH OVERHANG CONSTRAINT BASED ON COUPLED FICTITIOUS PHYSICAL MODEL

田島 幹大 [1)], 山田 崇恭 [2)]

Mikihiro TAJIMA and Takayuki YAMADA

1) 東京大学大学院工学系研究科 (〒 113-8656 文京区弥生 2-11-16, E-mail: tajima-mikihiro8@g.ecc.u-tokyo.ac.jp)
2) 東京大学大学院工学系研究科 (〒 113-8656 文京区弥生 2-11-16, E-mail: t.yamada@mech.t.u-tokyo.ac.jp)

Additive Manufacturing (AM) is facilitating the fabrication of optimal structures derived from topology optimization. While AM can produce complex shapes, support materials are required when the overhang angle exceeds a certain angle. However, the use of support materials is time-consuming and costly. Therefore, there is a need for topology optimization that produces manufacturable structures without support materials. Recently, a method has been proposed to formulate geometric constraints by introducing a fictitious physical model that detects geometric features. However, converging to the optimal geometry is difficult with the method because a fictitious physical model is completely independent of a mechanical model describing physical phenomena and acts in a non-interlocking manner. In this study, we propose a "coupled fictitious physical model" in which two models interact. Specifically, convergence is improved by varying the material constants used in the mechanical model so that the value of the objective function worsens near domains where geometric constraints are violated. As an example, we consider a stiffness maximization problem with overhang constraints, formulate a coupled fictitious physical model, and perform a sensitivity analysis. Finally, a numerical example is provided to confirm the validity.

Key Words: Level Set Method, Topology Optimization, Overhang constraint, Geometric constraint, Optimal design, Fictitious physical model, Coupled fictitious physical model

1. 緒言

近年，トポロジー最適化を機械製品をはじめとする様々な工業製品に応用する研究が盛んである．トポロジー最適化とはトポロジーの変更を許容しながら最適構造を自動的に導き出す設計手法であり，最も設計自由度の高い構造最適化法として知られている．例として，熱伝導問題への適用例 [(1)] や音響問題への適用例 [(2)] などが挙げられる．しかしながら，トポロジー最適化により得られた最適形状は幾何学的に非常に複雑な部分構造を有することが多い．故に，最適形状の製造には，造形可能な形状の自由度が高い造形方法である，積層造形法が適している．

積層造形法では様々な形状が造形可能であるものの，いくつかの制限がある．その中の一つとして，構造境界の接線の傾斜角 (以下，オーバーハング角) がある一定の角度を超過すると樹脂などの素材を積層することが困難となりサポート材が必要となる制限がある．ここで，サポート材とは，造形工程上の都合から，造形形状に追加するように造形される仮の構造である．このサポート材の利用には幾つかの問題がある．まず，サポート材の除去には多大な時間とコストがかかる．加えて，サポート材が構造的に内部に閉じ込められた箇所に存在する場合除去することが不可能である．これらの問題点から，オーバーハング角がサポート材なしで積層可能な最小の角度を超過しないようにする制約 (以下，オーバーハング制約) を満たしたトポロジー最適化手法が求められる．

オーバーハング制約を課した最適設計手法に関して，幾

2022 年 10 月 21 日受付，2022 年 11 月 19 日受理

つかの先行研究が挙げられる．Leary et al.[3] はオーバーハング制約を考慮せずにトポロジー最適化を行った後，制約を満たすように再度設計を行う手法を提案している．しかし，提案された再設計法はオーバーハング角を考慮して人為的に構造領域を付け加える方法であり，得られた最適形状とは大きく性能が変化する可能性がある．Gayor et al.[4] や Langelaar[5] は密度法に基づき，下部の要素が構造領域で積層可能な場合のみ形状が追加されるようにする密度フィルターを用いた手法を提案している．これらの手法は各要素が下部の形状に大きく依存し最適化過程で制約に違反する領域ができることを許容しないため，最適化前の初期構造への依存が大きく高い性能を持つ形状が得られにくい．Allaire et al.[6] や Wang et al.[7] は構造領域と空洞領域の境界が明瞭であり幾何学的特徴を捉えやすいレベルセット法に基づく手法を提案している．Allaire et al. は一定の剛性が満たされるように機械的制約を加えることで，制約を満たした形状を作り出している．しかし，最適化の計算過程で多くの形状に対して剛性を評価する必要があり，多大な計算コストがかかる．一方，Wang et al. は構造領域の法線ベクトルから制約関数を定義しているが，局所的に制約に違反する領域を正しく検出できていない箇所が存在し，所望の最適形状とは異なる形状に収束する可能性がある．

幾何学的制約を考慮した様々な最適設計手法が提案される中，近年仮想的物理モデルを導入することで幾何学的特徴を抽出する手法 [8][9][10][11][12] が提唱されている．仮想的物理モデルでは，物理現象を定式化した力学モデルとは独立して，幾何学的特徴を抽出するための偏微分方程式を導入し，トポロジー最適化の枠組に準拠した定式化が可能となる．しかし，仮想的物理モデルは力学モデルと完全に独立して非連動的に影響を及ぼすため，一つの最適形状に収束させることが困難な場合がある．

従来の仮想的物理モデルにおける問題点に対して本研究では，仮想的物理モデルと力学モデルを独立させずに連動させる連成型仮想的物理モデルを新しく提案する．具体的には，幾何学的制約条件に違反する領域で，力学モデルで用いられる材料定数を目的関数が悪化するように変化させることにより二つのモデルを仮想的に連成させる．それぞれのモデルを組み合わせることで連動性が向上し収束性に関する問題点が解決される可能性を有する．

本研究では，連成型仮想的物理モデルの妥当性を検証するために，剛性最大化問題を例として挙げて定式化及び感度解析を行い，具体的な数値解析例を示して，有効性を検証する．以下の章では，まず第 2 章でレベルセット法に基づくトポロジー最適化問題の定式化と今回具体例として扱う剛性最大化問題について考える．次に，第 3 章において連成型仮想的物理モデルの定式化法について述べる．第 4 章では仮想的物理モデルによるオーバーハング制約の定式化を行った後，第 3 章で提案した定式化法に則り剛性最大化問題に連成型仮想的物理モデルを導入した場合の定式化を行う．第 5 章では最適化問題の定式化，感度解析及び最適化アルゴリズムの構築を行い，設計感度の観点から二つのモデルの連動性について議論する．第 6 章では具体的な数値解析例を考え，本手法の妥当性を検証する．最後に第 7 章で結言を記す．

2. レベルセット法に基づくトポロジー最適化

2.1. 基本的な考え方

レベルセット法に基づくトポロジー最適化について概要を述べる．設計対象とする構造物を包括する領域 (以下，固定設計領域) を D，構造領域を Ω とする．Yamada et al.[13] の提案した手法に基づき，レベルセット関数 $\phi(\boldsymbol{x})$ を以下のように定義する．

$$\begin{cases} 0 < \phi(\boldsymbol{x}) \leq 1 & \text{if} \quad \boldsymbol{x} \in \Omega \\ \phi(\boldsymbol{x}) = 0 & \text{if} \quad \boldsymbol{x} \in \partial\Omega \\ -1 \leq \phi(\boldsymbol{x}) < 0 & \text{if} \quad \boldsymbol{x} \in D \backslash \Omega \end{cases} \tag{1}$$

このとき，材料分布を表す特性関数 $\chi(\phi)$ を以下のように定義する．

$$\chi(\phi(\boldsymbol{x})) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad \phi \geq 0 \\ 0 & \text{if} \quad \phi < 0. \end{cases} \tag{2}$$

トポロジー最適化の基本的な考え方は，材料分布を設計変数とし，目的関数 J を最小化 (あるいは最大化) する構造を求める最適化問題として，構造最適化問題を定式化することである．特性関数 $\chi(\phi)$ を用いて構造最適化問題は以下のように定式化される．トポロジー最適化の基本的な考え方は，材料分布を設計変数とし，目的関数 J を最小化 (あるいは最大化) する構造を求める最適化問題として，構造最適化問題を定式化することである．所望の目的関数を表現する関数 $j(u)$ 及び特性関数 $\chi(\phi)$ を用いて構造最適化問題は以下のように定式化される．

$$\min_{\chi} \qquad J[u, \chi(\phi)] = \int_D j(u)\chi(\phi) d\Omega \tag{3}$$

$$\text{subject to:} \qquad \text{Governing equations} \tag{4}$$

続いて，レベルセット関数の更新方法について述べる．Yamada et al.[13] は仮想的な時間 t を導入して，レベルセット関数の変更を時間発展方程式により記述した．この手法に基づき，レベルセット関数の更新を以下の反応拡散方程式で行う．

$$\frac{\partial \phi(\boldsymbol{x}, t)}{\partial t} = -K \left\{ \frac{CJ' \displaystyle\int_D d\Omega}{\displaystyle\int_D |J'| d\Omega} - \tau \nabla^2 \phi(\boldsymbol{x}, t) \right\} \tag{5}$$

ただし，$K \in \mathbb{R}^+$ は比例定数，$C \in \mathbb{R}^+$ は正規化係数，$\tau \in \mathbb{R}^+$ は正則化係数，J' は設計感度である．正則化係数 τ を調節することにより構造領域の幾何学的な複雑さを制御することが可能となる．詳細は文献 [13] を参照されたい．

2.2. 剛性最大化問題

本研究では，代表的な問題設定である剛性最大化問題を扱う．固定設計領域 D に対して，線形弾性体により構成され

る構造領域 Ω の一部境界 Γ_t に静的な表面力 $\boldsymbol{t}$ を負荷し，構造領域 Ω の一部境界 Γ_u において変位場 $\boldsymbol{u}$ を完全拘束する．これらの境界条件のもと等方性線形弾性体を仮定した場合，変位 $\boldsymbol{u}$ に対して，以下の支配方程式が成立する．

$$\begin{cases} -\nabla \cdot \sigma_{ij}(\boldsymbol{u}) = 0 & \text{in } \Omega \\ \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} & \text{on } \Gamma_u \\ \sigma_{ij} n_j = t_i & \text{on } \Gamma_t \\ \sigma_{ij} n_j = 0 & \text{on } \Gamma_N \end{cases} \tag{6}$$

ただし，$\Gamma_N = \partial D \backslash (\Gamma_t \cup \Gamma_u)$ である．$\sigma_{ij}(\boldsymbol{u})$ は応力テンソルであり，ひずみテンソル $\epsilon_{ij}(\boldsymbol{u})$ 及び弾性テンソル C_{ijkl} を用いて以下のように定義される．

$$\epsilon_{ij}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{7}$$

$$C_{ijkl} = E\left(\frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\delta_{ij}\delta_{kl} + \frac{1}{2(1+\nu)}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})\right) \tag{8}$$

$$\sigma_{ij}(\boldsymbol{u}) = C_{ijkl}\epsilon_{ij}(\boldsymbol{u}) \tag{9}$$

ただし，E はヤング率，ν はポアソン比である．このとき，平均コンプライアンスを目的関数として，次式のように剛性最大化問題を定式化する．

$$\inf_{\chi} \quad J(\boldsymbol{u}) = \int_{\Gamma_t} \boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{u} d\Gamma \tag{10}$$

3. 連成型仮想的物理モデルに基づく幾何学的制約条件の定式化法

本研究では，従来の仮想的モデルの問題点を克服した連成型仮想的物理モデルを提案する．仮想的物理モデル [8] とは，製造工程や生産工程から要求される製造要件を考慮するために，物理現象のみを記述した力学モデルとは別に，仮想的に導入される支配方程式系のことである．これにより，従来のトポロジー最適化の枠組に準拠した定式化と数値解析アルゴリズムの開発が可能になる．

先行研究では，フライス加工における幾何学的要件を満たすために仮想的な定常移流拡散方程式を導出するモデル [10] や，幾何学的特徴を抽出するために仮想的な物理場を導入するモデル [9][11]，閉じた空洞領域をなくすために仮想的な熱拡散方程式を定式化したモデル [12] などが提案されてきた．しかし，今まで提案されてきた仮想的物理モデルは全て，力学モデルとは完全に独立して非連動的に作用するため，問題設定によっては，最適解の収束性が悪い場合がある．

このような課題を解決する方法として，本研究では仮想的物理モデルと力学モデルを独立させずに連動的に作用させる連成型仮想的物理モデルを新たに提案する．具体的には，仮想的物理モデルにより導出された幾何学的制約条件に違反する領域において，目的関数を悪化させるように力学モデル内の材料定数を変化させることにより二つのモデルを連成させる．この手法により，それぞれのモデルが互いに作用し合い収束性が改善する可能性がある．

次章からは本手法の妥当性を検証するために，オーバーハング制約及び平均コンプライアンス最小化問題を例に定式化を行う．その後，感度解析を行い，連成させた結果生じる相互作用について詳しく考察する．

4. オーバーハング制約の定式化

積層造形法におけるオーバーハング制約を明確にする．図 1 に示すように，構造領域の境界 $\partial\Omega$ の傾斜角をオーバーハング角 α と定義する．積層造形法ではオーバーハング角がある一定の角度より小さくなるとき，積層が困難となるため，サポート材が必要となる．支持なしで積層可能な最小のオーバーハング角 θ を最小オーバーハング角とする．また，構造領域の境界で $\alpha > \theta$ が満たされるようにする制約をオーバーハング制約とする．一例として，オーバーハング制約に違反する境界 (以下，制約違反境界) を図 1 に示す．

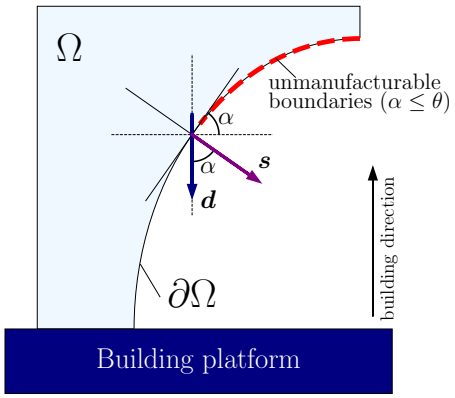


Fig. 1: The definition of overhang angle and unmanufacturable boundaries without support structures. The angle between the state variable $\boldsymbol{s}$ in the fictitious physical model and the inverse unit vector $\boldsymbol{d}$ in the building direction equals to overhang angle.

4.1. 仮想的物理モデルに基づく制約条件の定式化

本研究では，制約違反境界を検出するために，構造領域の境界の法線ベクトルを近似的に表現する仮想的物理モデル [8] を用いる．固定設計領域を D，固定設計領域の周囲に十分な幅の非設計領域 D_N を設けるとき，状態変数を $s_i \in H^1(D \cup D_N)$ として，幾何学的特徴を抽出する仮想的物理モデルを以下のように定義する．

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (a_s \nabla s_i - \boldsymbol{e}_i \chi) + (1-\chi) s_i = 0 & \text{in } D \cup D_N \\ s_i = 0 & \text{on } \partial D_N \end{cases} \tag{11}$$

ただし，$a_s \in \mathbb{R}^+$ は拡散係数，$\boldsymbol{e}_i$ は $\mathbb{R}_n$ の正規直交基底ベクトルである．図 2 に式 (11) で定義された仮想的物理モデルの力学的な解釈を表した図を示す．式 (11) は，ヤング率を a_s，ポアソン比を 0 として，構造境界 $\partial\Omega$ に単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ の荷重を付加した条件下で，空洞領域 $D\backslash\Omega$ または非設計領域 D_N にばね係数 1 の仮想的なばねを配置した場合の等方性線形弾性体の変位場を意味する [8]．仮想的なばねを

配置することにより，非構造領域では境界付近のみ $\boldsymbol{s}$ の大きさは大きくなる．また，固定設計領域 D の境界 ∂D にディリクレ条件 $s_i = 0$ を課した場合，設計領域境界における仮想的物理モデル $\boldsymbol{s}$ が不安定となり境界付近の幾何学的特徴を正しく捉えることが困難となる．故に，設計領域 D の外側に非設計領域 D_N を設けて，拡張した領域 $D \cup D_N$ で仮想的物理モデルを解く．一例として図 3b に，構造領域を図 3a のように定義し，$a_s = 3 \times 10^{-4}$ としたときの仮想的物理モデルの解を示す．

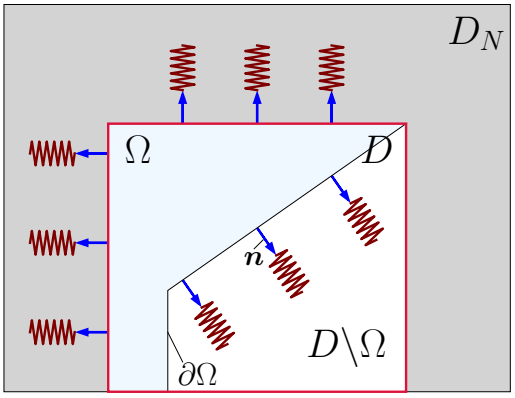
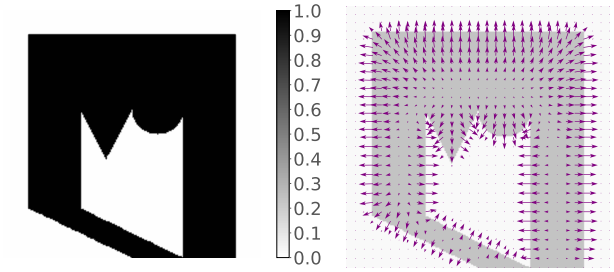


Fig. 2: Diagram representing the interpretation of the fictitious physical model. The zigzag lines represent fictitious springs with the spring constant of 1.



(a) an example of structure χ

(b) a solution of fictitious physical model $\boldsymbol{s}$

Fig. 3: Numerical examples: structure and fictitious physical field.

続いて，仮想的物理モデルを用いて制約違反境界を定式化する．図 1 より，幾何学的な関係性から，法線ベクトルを近似した $\boldsymbol{s}$ と積層方向の逆単位ベクトル $\boldsymbol{d}$ の成す角度はオーバーハング角 α と一致する．このとき $\boldsymbol{s}$ と $\boldsymbol{d}$ の内積を用いることで，オーバーハング角 α と最小オーバーハング角 θ の関係性を以下のように表現できる．

$$\begin{cases} \boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{d} \geq \|\boldsymbol{s}\| \cos\theta & \text{if} \quad \alpha \leq \theta \\ \boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{d} < \|\boldsymbol{s}\| \cos\theta & \text{if} \quad \alpha > \theta \end{cases} \tag{12}$$

式 (12) の上式は制約違反境界の場合に成立する式であり，下式はオーバーハング制約を満たす境界の場合に成立する式である．

これらを踏まえて，仮想的な物理場 $\boldsymbol{s}$ を用いた近似的な制約違反境界を以下の式で定義する．

$$g_1(\boldsymbol{s})(1-\chi)^2 = \frac{a_s}{(1-\cos\theta)^2} \left\{ \mathscr{R}(\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{d} - \sqrt{\|\boldsymbol{s}\|^2 + \epsilon_\mathrm{s}} \cos\theta) \right\}^2 (1-\chi)^2 \tag{13}$$

ただし，$\mathscr{R}(x)$ は以下のように定義される近似ランプ関数である．

$$\mathscr{R}(x) = \frac{1}{2}(x + \sqrt{x^2 + \epsilon_\mathrm{r}}) \tag{14}$$

ここで，設計感度を導出する際に式 (13) を微分する必要があるため，パラメータ ϵ_s，ϵ_r を導入している．右辺第二項は制約違反境界では正の値をとり，それ以外の境界では近似ランプ関数内の変数が負となるため 0 となり排除される．右辺第三項は，非構造領域 $(1-\chi)$ 内の境界付近を除いた領域は $g_1(\boldsymbol{s}) \simeq 0 (\because \boldsymbol{s} \simeq 0)$ であることを利用し，境界を抽出する項である．

しかし，例外的に式 (13) は上に凸または下に凸の局所的に鋭利な点 (以下，幾何学的特異点) 付近における制約違反境界を正しく検出できない．図 4 に幾何学的特異点に該当する箇所を示す．$c-$ の箇所は局所的にサポート材なしで製造可能である．しかし，$c-$ 付近においては，式 (13) が正の値を持ち制約違反境界として検出される．一方，$c+$ の箇所は積層プラットフォームから離れておりオーバーハング制約に違反している．しかし，大域的に $c+$ を除いた領域を見てオーバーハング制約が満たされている場合，制約違反境界は $c+$ の箇所のみとなり，制約違反境界は無限に小さくなる．故に，$c+$ の制約違反境界を強調して下に凸の氷柱状の形が形成されないようにする必要がある．

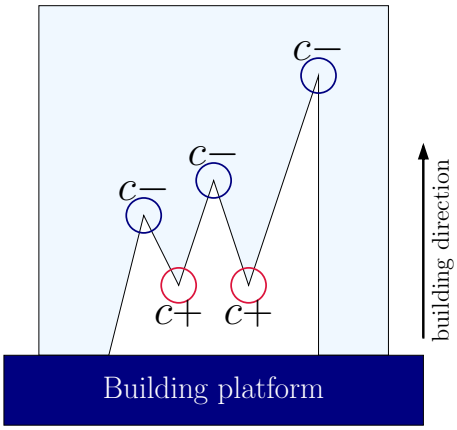


Fig. 4: Geometric singular points.

このような幾何学的特異点における問題に対して，$c-$ 付近の平均曲率は局所的に大きい負の値をとり $c+$ 付近の平均曲率は大きい正の値をとる性質を利用することで，制約違反境界を正確に検出する [9]．仮想的物理モデルを用いて近似

した単位法線ベクトル $\boldsymbol{f}$，及び平均曲率 $\nabla\cdot\boldsymbol{f}$ を用いて幾何学的特異点を考慮した式 $g_2(\boldsymbol{s})$ を以下のように定義する．

$$\boldsymbol{f}=\frac{\boldsymbol{s}}{\sqrt{\|\boldsymbol{s}\|^2+\epsilon_{\mathrm{sn}}}} \tag{15}$$

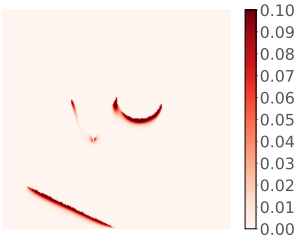
$$g_2(\boldsymbol{s})=\mathscr{R}(1+\beta\nabla\cdot\boldsymbol{f}) \tag{16}$$

ただし，$\beta\in\mathbb{R}^+$ は平均曲率を考慮する度合いを表すパラメータであり，ϵ_{sn} は微小パラメータである．$c-$ の部分では，式 (16) 内の近似ランプ関数内部の変数が負となる ($\because\nabla\cdot\boldsymbol{f}\ll 0$) ため排除される一方，$c+$ の部分では内部の変数が大きい正の値となる ($\because\nabla\cdot\boldsymbol{f}\gg 1$) ため強調される．

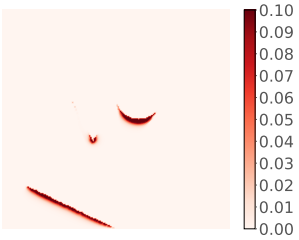
以上より，幾何学的特異点を考慮して正確に制約違反境界を検出する式は以下のようになる．

$$g(\boldsymbol{s})(1-\chi)^2=g_1(\boldsymbol{s})g_2(\boldsymbol{s})(1-\chi)^2 \tag{17}$$

構造領域を図 3a のように定義して最小オーバーハング角を 45°，$\beta=0.1$ としたとき，幾何学的特異点を考慮しない場合 (図 5a) 及び考慮した場合 (図 5b) の比較図を図 5 に示す．この図から幾何学的特異点を考慮した場合，$c-$ の特異点は排除され，$c+$ の特異点が強調されていることが確認できる．



(a) unmanufacturable boundaries not considering geometric singular points $g_1(\boldsymbol{s})(1-\chi)^2$



(b) unmanufacturable boundaries considering geometric singular points $g_1(\boldsymbol{s})g_2(\boldsymbol{s})(1-\chi)^2$

Fig. 5: Numerical examples: comparison of methods for detecting unmanufacturable boundaries without support structures (minimum overhang angle is 45°).

4.2. 連成型仮想的物理モデルの定式化

第 2.2 節で述べた剛性最大化問題を例に，オーバーハング制約を考慮した連成型仮想的物理モデルの定式化について考える．

連成型仮想的物理モデルでは幾何学的制約に違反する領域 (以下，制約違反領域) の材料定数を目的関数が悪化するように変化させる．しかし，式 (17) で定義された制約違反境界は境界のみに値を持つため，領域として制約に違反する部分を定義できない．そこで本研究では，制約違反境界 $g(\boldsymbol{s})(1-\chi)^2$ を仮想的な熱源として拡散させた領域 p を用いて制約違反領域を定義する．制約違反境界を拡散させる熱拡散方程式を以下に示す．

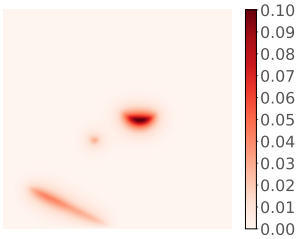
$$\begin{cases} -\nabla\cdot(a_p\nabla p)+p=g(\boldsymbol{s})(1-\chi)^2 & \text{in } (D\cup D_N)\\ p=0 & \text{on } \partial D_N\end{cases} \tag{18}$$

ただし，$a_p\in\mathbb{R}^+$ は拡散係数である．このとき拡散場 p と構造領域 χ の共通部分を制約違反領域と定義する．構造領域を図 3a のように定義し $a_p=1\times10^{-3}$ としたとき，制約違反領域 $p\chi$ の数値例を図 6a に示す．

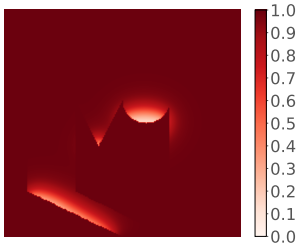
続いて，制約違反領域 $p\chi$ を用いて目的関数を悪化させるように材料定数を変化させる．本研究では，式 (10) で定式化された剛性最大化問題を例に，目的関数として平均コンプライアンス，材料定数としてヤング率を適用する．平均コンプライアンスを悪化すなわち増大させるには，構造領域のヤング率を低下させれば満たされる．これを踏まえて，オーバーハング制約を考慮した仮想的ヤング率を以下のように定義する．

$$E_{\mathrm{f}}(p,\chi)=E\left(1-\frac{2}{\pi}\arctan(\gamma p\chi)\right) \tag{19}$$

ここで E は元々の材料のヤング率，$\gamma\in\mathbb{R}^+$ はヤング率を低下させる度合いを変化させるパラメータである．式 (19) により，拡散場と構造領域の共通部分のヤング率を低下させ，それ以外の領域は元々の材料のヤング率となる．構造領域を図 3a のように定義し $\gamma=50$ としたとき，仮想的ヤング率 $E_{\mathrm{f}}(p)$ の数値例を図 6b に示す．



(a) domains that violate overhang constraint $p\chi$



(b) fictitious young's modulus $E_{\mathrm{f}}(p,\chi)$

Fig. 6: Numerical examples: domains that violate overhang constraint and fictitious young's modulus.

5. 最適化問題の定式化と数値解析アルゴリズム

5.1. 最適化問題の定式化

第 4 章で定式化した連成型仮想的物理モデルに基づき，剛性最大化問題を考える．目的関数は第 2 章で定式化された式 (10) と同様である．また，固定設計領域を D，固定設計領域の外部に十分な幅を持たせた非設計領域を D_N とする．固定設計領域 D に対して境界 Γ_t に静的な表面力 $\boldsymbol{t}$ を加え，境界 Γ_u で変位 $\boldsymbol{u}$ を 0 として完全拘束する．Γ_u 及び Γ_t の位置は最適化過程で変更されないものとし，それ以外の境界は生成及び消滅を繰り返すものとする．これらの境界条件のもと，全体の体積が閾値 $V_{\max}$ を超えないように体積制約 G_v を課

す．このとき，制約条件は次式となる．

$$\begin{cases} G_v(\chi(\phi)) = \displaystyle\int_\Omega \chi(\phi) d\Omega - V_{\max} \leq 0 & \\ -\nabla \cdot (a_s \nabla s_i - \boldsymbol{e_i}\chi(\phi)) + (1-\chi(\phi)) s_i = 0 & \text{in } D_A \\ s_i = 0 & \text{on } \partial D_N \\ -\nabla \cdot (a_p \nabla p) + p = g(\boldsymbol{s})(1-\chi(\phi))^2 & \text{in } D_A \\ p = 0 & \text{on } \partial D_N \\ -\nabla \cdot \sigma_{ij}(\boldsymbol{u}, p, \phi) = 0 & \text{in } \Omega \\ \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} & \text{on } \Gamma_u \\ \sigma_{ij} n_j = t_i & \text{on } \Gamma_t \\ \sigma_{ij} n_j = 0 & \text{on } \Gamma_N \end{cases} \tag{20}$$

ただし，$D_A = D \cup D_N$，$\Gamma_N = \partial D \backslash (\Gamma_t \cup \Gamma_u)$ である．また，応力テンソル $\sigma_{ij}(\boldsymbol{u}, p, \phi)$ はひずみテンソル $\epsilon_{ij}(\boldsymbol{u})$ 及び弾性テンソルは $C_{ijkl}(p, \phi)$ を用いて以下のように定義される．

$$\epsilon_{ij}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{21}$$

$$C_{ijkl}(p, \phi) = E_{\mathrm{f}}(p, \phi) \left(\tfrac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\delta_{ij}\delta_{kl} + \tfrac{1}{2(1+\nu)}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})\right) \tag{22}$$

$$E_{\mathrm{f}}(p, \phi) = E\left(1 - \tfrac{2}{\pi}\arctan(\gamma p \chi(\phi))\right) \tag{23}$$

$$\sigma_{ij}(\boldsymbol{u}, p, \phi) = C_{ijkl}(p, \phi)\epsilon_{ij}(\boldsymbol{u}) \tag{24}$$

ただし，E は元々の材料のヤング率であり，ν はポアソン比である．

5.2. 変位場の近似解法

最適化の過程で構造領域 Ω は変化し続けるため，最適化過程のステップごとに有限要素メッシュを再定義する必要がある．しかしメッシュ再定義には膨大な計算コストがかかるため，空洞領域 $D\backslash\Omega$ では相対的に小さい弾性テンソルを持つ構造材料であると仮定する [14]．このとき，構造領域と空洞領域の境界を滑らかな分布にするヘビサイド関数 $\mathscr{H}$ を用いて，固定設計領域に対して拡張された弾性テンソル $\widetilde{C}_{ijkl}$ は以下のように定義される．

$$\widetilde{C}_{ijkl} = \{(1-d)\mathscr{H}(\phi, \epsilon_u) + d\} C_{ijkl} \tag{25}$$

$$\mathscr{H}(\phi, \epsilon_u) = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad \phi < \epsilon_u \\ \dfrac{1}{2} + \left(\dfrac{15}{16}\dfrac{\phi}{\epsilon_u} - \dfrac{5}{8}\left(\dfrac{\phi}{\epsilon_u}\right)^3 + \dfrac{3}{16}\left(\dfrac{\phi}{\epsilon_u}\right)^5\right) & \text{if} \quad \phi \in [-\epsilon_u, \epsilon_u] \\ 1 & \text{if} \quad \phi > \epsilon_u \end{cases} \tag{26}$$

ただし，$\epsilon_u \in \mathbb{R}^+$ は，ヘビサイド関数の遷移幅を表すパラメータであり，d は構造領域のヤング率に対する空洞領域の相対的な値である．遷移幅を設ける場合，計算の初期段階で一部グレースケールとなる箇所が生まれる．しかし，今回の問題設定では，一時的なグレースケールは許容でき最終的に明確な境界線を持つ構造が得られるため，近似解法を用いる．

5.3. 感度解析

続いて，随伴変数法に基づいた感度解析の結果を示す．平均コンプライアンスを目的関数とした剛性最大化問題は自己随伴問題であり，変位 $\boldsymbol{u}$ と対応する随伴変数 $\boldsymbol{v}$ は一致する．また．拡散場 p における随伴変数を λ_p とすると，随伴方程式は以下の式となる．

$$\begin{cases} -a_p \nabla^2 \lambda_p + \lambda_p = -\dfrac{\partial \sigma_{ij}(\boldsymbol{u}, p, \phi)}{\partial p}\dfrac{\partial v_i}{\partial x_j} & \text{in } D_A \\ \lambda_p = 0 & \text{on } \partial D_N \end{cases} \tag{27}$$

随伴変数 λ_p を用いて，仮想的物理モデル $\boldsymbol{s}$ の随伴変数 $\boldsymbol{\lambda_s}$ は以下の方程式により導かれる．

$$\begin{cases} -a_s \nabla^2 \lambda_{si} + (1-\chi(\phi))\lambda_{si} = \lambda_p \dfrac{\partial g(\boldsymbol{s})}{\partial s_i}(1-\chi(\phi))^2 & \text{in } D_A \\ \lambda_{si} = 0 & \text{on } \partial D_N \end{cases} \tag{28}$$

以上の設計変数及び随伴変数を用いて，連成型仮想的物理モデルにおける設計感度は以下のように導出される．

$$\begin{aligned} J' = \Bigg(& C_{ijkl}(p, \phi)\frac{\partial u_k}{\partial x_l}\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial C_{ijkl}(p, \phi)}{\partial \phi}\frac{\partial u_k}{\partial x_l}\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \\ & + 2(1-\chi(\phi))\lambda_p g(\boldsymbol{s}) - \boldsymbol{e_i}\nabla\lambda_{si} - s_i\lambda_{si}\Bigg)\chi(\phi) \end{aligned} \tag{29}$$

式 (29) の第一項及び第二項は弾性方程式を記述した力学モデルに基づく設計感度であり，第四項及び第五項は仮想的物理モデルに基づく設計感度である．連成型仮想的物理モデルによって二つのモデルを連成することにより，力学モデル内の弾性テンソル $C_{ijkl}(p, \phi)$ が仮想的物理モデルの影響を受け，各モデル間の相互作用が起きる．さらに，式 (29) の第三項が新たな設計感度として導出され，この項は二つのモデルの連動性を向上させる意味合いを持つ．従って，提案する連成型仮想的モデルにより，変位場に関する設計感度においても，幾何学的制約条件の影響が入ることで，目的関数と制約条件の両者への寄与を考慮しながら形状更新されることが確認できる．

5.4. 最適化アルゴリズム

最適化アルゴリズムを導出する．体積制約に関しては拡張ラグランジュ法を用いて考慮する．体積制約を踏まえたトポロジー最適化の全体のアルゴリズムは以下のような手順となる．

step 0: 設計変数の設定

step 1: 支配方程式の計算 (式 (20))

step 2: 目的関数の算出 (式 (10))，収束していれば終了

step 3: 随伴方程式の計算 (式 (27)，(28))

step 4: 設計感度の算出 (式 (29))

step 5: 体積制約におけるラグランジュ変数の更新

step 6: レベルセット関数の更新 (式 (5))

step 7: **step1** に戻る

6. 数値解析例

数値解析例として，体積制約を課した二次元の剛性最大化問題を有限要素法により解析し妥当性を検証する．具体的な

問題設定として図 7 のような固定設計領域 D，及び非設計領域 D_N を考える．また，ヤング率を 210GPa，ポアソン比を 0.3 とし，等方性線形弾性体であると仮定する．境界 Γ_u で完全拘束し，右辺境界中央の Γ_t に表面力 $\boldsymbol{t} = [0, -1]^\top$ を加える．積層方向は y 軸の正の方向とした．今回の数値例では最小オーバーハング角 θ を 45° とし，面積の上限値 $V_{\max}$ を固定設計領域の面積の 50%とする．

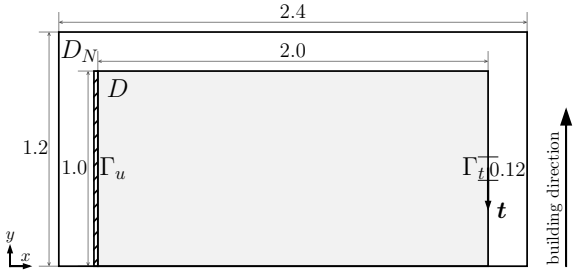


Fig. 7: Design domain and problem settings.

レベルセット関数の更新は，式 (5) を仮想的な時間 t に対して離散化して行う．各ステップごとの時間差分 Δt は $\Delta t = 0.5$ とした．加えて，式 (5) を計算する際に境界 Γ_t に $\phi = 1$ の境界条件を課す．これにより，荷重が負荷される境界 Γ_t は設計対象外とし，物体領域であることを表現する．また，式 (5) の他のパラメータをそれぞれ $K = 1.0$，$C = 0.7$，$\tau = 3.0 \times 10^{-4}$ と設定した．変位場の近似解法におけるパラメータは $d = 1.0 \times 10^{-4}$，$\epsilon_u = 0.5$ とした．式 (11) における拡散係数は $a_s = 3.0 \times 10^{-4}$ とし，式 (18) における拡散係数は $a_p = 0.10$ とした．近似的な制約違反境界の検出式 $g_1(\boldsymbol{s})(1-\chi)^2$ 及び平均曲率の検出式 $g_2(\boldsymbol{s})$ において，それぞれに用いられる近似ランプ関数のパラメータ ϵ_{r} を 1.0×10^{-9}，1.5 とした．加えて，$\epsilon_{\mathrm{s}} = 1.0 \times 10^{-6}$，$\epsilon_{\mathrm{sn}} = 1.0 \times 10^{-6}$ として，平均曲率の考慮する度合い β を $\beta = 0.1$ とした．以上のパラメータのもと，前章のアルゴリズムに基づいて解析を行なった．

6.1. オーバーハング制約なしの解析結果

ヤング率を下げる度合い γ を零に設定し，オーバーハング制約を考慮せずに解析を行う．500 回ステップを回した結果図 8 のような構造領域 $\mathscr{H}(\phi, \epsilon_u)$ が得られた．

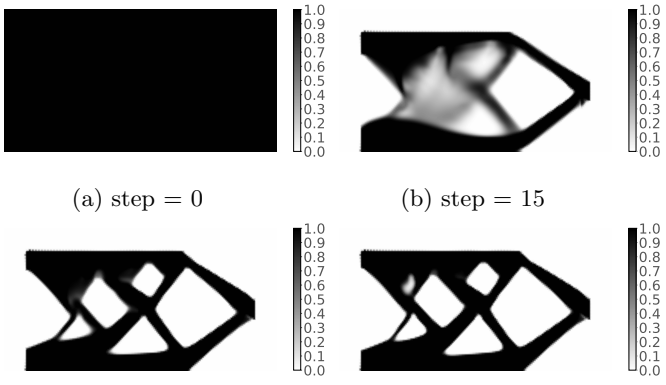


Fig. 8: The structure domain ($\mathscr{H}(\phi, \epsilon_u)$) without overhang constraint after 500 steps.

図 8 からオーバーハング制約なしで得られた最適形状には，オーバーハング角が最小オーバーハング角 45° を大きく超過している箇所が含まれている．故にオーバーハング制約は満たされていない．

6.2. オーバーハング制約ありの解析結果

続いて，$\gamma = 350$ に設定して，オーバーハング制約を考慮した解析を行う．解析した結果，各ステップごとの構造領域 $\mathscr{H}(\phi, \epsilon_u)$ の変化は図 9 のようになった．また，反復計算を 500 回実施した場合に得られた構造領域 $\mathscr{H}(\phi, \epsilon_u)$ は図 10 のようになった．図 9 と図 10 から，500 ステップ後の最終的な形状は，反復回数 45 回の場合のときの形状とほとんど変わらず収束している．また，構造領域の全境界のオーバーハング角が最小オーバーハング角 45° よりも小さくなる形状が得られた．



(a) step = 0　(b) step = 15

(c) step = 30　(d) step = 45

Fig. 9: Change in the structure domains ($\mathscr{H}(\phi, \epsilon_u)$) with overhang constraint for each step.



Fig. 10: The structure domain ($\mathscr{H}(\phi, \epsilon_u)$) with overhang constraint after 500 steps.

6.3. オーバーハング制約の有無による収束性の比較

各ステップにおけるオーバーハング制約ありの場合となしの場合の平均コンプライアンスの変化及び体積の変化をそれぞれ図 11，図 12 に示す．図 11 より，オーバーハング制約により生じる設計感度は平均コンプライアンス最小化に寄与しないため，オーバーハング制約ありの場合はなしの場合に比べて平均コンプライアンスが大きいが，大幅に悪化してはいない．また，図 11 及び図 12 において平均コンプライアンス及び体積の各ステップごとの変化から，オーバーハング

制約の有無によって収束性に大差がないことが確認できた．以上より，本手法の妥当性が検証できた．

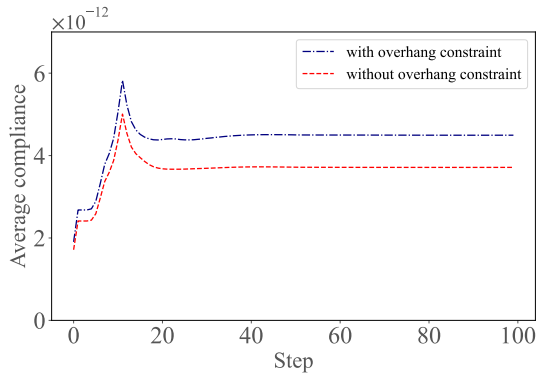


Fig. 11: Comparison of average compliance with and without overhang constraint for each step.

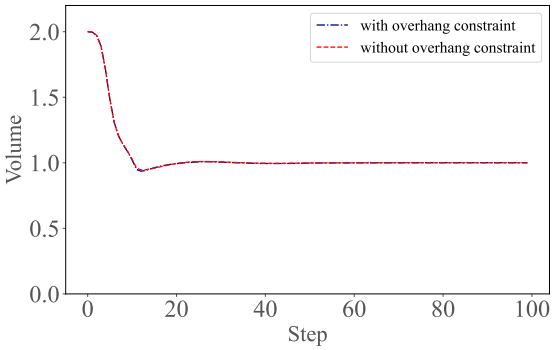


Fig. 12: Comparison of volume with and without overhang constraint for each step.

7. 結言

本研究では仮想的物理モデルと力学モデルを強連成させて収束性を改善する連成型仮想的物理モデルを新たに提案した．また，一例としてオーバーハング制約付きの剛性最大化問題に本モデルを適応し，定式化，感度設計及び妥当性の検証を行った．以下に結果をまとめる．

1. 製造工程などを考慮した幾何学的制約を記述する仮想的物理モデルと，物理現象を記述する力学モデルを連動的に作用させる連成型仮想的物理モデルの考え方を提案した．
2. 幾何学的特徴を捉える仮想的物理モデルに基づいてオーバーハング制約の定式化を行った後，剛性最大化問題を例に連成型仮想的物理モデルを適応した定式化を行った．
3. 具体的な問題設定に対して，最適化問題の定式化及び随伴変数法に基づく感度設計を行い，二つのモデルの連動性について述べた．
4. 数値解析例として，二次元の等方性線形弾性体における平均コンプライアンス最小化問題を考え，本研究で提案した手法の妥当性を検証した．

なお，連成型仮想的物理モデルは目的関数と材料定数の関係性が明確である場合に有用な手法であることを注記する．

8. 謝辞

本研究の一部は，国立研究開発法人新エネルギー・産業技術総合開発機構 (NEDO) の官民による若手研究者発掘支援事業 (JPNP20004) の支援を受けました．ここに記して感謝します．

参考文献

(1) Dbouk, T.: A review about the engineering design of optimal heat transfer systems using topology optimization, Applied Thermal Engineering, **112**(2018), pp. 841–854.

(2) Dilgen, C. B., Dilgen, S. B., Aage, N., and Jensen, J. S.: Topology optimization of acoustic mechanical interaction problems: a comparative review, Structural and Multidisciplinary Optimization, **60.2**(2019), pp. 779–801.

(3) Leary, M., Merli, L., Torti, F., Mazur, M., and Brandt, M.: Optimal topology for additive manufacture: A method for enabling additive manufacture of support-free optimal structures, Materials & Design, **63**(2014), pp. 678–690.

(4) Gaynor, A. T., and Guest, J. K.: Topology optimization considering overhang constraints: Eliminating sacrificial support material in additive manufacturing through design, Structural and Multidisciplinary Optimization **54.5**(2016), pp. 1157–1172.

(5) Langelaar, M.: Topology optimization of 3D self-supporting structures for additive manufacturing, Additive manufacturing **12**(2016), pp. 60–70.

(6) Allaire, G., Dapogny, C., Estevez, R., Faure, A., and Michailidis, G.: Structural optimization under overhang constraints imposed by additive manufacturing technologies, Journal of Computational Physics, **351**(2017), pp. 295–328.

(7) Wang, Y., Gao, J., and Kang, Z.: Level set-based topology optimization with overhang constraint: Towards support-free additive manufacturing, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, **339**(2018), pp. 591–614.

(8) Yamada, T., Geometric shape features extraction using a steady state partial differential equation system, Journal of Computational Design and Engineering, Volume **6**, Issue **4**, (2019), pp. 647–656.

(9) 山田崇恭, 正宗淳, 寺本央, 長谷部高広, 黒田紘敏: 幾何学的特徴量に対する偏微分方程式系に基づく幾何学的特徴制約付きトポロジー最適化 (積層造形における幾何

学的特異点を考慮したオーバーハング制約法), 日本機械学会論文集, **85.877**(2019), 19–00129.

(10) Sato, Y., Yamada, T., Izui, K., and Nishiwaki, S.: Manufacturability evaluation for molded parts using fictitious physical models, and its application in topology optimization, The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, **92**(2017), pp. 1391–1409.

(11) 酒井虹太, 野口悠暉, 山田崇恭: 幾何学的特徴量に対する偏微分方程式を用いた型成形製造制約の数理モデルとトポロジー最適化への展開, 日本計算工学会論文集, **2021**(2021) 20210018–20210018.

(12) Yamada, T., and Noguchi, Y.: Topology optimization with a closed cavity exclusion constraint for additive manufacturing based on the fictitious physical model approach, Additive Manufacturing, **52**(2022), 102630.

(13) Yamada, T., Izui, K., Nishiwaki, S., and Takezawa, A.: A topology optimization method based on the level set method incorporating a fictitious interface energy, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, **199.45**(2010), pp. 2876–2891.

(14) Allaire, G., Jouve, F., and Toader, A. M.: Structural optimization using sensitivity analysis and a level-set method, Journal of Computational Physics, **194.1**(2004), pp. 363–393.

計算数理工学論文集 Vol. 22 (2022 年 12 月)，論文 No. 12-221216 JASCOME

トンネル掘削における地山物性値の早期推定法に関する検討

STUDY ON AN EARLY ESTIMATION METHOD FOR ELASTIC PARAMETERS OF SURROUNDING ROCK NEAR THE TUNNEL FACE

滝沢　壮太 [1)]，阿部　和久 [2)]，若月　和人 [3)]，椎谷　成孝 [4)]，紅露　一寛 [5)]

Souta TAKIZAWA, Kazuhisa ABE, Kazuhito WAKATSUKI, Shigeyuki SHIIYA and Kazuhiro KORO

1) 新潟大学大学院　(〒 950-2181　新潟市西区五十嵐 2 の町 8050 番地，E-mail:f21e036g@mail.cc.niigata-u.ac.jp)
2) 新潟大学工学部　(〒 950-2181　新潟市西区五十嵐 2 の町 8050 番地，E-mail:abe@eng.niigata-u.ac.jp)
3) 株式会社福田組　(〒 951-8668　新潟市中央区一番堀通町 3-10，E-mail:wakatuki1950@dws.fkd.co.jp)
4) 株式会社福田組　(〒 951-8668　新潟市中央区一番堀通町 3-10，E-mail:siiya3070@dws.fkd.co.jp)
5) 新潟大学工学部　(〒 950-2181　新潟市西区五十嵐 2 の町 8050 番地，E-mail:kouro@eng.niigata-u.ac.jp)

This paper presents an early estimation method for elastic parameters of surrounding rock by setting measurement points near the tunnel face. The method is incorporated into an efficient algorithm which expresses the excavation process by controlling the density of elements in the excavation zone. Moreover, boundary element method is combined with the finite element region in order to express infinite domain. Elastic parameters are estimated by the aid of the gradient method. Thorough numerical examples, feasibility of the developed method is validated. In addition, aplication to measurement data is attempted. It is concluded that the proposed method is effective for early estimation.

Key Words: Tunnel Displacement, Elasto-Plastic Analysis, Inverse Problem

1. はじめに

トンネル工事では地山の状態を常に把握し，適切な支保構造や工法等を検討することが重要である．そのため，トンネル坑内測定点の変位データを用いた逆解析により地山物性値を推定し，以降の施工に活用することが行われている．しかし，従来の二次元平面ひずみ場に基づく推定法では，トンネル掘削面（切羽面 : Tunnel face）から十分後方に位置する変位収束後の計測データを用いる必要があり，掘削直後の対策を講ずることができないという問題点があった．この課題を解決するため竹内 [(1)] や坂井ら [(2)] の研究では，切羽面近傍の変形から早期に弾性定数等を推定する手法について検討し，切羽面に近い位置での計測データを使用し得ることがわかった．ただし，当該研究では弾性場を前提としており，実際のトンネル切羽面近傍における地山は塑性変形を受けることを考慮すると，より適切な推定には弾塑性解析が望ましいと考えられる．

トンネル掘削過程を対象とした地山の弾塑性解析は過去にも多く行われている．しかしそれらの解析では，弾塑性解が定常解に至るまで逐次的にトンネル切羽面前方の要素を除去して掘進過程を解析する必要がある [(3, 4)]．そのため，有限要素分割をその都度更新しながら掘削解析を進める必要があり，手間がかかるという問題点があった．そこで先行研究 [(5)] では，地山の有限要素内の力学状態を後方要素へシフトさせて掘進を表現することで，要素分割を更新することなく弾塑性解析の効率化を図った．しかし，トンネル工事における吹付けコンクリートと鋼製支保工の延伸も考慮した掘進の再現は必ずしも容易ではない．そのため本研究では，掘削域の要素密度を操作することで掘進過程を表現した解法を提案する．また，それに基づいた地山物性値の早期推定法を構築し，その有効性に関する検討を行う．

2022.10.21 受付，2022.11.17 受理

2. 対象とする問題のモデル化と解法

2.1. 対象とする問題

対象とする問題とそのモデル化の概要を Fig.1 に示す．Fig.1（左上）のように地山内にトンネルがあり，時間と共に一定の速度で水平方向に掘進する問題を考える．地山を弾塑性材料とするならば，応力は弾塑性履歴を受ける．着目している地山領域に向かって，十分遠方からトンネルを掘進してきたと仮定すると，その段階でトンネル周辺の応力分布は定常状態となっており，次式が成り立つ．

$$\sigma(x,t) = \sigma(x + v\Delta t, t + \Delta t) \tag{1}$$

ここで，σ は地山応力，x は掘進方向座標，t は時刻，Δt は時間増分，v は掘進速度である．なお，着目領域近傍の地山

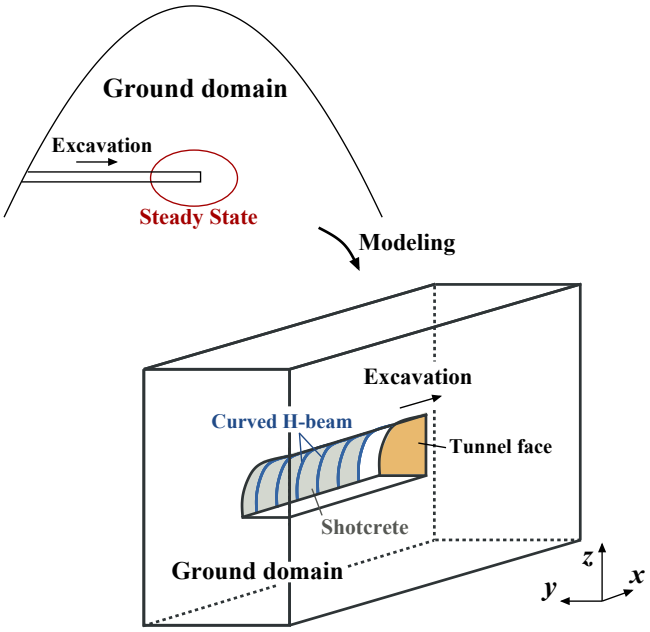


Fig. 1　Schematic diagram of present problem

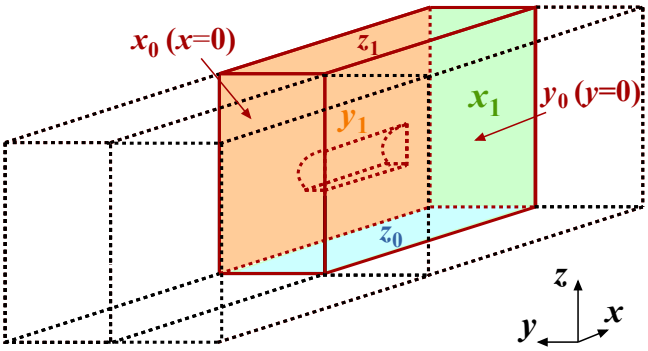


Fig. 2　Schematic diagram showing symmetry surfaces and boundary element surfaces of analysis model (x_0, y_0 surfaces: Symmetry surfaces. x_1, y_1, z_0, z_1 surfaces: Boundary element surfaces.)

は均質と仮定する．本研究では，式 (1) の定常状態における変位を用いて地山物性値を推定する．

2.2. モデル化の説明

先行研究 [5] では前述の通り，有限要素内の力学状態を隣接要素へとシフト（コピー）することで掘進を表現した．しかし，解析領域境界を変位拘束したこともあり，境界付近における要素内応力はその影響を受けていた．そのため，応力場をシフトすることによる不自然な変位と応力分布が掘削前方域にて認められた．また，解析領域を大きく取ることでこの影響は低減できるものの，十分な領域サイズの基準が曖昧であるという問題点があった．そこで本研究では領域境界に境界要素を結合させ，外部無限弾性場を表現する．

解析モデルは対称条件を考慮し，Fig.2 の様に全体の 1/4 に設定した．具体的には x_0，y_0 面は対称面，それ以外の境界面である x_1，y_1，z_0，z_1 面は境界要素結合面とした．この場合，x_0 面より x 方向と $-x$ 方向に同時にトンネル掘削する問題として近似したこととなる．ただし，本モデルは掘進距離が短い場合，対称面 (x_0 面) の影響を受け，推定精度が低下する．そのため，後述の掘進法では，その影響が小さくなる距離まで最低限掘進するように設定した．なお，境界要素方程式の境界積分は鏡像条件を考慮しつつ，全周囲で評価した．

Fig.1（右下）は解析モデルの模式図である．吹付けコンクリートはシェル要素，鋼製支保工は梁要素でモデル化した．地山の弾塑性モデルは Mohr-Coulomb の降伏基準を基本とし，降伏曲面上の任意点で微分可能となる様に修正したものを用いた [6]．

2.3. 掘削過程の解析手順

まず，土中の鉛直応力（土被り圧）を初期応力に設定して Fig.3(a) の様にトンネル空洞となる部分（掘削域）も含めて要素分割しておく．次に，領域左端から順にトンネル掘削域の要素メッシュにおける剛性をゼロにする（Fig.3(b)）．代わりに，力学状態が乱れないよう，剛性をゼロにするまで作用していた地山応力と等価な節点力を加える（Fig.3(c)）．その後，この等価な節点力を徐々に解放して弾塑性解析を行い，最終的にゼロにする（Fig.3(d)）．この手順を繰り返してトンネル掘削過程を表現する．これにより文献 4）の様に力学状態をシフトすることなく，また要素分割を更新することなく，トンネル掘削を表現することができる．なお，等価節点力は 5 ステップに分割して解放し，各ステップで応力状態が十分収束したことを確認してから次のステップへと移行するようにした．ステップ数を増やしてもほぼ同じ結果が得られることを事前に確認した上で，必要最小限の 5 ステップに設定した．また，鋼製支保工と吹付けコンクリートの設定については，地山とは逆に，あらかじめ剛性がゼロの状態でトンネル壁面箇所に埋め込んでおき，掘削の進行と共に剛性を所定の値へと戻すことで表現する．その際に，建て込み直後における地山との接触力がゼロとなる様に拘束力を加えておく．

3. 地山物性値の推定手法

3.1. 目的関数

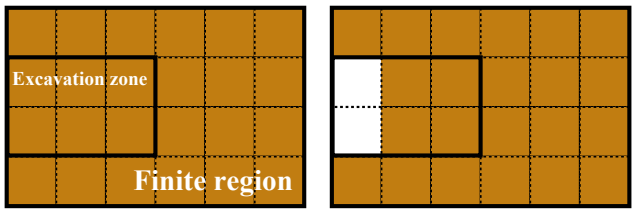
推定の検討で用いる目的関数 J は次の誤差二乗ノルムで設定した．

$$J = ||\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}||^2 \tag{2}$$

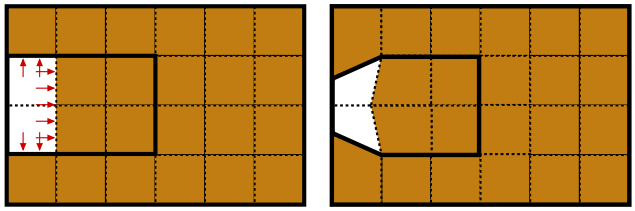
ここで，$\hat{\mathbf{u}}$ は各測定点における相対変位測定値からなるベクトル，$\mathbf{u}$ はそれに対する順解析値ベクトルである．ここでの相対変位とは，ある基準点から見た測定点における変位の相対量である．

3.2. 勾配法に基づく推定

本手法では勾配法によって地山弾性パラメータ（ヤング率 E，ポアソン比 ν）を推定する．推定値は，目的関数 J が最小値へと到達した際の E と ν とする．そのため，目的関数 J の値を減少させる方向に E，ν を複数回修正する必要がある．そこで，オーダーの異なる E と ν を次式のように表し



(a) Excavation process 1　(b) Excavation process 2



(c) Excavation process 3　(d) Excavation process 4

Fig. 3　Illustration of the analysis procedure of the excavation process

ておく．

$$E = E_0\alpha_E, \quad \nu = \nu_0\alpha_\nu \tag{3}$$

ここで，E_0 はヤング率の初期値，ν_0 はポアソン比の初期値，α_E と α_ν はヤング率およびポアソン比の初期値に対する比であり，これを直接の推定対象とする．よって，E と ν への修正は，媒介変数 α_E，α_ν に後述する修正量 $\Delta\alpha_E$，$\Delta\alpha_\nu$ を加えることで，間接的になされる．また，α_E，α_ν はどちらも初期値は 1.0 である．

式 (3) より勾配成分 $\partial J/\partial\alpha_E$，$\partial J/\partial\alpha_\nu$ を次式で与える．

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha_E} = \frac{\partial J}{\partial E}E_0, \quad \frac{\partial J}{\partial \alpha_\nu} = \frac{\partial J}{\partial \nu}\nu_0 \tag{4}$$

ここでの $\partial J/\partial E$ と $\partial J/\partial\nu$ は差分近似によって評価する．

また，式 (4) より，修正量 $\Delta\alpha$ を次式で与える．

$$\Delta\alpha_E = -\beta\frac{\partial J}{\partial E}E_0, \quad \Delta\alpha_\nu = -\beta\frac{\partial J}{\partial \nu}\nu_0 \tag{5}$$

ここで，β は正の係数であり，初期値に対して得られる目的関数 J と α_E との勾配 $(\partial J/\partial\alpha_E)_{ini}$ を用いて次式のように設定した．

$$\beta = \frac{0.1}{\left|\left(\frac{\partial J}{\partial \alpha_E}\right)_{ini}\right|} \tag{6}$$

以上より，E と ν は本来，全く異なるオーダーの値をとるが，α_E，α_ν を介することで，$\Delta\alpha_E$ と $\Delta\alpha_\nu$ の算出時に勾配修正係数 β を統一して用いることができる．

3.3. 勾配法における収束判定について

勾配法の収束は地山弾性パラメータ（E，ν）の推移に基づいて判定する．ヤング率 E とポアソン比 ν とで個々に収束判定値を設定するが，評価方法は同じである．そのため，ヤング率のみを例に評価方法を説明する．

修正回数 n 回目におけるヤング率の収束度合いを表す指標 $Eesp_n$ を次式のように設定した．

$$Eesp_n = |\bar{E}_n - \bar{E}_{n-1}| \tag{7}$$

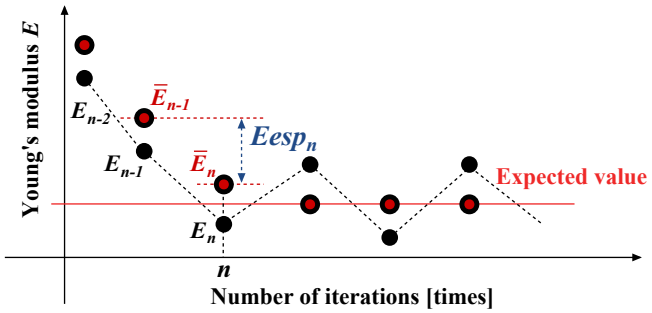


Fig. 4　Schematic diagram of *Eesp*

ここでの $\bar{E}_n$ は，修正回数 n 回目におけるヤング率と修正回数 $n-1$ 回目におけるヤング率との平均であり，次式により与えられる．

$$\bar{E}_n = \frac{E_n + E_{n-1}}{2} \tag{8}$$

式 (7)，(8) の関係を Fig.4 に示す．Fig.4 より，$Eesp$ は $\bar{E}$ の変化量を与える．また，これは E_n と 2 つ手前の E_{n-2} との変化量に対応しており，正解値付近における振動の影響を排除できる．以上より，本収束判定法は正解値付近で振動解を得た際でも，その平均値 $\bar{E}$ が一定値をとる性質を用いて，勾配法の収束性を評価可能である．なお，収束判定値については，検討の結果，ヤング率は 1.0MPa，ポアソン比については 1.0×10^{-4} にそれぞれ設定した．勾配法による修正過程の終了は，$Eesp_n$ と νesp_n の両者とも収束判定値を下回った時とする．

4. 解析結果

4.1. 解析モデル 1

解析モデル 1 を yz 面，xz 面から見た図を Fig.5，Fig.6 にそれぞれ示す．有限要素は 8 節点 6 面体要素を用い，節点数は 5348，要素数は 4536 である．トンネル壁面形状は楕円で与え，底部は水平で与えた．測定点は切羽面から 1 要素後方（$-x$ 方向）に位置する節点を相対変位基準点とし，要素長刻みでその後方に設定する．測定に用いる変位方向は，検討の

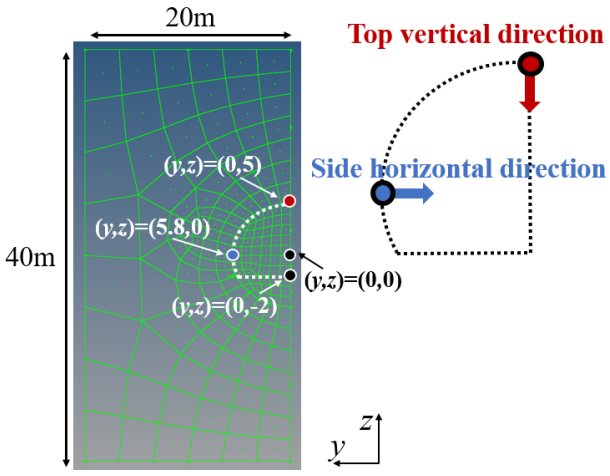


Fig. 5　Analysis model 1 (yz plane)

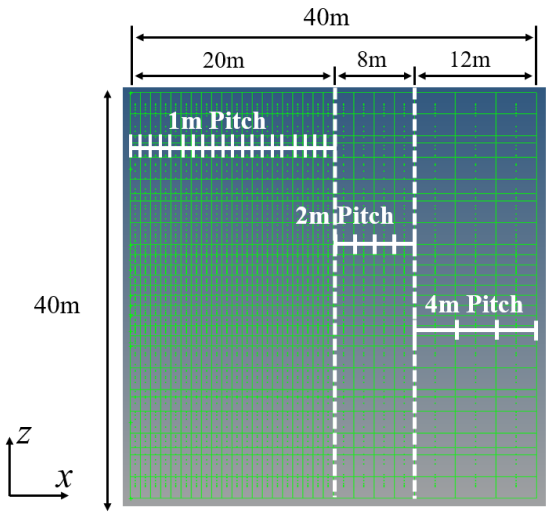


Fig. 6　Analysis model 1 (xz plane)

結果，推定に有効な天端鉛直方向と側面水平方向の 2 方向とした．吹付けコンクリートおよび鋼製支保工は地山の有限要素を基に自動生成されるように設定したため，それぞれの設置間隔はトンネル長手（x）方向の要素長に依存する．本解析では 1 掘進長を 1m と設定した [7]．そのため，トンネル掘削域を含む解析領域中央までのメッシュを 1m 間隔で 20 分割した．20m 以降は精度確認の上，Fig.6 の様に要素長を大きく設定した．

4.2. 定常状態の妥当性と評価基準に関する検討

本推定法にて得られる変位解は，トンネル周辺地山が掘進過程で定常状態にあることを前提とするため，本来はトンネルを十分前方まで掘進させる必要がある．しかし，解析領域は有限であるため，掘進回数も有限となる．そのため，限られた掘進回数の下で定常状態に至っているか否かについて検討する必要がある．

そこでまず，定常状態の度合いを示す指標 S を次式のように設定する．

$$S = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}|u_i - u'_i| \tag{9}$$

ここで，u_i（u'_i）は現掘進回数時（1 つ前の掘進回数時）において，切羽面から後方（-x 方向）へ i 要素長分離れた節点にて得られる相対変位を表している．評価する変位方向は天端鉛直方向 u_z と側面水平方向 u_y の 2 方向とし，前述の測定点を切羽面に近い方から順にそれぞれ N 点ずつ用いる．なお，本解析では N=5 点とする．

地山等級別に順解析を行い，指標 S を求めた．Fig.7 はその結果を掘進回数と指標 S との関係で整理したものである．対象地山は CⅡ 級，DI 級，DⅡ 級地山の 3 つとし，Table 1 に設定値の詳細を示した．なお，地山等級は地山の安定性を基準に区分されており，CⅡ 級地山は比較的安定な地山，DⅡ 級地山はトンネルの安定性が問題となりやすい不安定な地山である．DI 級地山はその中間に区分される地山である．また地山物性値は本来，地山等級ごとにある範囲の値をとる．今回は，参考文献 [8, 9] を基に，各地山等級を代表する典型的な物性値を用いて解析を行った．以降はこれらを CⅡ，DI，DⅡ 地山（ground）とそれぞれ呼ぶことにする．地表からトンネルまでの深さ（土被り）は 100m と 200m の 2 パターンで解析を行った．その結果，土被り 200m の方が 100m よりも指標 S が大きくなる（定常状態から遠ざかる）傾向を確認した．そのため，Fig.7 では土被り 200m の結果のみ示す．

Fig.7 より，どの地山等級においても 15 回程度の掘進で指標 S が赤線に示す 0.1mm のラインを下回ることが確認できる．なお，DⅡ 地山（側面水平方向）では掘進回数 10 回目で指標 S の値が微増しているが，これは収束に向かう過程で変位の変化率が大きくなったためである．また，実際の施工現場にて得られる測定データの計測誤差は最大 2mm～3mm 程度である．そのため，指標 S が 0.1mm の場合，非定常状態起因の誤差は計測誤差の 1/30～1/20 程度となり，計測誤差が支配的となる．以上より，S が 0.1mm 以下であれば，非定常状態起因の誤差の影響は微小となるため，本モデルにて定常状態を再現することができていると考えられる．なお，指標 S が基準値を下回った場合は，その掘進回数にて変位解を算出して次の計算へと移行するように設定した．これにより，計算時間の短縮を図ることができる．ただし，掘進回数が少ない場合，変位解は対称面である左端境界（Fig.2：x_0 面）の影響を受ける可能性がある．そのため，最低 12 回は掘進するように設定した．

4.3. 推定条件

Table 2 は推定パターンを対象とした地山弾性パラメータ（E，ν）に基づき整理したものである．Table 2 に示す CⅡ～DⅡ 地山は Table 1 と同じ入力値を用いており，それをここでは推定解析の正解値として設定した．また，弾性パラメータの異なる初期値を 2 つ設定した．それぞれ，初期値 1（Initial value 1），初期値 2（Initial value 2）と呼ぶことにする．便宜上，後述の「**4.4. 推定結果**」において，初期値を初期値 1 とした際の CⅡ，DI 地山の推定をそれぞれ Case 1，Case 2，

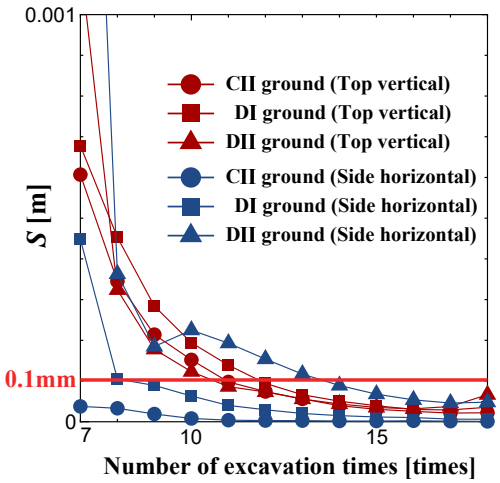


Fig. 7　Relationship between the number of excavation times and index of steady state S

Table 1　Input data of each ground grade used for analysis

Ground grade	CⅡ	DI	DⅡ
Ground properties			
Young's modulus E [MPa]	1000	500	150
Poisson's ratio ν	0.30	0.35	0.40
Cohesion [MPa]	1.0	0.4	0.2
Internal friction angle [°]	40	35	30
Unit weight γ_t [kN/m^3]	23	22	21
Shotcrete			
Young's modulus [MPa]	4000		
Poisson's ratio	0.2		
Thickness [mm]	100	150	200
Curved H-beam			
Axial stiffness [MN]	525	630	833
Bending stiffness [kN m^2]	1470	1760	3400
Pitch [m]	1.0		

初期値を初期値 2 とした際の DI，DⅡ 地山の推定をそれぞれ Case 3，Case 4 と呼ぶことにする．なお，Case 2 と Case 3 は同じ DI 地山を正解値としているが，初期値に違いがある．Case 2 は DI 地山の正解値よりも硬い地山を弾性パラメータの初期値とし，Case 3 は正解値よりも軟らかい地山を初期値として設定している．なお，Table 1 における粘着力（Cohesion）と内部摩擦角（Internal friction angle）から成る塑性パラメータはトンネル測点の変位への影響度が低く，地山等級毎の代表値に設定しさえすれば，弾性パラメータの推定精度は低下しないことを確認している．そのため推定では，地山弾性パラメータを初期値 1 または初期値 2 に設定し，それ以外の入力値は推定対象の地山と同じ値にする．また，土被りは 100m と 200m の 2 パターンで解析を行った．ただし，Table 1 より，地山等級ごとに単位体積重量 γ_t が異なるため，土被りの違いだけでは定量的な比較検討ができない．そのため，トンネルに作用する初期の荷重条件は単位体積重量 γ_t と土被りとの積で決定される初期地山応力 σ_0 で標記する．

測定データ $\hat{\mathbf{u}}$ は実際の施工現場における計測誤差を考慮する必要がある．そのため，推定対象の地山にて得られた順解析値 $\mathbf{u}$ に，標準偏差 1mm のランダムなノイズを加えることで測定データを模擬的に生成した．また，本手法の妥当性を確認するため，各 Case につき 3 回，異なるノイズで推定を行った．なお，推定に際し要求精度を設定した．得られた推定値により概ね適切な支保構造や工法等の検討ができるか否かを基準とし，ヤング率 E は正解値 ±10 %以内，ポアソン比 ν は正解値 ±0.025 以内を要求精度の範囲とした．以上の条件の下，全 Case を対象に測定点数を変化させて得られた推定精度に基づき，本手法による早期推定の可能性を検討する．

Table 2　Estimation targets and initial values

	E [MPa]	ν
CⅡ ground	1000	0.30
↑ Case 1		
Initial value 1	700	0.325
↓ Case 2		
DI ground	500	0.35
↑ Case 3		
Initial value 2	300	0.375
↓ Case 4		
DⅡ ground	150	0.40

4.4. 推定結果

最初に，Case 1 の推定結果に基づき，CⅡ 地山の推定可能性を検討する．CⅡ 地山は地山が硬く，トンネル測点の変位が小さいため，測定誤差の測定データに対する比が比較的大きくなる．そのため，Case 1 は最も推定が困難なケースとなる．Fig.8 はその Case 1 における地山弾性パラメータの推定過程を示したものである．この時の測定点数は 11 点，初期地山応力 σ_0 は 2.3MPa である．試行の結果，Fig.8 より，推定値が 3 回とも要求精度内（水色枠内）に収まるためには最低 11 点必要となった．このことから，当該の地山条件では，切羽先端から 11m 地点までの測定データが必要となることが分かった．なお，以降はこの様に最低限必要となる測定点数を最低測定点数と記述する．

次に，Case 2 と Case 3 の推定結果に基づき，DI 地山の推定可能性を検討する．Fig.9（Case 2）と Fig.10（Case 3）は，どちらも測定点数 5 点，初期地山応力 σ_0=2.2MPa の条件における地山弾性パラメータの推定過程を示したものである．Case 2 と Case 3 の推定対象は同じ DI 地山であるが，初期値が異なるため，Fig.9 と Fig.10 は異なる推定経路をたどっている．Fig.9 の初期値には DI 地山よりも硬い地山の代表値が設定されている．そのため，Fig.9 の推定経路は高剛性側から要求精度内へ接近するようなものとなっている．一方，Fig.10 は DI 地山よりも軟らかい地山の物性値で初期値が設定されているため，その推定経路は低剛性側から要求精度内へ接近したものとなっている．なお，Case 2 と Case 3 の最低測定点数について検討した結果，Fig.9 と Fig.10 に示すとおり，両 Case 共に 5m までの測定データで推定可能であった．ただし，Fig.9 と Fig.10 では，収束に至るまでの修

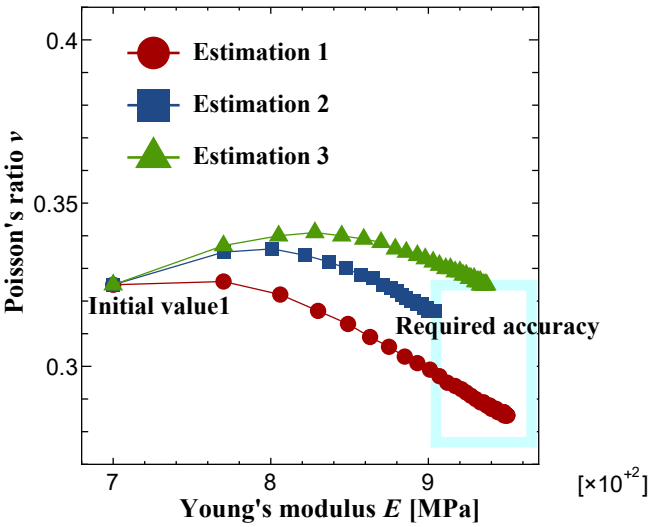


Fig. 8 Estimation process for Case 1 (σ_0=2.3MPa, 11 points)

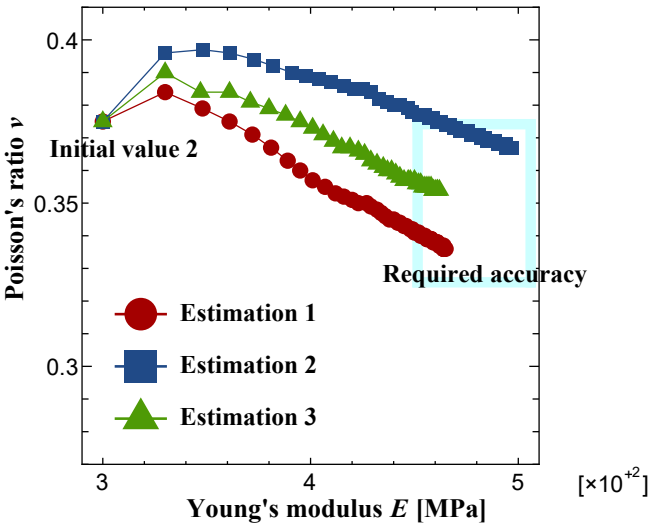


Fig. 10 Estimation process for Case 3 (σ_0=2.2MPa, 5 points)

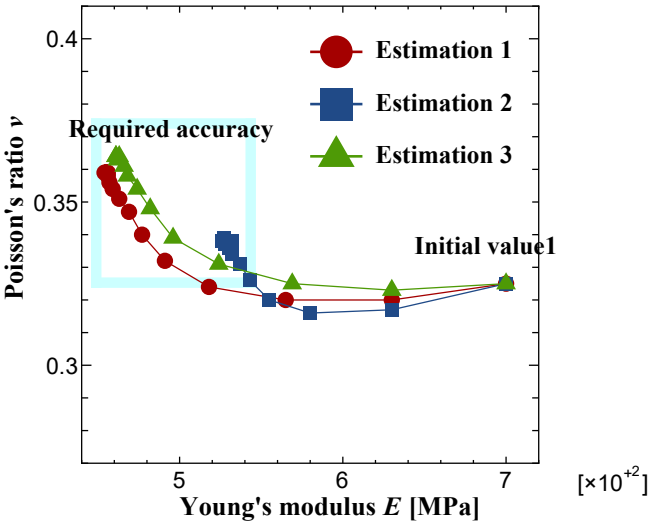


Fig.9 Estimation process for Case 2 (σ_0=2.2MPa, 5 points)

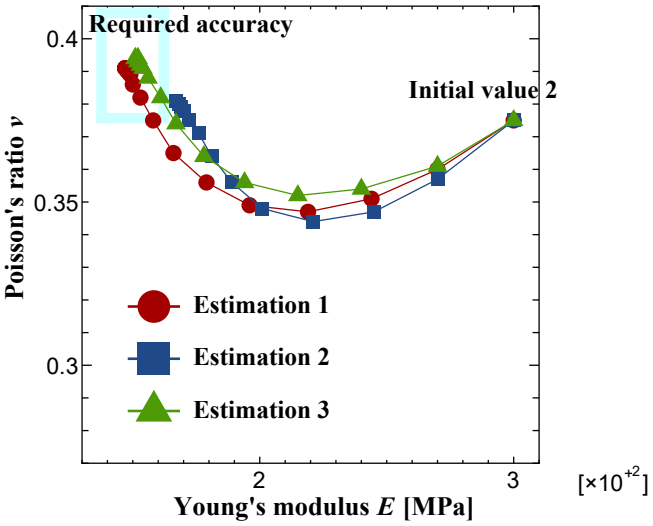


Fig. 11 Estimation process for Case 4 (σ_0=2.1MPa, 5 points)

正回数が異なる．Fig.9 は，3 回の修正過程における平均が 17 回であるのに対し，Fig.10 の 3 回平均は 52 回となっており．Case 3 は Case 2 に比べ，3 倍以上の修正回数を要していることが分かる．さらに Case 3 の様に，低剛性側の地山弾性パラメータを初期値に設定すると，切羽面近傍の塑性域が広く分布することとなるため，弾塑性解析の収束計算に時間を要する．このことから，地山弾性パラメータの初期値を対象地山のそれよりも高剛性側に設定した方が，短時間で推定し得ることが分かった．

最後に，Case 4 の推定結果に基づき，DⅡ 地山の推定可能性を検討する．Fig.11（Case 4）は測定点数 5 点，初期地山応力 σ_0 =2.1MPa の条件における，地山弾性パラメータの推定過程を示したものである．Fig.11 より，3 回の推定過程とも同様の経路をたどり，他の 3 Case に比べて推定過程が安定していることが確認できる．DⅡ 地山は DⅠ や CⅡ 地山よりも軟弱な地山であり，トンネル測点の変位が大きくなる傾向にある．そのため，計測誤差が推定精度に及ぼす影響が相対的に小さくなり，推定過程が安定化したものと考えられる．ただし，Fig.11 では，2 回目の推定時にヤング率の推定値が要求精度をわずかに外れている．これは推定対象の地山が低剛性である程，ヤング率の要求精度の範囲が狭まり，より高精度なヤング率の推定値が求められたためだと考えられる．なお，検討の結果，本ケースで必要となる最低測定点数は 6 点であった．

以上の検討は全て土被り 100m に対するものである．そこで，土被りを 200m とし，Case 1～Case 4 まで同様の検討を行った．その結果，ほとんどのケースで土被り 100m の場合よりも少ない測定点数で推定可能なことが分かった．推定精度が向上する理由として，土被りが大きくなるほど，トンネル壁面に作用する初期地山応力 σ_0 が増加し，トンネル測点の変位が大きくなるためだと考えられる．

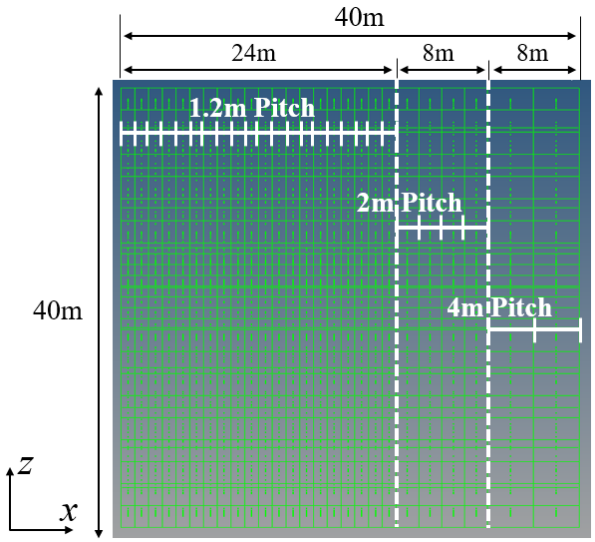


Fig. 12　Analysis model 2 (xz plane)

以上より，Table 2 のいずれの地山を推定対象とした場合でも，地山弾性パラメータは切羽面から 10m 程度までの測定データより推定可能であった．それに対し，従来法は準二次元的な状態となる切羽面から 40〜50m 後方の測定データを取得する必要がある．このことから，本手法は従来法よりも遥かに切羽面に近い測定データから地山物性値を推定可能であり，早期推定法として有効であると言える．

5. 現場データへの適用

5.1. 解析モデル 2

岐阜県内で施工中の道路トンネルにおける測定データを対象に，本手法の現場への適用可能性について検討する．推定対象は CⅡ 級地山である．推定時の初期物性値は，参考文献 [8, 9] を基に CⅡ 地山を代表する値に設定した．Table 3 に地山初期物性値を含めた入力値一覧を示す．Table 3 に示すとおり，鋼製支保工は現場条件に合わせ，建て込み間隔を 1.2m とした．そのため，x 方向の要素長を 1.2m に設定した（Fig.12）．また解析モデル 1 と同様に，20 分割目以降は要素長を大きく設定した．有限要素領域のサイズは解析モデル 1 と同じとした．節点数は 5454，要素数は 4576 である．「**4.4. 推定結果**」での検討結果より，先端から 10m 程度までの変位データで推定可能と考え，ここでは 8 点に設定した．なお，トンネル長手（x）方向の要素長が 1.2m であるため，8 点目は 9.6m 地点（=8 点 × 1.2m ）となる．Fig.13 の右図は解析モデル 2 の yz 面を示したものである．トンネルの断面形状は現場条件に合わせて設定した．測定変位は，天端鉛直方向と側面水平方向の 2 方向である．ただし，Fig.13 の左図に示すように，側面水平方向に対応する現場の測定点は図中 SL から高さ 2.5m の壁面に設置されていた．そのため，本解析モデルにおいても同位置に測定点を設定した．

5.2. 現場の測定データについて

得られた現場の測定データは，元々二次元平面ひずみ場に基づいた逆解析への適用を目的として取得されたものである．そのため，切羽面近傍の応力急変部から後方約 50m までの測定データが得られている反面，測点間隔が広く，切羽面近傍のデータ数が不足しているという問題があった．そこで，現場で得られた全測定データを補間して切羽面近傍の測定データ $\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{All}}$ を擬似的に作成した．ただし，50m 後方までの広範なデータを用いて補間した場合，切羽近傍の変形特性を適切に反映し得なくなる恐れがある．そのため，その影響が比較的小さい切羽面近傍（0m，6m，10.8m）の 3 地点で得られた現場データから二次曲線近似を求め，それより作成した擬似測定データ $\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{Near}}$ を用いた推定結果についても検討した．

Table 3　List of input data for estimation based on measurement data

Ground grade	CⅡ
Ground properties	
Initial young's modulus E_0 [MPa]	8000
Initial poisson's ratio ν_0	0.25
Cohesion [MPa]	1.0
Internal friction angle [°]	40
Unit weight γ_t [kN/m^3]	23
Overburden [m]	150
Shotcrete	
Young's modulus [MPa]	4000
Poisson's ratio	0.2
Thickness [mm]	100
Curved H-beam	
Axial stiffness [MN]	525
Bending stiffness [kN m^2]	1470
Pitch [m]	1.2

5.3. 現場の測定データを用いた推定結果

Fig.14 は全データ $\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{All}}$ と切羽面近傍データ $\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{Near}}$ をそれぞれ用いた際の地山弾性パラメータの推定過程を示したものである．Fig.14 に示すとおり，2 つのデータは同様の推定経路をたどり，概ね同じ値が推定されていることが分かる．この推定値は CⅡ 級地山の物性値として比較的標準的なものである．Table 4 は，地山弾性パラメータの推定結果をまとめたものである．Table 4 より，全データと切羽面近傍データによるヤング率の推定値に 300MPa 程度の開きが確認できるが，CⅡ 級地山において，この程度の推定値の差は支保構造や工法等の決定にほとんど影響を及ぼさないと考えられ

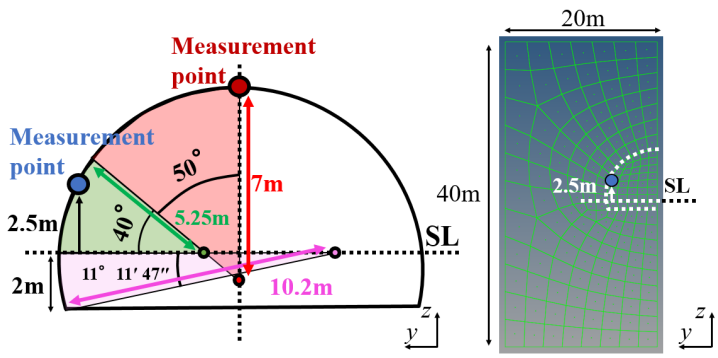


Fig. 13　Analysis model 2 (yz plane)

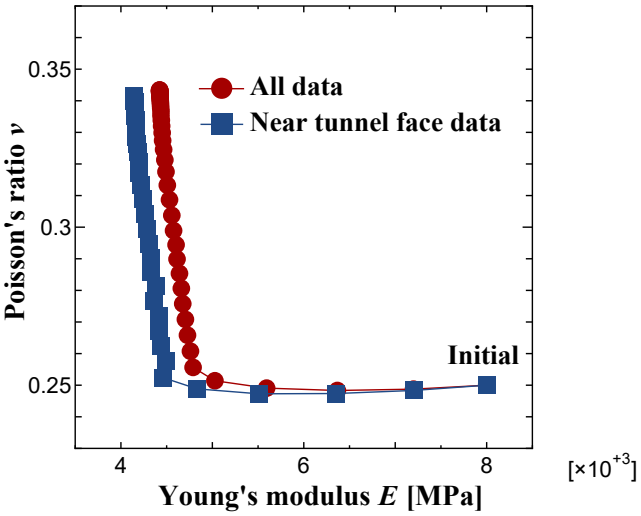


Fig. 14　Estimation process of the elastic parameters based on measurement data

る．また，Table 4 では従来法（2-D）の推定結果も示した．その結果と比較すると，同オーダーのヤング率が推定されており，両推定結果に大きな乖離は認められない．

Fig.15 は，全データと，それより求めた推定値（Table 4 : E=4423MPa，ν=0.343）の下で得られた変位とを比較したものである．Fig.15 より，2 つの変位曲線は概ね一致していることが分かる．これは，現場のトンネル変形と本解析モデルにおけるトンネル変形とが類似していることを意味し，解析モデルと推定結果の妥当性を示している．なお，ここには示していないが，切羽面近傍データと，それによる推定値（Table 4 : E=4145MPa，ν=0.341）の下で得られた変位解との比較においても，概ね良好な一致を得た．また Fig.15 に

Table 4　Comparison of estimation results

Measurement data type	E [MPa]	ν
All data ($\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{All}}$)	4423	0.343
Near tunnel face data ($\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{Near}}$)	4145	0.341
2-D	2816	0.392

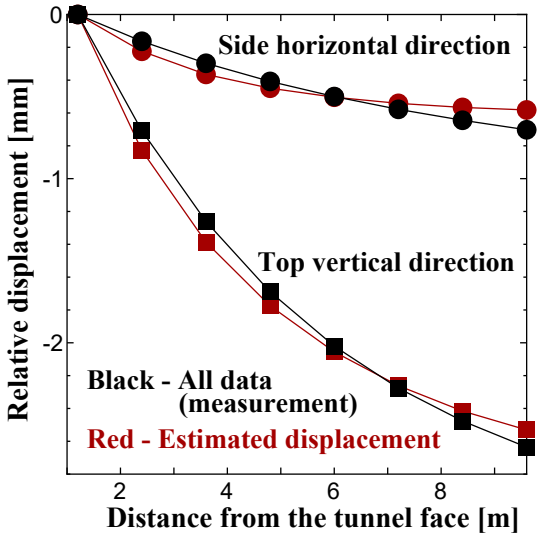


Fig. 15　Comparison of all data ($\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{All}}$) and analysis with estimated values (E=4423MPa，ν=0.343)

示すとおり，切羽面から 10m 程度の距離では準二次元的な収束解へと至っていない．そのため，少なくともこの段階では従来法を適用できないことが分かる．

6. おわりに

本論文では切羽面近傍に変位測定点を設定し，それに基づき地山物性値を早期に推定する手法を提案した．また，掘削域の要素密度を操作することでメッシュの切り替えをせずに掘進過程を表現する手法を提案した．さらに，領域境界に境界要素を結合させ，無限弾性場を表現することで．解析領域設定の曖昧さを排除した．様々な条件下での解析を通し，切羽面から 10m 程度までの測定データより早期推定可能であり，本手法が有効であることを確認した．また，現場の測定データを用いた推定では，当該地山等級に符合する物性値が推定され，本手法の現場への適用可能性を示す結果を得た．

今後は，他の現場の測定データを用いて，本手法の現場への適用性についてさらに検討する予定である．また，実際の現場では施工との兼ね合いや測定点の設置における手間の問題などから，切羽面近傍に多くの測定点を設置できない可能性がある．そのため，切羽面近傍における測定データ点数と推定精度との関係についても検討する必要がある．

参考文献

(1) 竹内　新：トンネル構造を考慮した弾性変位に基づく地山物性推定法，新潟大学大学院自然科学研究科，令和 2 年度修士論文，2021.

(2) 坂井一雄，谷　卓也，青木智幸，工藤直矢：トンネル天端の微小な傾斜角度の変化を用いた切羽前方地山予測手法の開発，土木学会論文集 F1（トンネル工学），Vol.73, No.2，32-46，2017.

(3) 大津宏康，大西有三，瀧　治雄，亀村勝美：有効応力の概念に基づく掘削解析の問題点に関する一考察，土木学会論文集，No.481, pp.77–85, 1993.12.

(4) 小森　博，堀地紀行，熊耳哲雄，大津宏康，瀧　治雄：NATM における支保構造の三次元効果とその評価について，土木学会論文集，No.529, pp.57–68, 1995.12.

(5) 滝沢壮太，阿部和久，若月和人，紅露一寛：地山の弾塑性履歴を考慮したトンネル掘削過程の定常解析，令和 3 年度土木学会全国大会第 76 回年次学術講演会，VI-459, 2021.

(6) Zienkiewicz，O.C. and Taylor，R.L.：The finite element method for solid and structural mechanics，6th ed.，4.11，Elsevier，2005.

(7) 社団法人日本道路協会：道路トンネル技術基準（構造編）・同解説，丸善（株），p.126，2003.

(8) 土木学会：トンネルライブラリー第 16 号，山岳トンネルにおける模型実験と数値解析の実務，丸善 (株), pp.152–164，2006.

(9) 土木学会：トンネルライブラリー第 24 号，実務者のための山岳トンネルにおける地表面沈下の予測評価と合理的対策工の選定，丸善 (株)，p.113，2012.

リッジパターン変態のプレストレッチ依存性と分岐座屈特性

PRESTRETCH DEPENDENCE AND BIFURCATION PROPERTY OF RIDGE PATTERN TRANSFORMATION

田中 大地[1)]，若林 駿人[2)]，松原 成志朗[3)]，永島 壮[4)]，奥村 大[5)]

Daichi TANAKA, Hayato WAKABAYASHI, Seishiro MATSUBARA, So NAGASHIMA and Dai OKUMURA

1) 名古屋大学大学院工学研究科（〒464-8603 名古屋市千種区，E-mail: tanaka.daichi.n8@s.mail.nagoya-u.ac.jp）
2) 名古屋大学工学部（令和 3 年度卒業）（〒464-8603 名古屋市千種区）
3) 名古屋大学大学院工学研究科（〒464-8603 名古屋市千種区，E-mail: seishiro.matsubara@mae.nagoya-u.ac.jp）
4) 名古屋大学大学院工学研究科（〒464-8603 名古屋市千種区，E-mail: so.nagashima@mae.nagoya-u.ac.jp）
5) 名古屋大学大学院工学研究科（〒464-8603 名古屋市千種区，E-mail: dai.okumura@mae.nagoya-u.ac.jp）

In this study, we investigate the prestretch dependence and bifurcation property of wrinkle-to-ridge pattern transformation, which occurs on a film bonded to a prestretched soft substrate. Step-by-step eigenvalue buckling analysis is used to detect the first bifurcation and the second bifurcation on the bifurcated path. Post buckling analysis is conducted by an initial imperfection method. The first and second bifurcations cause wrinkle and ridge pattern transformation, respectively. The critical strain for the second bifurcation is found to depend on the wavenumber prescribed by the wavelength of the wrinkle as well as the magnitude of the prestretch. The second bifurcation also has a wave property (i.e., double bifurcations). The combination of the two bifurcation modes provides the freedom of the location that forms one ridge in the viewpoint of translational symmetry.
Key Words: Pattern transformation, Surface instability, Buckling, Bifurcation, FEA

1. 緒　　言

軟質基盤上の硬質膜に面内圧縮応力が作用すると分岐座屈が生じ，硬質膜表面には多様なパターンが形成される[(1)-(3)]．近年では工学応用に関する研究も多く報告されている[(4)-(9)]．パターン変態の初期段階ではリンクルと呼ばれるパターンが現れ，二次元的には正弦波形のストライプパターン，三次元的にはチェッカーボードパターンや六方ディンプルパターンと呼ばれる周期パターンが現れる[(10)]．さらに圧縮応力が加えられると，この分岐経路上において第二分岐座屈が生じ，高次のリンクルモードが発生することによって，ヘリンボンパターンやラビリンスパターンに代表される実験において観察される複雑なパターンへの変態が起こる[(10),(11)]．したがって，多様なパターンの発生条件や機構を解明するとともに制御の方法を考えることが重要となる（多様なパターンの形態については文献(10)を参照）．

このような状況下において，リッジパターンが注目されている[(8),(9),(12)-(14)]．表面に形成される凹凸の深さが，通常のリンクルと比べて大きいのが特徴であり，パターンの波長に対して高アスペクト比を有すると説明され，この特長は工学応用を考えるときに魅力的となる[(8),(9)]．リッジパターンは，大きくプレストレッチされた軟質基盤上に硬質膜を成膜した後，このプレストレッチを解放することによって硬質膜に大きな圧縮ひずみ（すなわち圧縮応力）を加えることによって発生する（Fig. 1）．ここで，h_{f}は膜厚，εは圧縮ひずみ，λ_0はプレストレッチをそれぞれ示している．実験は比較的容易であり，有限要素解析による再現シミュレーションも行われているが，ランダムな初期不整が用いられており，分岐座屈の観点からの調査はほとんど行われておらず，その形成機構は十分に明らかではない．

しかしながら，Liu と Bertoldi の研究[(15)]では，著者らの知る限り唯一，分岐座屈の観点からリッジ形成を解析している．この論文では，Bloch 波を用いた解析を行っており，膜と基盤のヤング率比が非常に大きく，プレストレッチが大きい場合には，第一分岐として正弦波形のリンクルが発生した後，第二分岐としてリッジの発生に至る高次のリンクルモードが生じることを示している．また，第二分岐の波長はリンクルより長波長であり，リッジの発生には優先的な周期間隔があることを示している．すなわち，リッジパターンはリンクルの凸部が特定の波数間隔でリッジ化することによって周期的に生じる（Fig.1(c),(d)）．しかし，特定のプレストレッチでの解析であり，リッジパターン発生における第二分岐のプレストレッチ依存性や高次のリンクルモードの特徴は議論されていない．

2022 年 10 月 25 日受付，2022 年 11 月 16 日受理

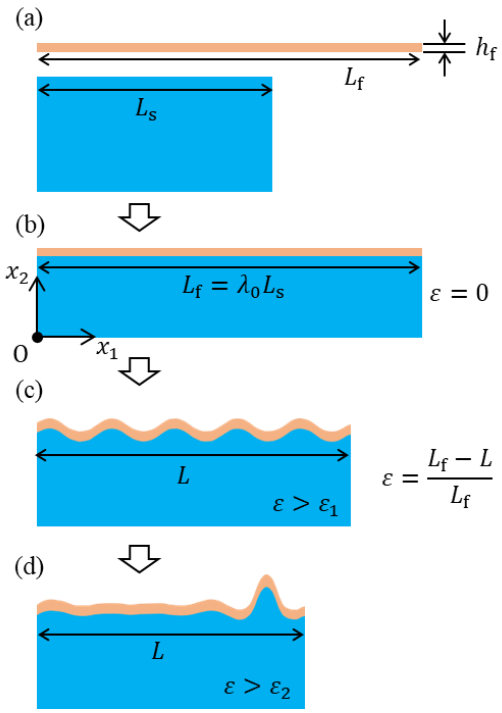


Fig. 1 Schematic illustrations of wrinkle-to-ridge pattern transformation on a film bonded to a prestretched soft substrate. (a) Stress-free state of the film and soft substrate ($L_f > L_s$), (b) Stress-free film bonded to the soft substrate pre-stretched by $\lambda_0 = L_f/L_s$ (ε is defined as the nominal compressive strain obtained by releasing λ_0), (c) Wrinkle evolution from critical strain, $\varepsilon_1 (> 0)$, for the first bifurcation, and (d) Ridge evolution from $\varepsilon_2 (> \varepsilon_1)$ for the second bifurcation on the bifurcated path.

そこで本研究では，リンクルからリッジへのパターン変態のプレストレッチ依存性と分岐座屈特性を解析する．2 章では，逐次的座屈固有値解析とその結果として得られる分岐モードを初期不整として用いた座屈後解析の方法について説明する．3 章では，有限要素モデルについて述べる．4 章では解析結果を示す．リッジの発生と関連付けられる第二分岐点は，その臨界ひずみ及び周期間隔（リンクルの波数）にプレストレッチ依存性があるだけでなく，第二分岐点は二重分岐となり波動性[16),(17)]の特徴を有することを示す．したがって，リンクルパターンの発達過程にて生じるリッジは並進対称性の観点から合理的に解釈できることを述べる．最後に 5 章では結言を述べる．

2. 解析方法

この章では，逐次的な座屈固有値解析と結果として得られる分岐モードを初期不整として用いた座屈後解析の方法について述べる．この方法[10),(11),(18)]は著者らのグループにおいて提案されており，一般的な有限要素解析ソフトを利用する場合の座屈固有値解析において，独自に設定された状態変数を負荷パラメータにできない問題や非線形性が強く未変形状態において正確な分岐点の同定ができない問題を回避することができる．さらに分岐経路上の分岐点を探索するためにも有用である．本研究では ABAQUS を用いて解析を行うため，座屈固有値解析では BUCKLE オプション[19)]を用いる．以下に解析手法の概略を述べる．座屈固有値解析では，分岐点と分岐モードを評価するため，次の有限要素方程式が解析される．

$$\{\mathbf{K}_0(\mathbf{P}) + \kappa_i \mathbf{K}_\Delta(\mathbf{P}, \mathbf{Q})\}\boldsymbol{\phi}_i = \mathbf{0} \tag{1}$$

ここで，$\mathbf{K}_0(\mathbf{P})$は基準状態での剛性マトリックスであり，$\mathbf{P}$は無負荷状態から基準状態までの間に与えられた予負荷によって生じる節点力ベクトルである．一方，$\mathbf{K}_\Delta(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$は$\mathbf{Q}$と関係づけられる摂動負荷を用いた線形摂動解析によって求められる剛性マトリックスであり，すなわち，$\mathbf{Q}$は基準状態において加えられる摂動負荷によって生じる節点力ベクトルである．したがって，$\mathbf{K}_0(\mathbf{P})$は予負荷によって生じる幾何学的及び材料非線形性の効果を含んでいる．また，κ_iと$\boldsymbol{\phi}_i$（$i = 1, 2, 3, \ldots$）は固有値と固有ベクトル（分岐モード）である．したがって，分岐点での節点力ベクトルは$\mathbf{P} + \kappa_i \mathbf{Q}$と求められる．なお，予負荷と摂動負荷は同じである必要はない．

非線形性が強い問題を解析するときには線形摂動解析による外挿区間が長くなると（すなわち，固有値が大きくなると），多くの場合において正しい分岐モードを評価することができず，分岐点の定量的な評価にも悪い影響を及ぼす．したがって，逐次的に$\mathbf{P}$を増加させながら座屈固有値解析を実行し，最小固有値κ_1が0に到達するとき（線形摂動解析の外挿区間がないものとみなせるとき）の$\mathbf{P}_c$を求めることによって幾何学的及び材料非線形性を考慮した分岐点の同定が可能となる．このとき式(1)は単純に

$$\mathbf{K}_0(\mathbf{P}_c)\boldsymbol{\phi}_i = \mathbf{0} \iff \det \mathbf{K}_0(\mathbf{P}_c) = 0 \tag{2}$$

と書くことができ，外挿区間を含まず分岐点で成立する条件となる[16),(20),(21)]．結果として，$\mathbf{Q}$は必ずしも$\mathbf{P}$と同じである必要はなく，$\mathbf{P}$が追加された状態変数によって規定される負荷パラメータの場合には，$\mathbf{P}$を疑似的に再現する負荷パラメータを用いてもよい．本研究では，プレストレッチ状態からの解放による圧縮ひずみε（Fig. 1）が負荷パラメータとなるが，摂動負荷には線膨張係数αと温度増分ΔTによって規定される熱ひずみ$\alpha\Delta T$を用いる．したがって，分岐点での節点力ベクトルは$\mathbf{P}(\varepsilon) + \Delta T_i \mathbf{Q}(\varepsilon, \alpha)$と書ける．ここで，$\Delta T_i$は固有値に対応する温度増分である．逐次的に圧縮ひずみεを増加させて（つまり，予負荷を大きくして），$\Delta T_i = 0$の状態を解析するため，最終的には$\mathbf{P}_c$を評価することができ，すなわち，分岐点での臨界ひずみε_1（第一分岐）とε_2（分岐経路上の第二分岐）を求められる．

座屈後解析は得られた最小固有値に対応する優先的な分岐モードを初期不整として導入することによって行われる．分岐点の多重性を考慮すると，初期不整は

$$\Delta\boldsymbol{\phi} = d\sum_{i=1}^{k} r_i \boldsymbol{\phi}_i \tag{3}$$

と表される（k個の分岐モードが固有値0を想定）．ここで，$\boldsymbol{\phi}_i$は最大成分を1として正規化されており，dは導入する不整

量の大きさを表し，r_iは多重分岐点での$\boldsymbol{\phi}_i$（$i = 1,2,\ldots,k$）の構成を決める係数となる．本研究では，第一分岐点からの分岐経路上にて第二分岐点とそこからの分岐経路に着目する．第一・第二分岐での分岐モードを$\boldsymbol{\phi}_i^{(1)}$と$\boldsymbol{\phi}_i^{(2)}$として区別すると，第二分岐経路を解析するための初期不整は，

$$\Delta\boldsymbol{\phi} = d\left(\sum_{i=1}^{k^{(1)}} r_i^{(1)}\boldsymbol{\phi}_i^{(1)} + \sum_{i=1}^{k^{(2)}} r_i^{(2)}\boldsymbol{\phi}_i^{(2)}\right) \tag{4}$$

となる．本研究では，分岐経路に誘導可能な小さい値として，試験解析によって$d/h_\mathrm{f} = 0.02$の値を用いることとした．

3. 有限要素モデル

Fig. 2 に有限要素モデルを示す．図示されている寸法は，圧縮ひずみ$\varepsilon = 0$での変形状態（Fig. 1(b)），すなわち，基盤にプレストレッチを加え，基盤上に無応力状態の膜が接着されているときの寸法に対応しており，実験では基盤厚さh_sが膜厚h_fに比べて十分大きいことから，本研究では$h_\mathrm{s}/h_\mathrm{f} = 150$の値を用いる．さらに，膜と基盤のヤング率$E_\mathrm{f}$と$E_\mathrm{s}$の比は文献(22)を参考にして$E_\mathrm{f}/E_\mathrm{s} = 836$とする．したがって，寸法長さは$h_\mathrm{f}$，ヤング率は$E_\mathrm{f}$で無次元化する．軟質基盤には neo-Hookean 超弾性体を仮定して非圧縮とする．一方，膜には線形弾性体を仮定して，近似的に非圧縮（ポアソン比は 0.4999999（~0.5））とする．このとき，リンクルの発生に対する理論解[22]が報告されており，プレストレッチ解放によって負荷される圧縮ひずみεの第一分岐点での臨界ひずみε_1と発生するリンクルの優先的な波長l_wは，

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{4}\left\{\frac{3E_\mathrm{s}(1+\lambda_0^2)}{2E_\mathrm{f}}\right\}^{2/3} \tag{5}$$

$$\frac{l_\mathrm{w}}{h_\mathrm{f}} = 2\pi\left\{\frac{2E_\mathrm{f}}{3E_\mathrm{s}(1+\lambda_0^2)}\right\}^{1/3} \tag{6}$$

と表され，プレストレッチλ_0の影響を含む．第二分岐によって生じるリッジは，リンクルの波長より長波長であることが知られている．したがって，有限要素モデルの長さL_fには式(6)に解析条件を代入して得られる優先的なリンクル波長の自然数倍を考える（Fig. 2）．本研究ではこの係数を波数Mと定義しており，優先的な波数を探索するためのパラメータとして考える．境界条件として，基盤の底面にはx_2方向の拘束，基盤と膜の界面には完全接着の条件を与える．一方，側面には周期境界条件を与え，x_1方向の平均的な変位を圧縮ひずみεと対応させる．

有限要素解析は ABAQUS で行う．2 章で述べたように座屈固有値解析と座屈後解析を行う．平面ひずみ条件下での二次元解析を考え，要素分割には四節点ハイブリッド低減積分要素 CPE4RH を用いる．リンクルの波形を再現するため，x_1方向にはリンクル1波長あたり20要素で等間隔に要素分割する．x_2方向には膜は等間隔に20分割，基盤は69分割されており，バイアスをつけて界面から底面に向かうにつれて要素は大きくなる．プレストレッチは MODEL CHANGE オプション[19]を用いて与え，Fig. 2 に示される寸法状態において，基盤にはプレストレッチλ_0が作用し，膜には無応力という状態は達成される[22]．圧縮ひずみεを増加させ，リンクル（第一分岐）及びリッジ（第二分岐）の発生する臨界ひずみ，ε_1とε_2をそれぞれ解析する．

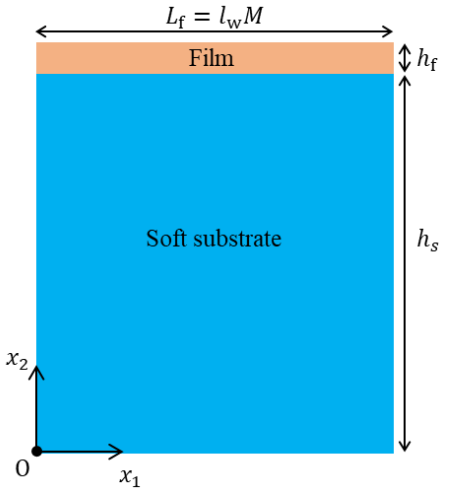


Fig. 2　Finite element model consisting of M cells of the unitcell including the dominant wavelength l_w for wrinkling ($\varepsilon = 0$).

本研究では，プレストレッチλ_0と波数Mをパラメータとして，リンクルからリッジへのパターン変態のプレストレッチ依存性と分岐座屈特性を調べる．

4. 解析結果

Fig. 3 は，第一分岐点の臨界ひずみε_1のプレストレッチ依存性を示している．マーカーは有限要素解析による計算点，破線は式(5)に基づく理論値である．理論と有限要素解析の結果はよく一致しており，2 章にて述べた解析手法は正しく機能していることがわかる．なお，第一分岐点に波数Mは影響せず，リンクル以外の長波長座屈の存在は確認されなかった．

Fig.4 は，$\lambda_0 = 1.75$における第一分岐モード$\boldsymbol{\phi}^{(1)}$と第一分岐経路上でのリンクルパターンの発達を示している．周期境界条件が与えられているため，リンクルの分岐モードは二重分岐（$k^{(1)} = 2$）として解析され，二つの位相の異なるリンクルモードの重ね合わせによって任意の位相でリンクルモードは発生することができる[10),(11)]．位相が異なるだけで等価であるため，本研究では解析された二つの分岐モードの一方を用いた．このような並進対称性に起因する二重分岐が発生する場合に波動性を有すると説明することがある[16),(17)]．この図が示すように，第一分岐点で生じるリンクルの分岐モードは，分岐経路上において圧縮ひずみが増大するにつれて，リンクル変形パターンとしてよりはっきりと確認できるようになる．この解析では，$M = 5$ の結果を示しているが，異なる値を用いてもリンクルの波数が異なるだけで等価な応答が得られる．なお，分岐モードのコンターにはx_2成分の値，変形パターンのコンターにはx_1方向の公称ひずみε_{11}（基盤に

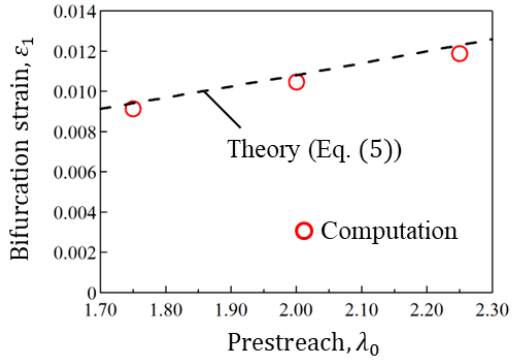


Fig. 3 Comparison of ε_1 (the first bifurcation) with theory using Eq. (5).

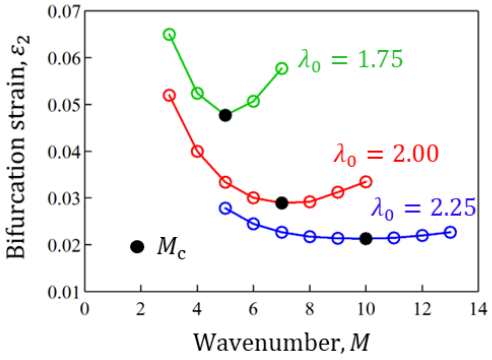


Fig. 5 Dependence of ε_2 (the second bifurcation) on λ_0 and the dominant wavenumber indicated as M_c.

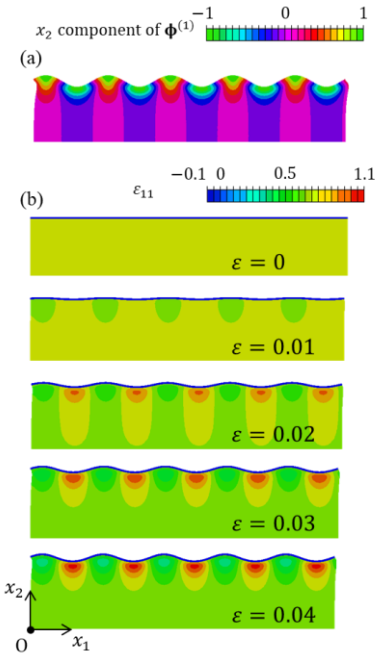


Fig. 4 Bifurcation mode at the first bifurcation and deformation pattern on the first bifurcated path for $\lambda_0 = 1.75$. (a) Wrinkle bifurcation mode $\boldsymbol{\phi}^{(1)}$ and (b) Evolution of wrinkle deformation pattern.

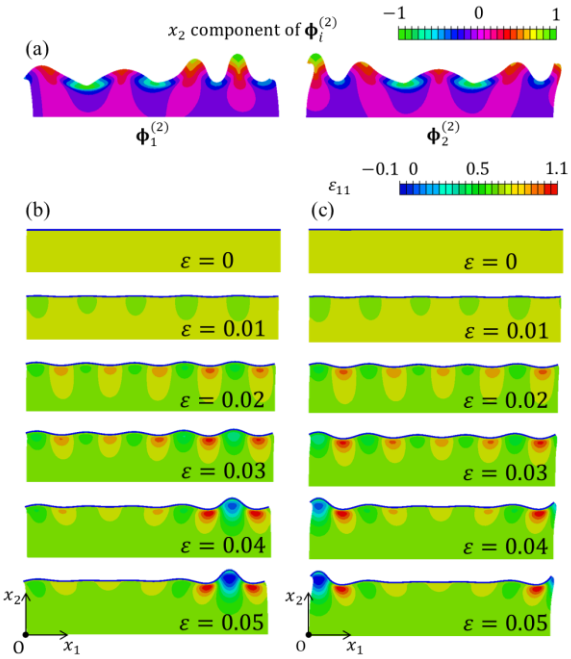


Fig. 6 Bifurcation modes at the second bifurcation and deformation pattern on the second bifurcated path for $\lambda_0 = 1.75$. (a) the second bifurcation modes $\boldsymbol{\phi}_1^{(2)}$ and $\boldsymbol{\phi}_2^{(2)}$ and evolution of ridge deformation patterns analyzed using the imperfections by (b) $\boldsymbol{\phi}^{(1)} + \boldsymbol{\phi}_1^{(2)}$ and (c) $\boldsymbol{\phi}^{(1)} + \boldsymbol{\phi}_2^{(2)}$.

はプレストレッチによって引張りひずみが作用）をそれぞれ用いた．

第一分岐経路上でリンクル変形パターンが発達する過程において第二分岐点を同定したところ，Fig. 5 に示すように第二分岐点の臨界ひずみε_2は，プレストレッチλ_0に強く依存することがわかった．図中のM_cは，ε_2が最小値をとるMであり，すなわちリッジが発生するときの優先的なリンクル波数である．λ_0が大きくなるにつれ，ε_2は小さくなり，M_cは大きくなることがわかった． $\lambda_0 = 2.00$ のとき$M_c = 7$となっており，この結果は文献(15)の結果と一致している．したがって，第二分岐の解析においても解析手法の妥当性は確認される．

第二分岐点は第一分岐点と同様にして二重分岐（$k^{(2)} = 2$）であった．Fig. 6 は，$\lambda_0 = 1.75$ における第二分岐モード$\boldsymbol{\phi}_1^{(2)}$, $\boldsymbol{\phi}_2^{(2)}$と初期不整として$\boldsymbol{\phi}^{(1)} + \boldsymbol{\phi}_1^{(2)}$及び$\boldsymbol{\phi}^{(1)} + \boldsymbol{\phi}_2^{(2)}$をそれぞれ導入したときのリッジ変形パターンの発達を示している．この図が示すように，第二分岐モードは高次のリンクルモードとみなされ，必ずしも明確に変形パターンと対応関係にないことがわかる（cf. Fig. 4）．しかしながら，どちらの分岐モードも第二分岐経路上ではx_2方向に大きくモードが現れる場所においてリンクルがリッジ化しており，リッジ変形パターンの発達を示すことがわかった．$\lambda_0 = 2.00, 2.25$ の場合の分岐モードも同様の傾向を示した（付録参照）．したがって，$\lambda_0 = 1.75$ の場合に着目して，以後，二重分岐を構成する$\boldsymbol{\phi}_1^{(2)}$と$\boldsymbol{\phi}_2^{(2)}$の間の関係について考察する．

詳細な分岐座屈特性を検討するため，はじめに，第一分岐モード$\boldsymbol{\phi}^{(1)}$と第二分岐モードの一つである$\boldsymbol{\phi}_1^{(2)}$の膜表面成分を面内（$x_1$）成分及び面外（$x_2$）成分に分解して考える．Fig. 7 は，$\lambda_0 = 1.75$の場合の二つのモードの関係を示している．グレーの実線が$\boldsymbol{\phi}^{(1)}$の成分であり，赤色の実線が$\boldsymbol{\phi}_1^{(2)}$を表し

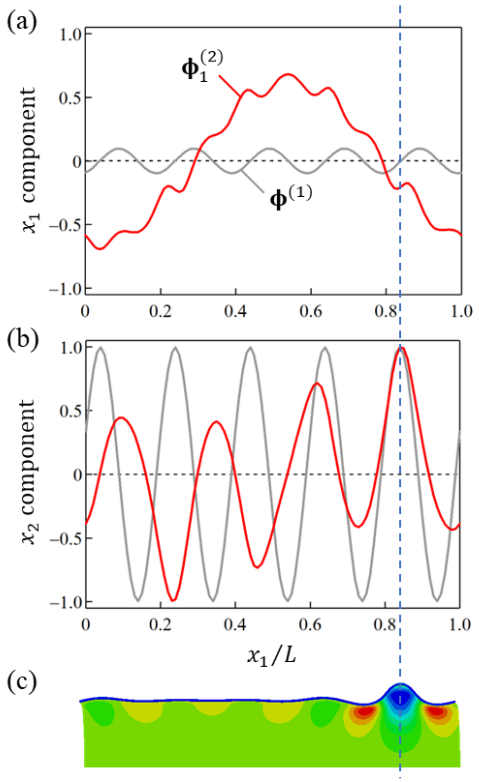


Fig. 7　Comparison of the first and second bifurcation modes, $\boldsymbol{\phi}^{(1)}$ and $\boldsymbol{\phi}_1^{(2)}$, at film surface for $\lambda_0 = 1.75$. (a) In-plane (x_1) component, (b) Out-of-plane (x_2) component, and (c) the corresponding ridge deformation pattern.

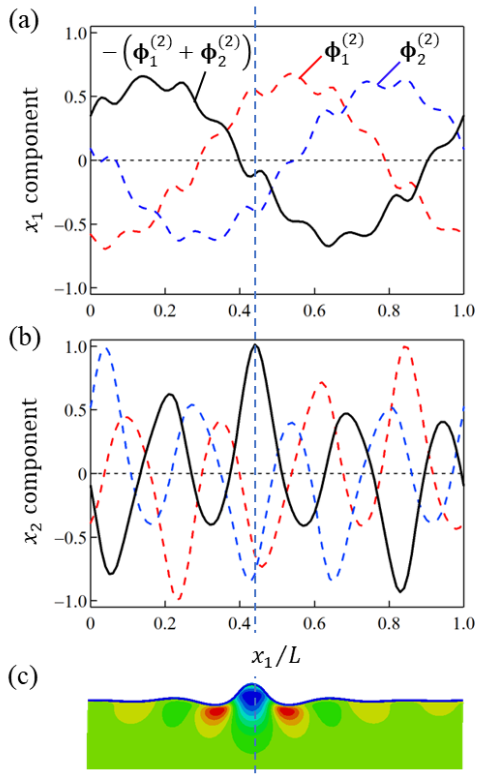


Fig. 8　The second bifurcation mode consisting of $-\boldsymbol{\phi}_1^{(2)}-\boldsymbol{\phi}_2^{(2)}$ at film surface for $\lambda_0 = 1.75$. (a) In-plane (x_1) component, (b) Out-of-plane (x_2) component, and (c) the corresponding ridge deformation pattern.

ている．横軸は圧縮ひずみεと関係づけられる全体長さL（Fig. 1）で正規化されている．この図から，$\boldsymbol{\phi}_1^{(2)}$は，一つのリンクルをリッジに変態させるために作用していることがわかる．面外成分に着目すると，リンクルの頂点と$\boldsymbol{\phi}_1^{(2)}$の最高点が一致しており整合する．さらに，面内成分についても，$\boldsymbol{\phi}_1^{(2)}$が正から負へと変化する点に対応してリッジが発生している．これは，$\boldsymbol{\phi}_1^{(2)}$がリッジ発生点にその周辺の変形を寄せ集めるように作用していると理解でき，面外及び面内の変形の組み合わせによってリッジ変態は生じることがわかった．Fig. 7 は$\lambda_0 = 1.75$かつ$\boldsymbol{\phi}_1^{(2)}$に着目しているが，ほかの場合においても同様の特徴を有することが確認できた．

第一分岐のリンクル分岐モードが波動性を有するように，第二分岐でリッジ変形パターンを引き起こす高次のリンクル分岐モードも二重分岐であり，並進対称性に起因する波動性を有していることが期待される．しかしながら，リンクル分岐モードのように分岐モードが単純ではなく，これまでに議論されてこなかった．Fig. 8 は，$\lambda_0 = 1.75$において，二つの第二分岐モード$\boldsymbol{\phi}_1^{(2)}$と$\boldsymbol{\phi}_2^{(2)}$を$-1:-1$で構成するときの特徴と初期不整としてこの合成された第二分岐モードを導入して解析されるパターン発達を示す．赤色の破線が$\boldsymbol{\phi}_1^{(2)}$，青色の破線が$\boldsymbol{\phi}_2^{(2)}$を示しており，黒色の実線が合成された$-\boldsymbol{\phi}_1^{(2)}-\boldsymbol{\phi}_2^{(2)}$の挙動を示している．面内成分には，位相ずれが明らかに表れており，面外成分についても同様に合成によって位相は変化することが確認できた．すなわち，高次のリンクル分岐モードについても波動性が現れる．したがって，二つの分岐モードの構成比（式(4)）を変更することは，位相を変化させ，リッジ化するリンクルの位置の自由度と対応する．

5. 結　　言

本研究では，リンクルからリッジへのパターン変態のプレストレッチ依存性と分岐座屈特性を解析することを目的として，逐次的座屈固有値解析および座屈後解析を行った．プレストレッチが大きくなるにつれて，第二分岐の発生する臨界ひずみは小さくなり，リッジパターンの発生間隔は大きくなることがわかった．また，第二分岐モードも第一分岐モードと同様にして波動性の特徴を有し，結果としてリッジ化するリンクルは並進対称性の観点から合理的に解釈できる．分岐座屈特性の理解は複雑なパターンの機構を解明し，制御を可能にするとともに，工学応用に繋がることが期待される．

謝　　辞

本研究の一部は JSPS 科研費 JP19H00739 と JP22K18284 の助成を受けて行われた．ここに記して謝意を表する．

付　　録

Fig. 9 に，$\lambda_0 = 2.00, 2.25$ の場合の第一分岐モード$\boldsymbol{\phi}^{(1)}$及び第二分岐モード$\boldsymbol{\phi}_1^{(2)}$，$\boldsymbol{\phi}_2^{(2)}$を示す．優先的な波数$M_c$は異なるが，どの場合においても第二分岐モードは二重分岐であり，$\lambda_0 = 1.75$ の場合と同様の特徴を有している．

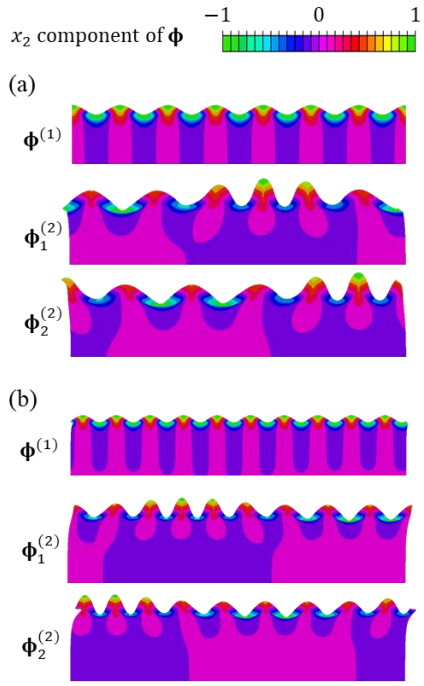


Fig. 9 The first and second bifurcation modes for (a) $\lambda_0 = 2.00$ $(M_c = 7)$ and (b) $\lambda_0 = 2.25$ $(M_c = 10)$.

参考文献

(1) M.A. Biot: Mechanics of incremental deformations: theory of elasticity and viscoelasticity of initially stressed solids and fluids, including thermodynamic foundations and applications to finite strain, (1965), Wiley.

(2) H.G. Allen: In: Analysis and design of sandwich panels, Pergamon Press, (1969), New York.

(3) A.N. Gent, I.S. Cho: Surface instabilities in compressed or bent rubber blocks, Rubber Chemistry and Technology, **72**(1999), pp. 253–262.

(4) Y. Rahmawan, M.W. Moon, K.S. Kim, K.R. Lee, K.Y. Suh: Wrinkled, dual-Scale structure of diamond-Like carbon (DLC) for superhydrophobicity, Langmuir, **26**(2010), pp. 484–491.

(5) Y. Wang, Z. Li, J. Xiao: Stretchable thin film materials: fabrication, application, and mechanics, Journal of Electronic Packaging, **138**(2016), No. 020801.

(6) H.S. Kim, A.J. Crosby: Solvent-responsive surface via wrinkling instability, Advanced Materials, **23**(2011), pp. 4188–4192.

(7) S. Nagashima, H. Ebrahimi, K.R. Lee, A. Vaziri, M.W. Moon: Tunable nanochannels fabricated by mechanical wrinkling/folding of a stiff skin on a soft polymer, Advanced Matter Interfaces, **2**(2015), No. 1400493.

(8) M.A. Ali, W. Hong, S. Oren, Q. Wang, Y. Wang, H. Jiang, L. Dong: Tunable bioelectrodes with wrinkled-ridged graphene oxide surfaces for electrochemical nitrate sensors, RSC Advances, **6**(2016), pp. 67184–67195.

(9) S. Nagashima, S.M. Yoon, D.H. Kim, A. Nakatani, M.W. Moon: Wrinkle-assisted capillary bridging for the directed assembly of single-level DNA nanowire arrays, Advanced Materials Interfaces, **9**(2022), No. 2102243.

(10) S. Kikuchi, S. Matsubara, S. Nagashima, D. Okumura: Diversity of the bifurcations and deformations on films bonded to soft substrates: robustness of the herringbone pattern and its cognate patterns, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, **159**(2022), No. 104757.

(11) H. Miyoshi, S. Matsubara, D. Okumura: Bifurcation and deformation during the evolution of periodic patterns on a gel film bonded to a soft substrate, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, **148**(2021), No. 104272.

(12) L. Jin, A. Takei, J.W. Hutchinson: Mechanics of wrinkle/ridge transitions in thin film/substrate systems, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, **81**(2015), pp. 22–40.

(13) C. Cao, H.F. Chan, J. Zang, K.W. Leong, X. Zhao: Harnessing localized ridges for high-aspect-ratio hierarchical patterns with dynamic tunability and multifunctionality, Advanced Materials, **26**(2014), pp.1763–1770.

(14) A. Takei, L. Jin, J.W. Hutchinson, H. Fujita: Ridge localizations and networks in thin films compressed by the incremental release of a large equi-biaxial pre-stretch in the substrate, Advanced Materials, **26**(2014), pp.4061–4067.

(15) J. Liu, K. Bertoldi: Bloch wave approach for the analysis of sequential bifurcations in bilayer structures, Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, **471**(2015), No.20150493.

(16) D. Okumura, N. Ohno, H. Noguchi: Elastoplastic microscopic bifurcation and post-bifurcation behavior of periodic of periodic cellular solids, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, **52**(2004), pp. 641–666.

(17) D. Okumura, A. Okada, N. Ohno: Buckling behavior of Kelvin open-cell foams under [0 0 1], [0 1 1] and [1 1 1] compressive loads, International Journal of Solids and Structure, **45**(2008), pp. 3807–3820.

(18) D. Okumura, J. Sugiura, H. Tanaka, Y. Shibutani: Buckling and postbuckling of etching-induced wiggling in a bilayer structure with intrinsic compressive stress, International Journal of Mechanical Sciences, **141**(2018), pp. 78–88.

(19) Dassault Systems SIMULA Corporation: Abaqus 6.14 user documentation, (2014).

(20) R. Hill: A general theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, **6**(1958), pp. 236–249.

(21) N. Ohno, D. Okumura, H. Noguchi: Microscopic symmetric bifurcation condition of cellular solids based on a homogenization theory of finite deforestation, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, **50**(2002), pp. 1125–1153.

(22) Y. Cao, J.W. Hutchinson: Wrinkling phenomena in neo-hookean film/substrate bilayers, Journal of Applied Mechanics, **79**(2012), No. 031019.

計算数理工学論文集 Vol. 22 (2022 年 12 月)，論文 No. 14-221216 JASCOME

流体潤滑問題を対象とした レベルセット法に基づくトポロジー最適化

LEVEL SET-BASED TOPOLOGY OPTIMIZATION FOR HYDRODYNAMIC LUBRICATION PROBLEMS

野口 悠暉 [1)]，松島 慶 [2)]，山田 崇恭 [3)]

Yuki NOGUCHI, Kei MATSUSHIMA and Takayuki YAMADA

1) 東京大学大学院工学系研究科 (〒 113-8656 東京都文京区弥生 2-11-16, E-mail: noguchi@mech.t.u-tokyo.ac.jp)
2) 東京大学大学院工学系研究科 (〒 113-8656 東京都文京区弥生 2-11-16, E-mail: matsushima@mech.t.u-tokyo.ac.jp)
3) 東京大学大学院工学系研究科 (〒 113-8656 東京都文京区弥生 2-11-16, E-mail: t.yamada@mech.t.u-tokyo.ac.jp)

This paper proposes a level set-based topology optimization method for hydrodynamic lubrication problems. In particular, we focus on the optimal design of textures that improves fluid lubrication performance in slide bearings or mechanical seals. First, we explain the fluid lubrication problem based on the Reynolds equation. Next, an optimization problem for topology optimization is formulated, in which the load-carrying capacity is set as an objective function and the structural design of the texture is set as a design variable. Then, we introduce a level set-based topology optimization method based on the reaction-diffusion equation. The design sensitivity is derived based on the concept of the topological derivative. After explaining some notes about numerical implementation, we show numerical examples to show the validity of our method.

Key Words: Hydrodynamic lubrication, Topology optimization, Level set method, Topological derivative

1. 緒言

相対運動を示す二面の間に水や潤滑油といった流体を介在させて摩擦を軽減する流体潤滑は，自動車や工作機械等の様々な機械製品に欠かせないすべり軸受や，超精密加工機に用いられるすべり案内の動作原理として知られている [(1)]．特に，相対速度によって潤滑膜内に圧力を発生させる流体動圧軸受は，転がり軸受と比べて高精度の運動が実現できるため，高回転数かつ高精度の動作が求められるハードディスク等の精密機器への応用が見られる．

流体動圧軸受では，摩擦特性の向上のために摩擦表面にディンプルや溝形状のようなテクスチャ構造が導入されることが多い．このようなテクスチャ構造は潤滑膜内の圧力分布に影響を及ぼし，テクスチャ構造の導入によって摩擦係数が低減されることや [(2)] 耐荷重能が向上することが報告されている [(3)]．この他にも，流体潤滑状態にあるテクスチャ構造は，流体機械において作動流体の漏出を防ぐメカニカルシールや，研磨加工においてスラリーを保持する役割を持つ研磨パッドにも施されており，所望のトライボロジー特性を実現するためにテクスチャ構造を設計する取り組みが盛んに行われている．

従来，このような機械要素のテクスチャ構造には，スパイラル溝やヘリングボーン溝といった単純な幾何学的形状に基づくものが用いられてきた．他方，近年では，構造物の最適な形状を数理的最適化手法に基づき同定する，構造最適化法を用いたテクスチャ構造の設計例も報告されている．構造最適化法は寸法最適化，形状最適化，トポロジー最適化に分類されるが，流体潤滑問題におけるテクスチャ構造の最適設計においては，主に寸法最適化や形状最適化の研究例が報告されている．例えば，Shen and Khonsari[(4)] は，テクスチャの形状を複数の直線を用いて表現し，耐荷重能の向上を目的に逐次二次計画法を用いて直線間の寸法を設計変数とした最適化を行っている．Zhirong et al. [(5)] は，レベルセット法に基づく形状最適化を行い，すべり軸受の耐荷重能の向上を目的にテクスチャ構造の最適化を行なっている．しかし，これらの研究例はあくまで寸法最適化・形状最適化に基づいている

2022 年 10 月 27 日受付，2022 年 11 月 10 日受理

ため，最適化計算の過程におけるテクスチャ構造設計案の抜本的な変更が許容されないという問題がある．

この問題を解決するためには，構造最適化法の中でも最も設計自由度が高く，最適化過程において構造物に孔を導入する等の形態の変化をも許容する，トポロジー最適化法の導入が有効であると考えられる．これまでに流体潤滑問題を対象にトポロジー最適化法を導入した例は，僅かではあるものの報告されている．例えば，Wasseem et al. [6, 7] は，微小なテクスチャ構造が持つ所望の巨視的な特性を実現するために，均質化法による評価と密度法に基づくトポロジー最適化法を組み合わせたテクスチャ構造の最適設計法を提案している．Meng et al. [8] は，フェーズフィールド法の概念に基づくトポロジー最適化を行い，高い耐荷重能を示しつつ，潤滑膜の漏出を防ぐメカニカルシールの最適設計を行なっている．しかし，これらの例ではテクスチャ構造の厚みが連続的な分布を取ることが許容されており，テクスチャと非テクスチャ部の中間の厚みを持つ，いわゆるグレースケールを含んだ設計案が創出される可能性がある．このようなテクスチャ構造は，製造性の観点から望ましくないため，Meng et al. [8] の例では，始めにグレースケールを許容するような最適化計算を行った後に，グレースケールを除去する 2 段階の最適化手順が導入されている．しかし，この方法は数値実装が煩雑となる上に，最適解を得るまでの計算時間が多大となるという課題を抱えている．

そこで本研究では，流体潤滑問題を対象としたレベルセット法に基づくトポロジー最適化法を構築する．本研究では，Yamada et al. [9] が提案したレベルセット法に基づくトポロジー最適化法を導入する．この手法では，レベルセット関数と呼ばれる関数の等値面を用いて構造物の輪郭を明確に表現するため，前述のグレースケールの問題が存在しない．流体潤滑問題を対象にレベルセット法に基づくトポロジー最適化法を展開することで，所定の厚みを有するテクスチャ構造の最適構造設計案を効率的に創出できる．

本論文の次章以降の内容は，以下の通りである．まず，2 章では，本研究で対象とする流体潤滑問題をレイノルズ方程式に基づき定式化する．3 章では，テクスチャ構造を対象とした最適化問題を設定する．4 章では，レベルセット法に基づくトポロジー最適化法 [9] の概要を述べ，5 章では，最適化に必要な設計指針となる設計感度をトポロジー導関数の概念に基づき導出する．6 章では，レイノルズ方程式の数値解法及び最適化計算の数値実装に関する事柄を述べ，7 章では，数値解析例を示す．ここでは，本研究で導出したトポロジー導関数の妥当性を検証した上で，テクスチャの示す耐荷重能を最大化するようなテクスチャ構造の最適設計を行う．最後に，8 章では本研究の結言を述べる．

2. 流体潤滑問題の定式化

図 1 は，本論文で対象とする流体潤滑問題のジオメトリ及び境界条件の設定を表す．すべり速度 $\boldsymbol{U}$ で移動する平板と，面内に周期的な形状を持つテクスチャが施された構造が相対

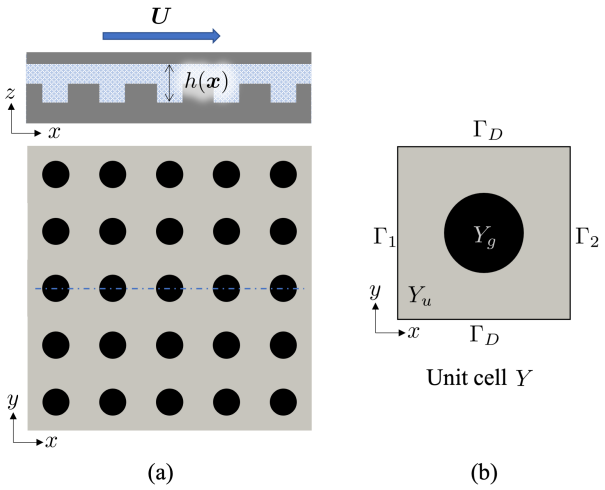


Fig. 1 Geometry setting and boundary conditions. (a) Cross sectional views in the $x-z$ and $x-y$ planes. (b) Unit cell Y. Black color represents textured region, whereas gray color represents non-textured region.

しており，その間を液体の潤滑膜が占めるような流体潤滑問題を考える．このような状況は，流体軸受やメカニカルシールの摩擦面の近傍で見られ，テクスチャ構造に依存した流体の圧力分布が，摩耗特性等に大きな影響を与えることが知られている．図 1(a) は，対象とする系の断面図を示す．下部は $x-y$ 面における断面図を示し，上部は一点鎖線が示す区間における $x-z$ 面における断面を示す．$h(\boldsymbol{x})$ は潤滑膜の膜厚を示し，テクスチャ構造に対応して空間分布を示す．

ここで，膜厚が十分に小さく，潤滑膜が非圧縮性ニュートン流体とみなせる上に，2 つの面の間の流れが層流である場合，流体の挙動は，図 1(a) 下部に示す $x-y$ 面内で成り立つレイノルズ方程式によってモデリングできる．さらに，テクスチャが面内に無限に配列されており，すべり速度 $\boldsymbol{U}$ が $+x$ 方向を向いているという状況を仮定すると，(b) に示すユニットセル Y を対象とした流体解析が可能となる．以下では，ユニットセル Y に着目した境界値問題の定式化を行う．

ユニットセル Y には，テクスチャ領域 Y_g とテクスチャが施されていない非テクスチャ領域 Y_u が存在する．これらの領域に対応し，膜厚 h は以下のように表される．

$$h = \begin{cases} h_m, & \text{in } Y_u \\ h_m + h_t & \text{in } Y_g, \end{cases}$$

ただし，h_m は潤滑膜の最小膜厚を，h_t は，テクスチャの厚みを表す．このような膜厚の設定の下，ユニットセル Y 内では，前述の通り以下に示すレイノルズ方程式が成り立つ．

$$-\nabla\cdot(h^3\nabla(p-p_{\mathrm{cav}})) + 6\mu\boldsymbol{U}\cdot\nabla(\alpha h) = 0 \quad \text{in } Y, \tag{1}$$

ただし，p は圧力，μ は粘性係数を表す．p_{cav} はキャビテーション圧力を表し，圧力 p が p_{cav} 以下になると液体中に気泡（キャビティ）が発生する．また，α は，潤滑膜中の液体の占める割合を表す．キャビテーションが生じた領域では圧力 p は p_{cav} に等しく，α は $0<\alpha<1$ の範囲の値をとる．

一方，それ以外の領域では潤滑膜を液体が全て占めることから，$\alpha = 1$，$p > p_{\mathrm{cav}}$ となる [10]．α と p の持つこれらの特徴により，以下の関係式が成り立たなければならない．

$$(p - p_{\mathrm{cav}})(1 - \alpha) = 0 \quad \text{in } Y. \tag{2}$$

ここで，後述の定式化のために，式 (1) を無次元化する．このために，以下の無次元量を導入する．

$$\overline{x} = \frac{\boldsymbol{x}}{l}, \quad \overline{h} = \frac{h}{h_m}, \quad \overline{p} = \frac{p - p_{\mathrm{cav}}}{p_a}, \quad \boldsymbol{\gamma} = \frac{6\mu l}{h_m^2 p_a}\boldsymbol{U} \tag{3}$$

ただし，l はユニットセル寸法を，p_a は大気圧を表す．これらを用いて式 (1) を無次元化すると，次のように表される．

$$-\overline{\nabla} \cdot (\overline{h}^3 \overline{\nabla} \overline{p}) + \boldsymbol{\gamma} \cdot \overline{\nabla}(\alpha \overline{h}) = 0, \tag{4}$$

ただし，$\overline{\nabla}$ は無次元化座標 $\overline{\boldsymbol{x}}$ における勾配を表す．同様に，無次元圧力 $\overline{p}$ を用いると，式 (2) は以下のように表される．

$$\overline{p}(1 - \alpha) = 0. \tag{5}$$

次にユニットセル Y における境界条件を説明する．$+\overline{x}$ 方向のすべり速度を考慮し，図 1(b) に示す境界 $\Gamma_{1,2}$ に周期境界条件を適用する．また，$\overline{y}$ 方向に隣接するユニットセルにおけるテクスチャ間の相互作用を無視できるものとし，境界 Γ_D における圧力 p を大気圧 p_a とする．すなわち，無次元圧力 $\overline{p}$ に関して，$\overline{p} = 1$ のディリクレ条件を課す．

以上より，図 1(b) の系に対する境界値問題は，次のように表される．

$$\begin{aligned} -\overline{\nabla} \cdot (\overline{h}^3 \overline{\nabla} \overline{p}) + \boldsymbol{\gamma} \cdot \overline{\nabla}(\alpha \overline{h}) &= 0 \quad \text{in } Y, \\ \overline{p}(1 - \alpha) &= 0 \quad \text{in } Y, \\ \overline{p} &= 1 \quad \text{on } \Gamma_D \\ \overline{p}|_{\Gamma_1} &= \overline{p}|_{\Gamma_2}. \end{aligned} \tag{6}$$

なお，以上の境界値問題の設定は先行研究 [5] の設定に基づいており，テクスチャ構造を対象とした最適設計問題のベンチマーク的問題として知られている．次章以降ではこのような問題を対象にトポロジー最適化法を展開し，提案手法の妥当性を検証する．

3. 最適化問題の定式化

ここでは，本論文で対象とするトポロジー最適化問題の定式化を行う．図 1 に示した系におけるテクスチャの持つ機能として，耐荷重能 (Load-carrying capacity, LCC) が挙げられる．これは，潤滑膜が支えうる荷重の大きさに相当し，圧力 $\overline{p}$ の摩擦面での積分 $\int_Y \overline{p} d\Omega$ で表される．LCC を向上することによって，摩擦面における摩耗や熱の発生を抑えることができることが知られている．そこで本論文では，テクスチャ構造を最適化することによって，LCC を最大化する以下の最適化問題を考える．

$$\begin{aligned} \min_{Y_g} \quad & J = -\int_Y \overline{p} d\Omega \\ \text{subject to} \quad & \text{Governing equations and} \\ & \text{boundary conditions in Eq. (6).} \end{aligned} \tag{7}$$

4. レベルセット法に基づくトポロジー最適化法

式 (7) の最適化問題を解くために，本研究ではレベルセット法に基づくトポロジー最適化法 [9] を導入する．この方法では，レベルセット関数 ϕ と呼ばれるスカラー値を示す関数を導入することによって，設計対象となる構造を表現する．まず，ϕ を用いて，以下のようにテクスチャ領域 Y_g と非テクスチャ領域 Y_u を表現する．

$$\begin{cases} 0 < \phi(\boldsymbol{x}) \leq 1 & \text{if } \forall \boldsymbol{x} \in Y_u \\ \phi(\boldsymbol{x}) = 0 & \text{if } \forall \boldsymbol{x} \in \Gamma_{ug} \\ -1 \leq \phi(\boldsymbol{x}) < 0 & \text{if } \forall \boldsymbol{x} \in Y_g, \end{cases} \tag{8}$$

すなわち，レベルセット関数は Y_u で正，Y_g で負の値を示し，テクスチャ領域と非テクスチャ領域の界面 Γ_{ug} 上で 0 を示す．ここで，構造の有無を表す特性関数 χ_ϕ を ϕ に基づき以下のように定義する．

$$\chi_\phi = \begin{cases} 1 & \phi \geq 0 \\ 0 & \phi < 0. \end{cases} \tag{9}$$

この特性関数を用いれば，テクスチャ構造を考慮した膜厚 $\overline{h}$ の分布は，以下のように表現することができる．

$$\overline{h} = \overline{h}_u \chi_\phi + \overline{h}_g (1 - \chi_\phi), \tag{10}$$

ただし，$\overline{h}_u = h_m/h_m = 1$ は非テクスチャ領域の膜厚を，$\overline{h}_g = (h_m + h_t)/h_m$ はテクスチャ領域における膜厚を表す．このようなテクスチャ構造の表現を用いて目的関数 J を最小化する構造を求める方法として，[9] では最適化問題をレベルセット関数 ϕ の仮想的な時間発展問題に置き換える方法が提案されている．具体的には，以下の反応拡散方程式に基づき ϕ を更新することで，最適化問題を解く．

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -K(J' - \tau_\phi \overline{\nabla}^2 \phi), \tag{11}$$

ただし，t は仮想的な時間，$K > 0$ は比例定数，J' は後述する設計感度，$\tau_\phi > 0$ は正則化係数を表す．式 (11) を解くことで最適な ϕ の分布，すなわち最適なテクスチャ構造が得られる．

5. 感度解析

式 (11) に基づき最適化問題を解くには，設計指針となる設計感度 J' が必要となる．ここでは，トポロジー導関数の概念に基づき設計感度の導出を行う．トポロジー導関数とは一般に，構造物に微小な空洞，もしくは介在物が導入された際の目的関数の変化率を表す．式 (7) の最適化問題については，目的関数 J に対して，非テクスチャ領域内に微小なテクスチャ領域が導入された場合のトポロジー導関数 $D_T J^{u \to g}$ と，テクスチャ領域内に微小な非テクスチャ領域が導入された場合のトポロジー導関数 $D_T J^{g \to u}$ の 2 種類が存在する．これらを組み合わせて設計感度 J' を定義することができる．

以下では，$D_T J^{u \to g}$ について詳細を示す．導入するテクスチャ領域が半径 ε，中心座標 $\overline{\boldsymbol{x_0}}$ の円形領域 Ω_ε であるとする

と，トポロジー導関数 $D_T J^{u\to g}$ は以下のように定義される．

$$D_T J^{u\to g} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{J_\varepsilon - J_0}{\pi\varepsilon^2}, \tag{12}$$

ただし，J_ε は微小なテクスチャ領域 Ω_ε を導入した後の目的関数を，J_0 は導入する前の目的関数を表す．

ここで，円形テクスチャ領域 Ω_ε が導入される前の目的関数 J_0 及び膜厚 $\overline{h}_0$ は以下のように表される．

$$\begin{aligned} J_0 &= -\int_Y \overline{p}_0 d\Omega, \\ \overline{h}_0 &= \overline{h}_u \chi_{Y_u} + \overline{h}_g \chi_{Y_g} \end{aligned} \tag{13}$$

ただし，χ_A は領域 A で 1，それ以外で 0 の値を示す特性関数を表す．$\overline{p}_0$ は Ω_ε 導入前の圧力を表し，式 (6) の境界値問題に対応する弱形式を満たす．

$$a_p^0(\overline{p}_0, \tilde{p}) + a_\alpha^0(\alpha_0, \tilde{p}) = 0 \quad \forall \tilde{p} \in V(Y), \tag{14}$$

$$\int_Y \overline{p}_0 (1-\alpha_0)\tilde{q} d\Omega = 0 \quad \forall \tilde{q} \in W(Y), \tag{15}$$

ただし，α_0 は Ω_ε 導入前の α を表す．$\tilde{p} \in V(Y)$ 及び $\tilde{q} \in W(Y)$ はそれぞれテスト関数を表し，$V(Y)$ は Γ_D におけるディリクレ条件 $\tilde{p} = 0$ 及び $\Gamma_{1,2}$ における周期境界条件が成り立つソボレフ空間を，$W(Y)$ は同様の境界値条件が成り立つ L^2 空間を表す．また，式 (14) の各項は次のように表される．

$$\begin{aligned} a_p^0(\overline{p}, \tilde{p}) &= \int_Y \overline{h}_0^3 \overline{\nabla}\overline{p} \cdot \overline{\nabla}\tilde{p} d\Omega, \\ a_\alpha^0(\alpha, \tilde{p}) &= -\int_Y \alpha \overline{h}_0 \boldsymbol{\gamma} \cdot \overline{\nabla}\tilde{p} d\Omega. \end{aligned} \tag{16}$$

一方，Ω_ε を領域 Y_u に導入した後の目的関数 J_ε 及び膜厚 $\overline{h}_\varepsilon$ は以下のように表される．

$$\begin{aligned} J_\varepsilon &= -\int_Y \overline{p}_\varepsilon d\Omega, \\ \overline{h}_\varepsilon &= \overline{h}_u \chi_{(Y_u \setminus \overline{\Omega_\varepsilon})} + \overline{h}_g \chi_{(Y_g \cup \Omega_\varepsilon)} \end{aligned} \tag{17}$$

ただし，$\overline{p}_\varepsilon$ は Ω_ε 導入後の圧力を表し，以下の弱形式を満たす．

$$a_p^\varepsilon(\overline{p}_\varepsilon, \tilde{p}) + a_\alpha^\varepsilon(\alpha_\varepsilon, \tilde{p}) = 0 \quad \forall \tilde{p} \in V(Y), \tag{18}$$

$$\int_Y \overline{p}_\varepsilon (1-\alpha_\varepsilon)\tilde{q} d\Omega = 0 \quad \forall \tilde{q} \in W(Y), \tag{19}$$

なお，式 (18) の各項は以下のように表される．

$$\begin{aligned} a_p^\varepsilon(\overline{p}, \tilde{p}) &= \int_Y \overline{h}_\varepsilon^3 \overline{\nabla}\overline{p} \cdot \overline{\nabla}\tilde{p} d\Omega, \\ a_\alpha^\varepsilon(\alpha, \tilde{p}) &= -\int_Y \alpha \overline{h}_\varepsilon \boldsymbol{\gamma} \cdot \overline{\nabla}\tilde{p} d\Omega. \end{aligned} \tag{20}$$

次に，式 (30) の極限を評価するために，目的関数の差 $(J_\varepsilon - J_0)$ を評価すると，

$$\begin{aligned} J_\varepsilon - J_0 &= -\int_Y (\overline{p}_\varepsilon - \overline{p}_0) d\Omega \\ &= -\int_Y (\overline{p}_\varepsilon - \overline{p}_0) d\Omega \\ &\quad + \{a_p^\varepsilon(\overline{p}_\varepsilon, \lambda_p^\varepsilon) + a_\alpha^\varepsilon(\alpha_\varepsilon, \lambda_p^\varepsilon)\} + \int_Y \overline{p}_\varepsilon (1-\alpha_\varepsilon)\lambda_\alpha^\varepsilon d\Omega \\ &\quad - \{a_p^0(\overline{p}_0, \lambda_p^\varepsilon) + a_\alpha^0(\alpha_0, \lambda_p^\varepsilon)\} - \int_Y \overline{p}_0 (1-\alpha_0)\lambda_\alpha^\varepsilon d\Omega \\ &= -\int_Y (\overline{p}_\varepsilon - \overline{p}_0) d\Omega \\ &\quad + a_p^\varepsilon(\overline{p}_\varepsilon - \overline{p}_0, \lambda_p^\varepsilon) + (a_p^\varepsilon - a_p^0)(\overline{p}_0, \lambda_p^\varepsilon) \\ &\quad + a_\alpha^\varepsilon(\alpha_\varepsilon - \alpha_0, \lambda_p^\varepsilon) + (a_\alpha^\varepsilon - a_\alpha^0)(\alpha_0, \lambda_p^\varepsilon) \\ &\quad + \int_Y (\overline{p}_\varepsilon - \overline{p}_0)(1-\alpha_0)\lambda_\alpha^\varepsilon d\Omega - \int_Y \overline{p}_0 (\alpha_\varepsilon - \alpha_0)\lambda_\alpha^\varepsilon d\Omega \\ &\quad - \int_Y (\overline{p}_\varepsilon - \overline{p}_0)(\alpha_\varepsilon - \alpha_0)\lambda_\alpha^\varepsilon d\Omega \end{aligned} \tag{21}$$

と表される．ここで，$(\lambda_p^\varepsilon, \lambda_\alpha^\varepsilon)$ について，以下の随伴方程式が成り立つと仮定する．

$$a_p^\varepsilon(\eta, \lambda_p^\varepsilon) + \int_Y \eta(1-\alpha_0)\lambda_\alpha^\varepsilon d\Omega = \int_Y \eta d\Omega \quad \forall \eta \in V(Y), \tag{22}$$

$$a_\alpha^\varepsilon(\xi, \lambda_p^\varepsilon) - \int_Y \overline{p}_0 \xi \lambda_\alpha^\varepsilon d\Omega = 0 \quad \forall \xi \in W(Y). \tag{23}$$

このような $(\lambda_p^\varepsilon, \lambda_\alpha^\varepsilon)$ を用いた上で 2 次の摂動項に相当する式 (21) の最後の項を無視すれば，

$$J_\varepsilon - J_0 \approx (a_p^\varepsilon - a_p^0)(\overline{p}_0, \lambda_p^\varepsilon) + (a_\alpha^\varepsilon - a_\alpha^0)(\alpha_0, \lambda_p^\varepsilon) \tag{24}$$

と評価できる．各項の具体的な表式は，膜厚 $\overline{h}_0$ 及び $\overline{h}_\varepsilon$ の定義より，

$$\begin{aligned} (a_p^\varepsilon - a_p^0)(\overline{p}_0, \lambda_p^\varepsilon) &= \int_Y \overline{h}_\varepsilon^3 \overline{\nabla}\overline{p}_0 \cdot \overline{\nabla}\lambda_p^\varepsilon d\Omega - \int_Y \overline{h}_0^3 \overline{\nabla}\overline{p}_0 \cdot \overline{\nabla}\lambda_p^\varepsilon d\Omega \\ &= (\overline{h}_g^3 - \overline{h}_u^3) \int_{\Omega_\varepsilon} \overline{\nabla}\overline{p}_0 \cdot \overline{\nabla}\lambda_p^\varepsilon d\Omega, \end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned} (a_\alpha^\varepsilon - a_\alpha^0)(\alpha_0, \lambda_p^\varepsilon) &= -\int_Y \alpha_0 \overline{h}_\varepsilon \boldsymbol{\gamma} \cdot \overline{\nabla}\lambda_p^\varepsilon d\Omega + \int_Y \alpha_0 \overline{h}_0 \boldsymbol{\gamma} \cdot \overline{\nabla}\lambda_p^\varepsilon d\Omega \\ &= -(\overline{h}_g - \overline{h}_u) \int_{\Omega_\varepsilon} \alpha_0 \boldsymbol{\gamma} \cdot \overline{\nabla}\lambda_p^\varepsilon d\Omega \end{aligned} \tag{26}$$

となる．

トポロジー導関数を評価するには，$\varepsilon \to 0$ の極限を評価する必要があるため，式 (25), (26) をさらに展開する．まず，Ω_ε 導入前の場である $\overline{p}_0$ と α_0 は，領域 Ω_ε の中心座標 $\boldsymbol{x_0}$ 近傍で滑らかな分布を持つため，テーラー展開を用いて式 (25), (26) 中の領域 Ω_ε における積分量を評価できる．一方 λ_p^ε については，Ω_ε 導入前の随伴場 λ_p^0 との差 $(\lambda_p^\varepsilon - \lambda_p^0)$ が，$\varepsilon \to 0$ の極限においてどのような漸近的挙動を示すかを評価する必要がある．λ_p^ε の $\lambda_\alpha^\varepsilon$ との連成による影響が小さいと仮定し，式 (22) の主要項に着目すると，$\varepsilon \to 0$ の極限において，領域 Ω_ε 内で以下に示す漸近的評価ができる．

$$\overline{\nabla}(\lambda_p^\varepsilon - \lambda_p^0)\big|_{\Omega_\varepsilon} \to -\frac{\overline{h}_g^3 - \overline{h}_u^3}{\overline{h}_g^3 + \overline{h}_u^3} \overline{\nabla}\lambda_p^0(\boldsymbol{x_0}), \tag{27}$$

ここで，λ_p^0 は Ω_ε 導入前の随伴場を表し，以下の弱形式を満たす．

$$a_p^0(\eta,\lambda_p^0)+\int_Y \eta(1-\alpha_0)\lambda_\alpha^0 d\Omega=\int_Y \eta d\Omega \quad \forall\eta\in V(Y), \tag{28}$$

$$a_\alpha^0(\xi,\lambda_p^0)-\int_Y \overline{p}_0\xi\lambda_\alpha^0 d\Omega=0 \quad \forall\xi\in W(Y), \tag{29}$$

ただし，λ_α^0 は λ_p^0 と同様に Ω_ε 導入前の随伴場を表す．

よって，式 (27) を用いれば，式 (25), (26) は $\varepsilon\to 0$ の極限において以下のように評価できる．

$$(a_p^\varepsilon-a_p^0)(\overline{p}_0,\lambda_p^\varepsilon)\to\pi\varepsilon^2\frac{2\overline{h}_u^3(\overline{h}_g^3-\overline{h}_u^3)}{\overline{h}_g^3+\overline{h}_u^3}\overline{\nabla}\overline{p}_0(\boldsymbol{x_0})\cdot\overline{\nabla}\lambda_p^0(\boldsymbol{x_0}),$$

$$(a_\alpha^\varepsilon-a_\alpha^0)(\alpha_0,\lambda_p^\varepsilon)\to-\pi\varepsilon^2\frac{2\overline{h}_u^3(\overline{h}_g-\overline{h}_u)}{\overline{h}_g^3+\overline{h}_u^3}\alpha_0(\boldsymbol{x_0})\boldsymbol{\gamma}\cdot\overline{\nabla}\lambda_p^0(\boldsymbol{x_0}).$$

以上より，式 (7) の目的関数 J に対するトポロジー導関数は，

$$\begin{aligned}D_TJ^{u\to g}=&\frac{2\overline{h}_u^3(\overline{h}_g^3-\overline{h}_u^3)}{\overline{h}_g^3+\overline{h}_u^3}\overline{\nabla}\overline{p}_0(\boldsymbol{x_0})\cdot\overline{\nabla}\lambda_p^0(\boldsymbol{x_0})\\&-\frac{2\overline{h}_u^3(\overline{h}_g-\overline{h}_u)}{\overline{h}_g^3+\overline{h}_u^3}\alpha_0(\boldsymbol{x_0})\boldsymbol{\gamma}\cdot\overline{\nabla}\lambda_p^0(\boldsymbol{x_0})\end{aligned} \tag{30}$$

と表せる．

ここでは，非テクスチャ領域中に微小なテクスチャ領域が導入された際のトポロジー導関数 $D_TJ^{u\to g}$ を導出したが，同様の手順によって，テクスチャ領域中に非テクスチャ領域が導入された際のトポロジー導関数 $D_TJ^{g\to u}$ も導出できる．$D_TJ^{g\to u}$ は，式 (30) 中の膜厚 $\overline{h}_u$ と $\overline{h}_g$ を入れ替えた表式となる．また，前述の導出過程では，点 $\overline{\boldsymbol{x_0}}$ に微小領域 Ω_ε が導入された状況を考えたが，ユニットセル Y 内の任意の点 $\overline{\boldsymbol{x}}\in Y$ に Ω_ε を導入することを考えると，点 $\overline{\boldsymbol{x}}\in Y$ におけるトポロジー導関数を評価できる．

式 (11) の反応拡散方程式とトポロジー導関数の定義より，式 (7) の最適化問題を解くために必要な設計感度 J' は，次のように定義される．

$$J'=D_TJ^{g\to u}(1-\chi_\phi)-D_TJ^{u\to g}\chi_\phi \tag{31}$$

6. 数値実装法

6.1. 圧力場の数値解析方法

本研究では，有限要素法を用いてレイノルズ方程式の数値解を評価する．式 (4) のレイノルズ方程式は，移流拡散方程式とみなせる．したがって，圧力場の数値解析には，移流項の影響を考慮した適切な数値実装が必要となる．そこで以下では，Meng et al. [11] による研究例に基づき，有限要素法を用いてレイノルズ方程式の数値解を得る方法の概略を説明する．まず，式 (14) の弱形式左辺に，以下の安定化項 I_s を加えた上で離散化を行う，SUPG 法と呼ばれる方法を導入する．

$$I_s=\frac{\tau_{\mathrm{SUPG}}}{2}\int_Y \overline{h}(\boldsymbol{\gamma}\cdot\overline{\nabla}\tilde{p})(\boldsymbol{\gamma}\cdot\overline{\nabla}(\overline{h}\alpha))d\Omega, \tag{32}$$

ここで τ_{SUPG} は安定化の度合いを定めるパラメータを表す．式 (32) のように，安定化項に無次元すべり速度 $\boldsymbol{\gamma}$ を導入することによって，流れ方向に人工拡散を加えることができ，安定的に圧力場の数値解析を行うことができる．

さらに，式 (6) の境界値問題では圧力 $\overline{p}$ に加えて液体の割合 α も未知数となる．このため，[11] では，$\overline{p}$ と α を同時に扱う変数 $\Phi=F\overline{p}+(1-F)\alpha$ が導入されている．ここで，F はキャビテーションの有無を区別する変数であり，1 であればキャビテーションが存在しない領域を，0 であればキャビテーションが生じる領域を表す．そして，$F=1$ 等の適当な初期値を与えた上で，安定化項 I_s を加えたレイノルズ方程式の弱形式から導出される，Φ について成り立つ弱形式を解く．式 (5) を満たしているかを確認し，適宜 F を修正する．もし，i 番目の節点上で $F_i=1$ かつ $\Phi_i<0$ であれば，この節点上では $\overline{p}<0$ となっていることから，キャビテーションが生じた領域であるため，$F_i=0$ と修正する．また，$F_i=0$ かつ $\Phi_i>1$ であれば，この節点上では潤滑膜をすべて液体が占めることから，$F_i=1$ と修正する．Φ についての方程式を解き，F の分布を修正するという流れを繰り返すことによって，式 (5) を満たす解 $(\overline{p},\alpha)$ が得られる．

なお，この手法で得られた $(\overline{p},\alpha)$ はキャビテーション領域の界面で解が非平滑な分布を示すことが多い．これは，変数 F の分布を前述の基準に従って，節点毎に与えていることが原因と考えられる．このような分布を示す解を用いて式 (31) の設計感度を評価すると，最適化計算が不安定なものとなりやすい．そこで，設計感度の評価には，$\boldsymbol{v}:=(\overline{p},\alpha)$ をソースとする以下の方程式の解 $\boldsymbol{w}:=(w_1,w_2)$ を用いるものとする．

$$\int_Y(\tau_{\mathrm{reg}}\overline{\nabla}w_i\cdot\overline{\nabla}\tilde{v}+w_i\tilde{v})d\Omega=\int_Y v_i\tilde{v}d\Omega \quad \forall\tilde{v}\in V_v(Y), \tag{33}$$

ただし，v_i $(i=1,2)$ は $\boldsymbol{v}$ の成分を，$\tilde{v}$ は試験関数を表す．$V_v(Y)$ は $\Gamma_{1,2}$ における周期境界条件が成り立つソボレフ空間を表す．式 (33) の解 w_1 は $\overline{p}$ が平滑化された量を，w_2 は α が平滑化された量を表す．

6.2. 特性関数の近似方法

式 (9) の特性関数 χ_ϕ は，1 か 0 の不連続な値を示す関数であるため，数値計算上の扱いが困難である．このため，最適化計算では，次式に示す近似を用いた特性関数 χ_ϕ^{Num} を用いることにする．

$$\chi_\phi^{\mathrm{Num}}=\begin{cases}0 & (\phi<-d)\\ \frac{1}{2}+\frac{\phi}{d}\left\{\frac{15}{16}-\frac{\phi^2}{d^2}\left(\frac{5}{8}-\frac{3}{16}\frac{\phi^2}{d^2}\right)\right\} & (-d\le\phi<d)\\ 1 & (d\le\phi)\end{cases} \tag{34}$$

上式において，d は遷移幅で十分小さい値を設定する．本研究では，$d=0.1$ と設定した．

6.3. 最適化アルゴリズム

本研究で行う最適化計算のアルゴリズムについて概略を述べる．まず，レベルセット関数 ϕ を初期構造に対応するように初期化する．次に，レベルセット関数の分布に基づく膜厚 $\overline{h}$ の分布に従い，境界値問題（式 (6)）の解を 6.1 節に説明

した方法を用いて解く．そして，式 (7) に示す目的関数 J を計算し，もし目的関数値が収束していれば最適化計算を終了する．収束していなければ，随伴方程式（式 (28) 及び (29)）を解き，設計感度を評価する．このとき，式 (31) を評価するために，6.1 節で導入した式 (33) の解 $\boldsymbol{w}$ を用いる．算出された設計感度を用いて反応拡散方程式（式 (11)）を解き，膜厚 $\overline{h}$ の分布を更新する．そして，境界値問題の解を解くステップに戻り，これらの手順を繰り返すことによって，最適なテクスチャ形状を得る．なお，各計算はオープンソースの有限要素法ソフトウェアである FreeFEM[12] を用いて行った．

7. 数値解析例

7.1. 感度解析の妥当性の検証

5 章で導出したトポロジー導関数の妥当性を検証するために，テクスチャ領域中に微小な非テクスチャ領域が導入された際のトポロジー導関数である $D_T J^{g\to u}$ と，これに対応する差分感度 $D_{\mathrm{Num}} J^{g\to u}$ の分布を比較する．ここで，$D_{\mathrm{Num}} J^{g\to u}$ は次のように定義される．

$$D_{\mathrm{Num}} J^{g\to u} = \frac{J_{\varepsilon_0} - J_0}{\pi \varepsilon_0^2} \tag{35}$$

ここで，$\varepsilon_0 \ll 1$ は微小な正数を表し，J_{ε_0} は，半径 ε_0 のテクスチャが存在しない円形領域 Ω_{ε_0} を導入した際の目的関数を表す．J_0 は，領域 Ω_{ε_0} 導入前の目的関数を表す．

図 2 は，トポロジー導関数の検証に用いる解析モデルを表す．黒色の領域はテクスチャ領域を，灰色の領域は非テクスチャ領域を表す．図中の各寸法は，無次元座標に基づくものを示す．半径 $\varepsilon_0 = 0.01$ の非テクスチャ領域 Ω_{ε_0} を，図中白色の矢印で示した $0.1 \le \overline{x} \le 0.9, \overline{y} = 0.1$ の区間内に配置し，差分感度 (式 (35)) を評価する．そして，同じ区間上のトポロジー導関数 $D_T J^{g\to u}$ の値と差分感度の値の比較を行う．テクスチャ構造の形状最適化を行った Zhirong et al. の先行研究 [5] の設定に基づき，テクスチャ領域の膜厚を $\overline{h}_g = 3$ とし，無次元すべり速度を $\boldsymbol{\gamma} = [250, 0]^T$ とする．この $\boldsymbol{\gamma}$ の設定は有次元において，大気圧 ($p_a = 101325\mathrm{Pa}$) の下でユニットセル寸法を $l = 2\pi \times 10^{-3}\mathrm{m}$，最小膜厚を $h_m = 5.0 \times 10^{-6}\mathrm{m}$，粘性係数を $\mu = 0.038\mathrm{Pa\cdot s}$，すべり速度 $\boldsymbol{U}$ の x 方向成分を $436.28 \times 10^{-3}\mathrm{m/s}$ と設定した状況を想定している．流体の密度を $1.0 \times 10^3 \mathrm{kg/m^3}$ とすると，図 1 の系におけるレイノルズ数は 0.057 と評価でき，比較的小さな値を示す．したがって，このようなパラメータ設定では z 方向の流れや圧力の変化を無視したレイノルズ方程式によるモデル化が有効である．また，圧力場の解析に用いる安定化項の係数 τ_{SUPG} を $\tau_{\mathrm{SUPG}} = 1 \times 10^{-4}$ とする．なおこの節では，式 (33) に基づく平滑化処理を用いずに，トポロジー導関数及び差分感度の評価を行う．

図 3 は，$0.1 \le \overline{x} \le 0.9, \overline{y} = 0.1$ 上のトポロジー導関数及び差分感度の分布を示す．トポロジー導関数と差分感度の分布の傾向は，符号も合わせて一致しており，導出したトポロジー導関数の妥当性を確認できた．

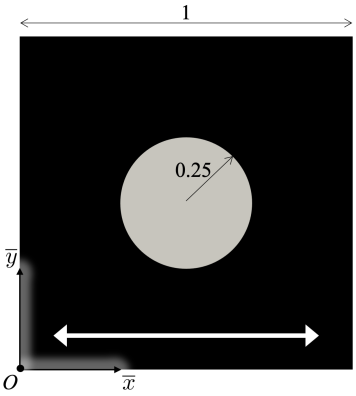


Fig. 2 Geometry setting for comparing the topological derivative and numerical finite difference. Black color represents textured region, whereas gray color represents non-textured region.

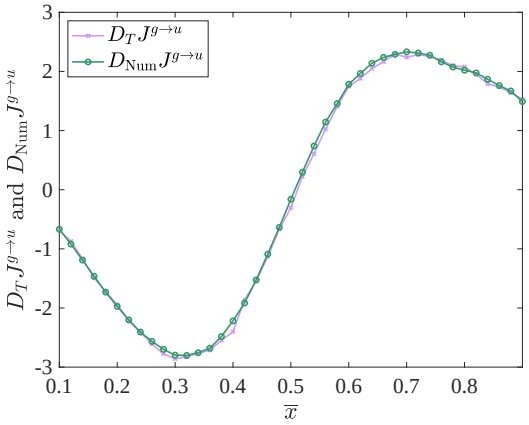


Fig. 3 Comparison between topological derivative $D_T J^{g\to u}$ and numerical finite difference $D_{\mathrm{Num}} J^{g\to u}$.

7.2. 最適設計例

次に，式 (7) に示す最適化問題を対象とした，最適テクスチャ構造設計例を示す．膜厚 $\overline{h}$，無次元すべり速度 $\boldsymbol{\gamma}$，安定化項の係数 τ_{SUPG} の設定は 7.1 節と同様とし，正則化係数 τ_ϕ を $\tau_\phi = 5 \times 10^{-4}$ と設定する．

図 4(a) は，初期構造における膜厚分布を示す．黒色の領域がテクスチャ領域を，灰色の領域が非テクスチャ領域を表す．このような初期構造において，圧力分布は図 4(b) のようになった．式 (4) のレイノルズ方程式の左辺第 2 項に示す通り，圧力分布は膜厚分布の勾配に依存する．流れの方向に沿って膜厚が減少する場合には，断面積の大きな領域から小さな領域へ流体が押し込まれることによって，流れの方向に圧力が増加する．逆に，流れの方向に沿って膜厚が増加する場合には，圧力が減少する．初期構造では，流れの方向（$+\overline{x}$ 方向）に沿って膜厚が減少する状況に相当する，テクスチャ領域の右側の領域に大きな圧力が見られる．一方，膜厚が増加する状況に相当するテクスチャ領域の左側では，圧力が小さい．特に， ユニットセル Y の右側に置かれたテクスチャ領域を中心に，圧力値が 0 となるキャビテーション領域が存在し，6.1 節で導入したキャビテーションの有無を表す変数

F のユニットセルにおける積分値は $\int_Y F d\Omega = 0.926$ となった．すなわち，ユニットセル Y の約 7%の面積をキャビテーション領域が占めていることになる．なお，初期構造における目的関数は，-1.16 となった．

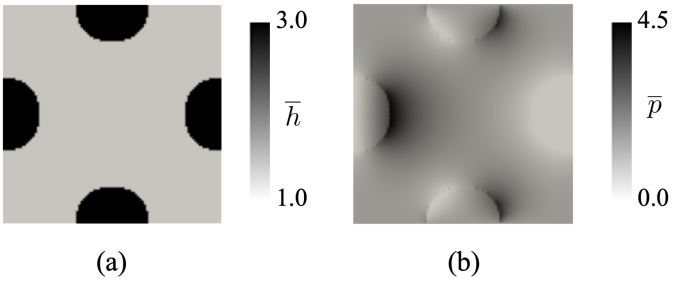


Fig. 4　(a) Initial distribution of $\overline{h}$. (b) Distribution of $\overline{p}$ with the initial $\overline{h}$.

このような初期構造から，6.3 節に示した手順に基づき最適化計算を行った．図 5 は，最適化過程における目的関数の履歴とテクスチャ形状の変遷を表したものである．初期構造は鏡面対称性を持つ構造であるのに対し，$+\overline{x}$ 方向のすべり速度に対応して，$\overline{x}$ 方向に関する対称性が最適化計算の早い段階で崩れている様子が確認できる．最適化計算の反復回数が 10 を超えたあたりで，目的関数の値はほぼ一定となり，V 字が 90 度回転したようなテクスチャ形状が得られた．

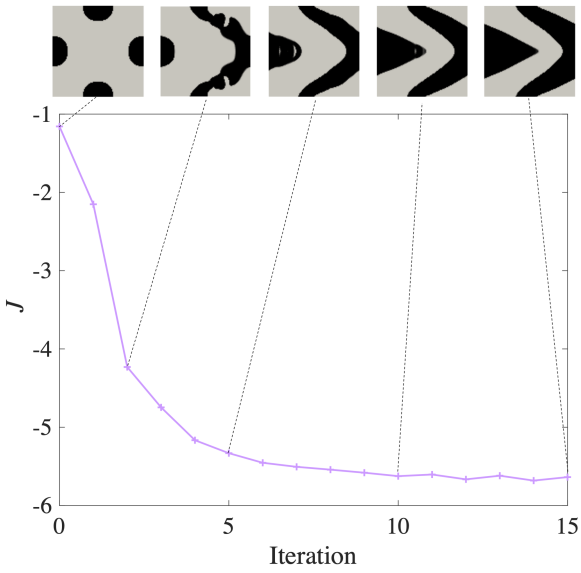


Fig. 5　History of the objective function J with the initial, immediate, and optimal texture designs.

図 6(a) は最適構造における膜厚分布を，(b) は最適構造における圧力分布を示す．最適構造は V 字状のテクスチャ構造と非テクスチャ構造が互い違いに配置された形状を有している．初期構造と同様に，テクスチャ構造の右側で圧力が大きく，左側で圧力が小さいという傾向が見られる．一方，V 字状の最適テクスチャ構造は，2 つの流入口から V 字の屈曲部に流れを集中させる働きがあるため，屈曲部近傍において極めて高い圧力値が確認できる．さらに，最適構造は V 字状のテクスチャ構造が $\overline{x}$ 方向に周期的に配列された形状を有していることから，ユニットセル全体にわたって圧力が大きく，テクスチャ構造左側の圧力が小さな領域においても，圧力が 0 となる領域は見られない．したがって，最適構造においてはキャビテーション領域は存在せず，$\int_Y F d\Omega = 1$ となった．このようなメカニズムに基づき，最適構造ではユニットセル全体で高圧力を実現できることから，最適構造における目的関数値は $J = -5.64$ となり，最適化計算によって耐荷重能を示すテクスチャ構造が得られた．

なお，このようなテクスチャ形状は，[4] の寸法最適化例や [5] の形状最適化例においても示されている．以上の結果から，提案する最適化法の妥当性が確認できた．

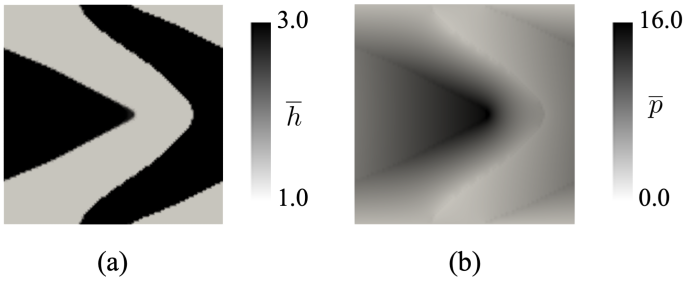


Fig. 6　(a) Optimal distribution of $\overline{h}$. (b) Distribution of $\overline{p}$ with the optimal $\overline{h}$.

8. 結言

本研究では，流体潤滑問題を対象としたトポロジー最適化法を提案し，テクスチャ構造の最適設計を行った．得られた成果を以下に示す．

- レイノルズ方程式に基づき，流体潤滑問題の定式化を行った．
- 潤滑膜内の圧力に基づき，すべり軸受等の重要な指標の一つである耐荷重能を目的関数と設定し，テクスチャ構造を最適化するトポロジー最適化問題の定式化を行った．
- 前述の最適化問題を解くためにレベルセット法に基づくトポロジー最適化法を導入した．レベルセット関数を用いてテクスチャ構造を考慮した潤滑膜の膜厚の表現を行った．
- トポロジー導関数の概念に基づく感度解析を行い，数値差分によってその妥当性を明らかにした．
- テクスチャ構造設計例を示し，提案手法の有用性を確認した．先行研究で行われているベンチマーク問題に対して，同様の最適構造を得ることに成功した．具体的には，周期的に配列されたテクスチャ構造のユニットセルを対象としたテクスチャ設計問題に対して，すべり速度の向きに対応した最適テクスチャ構造を創成できた．

謝辞

本研究は，JSPS 科研費 20K14636 の助成を受けました．この場を借りて御礼申し上げます．

参考文献

(1) 吉本成香：はじめての機械要素，(2011)，森北出版.

(2) Wakuda, M., Yamauchi Y., Kanzaki S., Yasuda Y., Effect of surface texturing on friction reduction between ceramic and steel materials under lubricated sliding contact, *Wear*, Vol. 254, No. 3–4, pp. 356–363, 2003.

(3) Wang X. L., Kato K., Adachi K., Aizawa K., Loads carrying capacity map for the surface texture design of SiC thrust bearing sliding in water, *Tribology International*, Vol. 36, No. 3, pp. 189–197, 2003.

(4) Shen, C., Khonsari, M. M., Numerical optimization of texture shape for parallel surfaces under unidirectional and bidirectional sliding, *Tribology International*, Vol. 82, pp. 1–11, 2015.

(5) Zhirong, T., Xiangkai, M., Yi, M., Xudong, P., Shape optimization of hydrodynamic textured surfaces for enhancing load-carrying capacity based on level set method, *Tribology International*, Vol. 162, p. 107136, 2021.

(6) Waseem, A., Temizer, I., Kato, J., Terada, K., Homogenization-based design of surface textures in hydrodynamic lubrication, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 108, pp. 1427–1450, 2016.

(7) Waseem, A., Temizer, I., Kato, J., Terada, K., Micro-texture design and optimization in hydrodynamic lubrication via two-scale analysis, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 56, pp. 227–248, 2017.

(8) Meng, X., Tu, Z., Ma, Y., Jiang, J., Peng, X., Topology optimization of liquid lubricating zero-leakage mechanical face seals, *Tribology International*, Vol. 169, p. 107490, 2022.

(9) Yamada, T., Izui, K., Nishiwaki, S., Takezawa, A., A topology optimization method based on the level set method incorporating a fictitious interface energy, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 199, No. 45–48, pp. 2876–2891, 2010.

(10) Elrod, H. G., Adams, M., A Computer Program for Cavitation and Starvation Problems, *First LEEDS LYON Symposium on Cavitation and Related Phenomena in Lubrication, I.M.E.*, Vol. 103, pp. 37–41, 1974.

(11) Meng, X., Bai, S., Peng, X., Lubrication film flow control by oriented dimples for liquid lubricated mechanical seals, *Tribology International*, Vol. 77, No. 77, pp. 132–141, 2014.

(12) Hecht, F., New development in FreeFEM++, *Journal of numerical mathematics*, Vol. 20, No. 3–4, pp. 251–265, 2012.

計算数理工学論文集 Vol. 22 (2022 年 12 月), 論文 No. 15-221216 JASCOME

境界要素法により数値的に求められた散乱音場と頭部伝達関数によるバイノーラル信号の合成

Reproducing binaural signals using head-related transfer function and the numerical sound field calculated by boundary element method

川井 郁哉 [1)], 吉川 仁 [2)]

Ikuya KAWAI and Hitoshi YOSHIKAWA

1) 京都大学大学院情報学研究科 (〒606-8501 京都市左京区吉田本町, E-mail: kawai@acs.i.kyoto-u.ac.jp)
2) 京都大学大学院情報学研究科 (〒606-8501 京都市左京区吉田本町, E-mail: yskhit@i.kyoto-u.ac.jp)

In this study, we calculate the scattered sound field using boundary element method (BEM), and attempt to reproduce the sound heard by both ears of a character in a virtual space by convolving the numerically obtained sound field and the head-related transfer function (HRTF). We also attempt to shorten the computational time by using the far field approximation. As a result, we can reproduce the binaural signals without much loss of accuracy.

Key Words: VR, BEM, HRTF, far field approximation

1. はじめに

近年, バーチャルリアリティ（VR）技術が注目を集めるようになり, バーチャル空間上の様々な情報をユーザーが疑似体験として得るための技術が研究されている. 中でも音場再現技術は多く研究されており, VR 上で人の耳元で鳴る音声信号を再現することは重要な課題である. 本研究では, 散乱体を含む三次元空間内に存在する人の耳に届く音を再現することを試みる.

また, 周辺の音源が空間のどこにあるかを知覚する音像定位と呼ばれる人が持つ機能を考える [(1)]. 音像定位は, 頭部による音響現象を人間が知覚しているものと考えられるが, これらに必要な総合的な情報を含んだ現象をシステムとして考える. ここに, 頭部周辺の空間点から耳孔への時不変システムを表した伝達関数が頭部伝達関数（HRTF）である.

頭部伝達関数を介して入力音を処理することで, 外部からの音を両耳に届く音に直接変換できると考えられる. このような両耳に提示する信号を制御する手法を一般的にバイノーラル技術と呼び, 本研究では合成する直接的な両耳への音信号をバイノーラル信号, バイノーラル音と表現する. これまでの研究で, 頭部伝達関数を介することでバイノーラル音を合成する研究はすでに行われているが, 著者の知るところでは波動音響理論により求めた音場と頭部伝達関数を用いたバイノーラル音の合成についての研究は行われていない. 例えば, 空間音響を幾何音響理論に基づき計算し頭部伝達関数と合成する手法が用いられるなど, 音場そのものを正確に再現できているとは言えない [(2, 3, 4)]. また, VR 空間上でユーザーが聞く音を再現する研究も行われているが, これは例えば頭部中心の一点での音圧を再現したもので, 頭部による散乱などの影響は考慮されていない [(5)]. そこで本研究では, 境界要素法により計算される散乱音場の計算結果を用い, 頭部伝達関数を用いて空間内に存在する人やキャラクターの耳に届く音を再現することを目的とする. HRTF を考慮しない場合, 複雑な形状である頭部や耳の表面を要素分割し数値解析を行う必要があり, 計算コストは非常に高くなる。本提案手法は散乱体として頭部や耳の境界を考慮しなくてもよいという点が特徴である. また, 遠方近似を用いて精度を保ちながら音の再現に必要となる計算時間を削減する試みも行う.

2022 年 10 月 27 日受付, 2022 年 11 月 18 日受理

2. 時間域境界要素法を用いた散乱音場の数値解析

散乱体を持つ 3 次元領域 D において, 1 点の点波源 $\boldsymbol{x}_0$ から発せられる音（音圧）$u(t)$ の散乱音場を考える．この節においては添字に対し総和規約を適用する．また $(\,)_{,i}$ は $\frac{\partial}{\partial x_i}$, $\dot{(\,)}$ は $\frac{\partial}{\partial t}$ を表す.

2.1. 散乱場における波動方程式の初期値境界値問題

ある閉じた三次元領域 D^c の補領域 D（外部領域）において, 位置 $\boldsymbol{x}$, 時刻 t での音圧 $u(\boldsymbol{x},t)$ についての波動方程式の初期値境界値問題を考える（Fig.1）.

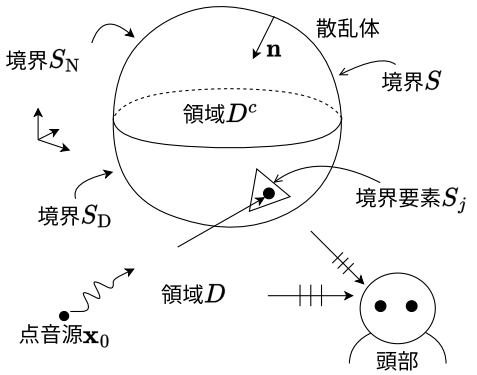


Fig.1　波動散乱問題

$$\frac{1}{c^2}\ddot{u}(\boldsymbol{x},t)-u_{,ii}(\boldsymbol{x},t)=0,\quad \boldsymbol{x}\in D, t>0, \tag{1}$$

$$u(\boldsymbol{x},0)=0,\quad \boldsymbol{x}\in D, \tag{2}$$

$$\dot{u}(\boldsymbol{x},0)=0,\quad \boldsymbol{x}\in D, \tag{3}$$

$$u(\boldsymbol{x},t)=\bar{u}(\boldsymbol{x},t),\quad \boldsymbol{x}\in S_{\mathrm{D}},\quad t>0, \tag{4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(\boldsymbol{x},t)=\bar{q}(\boldsymbol{x},t),\quad \boldsymbol{x}\in S_{\mathrm{N}},\quad t>0, \tag{5}$$

$$u(\boldsymbol{x},t)\to u^{\mathrm{in}}(\boldsymbol{x},t),\quad |\boldsymbol{x}|\to\infty, \tag{6}$$

ここに, $\frac{\partial}{\partial n}$ は境界上の点における外向き単位法線ベクトルを n_i として $n_i\frac{\partial}{\partial x_i}$, c は音速を表す．また, S_{D} は Dirichlet 境界条件, S_{N} は Neumann 境界条件を課す境界であり, $S_{\mathrm{D}}\cap S_{\mathrm{N}}=\emptyset, S_{\mathrm{D}}\cup S_{\mathrm{N}}=S$ である．また $\bar{u},\bar{q}$ は既知関数, u^{in} は既知の入射波である.

本研究では, 空間上に固定された一点の点音源 $\boldsymbol{x}_0$ から出る音圧 $u_0(t)$ を入射波として考える．このとき, 入射波 $u^{\mathrm{in}}(\boldsymbol{x},t)$ は,

$$u^{\mathrm{in}}(\boldsymbol{x},t)=\frac{u_0(t-r_0/c)}{4\pi r_0} \tag{7}$$

と表示される．ここに, $r_0:=|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|$ である.

2.2. 時間域境界要素法を用いた解法

初期値境界値問題 (1)〜(6) を時間域境界要素法によって解く．境界要素法では, 支配方程式の基本解を用いて解を境界上の積分方程式で表す．3 次元波動方程式の基本解 Γ は以下で示される.

$$\Gamma(\boldsymbol{x},t)=\frac{\delta(t-|\boldsymbol{x}|/c)}{4\pi|\boldsymbol{x}|}. \tag{8}$$

基本解によって, 初期値境界値問題の解は以下の積分方程式で表示される.

$$\left.\begin{array}{ll} u(\boldsymbol{x},t) & (\boldsymbol{x}\in D)\\ 0 & (\boldsymbol{x}\in D^c)\end{array}\right\}$$
$$=u^{\mathrm{in}}(\boldsymbol{x},t)+\int_S\int_0^t\Gamma(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},t-s)\frac{\partial u}{\partial n}(\boldsymbol{y},s)\,ds\,dS_{\boldsymbol{y}} -\int_S\int_0^t\frac{\partial\Gamma}{\partial n}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},t-s)u(\boldsymbol{y},s)\,ds\,dS_{\boldsymbol{y}}. \tag{9}$$

なお, 右辺第二項, 第三項はそれぞれ一重層ポテンシャル, 二重層ポテンシャルと呼ばれる.

$\boldsymbol{y}\in S_{\mathrm{D}}$ において $\frac{\partial u}{\partial n}$, $\boldsymbol{y}\in S_{\mathrm{N}}$ において u が未知であるため, 境界上のこれらの未知量を求めるために, D^c 上の点 $\boldsymbol{x}$ を境界 S に極限移行した境界積分方程式を数値的に解く.

$$\begin{aligned}0=&u^{\mathrm{in}}(\boldsymbol{x},t)+\int_S\int_0^t\Gamma(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},t-s)\frac{\partial u}{\partial n}(\boldsymbol{y},s)\,ds\,dS_{\boldsymbol{y}}\\ &-\lim_{\boldsymbol{\xi}\to\boldsymbol{x}}\int_S\int_0^t\frac{\partial\Gamma}{\partial n}(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{y},t-s)u(\boldsymbol{y},s)\,ds\,dS_{\boldsymbol{y}},\\ &\boldsymbol{x}\,\mathrm{on}\,S,\boldsymbol{\xi}\in D^c,t>0.\end{aligned} \tag{10}$$

境界積分方程式 (10) を数値的に解き, 得られた境界量を用いて任意の内点における音圧を式 (9) を用いて計算する.

なお, 音圧の勾配をのちに用いるが, 勾配は式 (9) より以下の式で計算できる.

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial x_i}(\boldsymbol{x},t)\\ =&\frac{\partial u^{\mathrm{in}}}{\partial x_i}(\boldsymbol{x},t)\\ &+\frac{\partial}{\partial x_i}\int_S\int_0^t\Gamma(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},t-s)\frac{\partial u}{\partial n_y}(\boldsymbol{y},s)\,ds\,dS\\ &-\frac{\partial}{\partial x_i}\int_S\int_0^t\frac{\partial\Gamma}{\partial n}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},t-s)u(\boldsymbol{y},s)\,ds\,dS.\end{aligned} \tag{11}$$

数値計算を行う際、離散化は選点法により行う．境界 S を三角形の境界要素 $S_j\,(j=1,2,\ldots,N)$ に分割し, 境界要素の代表点を $\boldsymbol{x}^j$ とおく．時間増分を Δt とする．また, 内挿の際には区分一定の空間内挿関数 $M_S^j(\boldsymbol{x})$ と, $2\Delta t$ の長さの台を持つ区分線形の時間内挿関数 $M_T^m(t;\Delta t)\,(m=1,2,\ldots,n)$ を用いる．すなわち,

$$M_S^j(\boldsymbol{x})=\begin{cases}1, & \boldsymbol{x}\in S_j,\\ 0, & \text{otherwise},\end{cases} \tag{12}$$

$$M_T^m(t;\Delta t)=\begin{cases}\frac{t}{\Delta t}-m+1, & (m-1)\Delta t\le t<m\Delta t,\\ \frac{-t}{\Delta t}+m+1, & m\Delta t\le t<(m+1)\Delta t,\\ 0, & \text{otherwise},\end{cases} \tag{13}$$

である.

3. 頭部伝達関数を用いたバイノーラル音声信号の生成

本節では, 時間域インパルス応答データとして提供される頭部伝達関数のデータセットと数値計算で得られた数値音場を用いて目的の信号を生成する手法について説明する.

3.1. 頭部伝達関数

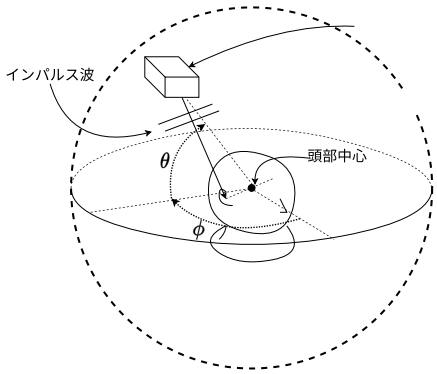


Fig2　HRTF のイメージ

頭部伝達関数（Head Related Transfer Function, HRTF），頭部インパルス応答（Head Related Impulse Response, HRIR）は, 頭部周辺の空間点から耳孔への時不変システムを表した伝達関数, またはインパルス応答である．一般に言われる周波数領域の伝達関数は, Fourier 変換により時間領域のインパルス応答と同等なものである．本研究で用いるデータは HRIR の形式であるが, 用いたデータセットの仕様書における表記に合わせて HRTF と呼ぶことにする．

HRTF を得るためには, 実測や数値計算などで耳孔での応答を計算するなどの方法がある．実測する場合は, Fig.2 のように, 音響計測用の頭部・トルソ型の頭部シミュレータマネキン（HATS）とラウドスピーカーを用いて無響室で測定するのが一般的である．本研究では, 1994 年に MIT が作成したデータを用いる [6]．これは, 標準的な HATS 製品である KEMAR を用いた無響室における実測で得られたデータセットである．このデータの主な仕様とそれに伴う本研究における定義は以下の通りである [6]．

- 耳と耳を結ぶ線分の中点を頭部中心と定義する．
- KEMAR が水平面に立っている状態で, 水平前方方向を仰角 0 度, 方位角 0 度と定義する．
- 仰角は上を向く方を正, 方位角は頭部から見て右側に回転する向きを正と定義する．
- 頭部中心を中心とする半径 1.4 m の仮想的な球殻を音源球面と呼ぶことにする．適当な仰角 θ, 方位角 ϕ を用いて, 頭部中心を原点とする極座標で $(1.4, \theta, \phi)$ で表される点を HRTF 音源点と呼ぶことにする．
- 様々な HRTF 音源点に頭部中心を向くように設置されたラウドスピーカーから, インパルスを再生し, その応答を耳孔部に置かれたマイクで計測する．
- 入力インパルス信号の具体的な形について詳細は記されていなかったが, 時系列データの形状から, 区分線形の時間内挿関数に等しいと推定した．ただし, 後述の通り, サポートが境界要素法の数値計算とは異なることに注意する．
- 用いられた KEMAR の寸法についても詳細はなかったが, 仰角 0, 方位角 $\pi/4$ からの HRTF と, 仰角 0, 方位角 $3\pi/4$ からの HRTF におけるインパルスの到達時刻をサンプル単位で比較し, 音の速度を 340 m/s とした場合に左右の耳の距離は 20 cm 程度であると推定した．
- 各 HRTF はサンプリング周波数 44100Hz, ビットレートは 16bit で計測され, 区間 $(-1, 1)$ の数値を符号付き 16bit 整数に対応させた数値を 512 サンプル並べた 1024byte バイナリデータとして提供されている．
- データセットには, 仰角が弧度法で -40 度から 90 度まで 10 度刻み, 方位角は仰角によって異なる一定等間隔の刻み方によって与えられ, 合計で 710 点に対する HRTF が与えられている．

また, 測定に用いられた KEMAR の耳介は, 左右対称ではなかった．これは人間でも同様であり, 完全に左右対称な耳への応答を持つ人はいないが, このデータセットのドキュメントにおいて, HRTF の左右の組を選択するときに KEMAR の片方の耳から得られた対称的なものを使用することを推奨しているため, これにしたがって使用するデータを選択した．このため, 厳密な正面方向, すなわち $\theta = 0, \phi = 0$ からの左右の耳への応答は完全に同一となるのが望ましいことになる．

頭部中心を原点とする極座標で表された HRTF 音源点 $(1.4, \theta, \phi)$ に対応する, 左耳の耳孔点 L, 右耳の耳孔点 R への時間域インパルス応答をその HRTF 音源点に対する HRTF と定義し, 時間依存のスカラー関数 $H^{\mathrm{A}}_{\theta,\phi}(t)\,(\mathrm{A} = \mathrm{L}, \mathrm{R})$ で表す．ある HRTF 音源点でのラウドスピーカーによる信号がわかっている場合, その点での HRTF とラウドスピーカー信号を畳み込むことでその点を経由する音の耳孔における応答が得られる．

ここで, ラウドスピーカーが再生するのは音圧そのものではない点に注意する必要がある．HRTF の測定には点音源を用いるのが望ましいとされる [7] が, ラウドスピーカーを用いた場合点音源とはならない．ラウドスピーカーは, 音圧を表現した電気信号をコーン紙などの膜の振動に変換することにより特定の方向に振動する音波を生成するため, 音圧が時間依存のスカラー関数として入力されたとき, 入力信号に対応する定点の振動が特定方向へ伝わる速度が実際の音圧になると考えるのが適当である．したがって何らかの方法で（本研究では境界要素法による）HRTF 音源点における音圧の値が計算できる場合, その点における音源球面の法線微分の値をラウドスピーカーの出力として使用する．

以上より, 音源球面上の任意の点での HRTF が連続的に与えられているならば, 耳孔 A = L または R での音は以下の積分で表される.

$$\int_{S_{\mathrm{src}}} \int_0^t n_i(\theta,\phi) \frac{\partial u}{\partial x_i}(\theta,\phi,t-s) H^{\mathrm{A}}_{\theta,\phi}(s)\, ds\, dS. \tag{14}$$

ここに, 音源球面を S_{src} とし, 音源球面上の点 $(1.4,\theta,\phi)$ における外向き単位法線ベクトルを $n_i(\theta,\phi)$ とする.

実際は音源球面上の離散点における HRTF を用いるため, 積分も離散化近似を行って計算する. 内点の勾配を

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(\theta,\phi,t) \simeq \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}(\theta,\phi,m\Delta s) M_T^m(t;\Delta s) \tag{15}$$

と離散化近似することで畳み込みも離散化する. ただし, $\Delta s = 1/44100\,\mathrm{sec}$ は HRTF のサンプリングレートである. このとき, (14) は

$$\sum_{\theta,\phi}\sum_{m} n_i(\theta,\phi) \frac{\partial u}{\partial x_i}(\theta,\phi,(n-m+1)\Delta s) H^{\mathrm{A}}_{\theta,\phi}(m\Delta s) |S_{\theta,\phi}|, \tag{16}$$

と近似される. ここで $|S_{\theta,\phi}|$ は Gauss 積分の重みであり, 1 点積分を考え HRTF を与える球面上の各点が球面上で受け持つ面積とする. 仰角, 方位角をそれぞれ ϑ,φ で均等に分割した場合, $r = 1.4\,\mathrm{m}$ として

$$\begin{aligned} |S_{\theta,\phi}|_{ij} &= \int_{j\varphi-\varphi/2}^{j\varphi+\varphi/2} \int_{i\vartheta-\vartheta/2}^{i\vartheta+\vartheta/2} r^2 \cdot \cos\theta\, d\theta\, d\phi \\ &= r^2\varphi[\sin\theta]_{i\vartheta-\vartheta/2}^{i\vartheta+\vartheta/2} \\ &= r^2\varphi(\sin(i\vartheta+\vartheta/2) - \sin(i\vartheta-\vartheta/2)) \\ &= 2r^2\varphi\cos(i\vartheta)\sin(\vartheta/2). \end{aligned} \tag{17}$$

と計算できる. 今用いている極座標から直交座標への変換は $r(\cos\theta\cos\phi, \cos\theta\sin\phi, \sin\theta)^\top$ で表されるため, ヤコビアンは天頂で極角を 0 とする一般的なものと異なる. i,j は離散化された仰角, 方位角の添字である. 音圧勾配 $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ は境界要素法による計算で得られる量を用いて計算できるので, 用意された HRTF のデータを用いることで耳孔での音を計算できる.

ところで, 境界要素法を用いて音圧の時間域分布を求める一連の手順における時間の刻み幅 Δt と, HRTF が計測された際の時間刻み幅 Δs の差異に注意する必要がある. Δs は $1/44100\,\mathrm{sec}$ だが, Δt がそれに等しいとは限らない. そのため, HRTF を用いた計算の前に, 各 HRTF 音源点で求められた時系列データを適切にリサンプリングする必要がある. 本研究の境界要素法の計算では $\Delta t = 1/2940\,\mathrm{sec}$ として計算したので, 15 倍のアップサンプリングが必要である. 大抵の場合フィルタ処理などによりこれは簡単に実行できるが, 実装の簡略化を優先して線形補間を行った. そのため計算結果には小さい高周波ノイズが現れている.

3.2. 散乱体が遠方にある場合の近似

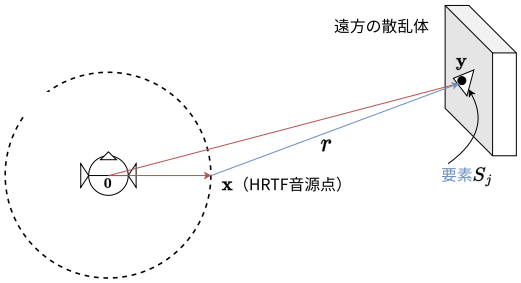


Fig3　遠方近似の概要

音源球面上の音場から耳孔までの影響を精度良く得るためには, 音源球面上に多数の HRTF 音源点を均等に取るのが望ましい. しかし, その数だけ内点計算が必要であり, 耳孔での音の計算に時間がかかるという問題がある. これをある程度解決するため, 散乱体が頭部に対して遠くにある場合に近似計算を行うことで計算量を削減することを考える.

音圧の勾配を計算する音源球面上の点を $\boldsymbol{x}$ とする. このとき, 散乱体表面の境界要素 S_j 上の点 $\boldsymbol{y}$ からの $\boldsymbol{x}$ までの影響を, $\boldsymbol{y}$ から原点 $\mathbf{0}$ までの影響で近似する（Fig.3）.

まず, $|\boldsymbol{x}| \ll |\boldsymbol{y}|$ であることから,

$$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}| \simeq |\boldsymbol{y}|\left(1 - \frac{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}}{|\boldsymbol{y}|^2}\right), \tag{18}$$

と近似する. このとき, Taylor 展開により

$$\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|} \simeq \frac{1}{|\boldsymbol{y}|}\left(1 + \frac{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}}{|\boldsymbol{y}|^2}\right) \tag{19}$$

と近似できる.

さて, $\boldsymbol{x}$ における音圧の勾配は (11) 式で計算できる. 一重層ポテンシャルについて, 離散化すると

$$\begin{aligned} &\sum_j \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial n}(\boldsymbol{x}^j, m\Delta t) \\ &\frac{\partial}{\partial x_i} \int_{S_j} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}, n\Delta t - s) M_T^m(s;\Delta t)\, ds\, dS_{\boldsymbol{y}}, \end{aligned} \tag{20}$$

となる. この式の時間積分について, 以下のように近似する.

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}, n\Delta t - s) M_T^m(s;\Delta t)\, ds \\ =& \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta\left(n\Delta t - s - \frac{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}{c}\right)}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|} M_T^m(s;\Delta t)\, ds \\ \simeq& \frac{1}{4\pi|\boldsymbol{y}|}\left(1 + \frac{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}}{|\boldsymbol{y}|^2}\right) M_T^m\left(n\Delta t - \frac{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}{c}; \Delta t\right) \\ \simeq& \frac{1}{4\pi|\boldsymbol{y}|}\left(1 + \frac{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}}{|\boldsymbol{y}|^2}\right) M_T^m\left(n\Delta t - \frac{|\boldsymbol{y}|}{c} + \frac{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}}{c|\boldsymbol{y}|}; \Delta t\right) \\ \simeq& \left(1 + \frac{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}^j}{|\boldsymbol{x}^j|^2}\right) \frac{1}{4\pi|\boldsymbol{y}|} M_T^{m^*}\left(n\Delta t - \frac{|\boldsymbol{y}|}{c}; \Delta t\right). \end{aligned} \tag{21}$$

ただし, $m^* = m - \left\lfloor \frac{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}}{c\Delta t|\boldsymbol{y}|} \right\rfloor$ と定義し, $\lfloor x \rfloor$ は x を超えない最大の整数である. ここで, 式 (9) の一重層ポテンシャル項を離散化

した際の境界要素添字 j, 時間ステップ $n-m+1$ における項の係数を $P_j^{n-m+1}(\boldsymbol{x})$ で表す．これは, 離散化した境界積分方程式の係数は

$$P_j^{n-m+1}(\boldsymbol{x}) = \int_S \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}, n\Delta t - s) \\ M_S^j(\boldsymbol{y}) M_T^m(s;\Delta t)\, ds\, dS \tag{22}$$

であり, したがって

$$P_j^{n-m+1}(\boldsymbol{0}) = \frac{1}{4\pi|\boldsymbol{y}|} M_T^m\left(n\Delta t - \frac{|\boldsymbol{y}|}{c}; \Delta t\right), \quad \boldsymbol{y} \in S_j, \tag{23}$$

であることを用いると, 一重層ポテンシャルの勾配は, 原点における影響係数 $P_j^{n-m^*+1}(\boldsymbol{0})$ を用いて

$$\begin{aligned} &\sum_j \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial n}(\boldsymbol{x}^j, m\Delta t) \\ &\frac{\partial}{\partial x_i} \int_{S_j} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}, n\Delta t - s) M_T^m(s;\Delta t)\, ds\, dS_{\boldsymbol{y}} \\ \simeq &\sum_j \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial n}(\boldsymbol{x}^j, m\Delta t) \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\left(1 + \frac{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}^j}{|\boldsymbol{x}^j|^2}\right) P_j^{n-m^*+1}(\boldsymbol{0})\right] \\ = &\sum_j \left[\frac{\boldsymbol{x}^j}{|\boldsymbol{x}^j|^2}\left(\sum_{m=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial n}(\boldsymbol{x}^j, m\Delta t) P_j^{n-m^*+1}(\boldsymbol{0})\right)\right. \\ &\left. + \left(1 + \frac{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}^j}{|\boldsymbol{x}^j|^2}\right)\left(\sum_{m=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial n}(\boldsymbol{x}^j, m\Delta t) \frac{\partial}{\partial x_i} P_j^{n-m^*+1}(\boldsymbol{0})\right)\right], \end{aligned} \tag{24}$$

と表示できる．したがって, 原点における $P_j^{n-m+1}(\boldsymbol{0})$ とその勾配を各時間ステップと要素ごとに計算して保存し, HRTF 音源点 $\boldsymbol{x}$ におけるその時刻の一重層ポテンシャルの勾配を式 (24) を用いて近似計算すれば, 使用する HRTF 音源点が増えても時間のかかる計算の回数を減らすことができる．二重層ポテンシャルの勾配についても同様である．

4. 数値実験の計算結果

以上の理論を基に耳孔に届くバイノーラル音を合成する数値実験を行う．計算はすべて手元のラップトップ（Macbook Air 1.8GHz デュアルコア Intel Core i5, RAM 8GB）で行う．

4.1. バイノーラル信号合成

まず, 散乱体がない状態で一定周波数の正弦波を入射波として与え, 頭部への波の到達時間などの再現性を調べた．

条件として, 内点計算の時間刻み幅を $\Delta t = 1/2940\,\mathrm{sec}$, 音速を $340\,\mathrm{m/sec}$ とし, 座標 $(0, 0, -5)\,\mathrm{m}$ の点音源で一定周波数の正弦波が鳴っているとした．人の頭部が空間内にあり、頭部中心から人から見て真右の方向の距離 $4\,\mathrm{m}$ の位置に点音源がある．

以上の条件で左右の耳への応答を計算し Fig.4 から Fig.6 に示した．入射波の周波数は 73, 196, 1470Hz の三種類について実験した．

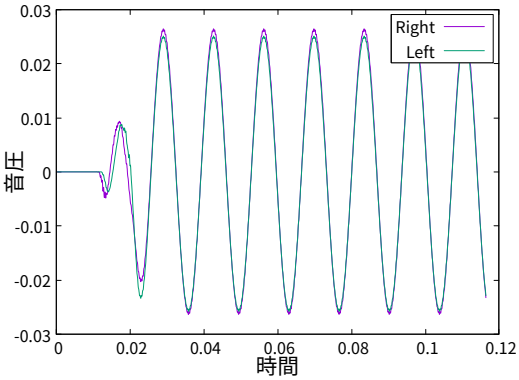


Fig4　73 Hz の入射波に対する左右の耳での応答（紫線：右耳, 緑線：左耳）

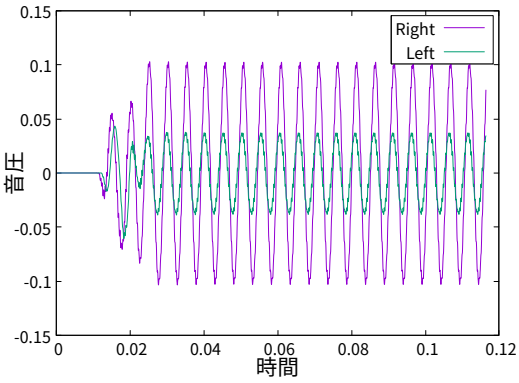


Fig5　196 Hz の入射波に対する左右の耳での応答（紫線：右耳, 緑線：左耳）

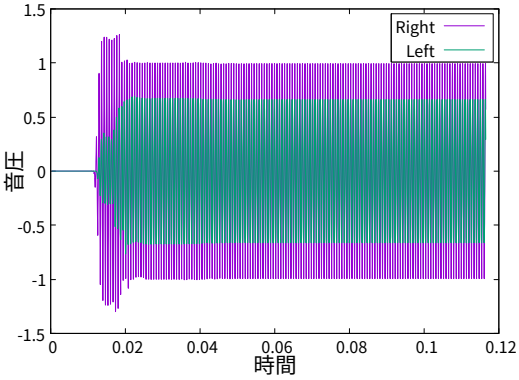


Fig6　1470 Hz の入射波に対する左右の耳での応答（紫線：右耳, 緑線：左耳）

Fig.4〜Fig.6 より, いずれも右耳への音の振幅のほうが大きくなっている．音源から異なる位置関係にある両耳に対して振幅において異なる周波数応答を示しているのは, 低周波の波動は回折しやすく, 頭部を回り込む際に減衰が少なくなるからだと考えられる．文献 [1] によると, 人は左右の音像定位の際に, 高周波数では両耳に到達する音の音圧の差を用い, 低周波数では到達時間差を用いるとされている．したがってこの結果は, 人間が音を認

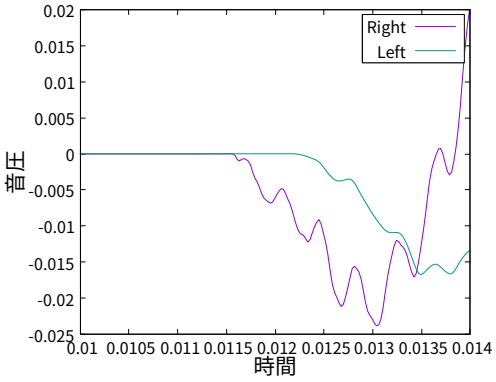


Fig.7　196 Hz の音源が右にあるとき左右の耳に音が到達する時間の差（紫線：右耳, 緑線：左耳）

識するための実際の波動の性質を表すことができていると考えられる.

Fig.7 は, 右からの波が左右の耳に到達する時間差を示したものである. 時間差はおよそ 5×10^{-4} sec となっており, 左右の耳の距離がおよそ 0.2 m であることから妥当である.

4.2. 散乱体の存在による影響

散乱波の影響を確認するために, 空間上に散乱体を配置し, 周波数 73 Hz の正弦波 1 波長分を入射波として散乱波のみの数値解を求めた. 散乱体は $(0, 0, 1)$ m を中心とする半径 1 m の球体とし, 境界条件は $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ の完全反射条件を与える. この散乱体を三角形メッシュで境界要素に分割して離散化した. この要素数は 1080 である. また頭部中心を $(-6, 0, 1)$ m に配置し, 向きは x_2 軸の正方向を向き, 頭頂は x_3 軸の正方向を向いているとする状態を考える. 点 L, R はそれぞれ左右の耳を表す. Fig.8 において, source が点音源, 赤い球が散乱体, 緑色の球が頭部を模したものである.

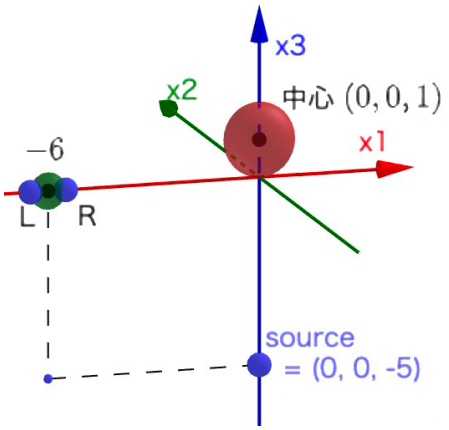


Fig8　頭部に対して散乱体を右側に配置する状態

散乱体の有無による右耳への応答の差を示したものが Fig.9 である. Fig.9 より, 散乱体の影響を計算できていることがわかる.

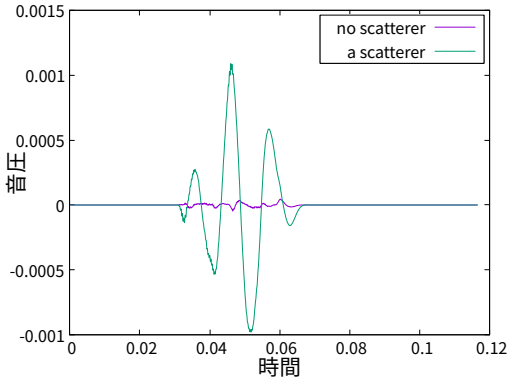


Fig9　散乱体がある場合とない場合の散乱波の比較（紫線：散乱体なし, 緑線：あり）

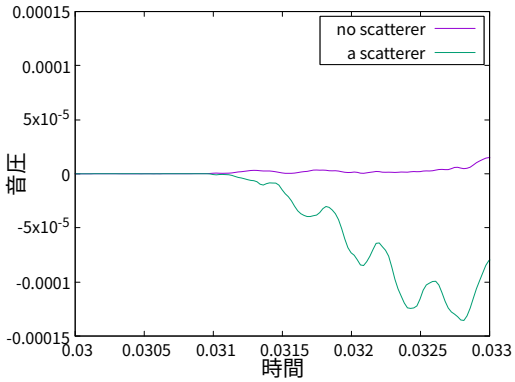


Fig.10　散乱波が到達する様子

なお, この図の散乱体がない場合は散乱波は存在しないためゼロでなければならないが, 計算誤差のために小さい振幅が現れている. Fig.10 は, Fig.9 の到達する時刻の周辺を拡大したものである. 約 3.11×10^{-2} sec で散乱波が右耳に到達している. 球状散乱体による散乱波が音源から右耳までに進む距離は 10.58 m ほどであるから, これは妥当な結果である.

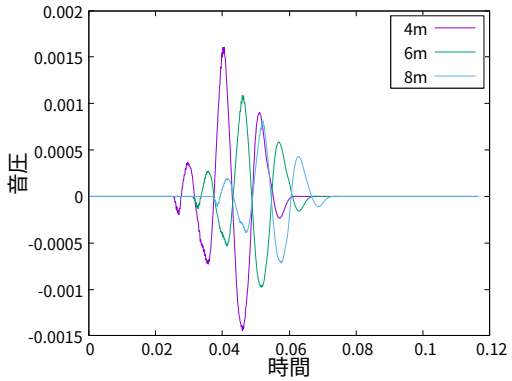


Fig.11　散乱体中心との距離による散乱波の差異（紫線：4 m, 緑線：6 m, 青線：8 m）

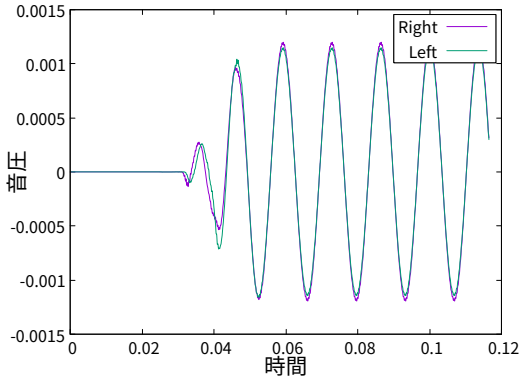


Fig.12　散乱波の左右の耳への影響（紫線：右耳, 緑線：左耳）

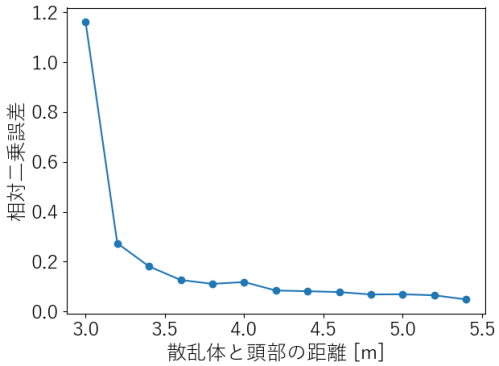


Fig.14　音源と頭部の距離と近似誤差の関係

Fig.11 は, 散乱体が右にある状態を保ちながら, 頭部中心を $(x, 0, 1)\,\mathrm{m}\,(x = -4, -6, -8)$ に配置して散乱波のみを計算した結果である. 頭部が散乱体から離れるにしたがって散乱波が減衰していることがわかる.

また, Fig.8 の配置における散乱波の左右の耳への応答の差を調べた. 音源が正弦波 1 波長分のみでは耳孔における応答がわかりにくかったため, 持続的な正弦波を音源として左右の耳への散乱波の影響を計算したものが Fig.12 である. 散乱波のみに対しても Fig.4 と似た応答を示しており, 妥当な結果が得られている.

4.3. 遠方近似による精度と高速化の検証

3.2 節で示した遠方近似手法による信号の生成と, その精度について実験した結果を掲載する.　頭部, 音源と散乱体の位置

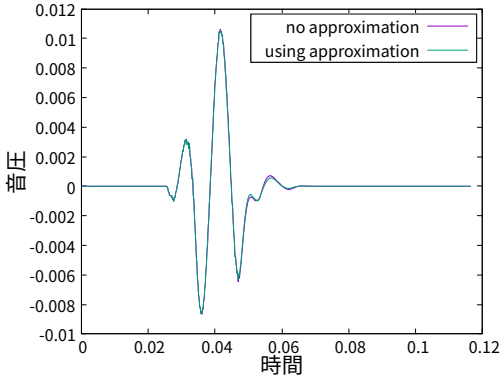


Fig.13　遠方近似の有無による計算結果の違い（紫線：近似なし, 緑線：遠方近似あり）

は前節と同様に Fig.8 のものとし, 近似計算の精度を確かめた. Fig.13 は, 近似計算により求めた入射波と散乱波を合わせた左耳への応答と, 近似せずにもとめた左耳への応答をプロットしたものである. 近似により概ね妥当な信号を生成できている.

また, 先述の一般的なスペックの PC で実行する際に, 信号生成に使用するすべての HRTF 音源点における音圧の勾配を保存するまでの実行時間の計測を行った（境界積分方程式を数値的に解く部分は計算時間に含めていない）. 勾配を畳み込みで計算して HRTF を畳み込む作業を各方向に行うかどうかのでほぼ全体で近似を利用している. 近似計算を行った場合は 22.95 sec, 行わない場合は 65.40 sec となり, 遠方近似により計算時間が短縮されていることが確認できる. 今回は行わなかったが, この近似により並列化が可能となるため, 並列化を利用すればさらに速くなると考えられる.

Fig.14 は, 散乱体の中心と頭部中心の距離による近似精度の関係を示したものである. 誤差 e は, 散乱波のみの遠方近似計算による数値解 $u^{\mathrm{sca}}_{\mathrm{approx}}(m\Delta s)$ と, 遠方近似を行わない方法による数値解 $u^{\mathrm{sca}}(m\Delta s)$ を用い, 以下の式で算出した.

$$e = \frac{\sum_m \left| u^{\mathrm{sca}}_{\mathrm{approx}}(m\Delta s) - u^{\mathrm{sca}}(m\Delta s) \right|^2}{\sum_m u^{\mathrm{sca}}(m\Delta s)^2} \tag{25}$$

Fig.14 により, 散乱体から 4 m 程離れれば, 実用的な精度で散乱場が再現できていると考えられる.

5. 結論

境界要素法による音場の計算と頭部伝達関数の組み合わせにより, 簡単な入力に対して音像定位が可能なバイノーラル信号を生成できた. また, 近似計算により, 散乱体が遠方にある場合の散乱場の計算を, ある程度の精度を保ちながら削減することができた. なお, 今回作成した音はあくまで仮想空間上の人の耳に届く音であり, これを VR 機器などで再生する際はヘッドホンの特性を考慮したフィルタ処理などが必要になる. フォーマットを定めて適切な HRTF データセットを用意することで, 個人に合わせた音像を作り出すことも可能であると考えられる.

現在の実装では様々な簡略化を行っており, 実際の問題に即した実装とすることは今後の課題である. 加えて, VR を目標とするにはリアルタイムでの計算が必要になるが, これと比べると現在は計算が遅いため, さらに近似等の手法を考えて高速化を図ることも課題として考えられる. また, 現在の境界要素法の数値計算手法では固定音源にのみ対応できる. VR のような仕組みを考

える場合, 移動する音源に対応するのも今後の課題である. また, この研究で考察した手法を逆解析の応用問題に適用して研究することを今後の展望とする.

参考文献

(1) 岩谷幸雄: 頭部伝達関数による音像定位——個人化へ向けたデータ群と課題——, 日本音響学会誌 73.3, pp. 173-180, 2017.

(2) 小泉宣夫: バーチャル・リアリティと音響技術 (〈小特集〉バーチャル・リアリティ), 日本音響学会誌 49.7, pp. 497-501, 1993.

(3) 星和磨, 羽入敏樹, 関口克明: 室形状の周波数別自動生成を組み込んだ音線法による音響シミュレーション, 日本建築学会環境系論文集 73.625, pp. 267-274, 2008.

(4) 谷川将規, 宇野昌利, 宮瀬文裕: 騒音対策支援のための可聴化システム, 清水建設研究報告 第 93 号, 平成 28 年 1 月.

(5) 吉川仁, 西上駿祐: 遠方近似を用いた 3 次元時間域境界要素法による仮想空間における移動点のリアルタイム可聴化, 計算数理工学論文集 Vol.21, pp. 125-130, 2021.

(6) HRTF Measurements of a KEMAR Dummy-Head Microphone, `https://sound.media.mit.edu/resources/KEMAR.html`

(7) 橘秀樹: 室内音響測定の現状と今後の課題, 日本音響学会誌 49.2, pp. 97-102, 1993.

計算数理工学論文集 Vol. 22 (2022 年 12 月)，論文 No. 16-221216 JASCOME

半解析的有限要素法を用いた地中に埋設された上水道管中のガイド波の分散解析

DISPERSION ANALYSIS OF GUIDED WAVES IN A WATER PIPE BURIED IN THE GROUND USING SEMI-ANALYTICAL FINITE ELEMENT METHOD

丸山　泰蔵 [1)]，中畑　和之 [2)]

Taizo MARUYAMA and Kazuyuki NAKAHATA

1) 愛媛大学大学院理工学研究科　(〒 790-8577　愛媛大学松山市文京町 3 番,　E-mail: maruyama@cee.ehime-u.ac.jp)
2) 愛媛大学大学院理工学研究科　(〒 790-8577　愛媛大学松山市文京町 3 番,　E-mail: nakahata@cee.ehime-u.ac.jp)

This paper presents a dispersion analysis method for guided waves propagating in a fluid-filled pipe buried in the ground. The proposed method is based on a semi-analytical finite element (SAFE) method in the cylindrical coordinate system, and a radiation condition of the ground is treated exactly. A nonlinear eigenvalue problem has to be solved under the radiation condition, and it is solved numerically using the Sakurai-Sugiura method. The present numerical results almost agree with the conventional numerical solutions obtained by the SAFE with a perfect matching layer.

Key Words: Dispersion Analysis, Guided Waves, Semi-Analytical Finite Element Method

1. はじめに

社会基盤構造物には板，棒，管のような長大構造が使用される場合がある．ガイド波は長大構造物中を低減衰で長手方向に伝搬することが知られており，ガイド波の特性を活かせれば効率的な検査やモニタリングに期待できる．ガイド波は分散性と多重モード性を有するため，ガイド波の特性の把握には分散解析が必要である．ガイド波の伝搬方向のみを解析的に扱う半解析的有限要素法 [(1)]（Semi-Analytical Finite Element Method: SAFE Method）は任意の断面形状や層構造を有する導波路を容易に取り扱える数値解析手法である．多くの場合，SAFE では分散解析が最終的に一般化固有値問題に帰着されるため，LAPACK 等のライブラリによって容易に解くことができる．さらに，左右の固有ベクトルを用いることで，数値微分を行うことなく群速度を計算可能である．これらの利点から近年，SAFE は分散解析に広く用いられている．

パイプラインのように導波路が流体や固体中に埋設されている場合，導波路の外部領域を無限領域としてモデル化する場合が多い．しかしながら，SAFE で無限領域を扱う場合には，通常の FEM と同様に吸収境界の設定等，何らかの処置が必要となる．無限領域での放射条件を厳密に扱う場合，波数と周波数の関係が複雑になり，最終的に帰着される問題は非線形固有値問題となる．例外として，板の周りに流体が存在する場合は 3 次の多項式固有値問題に帰着され，一般化固有値問題に変換できることが報告されている [(2)]．一方，Mazzotti ら [(3)] は一般的な任意断面形状に対する解析方法として SAFE と 2.5 次元境界要素法を組み合わせた方法を報告している．Mazzotti らは Beyn[(4)] の複素平面上における経路積分による方法を用いて非線形固有値問題を解いている．一方，実問題で扱うことの多い軸対称導波路に対する問題では，Perfectly Matched Layer (PML) を用いた定式化 [(5, 6)] や Scaled Bounday FEM (SBFEM) による定式化 [(7)] が報告されているものの，SAFE で放射条件を厳密に取り扱った例は無いと思われる．

本研究では，上水道管のモニタリング技術の開発を見据えて，地中に埋設された円管を対象として軸対称導波路に対する SAFE を用いた分散解析を行う．管の外部は無限に広がる等方性弾性体として放射条件は解析的に取り扱い，最終的に帰着される非線形固有値問題は Sakurai-Sugiura Method[(8)] (SSM) を用いて数値的に解く．

2. 解くべき問題

本研究では時間調和な波動場を考え，時間因子は $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$ とする．ここで，i は虚数単位，ω は角周波数，t は時刻である．

Fig. 1 に示すように，流体で満たされた円管が地中に埋

2022 年 10 月 27 日受付，2022 年 11 月 19 日受理

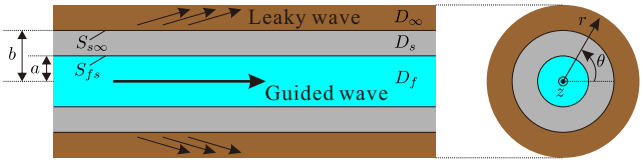


Fig. 1　Fluid-filled pipe buried in the ground.

設されており，長手方向に伝搬するガイド波を考える．円管の長手方向を z，径方向を r，周方向を θ とする円筒座標系 (r,θ,z) によって 3 次元空間中の座標を表す．流体領域 D_f，固体領域 D_s，外部領域 D_∞ は以下のように定義している．

$$D_f = \{(r,\theta,z) \mid r \in [0,a), \theta \in [0,2\pi), z \in (-\infty,\infty)\}$$
$$D_s = \{(r,\theta,z) \mid r \in (a,b), \theta \in [0,2\pi), z \in (-\infty,\infty)\}$$
$$D_\infty = \{(r,\theta,z) \mid r \in (b,\infty), \theta \in [0,2\pi), z \in (-\infty,\infty)\}$$

また，それぞれの領域間の境界は以下のように定義する．

$$S_{fs} = \{(r,\theta,z) \mid r = a, \theta \in [0,2\pi), z \in (-\infty,\infty)\}$$
$$S_{s\infty} = \{(r,\theta,z) \mid r = b, \theta \in [0,2\pi), z \in (-\infty,\infty)\}$$

流体領域 D_f では音圧 p が次の Helmholtz 方程式を満足すると仮定する．

$$\nabla^2 p(\boldsymbol{x}) + \frac{\omega^2}{c_f^2} p(\boldsymbol{x}) = 0 \qquad \text{for } \boldsymbol{x} \in D_f \tag{1}$$

ここで，c_f は流体中の音速である．一方，固体領域 D_s では，次の運動方程式，構成則，ひずみ–変位関係を仮定する．

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}) + \rho_s(r)\omega^2 \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0} \qquad \text{for } \boldsymbol{x} \in D_s \tag{2}$$
$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{C}(r) : \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{x}) \qquad \text{for } \boldsymbol{x} \in D_s \tag{3}$$
$$\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\left\{\nabla \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) + (\nabla \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}))^{\mathrm{T}}\right\} \qquad \text{for } \boldsymbol{x} \in D_s \tag{4}$$

ここで，$\boldsymbol{\sigma}$，$\boldsymbol{\epsilon}$，$\boldsymbol{u}$ はそれぞれ応力，ひずみ，変位であり，上付き T は転置を示している．また，$\mathbf{C}$ は弾性係数テンソル，ρ_s は密度であり，本研究では軸対称導波路を想定するため，r にのみ依存するものとする．外部領域 D_∞ では，固体領域 D_s と同様の基礎式 (2)–(4) を仮定するが，弾性係数テンソル $\mathbf{C}$，密度 ρ_s は定数とする．

流体–固体界面 S_{fs} では，摩擦を無視し，法線方向の変位と応力の連続条件を考慮して次の境界条件を仮定する．

$$t_z^{(s)} = t_\theta^{(s)} = 0 \qquad \text{on } S_{fs} \tag{5}$$
$$t_r^{(s)} = -p^{(f)} \qquad \text{on } S_{fs} \tag{6}$$
$$\omega^2 u_r^{(s)} = \frac{1}{\rho_f} q^{(f)} \qquad \text{on } S_{fs} \tag{7}$$

ここで，ρ_f は流体の密度，$q = \partial p/\partial r$ であり，上付き添字はそれぞれの領域から S_{fs} に極限移行した物理量であることを示している．また，$\boldsymbol{t}$ は表面力であり，r 方向の単位ベクトル $\mathbf{e}_r$ を用いて次のように定義している．

$$\boldsymbol{t} = \mathbf{e}_r \cdot \boldsymbol{\sigma}$$

一方，固体–外部領域界面 $S_{s\infty}$ では，完全接合と仮定して変位と表面力の連続条件を考慮する．

$$\boldsymbol{u}^{(s)} = \boldsymbol{u}^{(\infty)} \qquad \text{on } S_{s\infty} \tag{8}$$
$$\boldsymbol{t}^{(s)} = \boldsymbol{t}^{(\infty)} \qquad \text{on } S_{s\infty} \tag{9}$$

外部領域 D_∞ では，$r \to \infty$ に対する次の放射条件を仮定する．

$$\frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}}\left(r\frac{\partial}{\partial r} + z\frac{\partial}{\partial z}\right)\boldsymbol{u}_\varphi^{(\infty)} - \mathrm{i}k_\varphi \boldsymbol{u}_\varphi^{(\infty)} = o\left(r^{-1}\right) \tag{10}$$
$$\boldsymbol{u}_\varphi^{(\infty)} = o\left(r^0\right) \tag{11}$$

ここで，$(\varphi = L \text{ or } T)$ であり，$k_\varphi = \omega/c_\varphi$ である．c_L，c_T はそれぞれ縦波，横波の伝搬速度，$\boldsymbol{u}_L$，$\boldsymbol{u}_T$ はそれぞれ変位の縦波成分，横波成分を表している．

以上によって表される領域中を z 方向に伝搬するガイド波の分散関係を求めることが本論文で解くべき問題である．

3. 半解析的有限要素法の定式化

3.1. 流体で満たされた円管に対する定式化

重み関数 $\tilde{\psi}(\boldsymbol{x})$ を用いて重み付き残差法を適用すると，流体領域，固体領域それぞれに対して次式が得られる．

$$\int_{S_{fs}} \tilde{\psi}(\boldsymbol{x}) q(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}S_x - \int_{D_f} \nabla\tilde{\psi}(\boldsymbol{x}) \cdot \nabla p(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}D_x + \frac{\omega^2}{c_f^2}\int_{D_f} \tilde{\psi}(\boldsymbol{x}) p(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}D_x = 0 \tag{12}$$

$$\int_{S_{s\infty}} \tilde{\psi}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{t}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}S_x - \int_{S_{fs}} \tilde{\psi}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{t}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}S_x - \int_{D_s} \nabla\tilde{\psi}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}D_x + \omega^2 \int_{D_s} \tilde{\psi}(\boldsymbol{x})\rho_s(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}D_x = \boldsymbol{0} \tag{13}$$

式 (1)–(4) より，流体中の音圧 p，固体中の変位 $\boldsymbol{u}$ は次のように表すことができる [1]．

$$p(\boldsymbol{x}) = P(r)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n\theta+\xi z)} \tag{14}$$
$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{U}(r)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n\theta+\xi z)} \tag{15}$$

ここで，$n \in \mathbb{Z}$ は θ 方向の次数，$\xi \in \mathbb{C}$ は z 方向の波数である．音圧勾配 q，表面力 $\boldsymbol{t}$ も同様に次のように表わせる．

$$q(\boldsymbol{x}) = Q(r)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n\theta+\xi z)} \tag{16}$$
$$\boldsymbol{t}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{T}(r)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n\theta+\xi z)} \tag{17}$$

重み関数 $\tilde{\psi}(\boldsymbol{x})$ は $\tilde{\psi}(\boldsymbol{x}) = \psi(r)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n\theta+\xi z)}$ と設定すると，式 (12)，(13) は次のように変形できる．

$$\int_0^a \left[\left(\mathcal{E}_r - \mathrm{i}n\mathcal{E}_\theta - \mathrm{i}\xi\mathcal{E}_z\right)\psi(r)\right]^{\mathrm{T}}\left[\left(\mathcal{E}_r + \mathrm{i}n\mathcal{E}_\theta + \mathrm{i}\xi\mathcal{E}_z\right)P(r)\right] r\mathrm{d}r - \frac{\omega^2}{c_f^2}\int_0^a \psi(r)P(r)r\mathrm{d}r - a\psi(a)Q(a) = 0 \tag{18}$$

$$\int_a^b \left[\left(\mathcal{D}_r - \mathrm{i}n\mathcal{D}_\theta - \mathrm{i}\xi\mathcal{D}_z\right)\psi(r)\right]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}(r) \times \left[\left(\mathcal{D}_r + \mathrm{i}n\mathcal{D}_\theta + \mathrm{i}\xi\mathcal{D}_z\right)\boldsymbol{U}(r)\right] r\mathrm{d}r - \omega^2\int_a^b \psi(r)\rho_s(r)\boldsymbol{U}(r)r\mathrm{d}r - \left[b\psi(b)\boldsymbol{T}(b) - a\psi(a)\boldsymbol{T}(a)\right] = \boldsymbol{0} \tag{19}$$

ここで，$\boldsymbol{C}$ は弾性定数テンソル $\mathbf{C}$ を Voigt 表記 (6×6 行列) で表したものである．また，$\mathcal{E}_r$，$\mathcal{E}_\theta$，$\mathcal{E}_z$，$\mathcal{D}_r$，$\mathcal{D}_\theta$，$\mathcal{D}_z$ は微分演算子を含む行列であり次のように定義している．

$$\mathcal{E}_r = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{E}_\theta = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{r} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{E}_z = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{D}_r = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 & 0 \\ \frac{1}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial r} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{D}_\theta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{r} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{D}_z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

式 (18)，(19) に対して境界条件 (5)–(9)，放射条件 (10)，(11) を考慮すると次のように変形できる．

$$\int_0^a \left[\left(\mathcal{E}_r - \mathrm{i}n\mathcal{E}_\theta - \mathrm{i}\xi\mathcal{E}_z\right)\psi(r)\right]^{\mathrm{T}} \left[\left(\mathcal{E}_r + \mathrm{i}n\mathcal{E}_\theta + \mathrm{i}\xi\mathcal{E}_z\right)P(r)\right] r\mathrm{d}r - \frac{\omega^2}{c_f^2}\int_0^a \psi(r)P(r)r\mathrm{d}r - a\psi(a)\rho_f\omega^2 U_r(a) = 0 \quad (20)$$

$$\int_a^b \left[\left(\mathcal{D}_r - \mathrm{i}n\mathcal{D}_\theta - \mathrm{i}\xi\mathcal{D}_z\right)\psi(r)\right]^{\mathrm{T}} \boldsymbol{C}(r) \times \left[\left(\mathcal{D}_r + \mathrm{i}n\mathcal{D}_\theta + \mathrm{i}\xi\mathcal{D}_z\right)\boldsymbol{U}(r)\right] r\mathrm{d}r - \omega^2\int_a^b \psi(r)\rho_s(r)\boldsymbol{U}(r)r\mathrm{d}r - \left[b\psi(b)\boldsymbol{W}(b,\xi,\omega)\boldsymbol{U}(b) + a\psi(a)P(a)\mathbf{e}_r\right] = \mathbf{0} \quad (21)$$

ここで，$\boldsymbol{W}$ は外部領域 D_∞ の放射条件を考慮した変位から表面力への変換行列であり，次小節で詳細の説明を行う．

3.2. 外部領域における放射条件の処理

外部領域 D_∞ を等方性弾性体とすると，変位場はポテンシャル関数 ϕ，$\boldsymbol{\psi}$ を用いて次式で表される．

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \nabla\phi(\boldsymbol{x}) + \nabla\times\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x}) \quad (22)$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x}) = 0 \quad (23)$$

ポテンシャル関数 ϕ，$\boldsymbol{\psi}$ は Helmholtz 方程式を満たすため，円筒座標系の θ，z に関する因子を $\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta+\mathrm{i}\xi z}$ であると仮定すれば，放射条件を満たす解は次のように表される．

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \Phi H_n^{(1)}(\eta_L r)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta+\mathrm{i}\xi z} \quad (24)$$

$$\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\Psi} H_n^{(1)}(\eta_T r)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta+\mathrm{i}\xi z} \quad (25)$$

ここで，$\eta_\varphi = \sqrt{k_\varphi^2 - \xi^2}$, $(\varphi = L \text{ or } T)$，$H_n^{(1)}$ は n 次の第一種 Hankel 関数，Φ と $\boldsymbol{\Psi}$ は任意振幅である．式 (24)，(25) を式 (22) に代入し，式 (23) を用いて Ψ_z を消去すると，以下の $\boldsymbol{U}$，$\boldsymbol{T}$ の表現が得られる．

$$U_r(r) = \Phi\left\{\frac{n}{r}H_n^{(1)}(\eta_L r) - \eta_L H_{n+1}^{(1)}(\eta_L r)\right\} - \Psi_r\frac{n}{\xi r}\left\{\frac{n+1}{r}H_n^{(1)}(\eta_T r) - \eta_T H_{n+1}^{(1)}(\eta_T r)\right\} - \Psi_\theta\left(\mathrm{i}\xi + \frac{\mathrm{i}n^2}{\xi r^2}\right)H_n^{(1)}(\eta_T r) \quad (26)$$

$$U_\theta(r) = \Phi\frac{\mathrm{i}n}{r}H_n^{(1)}(\eta_L r) + \Psi_r\frac{\mathrm{i}}{\xi}\left(k_T^2 - \frac{n^2-1}{r^2}\right)H_n^{(1)}(\eta_T r) + \Psi_\theta\frac{n}{\xi r}\left\{\frac{n-1}{r}H_n^{(1)}(\eta_T r) - \eta_T H_{n+1}^{(1)}(\eta_T r)\right\} \quad (27)$$

$$U_z(r) = \Phi\mathrm{i}\xi H_n^{(1)}(\eta_L r) - \Psi_r\frac{\mathrm{i}n}{r}H_n^{(1)}(\eta_T r) + \Psi_\theta\left\{\frac{n+1}{r}H_n^{(1)}(\eta_T r) - \eta_T H_{n+1}^{(1)}(\eta_T r)\right\} \quad (28)$$

$$T_r(r) = \Phi\left[\left\{2\mu\left(\frac{n(n-1)}{r^2} + \xi^2\right) - \rho_s\omega^2\right\}H_n^{(1)}(\eta_L r) + \frac{2\mu\eta_L}{r}H_{n+1}^{(1)}(\eta_L r)\right] + \Psi_r\frac{2n\mu}{\xi r}\left[\left\{k_T^2 - \xi^2 - \frac{(n+1)(n-2)}{r^2}\right\}H_n^{(1)}(\eta_T r) - \frac{\eta_T}{r}H_{n+1}^{(1)}(\eta_T r)\right] + \Psi_\theta\frac{2\mathrm{i}\mu}{\xi r}\left[-n\left\{\frac{n(n-2)}{r^2} + \xi^2\right\}H_n^{(1)}(\eta_T r) + \eta_T r\left(\frac{n^2}{r^2} + \xi^2\right)H_{n+1}^{(1)}(\eta_T r)\right] \quad (29)$$

$$T_\theta(r) = \Phi\frac{2\mathrm{i}n\mu}{r}\left\{\frac{n-1}{r}H_n^{(1)}(\eta_L r) - \eta_L H_{n+1}^{(1)}(\eta_L r)\right\} + \Psi_r\frac{\mathrm{i}\mu}{\xi r}\left[\left\{k_T^2(n-1) - \frac{(n+1)(2n^2-4n+3)}{r^2}\right\}H_n^{(1)}(\eta_T r) + \eta_T r\left(\frac{2n^2-1}{r^2} - k_T^2\right)H_{n+1}^{(1)}(\eta_T r)\right] + \Psi_\theta\frac{\mu}{\xi r}\left[\left\{\frac{n(2n^2-4n+3)}{r^2} + n\left(2\xi^2 - k_T^2\right)\right\}H_n^{(1)}(\eta_T r) + \frac{4n\eta_T}{r}H_{n+1}^{(1)}(\eta_T r)\right] \quad (30)$$

$$T_z(r) = \Phi 2\mathrm{i}\mu\left\{\frac{n\xi}{r}H_n^{(1)}(\eta_L r) - \xi\eta_L H_{n+1}^{(1)}(\eta_L r)\right\} + \Psi_r\frac{2\mathrm{i}n\mu}{r}\left\{-\frac{n}{r}H_n^{(1)}(\eta_T r) + \eta_T H_{n+1}^{(1)}(\eta_T r)\right\} + \Psi_\theta\mu\left(\frac{2n^2-1}{r^2} + 2\xi^2 - k_T^2\right)H_n^{(1)}(\eta_T r) \quad (31)$$

ここで，λ，μ は Lamé 定数である．式 (26)–(31) より，$\boldsymbol{U}$，$\boldsymbol{T}$ は次のように表せる．

$$\boldsymbol{U}(r) = \mathbf{H}_u(r,\xi,\omega)\begin{Bmatrix}\Phi\\ \Psi_r\\ \Psi_\theta\end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{T}(r) = \mathbf{H}_t(r,\xi,\omega)\begin{Bmatrix}\Phi\\ \Psi_r\\ \Psi_\theta\end{Bmatrix}$$

したがって，表面力と変位の関係は次のように得られる．

$$\boldsymbol{T}(r) = \boldsymbol{W}(r,\xi,\omega)\boldsymbol{U}(r) \quad (32)$$

$$\boldsymbol{W}(r,\xi,\omega) = \mathbf{H}_t(r,\xi,\omega)\left[\mathbf{H}_u(r,\xi,\omega)\right]^{-1} \quad (33)$$

変位から表面力への変換行列 $\boldsymbol{W}$ の陽な表現は複雑であるが，数値的に計算することは容易である．

3.3. 離散化

式 (20)，(21) 中の積分区間を分割し，未知量 P，$\boldsymbol{U}$ を形状関数 ϕ_i によって次のように離散近似する．

$$P(r) \simeq \sum_{j=1}^{N_f} P_j \phi_j(r) \tag{34}$$

$$\boldsymbol{U}(r) \simeq \sum_{j=N_f}^{N} \left(\boldsymbol{U}\right)_j \phi_j(r) \tag{35}$$

ここで，N_f は $[0,a]$ の区間の節点数，N は総接点数であり，節点は $r=0$ から $r=b$ まで順番に配置する．そのため，第 1 節点は $r=0$，第 N_f 節点は $r=a$，第 N 節点は $r=b$ に対応している．さらに，重み関数を $\psi=\phi_i$ とすると，次の離散化された方程式が得られる．

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{K}_1^f + \xi^2\mathbf{K}_3^f - \omega^2\mathbf{M}^f & -\omega^2\boldsymbol{\Delta}^f \\ \hline -\boldsymbol{\Delta}^s & \begin{array}{c}\mathbf{K}_1^s + \mathrm{i}\xi\left\{\mathbf{K}_2^s - \left(\mathbf{K}_2^s\right)^{\mathrm{H}}\right\} \\ +\xi^2\mathbf{K}_3^s - \omega^2\mathbf{M}^s \\ -\mathbf{W}(\xi,\omega)\end{array} \end{array}\right] \times \left\{\begin{array}{c}\mathbf{P}\\ \mathbf{U}\end{array}\right\} = \mathbf{0} \tag{36}$$

ここで，上付き H は共役転置である．式 (36) の各小行列の次元は $N_s = N - N_f + 1$ とすると，左上が $N_f \times N_f$，右上が $N_f \times 3N_s$，左下が $3N_s \times N_f$，右下が $3N_s \times 3N_s$ である．ベクトル $\mathbf{P}$，$\mathbf{U}$ の次元はそれぞれ N_f，$3N_s$ であり，次のように定義している．

$$\mathbf{P} = \left\{P_1, P_2, \cdots, P_{N_f}\right\}^{\mathrm{T}} \tag{37}$$

$$\mathbf{U} = \left\{\left(U_r\right)_{N_f}, \left(U_\theta\right)_{N_f}, \left(U_z\right)_{N_f}, \left(U_r\right)_{N_f+1}, \cdots, \left(U_z\right)_N\right\}^{\mathrm{T}} \tag{38}$$

式 (36) 中の各行列は次のように表される．

$$\left(\mathbf{K}_1^f\right)_{ij} = \int_0^a \left[\frac{\mathrm{d}\phi_i(r)}{\mathrm{d}r}\frac{\mathrm{d}\phi_j(r)}{\mathrm{d}r} + \frac{n^2}{r^2}\phi_i(r)\phi_j(r)\right] r\mathrm{d}r \tag{39}$$

$$\left(\mathbf{K}_3^f\right)_{ij} = \int_0^a \phi_i(r)\phi_j(r) r\mathrm{d}r \tag{40}$$

$$\left(\mathbf{M}^f\right)_{ij} = \frac{1}{c_f^2}\int_0^a \phi_i(r)\phi_j(r) r\mathrm{d}r \tag{41}$$

$$\left(\boldsymbol{\Delta}^f\right)_{ij} = \delta_{iN_a}\delta_{j1} a\rho_f \tag{42}$$

$$\left(\mathbf{K}_1^s\right)_{[3i-2:3i,3j-2:3j]} = \int_a^b \left[\mathbf{D}_1(\phi_I(r),r,n)\right]^{\mathrm{H}} \boldsymbol{C}(r)\mathbf{D}_1(\phi_J(r),r,n) r\mathrm{d}r \tag{43}$$

$$\left(\mathbf{K}_2^s\right)_{[3i-2:3i,3j-2:3j]} = \int_a^b \left[\mathbf{D}_1(\phi_I(r),r,n)\right]^{\mathrm{H}} \boldsymbol{C}(r)\mathbf{D}_2(\phi_J(r)) r\mathrm{d}r \tag{44}$$

$$\left(\mathbf{K}_3^s\right)_{[3i-2:3i,3j-2:3j]} = \int_a^b \left[\mathbf{D}_2(\phi_I^u(r))\right]^{\mathrm{H}} \boldsymbol{C}(r)\mathbf{D}_2(\phi_J^u(r)) r\mathrm{d}r \tag{45}$$

$$\left(\mathbf{M}^s\right)_{[3i-2:3i,3j-2:3j]} = \int_a^b \rho_s(r)\phi_I^u(r)\phi_J^u(r) r\mathrm{d}r\mathbf{I}_3 \tag{46}$$

$$\left(\boldsymbol{\Delta}^s\right)_{ij} = \delta_{i1}\delta_{jN_f} a \tag{47}$$

$$\left(\mathbf{W}(\xi,\omega)\right)_{[3i-2:3i,3j-2:3j]} = \delta_{iN_s}\delta_{jN_s} b\boldsymbol{W}(b,\xi,\omega) \tag{48}$$

ここで，$I = N_f + i - 1$，$J = N_f + j - 1$ であり，$\mathbf{I}_3$ は 3×3 の単位行列，δ_{ij} は Kronecker のデルタである．式 (43)–(45) に含まれる行列関数 $\mathbf{D}_1$，$\mathbf{D}_2$ は以下で定義している．

$$\mathbf{D}_1(\phi(r),r,n) = \begin{bmatrix} \frac{\partial\phi(r)}{\partial r} & 0 & 0 \\ \frac{\phi(r)}{r} & \frac{\mathrm{i}n\phi(r)}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\mathrm{i}n\phi(r)}{r} \\ 0 & 0 & \frac{\partial\phi(r)}{\partial r} \\ \frac{\mathrm{i}n\phi(r)}{r} & \frac{\partial\phi(r)}{\partial r} - \frac{\phi(r)}{r} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}_2(\phi(r)) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \phi(r) \\ 0 & \phi(r) & 0 \\ \phi(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

式 (36) において $\{\mathbf{P}^{\mathrm{T}}, \mathbf{U}^{\mathrm{T}}\}^{\mathrm{T}} \neq \mathbf{0}$ となる解がガイド波の解であり，その存在条件を求めることが分散解析である．

3.4. エネルギー速度

式 (36) で表される固有値問題を解けば，固有値からはガイド波の ξ，ω，n 関係，固有ベクトルからは変位と音圧の分布を求めることができる．一方，位相速度は得られた ω と ξ から直ちに求められるものの，実際の伝搬速度は位相速度と異なる．ガイド波は分散性を有するため，その波束は群速度もしくはエネルギー速度で伝搬する．粘性や漏洩が無い場合には群速度とエネルギー速度とは厳密に一致するが，そうでない場合には群速度は複素数となり物理的意味が不明確となる．そのため，本研究ではエネルギー速度を考慮する．

エネルギー速度 c_e は次の式で定義される [1]．

$$c_e = \frac{\frac{\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\int_R F_z \mathrm{d}S\mathrm{d}t}{\frac{\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\int_R \left(E_K + E_P\right)\mathrm{d}S\mathrm{d}t} \tag{49}$$

ここで，積分領域 R は外部領域を除く導波路断面であり，

$$R = \{(r,\theta,z) \mid r \in [0,b], \theta \in [0,2\pi), z = 0\}$$

である．また，F_z は z 方向のエネルギー流束密度，E_K は運動エネルギー密度，E_P はポテンシャルエネルギー密度である．そのため，エネルギー速度 c_e はガイド波による z 方向へのエネルギーの移動率を意味している．式 (49) は SAFE の定式化で用いた行列関数を用いて次のように表される．

$$c_e = \frac{c_{e;\mathrm{numer}}}{c_{e;\mathrm{denom}}} \tag{50}$$

$$c_{e;\mathrm{numer}} = \frac{2}{\rho_f\omega}\Re\left[\mathbf{P}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{H}}\left(\xi\mathbf{K}_3^f\right)\mathbf{P}_{\mathrm{R}}\right] + 2\omega\Im\left[\mathbf{U}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{H}}\left\{\xi\left(\mathbf{K}_2^s\right)^{\mathrm{H}} + \mathrm{i}\xi\mathbf{K}_3^s\right\}\mathbf{U}_{\mathrm{R}}\right]$$

$$c_{e;\mathrm{denom}} = \frac{1}{\rho_f\omega^2}\Re\left[\mathbf{P}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{H}}\left(\mathbf{K}_1^f + \xi\bar{\xi}\mathbf{K}_3^f\omega^2\mathbf{M}^f\right)\mathbf{P}_{\mathrm{R}}\right] + \Re\left[\mathbf{U}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{H}}\left(\mathbf{K}_1^s + \mathrm{i}\xi\mathbf{K}_2^s - \mathrm{i}\bar{\xi}\left(\mathbf{K}_2^s\right)^{\mathrm{H}} + \xi\bar{\xi}\mathbf{K}_3^s + \omega^2\mathbf{M}^s\right)\mathbf{U}_{\mathrm{R}}\right]$$

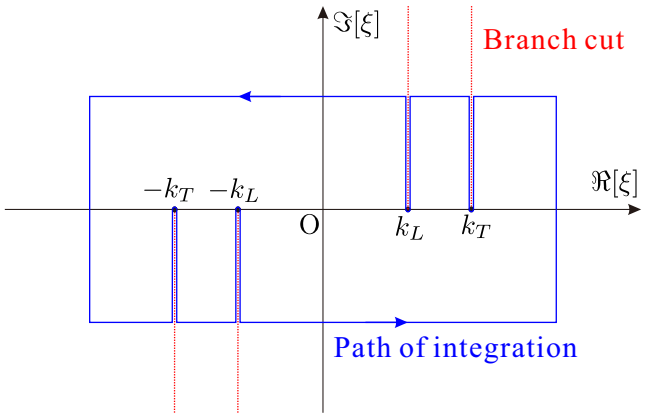


Fig. 2　Path of integration for Sakurai-Sugiura method.

ここで，$\Re[\,]$，$\Im[\,]$ はそれぞれ実部，虚部を表しており，$\overline{(\,)}$ は複素共役を表している．また，$\mathbf{P}_{\mathrm{R}}$，$\mathbf{U}_{\mathrm{R}}$ は右固有ベクトルのそれぞれ $\mathbf{P}$，$\mathbf{U}$ 部分を表している．式 (50) を用いれば，固有値問題 (36) を解いた後，単純な行列計算のみでエネルギー速度を計算できる．

4. ガイド波分散解析の数値的取り扱い

前節で示したように，式 (36) で表される固有値問題を解けば，ガイド波の ξ，ω，n 関係，そのときの変位，音圧分布が得られ，式 (50) からエネルギー速度を求められる．本節では，固有値問題 (36) を数値的に解く手順について説明する．

流体中の音圧 p は式 (14) によって表されるため，音圧の $r \to 0$ の極限値が θ に依存せず一意に定まる必要がある．そこで，次の条件を課す．

$$\lim_{r\to 0} P(r) = 0, \qquad (n \geq 1)$$

従って，$n \geq 1$ の場合は，$P_1 = 0$ として，式 (36) の 1 行目，1 列目を取り除いて以下の固有値解析を行う．

式 (36) の係数行列は，水道管の形状の情報と材料定数，及び ξ，ω，n を含んでいる．そのため，水道管の形状の情報と材料定数を既知量として与え，ω と n を固定して，$\{\mathbf{P}^{\mathrm{T}}, \mathbf{U}^{\mathrm{T}}\}^{\mathrm{T}} \neq \mathbf{0}$ となり得る ξ を探す固有値問題を解くこととする．その場合，式 (36) 中の $\mathbf{W}$ は ξ に関する非線形関数であるため，解くべき問題は非線形固有値問題である．本研究では SSM[8] を用いて非線形固有値問題を解く．なお，$\mathbf{W}$ は式 (33) 中の逆行列を数値的に計算して求める．

SSM は固有値に対応する変数に関する複素平面上での閉区間の経路積分を用いて，その閉区間で囲まれた領域内の固有値を求めることができる．このとき，対象とする行列関数は固有値を探す領域内で解析関数でなければならない．式 (36) 中の $\mathbf{W}$ は η_φ に起因して分岐カットを有するため，分岐カットを回避するように積分経路を選択する．Fig. 2 に分岐カットと本研究で用いた積分経路を示す．赤い破線が分岐カットであり，青い実線が積分経路である．

以上より，SSM を用いて固有値問題 (36) を解けば，固定された ω と n に対する ξ，$\mathbf{P}_{\mathrm{R}}$，$\mathbf{U}_{\mathrm{R}}$ が得られる．その後，これらを式 (50) に代入することでエネルギー速度を計算する．

Table 1　Material constants.

	L-wave velocity [m/s]	T-wave velocity [m/s]	Density [kg/m^3]
Water	1480	-	1000
Steel	5960	3260	7932
Soil	1540	300	2000

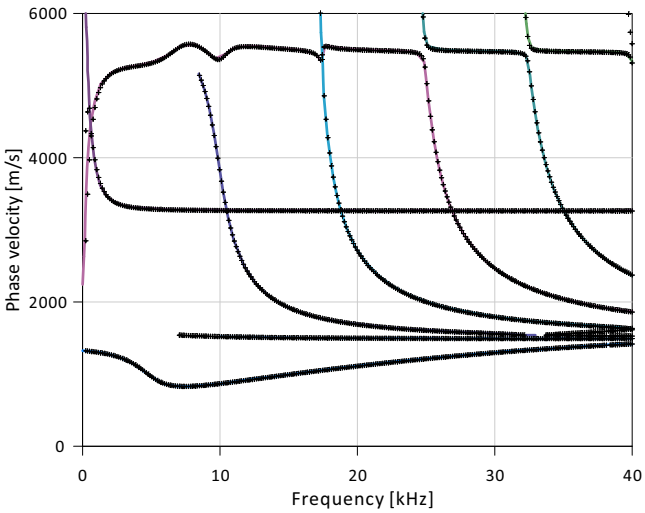


Fig. 3　Comparison of phase velocity dispersion curves between the present work and reference[6] when $n = 0$. Symbols + denote the present solutions, and solid lines denote the reference solutions.

5. 数値解析例

まず本手法の妥当性を示すため，Duan and Kirby[6] による解との比較を行う．流体領域 D_f は水，固体領域 D_s は鋼，外部領域 D_∞ は土だと想定して Table 1 の材料定数を用いた．管の寸法は $a = 101.36$mm，$b = 109.54$mm とした．本手法では θ，z 方向を解析的に扱うため，r 方向についてのみ 2 次要素で流体領域を 30 要素，固体領域を 4 要素に分割した．以上の計算条件は Duan and Kirby の計算条件と同じである．Fig. 3 に $n = 0$ の場合の位相速度分散曲線の計算結果を示す．位相速度 c_p は $c_p = \omega/\Re[\xi]$ として計算した．Fig. 3 より，両手法において概ね同様の解が得られていることがわかる．若干の違いが見られるのは，Duan and Kirby は PML を用いて計算しているため，その影響だと考えられる．

次に，流体-固体の連成の影響や外部領域の影響を調べるために，それぞれの領域を除去した場合との比較を行う．管の寸法は $a = b$ として，それぞれの領域に対して Fig. 3 と同様に Table 1 の材料定数を用いた．Fig. 4 には $n = 0$ としたときの外部領域が存在しない場合のエネルギー速度分散曲線の比較を示す．Fig. 4 上部に示すように，Water bar は剛体壁

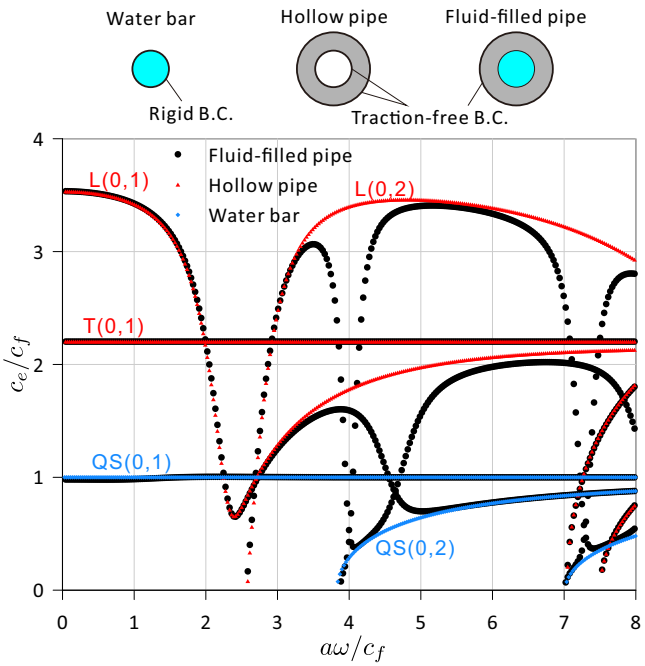


Fig. 4 Comparison of energy velocity dispersion curves among water bar, hollow pipe, and fluid-filled pipe when $n = 0$.

に囲まれた水の棒，Hollow pipe は表面力フリーの境界に囲まれた鋼の管である．また，Fluid-filled pipe は流体で満たされた管であるが，外部領域が存在せずに表面力フリーの境界条件を与えた場合である．Fig. 4 には伝搬モードのみを示しており，群速度とエネルギー速度は厳密に一致する．Hollow pipe の低次のモードには文献 (1) に倣って Longitudinal モードに L(n,m)，Torsional モードに T(n,m) のラベルを付けている．Water bar の低次のモードには Quasi-Scholte の意味で QS(n,m) のラベルを付けている．ここで，m は伝搬モードとして存在できる周波数の小さい順に 1 から番号を与えている．Fig. 4 より，$a\omega/c_f < 3$ では若干のずれはあるものの，Fluid-filled pipe においても T$(0,1)$，L$(0,1)$，QS$(0,1)$ と同様のモードが存在していることがわかる．一方，$a\omega/c_f > 3$ では，Fluid-filled pipe の分散曲線は L モードと QS モードを遷移し合うこと，T モードは遷移しないことがわかる．T$(0,m)$ モードは θ 方向変位 u_θ のみ発生するため，流体の影響を受けない．

Fig. 5 には地中に埋設された満水管に対する $n = 0$ の場合のエネルギー速度分散曲線を示す．ここで，プロットしている記号の色は $a\Im[\xi]$ に対応しており，値が大きいほど減衰が大きいことを意味している．Fig. 5 より，外部領域の影響として，減衰が発生していること，$a\omega/c_f = 2$ 付近と $a\omega/c_f = 7$ 付近に小さいエネルギー速度のモードが現れていることが見て取れる．固体領域から外部領域へのエネルギーの流出が減衰として作用するため，QS モードに近い部分では比較的減衰が小さくなっている様子がわかる．

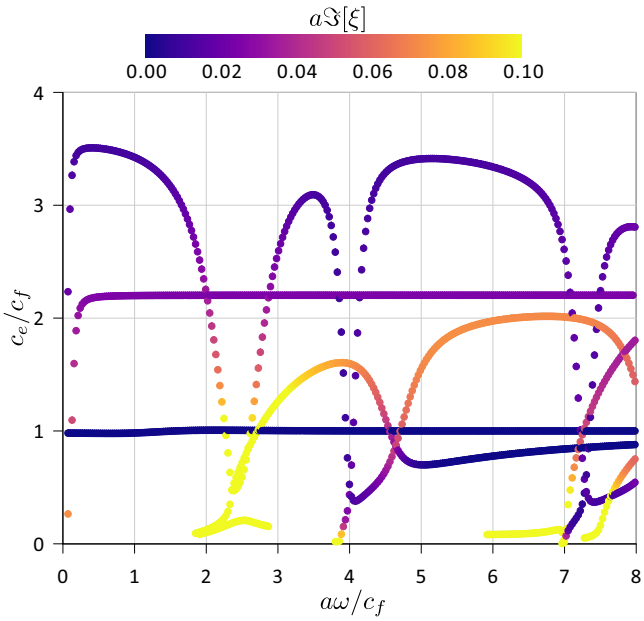


Fig. 5 Energy velocity dispersion curves for fluid-filled pipe buried in the ground when $n = 0$.

6. おわりに

本研究では，地中に埋設された上水道管を伝搬する音波を対象として，地中へのエネルギー漏洩を考慮したときの流体で満たされた円管中のガイド波の分散解析を行った．数値解析手法には SAFE を用い，外部領域での放射条件を厳密に満足するように解析解を境界条件として与えた．得られる固有値問題は非線形固有値問題となるため，SSM によって固有値を求めた．数値解析結果からは，PML を用いた場合と若干の相違が確認され，放射条件を厳密に扱っている本手法の方が適切な解であると判断される．

計算コストについて，本手法は，SSM を用いた固有値解析に必要となる経路積分の計算コストが周波数の増大と共に増大する．一方，PML によって近似的に放射条件を扱った場合 (5, 6) は一般化固有値問題を解くため，直接法を用いれば同様の計算コスト増大は無いと思われる．

上水道管中の音波計測に適した条件を調べ，モニタリング方法を開発することが今後の課題である．そのために本解析手法を用いて，遠方での受信が期待できる低減衰のガイド波のモードの特性把握を行い，そのモードの変位，音圧分布から適切な計測方法の設計を行う予定である．

謝辞： 本研究は JSPS 科研費 (22K14318) の助成を受けたものです．この場をお借りして感謝申し上げます．

参考文献

(1) J. Rose: Ultrasonic Guided Waves in Solid Media, (2014), Cambridge University Press.
(2) T. Hayashi and D. Inoue: Calculation of leaky Lamb waves with a semi-analytical finite element method, *Ultrasonics*, **54**(2014), pp. 1460–1469.

(3) M. Mazzotti, I. Bartoli, A. Marzani, and E. Viola: A coupled SAFE-2.5D BEM approach for the dispersion analysis of damped leaky guided waves in embedded waveguides of arbitrary cross-section, *Ultrasonics*, **53**(2014), pp. 1227–1241.

(4) W.-J. Beyn: An integral method for solving nonlinear eigenvalue problems, *Linear Algebra and its Applications*, **436**(2012), pp. 3839–3863.

(5) W. Duan, R. Kirby, P. Mudge, and T.-H. Gan: A one dimensional numerical approach for computing the eigenmodes of elastic waves in buried pipelines, *Journal of Sound and Vibration*, **384**(2016), pp. 177–193.

(6) W. Duan and R. Kirby: Guided wave propagation in buried and immersed fluid-filled pipes: Application of the semi analytic finite element method, *Computers & Structures*, **212**(2019), pp. 236–247.

(7) H. Gravenkamp, C. Birk, and C. Song: Computation of dispersion curves for embedded waveguides using a dashpot boundary condition, *The Journal of the Acoustical Society of America*, **135**(2014), pp. 1127–1138.

(8) S. Yokota and T. Sakurai: A projection method for nonlinear eigenvalue problems using contour integrals, *JSIAM Letters*, **5**(2013), pp. 41–44.

計算数理工学論文集 Vol. 22 (2022 年 12 月), 論文 No. 17-221216 JASCOME

トポロジー最適化における仮想的な物理モデルに基づく最大厚み制約

MAXIMUM THICKNESS CONSTRAINT FOR TOPOLOGY OPTIMIZATON BASED ON A FICTITIOUS PHYSICAL MODEL

酒井 虹太 [1)], 岡 大将 [2)], 山田 崇恭 [3)]

Kota SAKAI, Tomoyuki OKA and Takayuki YAMADA

1) 東京大学大学院工学系研究科 (〒113-0033 東京都文京区弥生 2-11-16 E-mail: sakai-kota786@g.ecc.u-tokyo.ac.jp)
2) 東京大学大学院工学系研究科 (〒113-0033 東京都文京区弥生 2-11-16 E-mail: tomoyuki-oka@g.ecc.u-tokyo.ac.jp)
3) 東京大学大学院工学系研究科 (〒113-0033 東京都文京区弥生 2-11-16 E-mail: t.yamada@mech.t.u-tokyo.ac.jp)

This paper presents a topology optimization method with maximum thickness constraint. A fictitious physical model is introduced to formulate (local) thickness. In this method, geometrical features are treated as in usual physical features, since geometrical features are characterized as solutions of governing equations represented as partial differential equations. In this paper, a topology optimization scheme for a linear elastic system with maxmum thickness constraint is formulated, and then a level-set method based on the reaction-diffusion equation is applied to represent boundaries of shapes finely. Futhermore, two-dimensional numerical examples will be provided to validate the proposed method.

Key Words: Structural optimization, Partial differential equation, Topology optimization, Level set method, Geometrical constraint, Thickness constraint

1. 緒言

トポロジー最適化は，ある目的汎関数を最小化するように設計空間内の材料分布を決定し，構造を最適化する手法である．トポロジー最適化は，構造最適化手法の中でも，最適化過程において位相の変更を許容した，最も設計自由度が高い手法として知られている．工学の分野では，Bendsøe and Kikuchi[(1)] による構造問題への展開を起点として，これまでに様々な構造設計問題への応用が報告されている．しかしながら，トポロジー最適化は高い設計自由度を持つ一方で，製造が困難な形状さえも最適構造として出力し得るため，製造可能性の観点から問題が生じている．したがって，実際の設計に応用する場合は設計者の経験に基づき試行錯誤による設計変更が要求されるが，その際，所望の物理的特性は保証されるとも限らず，最適性が失われることが示唆される．近年，この問題を解決するために，最適化過程において製造性についての制約を考慮する手法が注目されつつある．とりわけ，厚みに関する製造要件は重要視されている．一般に，最適構造の部材の最大厚みと最小厚みの差が大きい場合，その構造を標準的な大量生産プロセスに組み込むことは難しくなる．例えば，鋳造を用いる場合，製造過程における冷却の観点から厚すぎる構造は避けるべきであり，液体金属の充填を考えると，薄すぎる構造も適していない．また，プレス成形のように厚みがほぼ均一な構造を要求する製造プロセスも多い．以上のように，トポロジー最適化を実際の製造プロセスに応用するためには，構造に対して厚みを制御する必要がある．そのため，本研究では，厚みに関する製造性制約を取り扱う．

構造最適化問題における厚みに関する制約の定式化は様々な文献で議論されている．Allaire et.al.[(2)] では，符号付き距離関数に基づき，最小厚み制約，最大厚み制約を課した最適化手法が提案されている．この手法では，最大厚みと最小厚みの両者に対して複雑な定式化が必要であり，統一的に厚みの定義を与えていない．また，Carroll and Guest[(3)] では，均一な厚みを持った離散的構造を投影法に基づき最適化する手法が提案されている．しか

2022 年 10 月 27 日受付，2022 年 11 月 20 日受理

し，設計空間を制限する手法を用いているため，最適構造の初期構造依存性が高まる懸念が生じる．

他方，仮想的に物理モデルを考慮することで幾何学的特徴を記述する手法が近年開発されている．Sato et al.[4] では，幾何学的特徴に対する制約を仮想的な物理現象とその物理モデルを利用して定式化する基本的な考え方を提案した．この手法では，トポロジー最適化問題における型成形製造制約について移流拡散方程式を利用した定式化が行われている．仮想的な物理モデルの考え方は，偏微分方程式に基づき，幾何学的特徴量を抽出する手法として，積層造形における粉抜きに関する制約 [5] など様々な幾何学的制約に応用されている．特に，Yamada[6] では，仮想的な物理モデルの考え方を発展させ，様々な幾何学的特徴量を統一的に記述できる偏微分方程式系を提案した．本研究では，厚み制約を最適化問題として定式化するために，Yamada[6] により導入された仮想的な物理モデルを用いて，厚みを仮想的な物理モデルに基づいて定義する．仮想的に物理モデルを考えることで，幾何学的特徴量に対して一般的な物理場と同様に取り扱うことが可能となり，幾何学的特徴量についての汎関数に対して感度解析が可能になる．しかしながら，先行研究 [7] では，具体的な数値解析アルゴリズムや基盤的な幾何学的制約法の考え方の構築には至っておらず，所望の制約を満たす解が必ずしも得られない課題を持つ．そこで本研究では，厚みに関する幾何学的特徴を扱うための具体的な数値解析アルゴリズムを開発し，様々な設計問題への展開を目指した数理基盤を構築する．具体的には，（局所的な）厚みを仮想的な物理モデルの解に対してのある関数として構成し，厚み制約を考慮したトポロジー最適化問題を定式化する．また，ペナルティ法を用いたな無制約問題への置き換えにより，最適化過程において制約違反を許容した，初期構造依存性の低い手法を構築する．

なお，以下では仮想的な物理モデルによる厚みの制御手法の第一歩として，最大厚み制約についてのみ考慮する．

以下，本論文の構成について述べる．2 章ではトポロジー最適化の基礎概念について簡単に説明する．3 章では，仮想的な物理モデル及び（局所的な）厚みの定式化について述べる．4 章では，最大局所厚み制約を伴うトポロジー最適化問題の定式化について記述し，5 章ではその数値実装について説明する．6 章では数値解析例により，本研究で提案する手法の妥当性について検証する．最後に結言を述べる．

2. レベルセット法に基づくトポロジー最適化

2.1. トポロジー最適化の考え方

構造最適化問題は，固定設計領域 $D \subset \mathbb{R}^d$ $(d = 2, 3)$ 内で与えられる，ある目的汎関数 $J(\Omega)$ が最小化されるような領域 $\Omega \subset D$ を求める問題である．特に，目的汎関数を剛性や熱伝導特性などの物理的な指標とした場合，構造最適化問題はその物理現象を支配する支配方程式を用いて以下のように定式化される．

$$\inf_{\Omega \in \mathfrak{P}(D)} \quad J[u, \Omega] \tag{1}$$

$$\text{subject to :} \quad \text{governing equation (system) for } u. \tag{2}$$

ここで，$u = u_\Omega$ はある物理現象に則した支配方程式の解を意味する状態変数であり，$\mathfrak{P}(D)$ は固定設計領域に属する部分集合全体を表すものとする．また，目的汎関数 $\Omega \mapsto J[u, \Omega]$ は通常の変分問題とは異なり，領域 Ω を変数に持つ点に注意する．

トポロジー最適化問題では，領域 $\Omega \subset D$ を D 内の関数として表現するために以下のように表される特性関数 $\chi_\Omega \in L^\infty(D; \{0, 1\})$ を用いる．

$$\chi_\Omega(x) = \begin{cases} 1, & x \in \overline{\Omega}, \\ 0, & x \in D \backslash \overline{\Omega}. \end{cases} \tag{3}$$

ここで，構造最適化問題 (1)-(2) は次のように置き換えられる．

$$\inf_{\chi_\Omega \in L^\infty(D;\{0,1\})} \quad J[u, \chi_\Omega] \tag{4}$$

$$\text{subject to :} \quad \text{governing equation (system) for } u. \tag{5}$$

以上より，特性関数を用いた定式化によって領域 $\Omega \subset D$ は位相の変化が許容される．

2.2. トポロジー最適化の緩和と正則化

トポロジー最適化問題では，最適構造を与える最小化列の（弱）極限が設計空間 $L^\infty(D; \{0, 1\})$ に属さず，一般に，不良設定問題であることが知られている．詳細については Allaire[8] を参照されたい．したがって，適切に緩和することによって良設定問題に置き換える必要がある．設計空間の緩和に基づく手法では Bendsøe and Kikuchi[1] による均質化設計法が代表的な手法として知られており，その後，密度法 [9] に応用されている．また，勾配法と正則化項による摂動を組み合わせた Yamada et al.[10] によるレベルセット法に基づく手法も考案されている．この手法では，レベルセット関数と呼ばれるスカラー値関数の等位面により材料の形状 $\partial\Omega$ を表現する．特に，正則化項の寄与によって，形状 $\partial\Omega$ を明瞭に表現するだけに留まらず，その幾何学的複雑さも制御可能となる．本研究では，幾何学的な制約条件を取り扱うため，レベルセット法に基づく手法によって形状 $\partial\Omega$ が明確化されるという特徴に注目し，Yamada et al.[10] による手法を採用する．

2.3. 反応拡散方程式を用いたレベルセット法に基づく手法

Yamada et al.[10] によるレベルセット法に基づく手法について記述する．そこで，以下を満たすレベルセット関数 $\phi : D \to \mathbb{R}$

を導入する．

$$\begin{cases} \phi(x) > 0, & x \in \Omega, \\ \phi(x) = 0, & x \in \partial\Omega, \\ \phi(x) < 0, & x \in D \backslash \overline{\Omega}. \end{cases} \tag{6}$$

さらに，レベルセット関数 $\phi : D \to \mathbb{R}$ を用いることによって，特性関数 $\chi_\Omega \in L^\infty(D; \{0, 1\})$ は以下のように置き換えられる．

$$\chi_\phi(x) \coloneqq \chi_{[\phi \geq 0]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } \phi(x) \geq 0, \\ 0 & \text{if } \phi(x) < 0. \end{cases} \tag{7}$$

すなわち，レベルセット関数を適切に更新することによって最適構造 $\Omega \subset D$ が得られ，結果として，最適化問題 (4)-(5) は次のようにレベルセット関数 $\phi : D \to \mathbb{R}$ を用いて定式化される．

$$\inf_{\phi \in H^1(D)} \quad J[u, \chi_\phi] \tag{8}$$

$$\text{subject to :} \quad \text{governing equation system for } u. \tag{9}$$

ここで，$\phi \in H^1(D)$ は以下の反応拡散方程式の解を表す．

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = CJ' + \tau \nabla^2 \phi \quad \text{in } D \times \mathbb{R}_+. \tag{10}$$

ただし，$u = u_\phi$ とし，$C \in \mathbb{R}_+$ は正規化定数，$\tau \in \mathbb{R}_+$ は正則化係数とする．また，J' はトポロジー導関数 [11, 12] を表し，トポロジー導関数は領域に微小な介在物を導入した際に目的汎関数の変化量を介在物の体積で割った差分商を用いて定義される．ここで，(10) の右辺第二項は，レベルセット関数を正則化する項であり，正則化定数 τ の大きさによって，得られる形状の幾何学的複雑さを制御できる特徴を持つ．

3. 最大局所厚み制約の定式化

3.1. 幾何学的特徴量に関する仮想的な物理モデル

仮想的な物理モデルの考え方は，幾何学的特徴量をある偏微分方程式の解を用いて構成することであり，一般的な物理的特徴量と同様に，幾何学的特徴量を制約汎関数として構造最適化問題に導入可能となる．本研究では，Yamada[6] にて提案されている幾何学的特徴量を抽出可能な偏微分方程式系を利用して局所厚み制約を定式化する．そこで，以下の仮想的な物理モデルを表す偏微分方程式系を考える．

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\,(a \nabla s_i - \boldsymbol{e}_i \chi_E) + s_i(1 - \chi_E) = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^d, \\ \lim\limits_{|x| \to \infty} s_i(x) = 0. \end{cases} \tag{11}$$

ここで，$i = 1, 2, \ldots, d$，$\boldsymbol{e}_i = \{0, \ldots, 0, \overset{(i)}{1}, 0, \ldots, 0\} \in \mathbb{R}^d$ とする．また，$s_i \in H^1(\mathbb{R}^d)$ は状態変数，$a \in \mathbb{R}_+$ は十分に小さい拡散係数とし，領域 $E \subset \mathbb{R}^d$ に対する特性関数 $\chi_E \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ を以下のように定める．

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in \overline{E}, \\ 0, & x \in \mathbb{R}^d \backslash \overline{E}. \end{cases} \tag{12}$$

式 (11) の解が持つ性質を考察するため，以下の対応する弱形式を考える．

$$\int_{\mathbb{R}^d} a \nabla s_i \cdot \nabla t_i + s_i t_i (1 - \chi_E)\, \mathrm{d}x = \int_{\partial E} \boldsymbol{e_i} \cdot \boldsymbol{n} t_i \, \mathrm{d}\sigma. \tag{13}$$

ここで，$\boldsymbol{n}$ は ∂E 上における外向き法線ベクトル，$t_i \in H^1(\Omega)$ は試験関数とする．このとき，境界形状 ∂E の外側近傍に注目すると，拡散係数 $a \in \mathbb{R}_+$ が十分に小さい定数であるため，各 i に対して s_i と $\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{n}$ が深く関連していることが示唆される．実際，状態場のなすベクトル $\boldsymbol{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ の向きが外向き法線と一致することについて厳密な証明が行われている [13]．したがって，方程式 (11) の解を用いることで，曲率をはじめとした幾何学的特徴量が構成可能になり，様々な幾何学的制約を伴う最適化問題に対して (11) を用いた定式化が期待される．

3.2. 局所的な厚みの定式化

本研究では前節に基づき，以下の量を（局所的な）厚み $h_s \in L^2(E)$ として発見的に導入する．

$$h_s(x) = \frac{2}{\sqrt{a \nabla \cdot \boldsymbol{s}(x)}} \qquad \text{for a.e. } x \in E. \tag{14}$$

式 (14) は，一次元の場合や円環のような単純な二次元形状の場合，直感的な意味での厚みに対応することが数値的に確認できる．詳細については付録を参照されたい．

3.3. 最大局所厚み制約

本研究では，(14) を用いて，以下のペナルティ汎関数 $G_1 : H^1(\mathbb{R}^d)^d \to \mathbb{R}$ を最小化することによって最大厚み制約を表現する．

$$G_1(\boldsymbol{s}) = \int_E \max\{h_s(x)/h^* - 1, 0\}\, \mathrm{d}x \tag{15}$$

$$=: \int_E R(h_s(x)/h^* - 1)\, \mathrm{d}x \tag{16}$$

$$=: \int_E g_s(x)\, \mathrm{d}x. \tag{17}$$

ここで，$h^* \in \mathbb{R}_+$ は目標厚みとする．このとき，$G_1(\boldsymbol{s}) = 0$ が満たされるならば，領域 E 全域において $h_s(x) < h^*$ が成り立ち，最大厚み制約が満たされることを意味する．また，領域 $\mathbb{R}^d \setminus E$ では，$h_s(x)/h^* - 1 < 0$ が成り立つことが分かっており，以下が成り立つ．

$$G_1(\boldsymbol{s}) = \int_{\mathbb{R}_d} \max\{h_s(x)/h^* - 1, 0\}\, \mathrm{d}x \tag{18}$$

4. 最大局所厚み制約付きトポロジー最適化の定式化

4.1. 定式化

本研究では，固定設計領域 $D \subset \mathbb{R}^d$ の内部において，均質な等方性線形弾性方程式系に対するトポロジー最適化問題について考察する．ここでは，仮想的な物理モデルにおいて導入された領域 $E \subset \mathbb{R}^d$ は領域 $[\chi_\phi = 1] \coloneqq \{x \in D : \chi_\phi(x) = 1\}$ とする．拘束条件は ∂D 上の一部の境界 Γ_u で完全拘束，一部の境界 Γ_t で静的な表面力 $\boldsymbol{f} \in \mathbb{R}^d$ が負荷されているとし，$\Gamma_u \cap \Gamma_t = \emptyset$ とする．このとき，変位場を $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_\phi \in H^1_{\Gamma_u}(D)^d$ とすると，最大局所厚み制約を伴う平均コンプライアンス最小化問題は以下のように定式化される．

$$\inf_{\phi \in H^1(D)} \quad J[\boldsymbol{u}, \chi_\phi] = \int_{\Gamma_\mathrm{t}} \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{u} \, \mathrm{d}\sigma \tag{19}$$

subject to:

$$G_1(\boldsymbol{s}) = 0, \tag{20}$$

$$G_2(\phi) \coloneqq \int_D \chi_\phi \, \mathrm{d}x - G_\mathrm{max} \leq 0, \tag{21}$$

$$\int_D \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) : \mathbb{D}\chi_\phi : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}) \, \mathrm{d}x = \int_{\Gamma_\mathrm{t}} \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v} \, \mathrm{d}\sigma, \tag{22}$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} a \nabla s_i \cdot \nabla t_i + s_i t_i (1 - \chi_\phi) \, \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} \boldsymbol{e_i} \cdot \nabla t_i \chi_\phi \, \mathrm{d}x. \tag{23}$$

ここで，(22) は (13) において右辺にガウスの発散定理を適用して導かれる．また，$\boldsymbol{v} \in H^1_{\Gamma_\mathrm{u}}(D)$ は変位場に対するテスト関数，$G_\mathrm{max} \in \mathbb{R}_+$ は許容される体積の上限値，$\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \boldsymbol{u} + \nabla \boldsymbol{u}^T)$ はひずみテンソル，$H^1_{\Gamma_\mathrm{u}}(\Omega)^d$ は次に示す関数空間とする．

$$H^1_{\Gamma_u}(D)^d \coloneqq \{\boldsymbol{u} \in H^1(D)^d \ , \ \boldsymbol{u} = 0 \ \ \text{on} \ \Gamma_u\}. \tag{24}$$

弾性テンソル $\mathbb{D} \in \mathbb{R}^{d^4}$ は縦弾性係数 $\hat{E} \in \mathbb{R}$ とポアソン比 $v \in \mathbb{R}$ を用いて以下のように与えられるものとする．

$$\mathbb{D}_{ijkl} = \frac{v\hat{E}}{(1+v)(1-2v)} \delta_{ij}\delta_{kl} + \frac{\hat{E}}{2(1+v)} \delta_{ik}\delta_{jl}. \tag{25}$$

ここで，δ_{ij} はクロネッカーのデルタを表す．

4.2. 感度解析

本研究では，設計感度としてトポロジー導関数を用いる．平均コンプライアンス最小化問題に対するトポロジー導関数は以下のように表される [14]．

$$J'(x) = \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(x)) : \mathbb{A}\chi_\phi(x) : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(x)) \quad \text{for a.e. } x \in D. \tag{26}$$

ここで 4 階テンソル $\mathbb{A}$ は以下のように表される．

$$\mathbb{A}_{ijkl} = \frac{3(1-v)}{2(1+v)(7-5v)} \times \left\{ \frac{-(1-14v+15v^2)\hat{E}}{(1-2v)^2} \delta_{ij}\delta_{kl} + 5\hat{E}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{ij}\delta_{kl}) \right\}. \tag{27}$$

ペナルティ汎関数 $G_1 : H^1(\mathbb{R}^d)^d \to \mathbb{R}$ に対するトポロジー導関数については随伴変数法により求めることができ，対応する随伴方程式は以下のように表される．

$$\int_{\mathbb{R}^d} a \nabla s_i^* \cdot \nabla t_i^* + (1 - \chi_\phi) s_i^* t_i^* \, \mathrm{d}x = -\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial g_s}{\partial s_i} t_i^* + \frac{\partial g_s}{\partial \nabla s_i} \cdot \nabla t_i^* \, \mathrm{d}x. \tag{28}$$

ただし，$s_i^* \in H^1(\mathbb{R}^d)$ は随伴変数とし，$t_i^* \in H^1(\mathbb{R}^d)$ はテスト関数とする．また，トポロジー導関数 G_1' は，Amstutz[12, Proposition 2.1] における $\delta a - \delta l + \delta J_1 + \delta J_2$ に対応し，$\delta a = -\sum_{i=1}^d s_i s_i^*$, $\delta l = \sum_{i=1}^d \boldsymbol{e_i} \cdot \nabla s_i$, $\delta J_1 = \delta J_2 = 0$ を代入すると G_1' は以下のように表される．

$$G_1'(x) = -\sum_{i=1}^d (\boldsymbol{e_i} \cdot \nabla s_i^* + s_i s_i^*) \quad \text{for a.e. } x \in \mathbb{R}^d. \tag{29}$$

したがって，(25), (26), (28) を用いて反応項を構成した反応拡散方程式 (10) を用いてレベルセット関数を更新することで，最適構造 $[\chi_\phi = 1] \subset D$ について考察することができる．なお，汎関数 G_1 はペナルティ法，汎関数 G_2 は拡張ラグランジュ法に基づき，無制約問題として扱われる．

5. 数値実装法

5.1. 最適化アルゴリズム

本研究では，以下の手順で最適化計算を行う．

step 1. 初期レベルセット関数を設定する．

step 2. 有限要素法を用いて変位場 $\boldsymbol{u}$ 及び仮想的な物理場 $\boldsymbol{s}$ を求める．

step 3. 目的汎関数 J 及び制約汎関数 G_i $(i = 1, 2)$ を計算し，全ての制約条件を満たし，目的汎関数が更新されない場合，最適化を終了する．

step 4. 有限要素法を用いて随伴場 s_i^* を求め，トポロジー導関数を計算する．

step 5. 反応拡散方程式を解いてレベルセット関数の更新を行う．

有限要素法による数値解析では汎用有限要素解析ソフトウェア FreeFEM++[15] を用いる．

5.2. 変位場の近似解法

方程式 (13) と対応する強形式 (11) を比較すると，$-\mathbb{D}\chi_\phi \nabla u \cdot \boldsymbol{n} = 0$ が $\Gamma_\mathrm{N} \coloneqq \partial D \backslash (\Gamma_\mathrm{u} \cup \Gamma_\mathrm{t})$ 上で陰的に課されていることが分かる．しかし，特性関数 $\chi_\phi \in L^\infty(D)$ によって斉次 Neumann 境界条件が必ずしも Γ_N 上で課されるとは限らず，領域 $[\chi_\phi = 0]$ において，有限要素法を用いる場合，最適化の反復毎に境界形状に沿うような有限要素メッシュの再生成が必要となり，計算コストの問題が生じる．本研究では，Ersatz material approach[16] による変位場の近似解法を用いる．具体的には，以下のように固

定設計領域 D 全体に拡張された弾性テンソル $\tilde{\mathbb{D}}$ を用いる．

$$\tilde{\mathbb{D}} \coloneqq \{(1-\delta)H_\varepsilon(\phi)+\delta\}\,\mathbb{D}. \tag{30}$$

ここで，$\delta \in \mathbb{R}_+$ は 1 より小さい定数とし，領域 $D \setminus \overline{\Omega}$ 上でのヤング率が $\delta\hat{E}$ となるように定める．本研究では $\delta = 0.001$ とする．また，$H_\varepsilon(\phi)$ は以下で与えられる特性関数 $\chi_\phi \in L^\infty(D)$ の近似関数とする．

$$H_\varepsilon(\phi) \coloneqq \begin{cases} 0 & \text{if } \phi < -\varepsilon, \\ \frac{1}{2} + \frac{15}{16}\frac{\phi}{\varepsilon} - \frac{5}{8}(\frac{\phi}{\varepsilon})^3 + \frac{3}{16}(\frac{\phi}{\varepsilon})^5 & \text{if } -\varepsilon \le \phi < \varepsilon, \\ 1 & \text{if } \phi \ge \varepsilon. \end{cases} \tag{31}$$

ただし，$\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ は十分に小さい定数とする．このとき，固定設計領域 D における全境界 ∂D 上で常に境界条件が指定され，有限要素メッシュを再生成することなしに有限要素解析が可能になる．

5.3. 仮想的な物理モデルの近似解法

本研究で導入した仮想的な物理モデルは，全空間 $\mathbb{R}^d$ 上で与えられており，このままでは有限要素解析が困難である．ここでは，領域 $\mathbb{R}^d$ の代わりに，固定設計領域を包含するような十分に大きい有界領域 $\Omega_{\mathrm{R}} \subset \mathbb{R}^d$ に置き換えて以下の仮想的な物理モデルを考える．なお，(13) は外側領域 $[\chi_E = 0]$ において平滑化半径 $\sqrt{a}$ のヘルムホルツフィルターと解釈できるため，領域 Ω_R は固定設計領域 D より幅 $\sqrt{a}$ だけ大きい領域とすれば，近似したモデルは十分な精度が期待される．

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\,(a\nabla\tilde{s}_i - \boldsymbol{e}_i\chi_E) + \tilde{s}_i(1-\chi_E) = 0 & \text{in } \Omega_{\mathrm{R}}, \\ \tilde{s}_i = 0 & \text{on } \partial\Omega_{\mathrm{R}}. \end{cases} \tag{32}$$

ここで，$\tilde{s}_i \in H^1(\Omega_{\mathrm{R}})$ は近似的な解を意味する．

5.4. 局所厚み制約の平滑化

3.3 節の (16) で導入したランプ関数 R は原点において通常の意味での可微分性が得られないため，その導関数が不連続となる．本研究では，不連続関数を取り扱うことを前提としていない有限要素法を利用するため，数値実装上では以下のように近似ランプ関数 $\tilde{R}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を導入する．

$$\tilde{R}(x) = \frac{x + \sqrt{x^2+\eta}}{2}. \tag{33}$$

ここで，$\eta \in \mathbb{R}_+$ は十分に小さい定数で，本研究では $\eta = 0.01$ とする．さらに，ペナルティ汎関数 G_1 は仮想的な物理モデルの状態場 $\boldsymbol{s}$ に対する発散 $\nabla\cdot\boldsymbol{s}$ の逆数によって定義されるが，$\nabla\cdot\boldsymbol{s}$ は ∂E 上において不連続に変化し，符号が入れ替わる特徴を持つため，有限要素法を用いて連続関数により状態場 $\boldsymbol{s}$ を近似する本手法においては数値的な特異点となる可能性がある．よって，以下のように値域を $[0,1]$ に制限した近似ペナルティ汎関数 $\tilde{G}_1 : H^1(\Omega_R)^d \to \mathbb{R}$ を用いる．

$$\tilde{G}_1(\boldsymbol{s}) = \int_E \tilde{g}_s(x)\,\mathrm{d}x \tag{34}$$

$$=: \int_E 1 - \tilde{R}\left(1 - w\tilde{R}\left(\psi\left(\frac{h^*\sqrt{a}\nabla\cdot\boldsymbol{s}}{2} - 1\right)\right)\right)\,\mathrm{d}x, \tag{35}$$

$$\psi(x) \coloneqq \sum_{i=1}^{n}(-x)^i. \tag{36}$$

ここで，$w \in \mathbb{R}_+$ であり，$\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は関数 $-x/(1+x) : (-1,\infty) \to \mathbb{R}_+$ の $x=0$ における n 次のテイラー展開である．なお，制約違反の領域のみを抽出するためには，$x>0$ において $\psi < 0$ を満たすことが望ましく，n は奇数とすべきである．本研究では $n=5$ を用いる．

6. 数値解析例

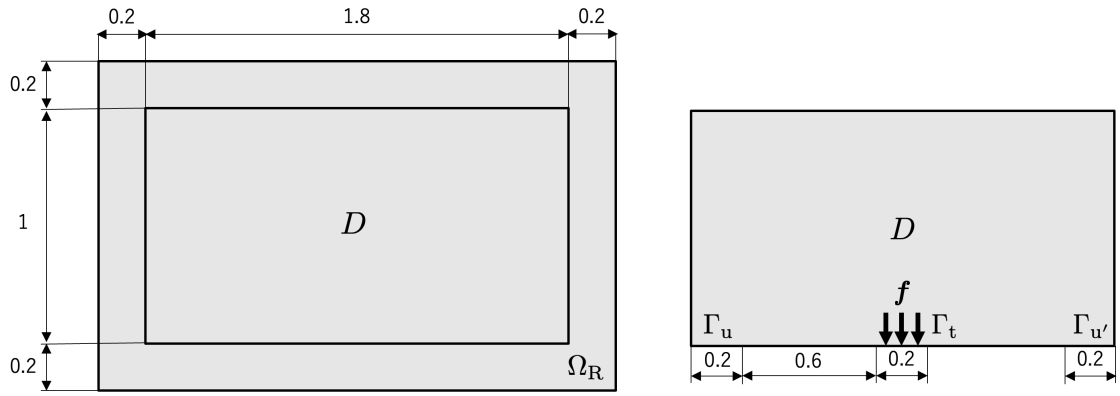
本節では，提案手法に対する妥当性を評価する．問題設定は MBB Beam と呼ばれる設計モデルを取り扱い，詳細は Fig.6 に示すように，固定設計領域 D は 1.8×1 の矩形領域とし，領域 Ω_{R} は固定設計領域 D を幅 0.2 で囲むような矩形領域とする．力学的条件は，固定設計領域 D の下辺中央部 Γ_t に下向き単位表面力 $\boldsymbol{f}$ を作用させ，左辺下部境界 Γ_{u} を完全拘束し，右辺下部境界 $\Gamma_{\mathrm{u}'}$ をローラー支持とする．最大体積は固定設計領域に対して 30% とし，正則化定数は $\tau = 3.0\times10^{-5}$ とする．なお，局所厚み制約と体積制約の設定に依存して，正則化定数を適切な値とする必要がある．

このとき，目標厚みをそれぞれ $h^* = 1/20, 2/35$ とすると，最大厚み制約を考慮した場合における最適構造として Fig.2(b), 2(c) が得られる．また，最大厚み制約を考慮しない場合における，最適構造は Fig.2(a) の通りである．ここで，最大厚み制約を考慮した場合とそうでない場合とで比較すると，Fig.2(a) では太い部材が減少していることが分かり，厚み制約という目的が達成されていることが確認できる．

7. 結言

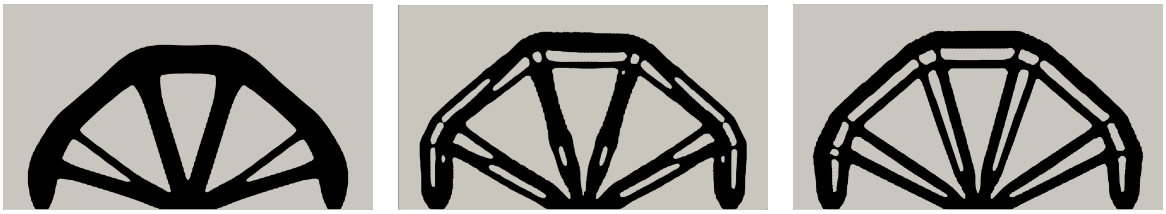
本研究では，仮想的な物理モデルを用いて，（局所的な）厚みを導入し，最大厚み制約に対するトポロジー最適化手法を提案した．本研究で得られた成果を次に示す．

- 仮想的な物理モデルを定式化し，弱形式を通してその性質を議論した．
- 仮想的な物理モデルの解を用いて（局所的な）厚みを導入した．
- 仮想的な物理モデルによりトポロジー最適化問題における最大厚み制約を定式化した．



(a) (b)

Fig.1 Two-dimensional problem setting: (a) conditions for fictitious physical model, (b) conditions for elastic problem



(a) $h^* = \infty$ (b) $h^* = 2/35$ (c) $h^* = 1/20$

Fig2 Optimized configrations: (a) Optimal configration without thickness constraint. (b), (c) Optimal configration with thickness constraint.

- 最大厚み制約を考慮したトポロジー最適化問題について数値実装法を提案した.
- 二次元平均コンプライアンス最小化問題に提案手法を適用し，方法論の妥当性を検討した.

8. 謝辞

本研究の一部は，JST 創発的研究支援事業の助成を受けました．この場を借りて御礼申し上げます.

9. 付録

9.1. 仮想的な物理モデルの一次元の場合の解析解

本節では，3 節で記述した仮想的な物理モデルに対して，一次元の場合を考え，その解析解を導出して厚みの定式化に関する正当性について記述する．ここでは，領域 E として半径 $h/2$ の一次元球を考える．したがって，対応する特性関数 χ_E は以下のように表される.

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & |x| \le h/2, \\ 0, & |x| > h/2. \end{cases} \tag{37}$$

また，仮想的な物理モデルは以下のように表される.

$$\begin{cases} -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(a\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}s_1 - \chi_E\right) + s_1(1-\chi_E) = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}, \\ \lim\limits_{|x|\to\infty} s_1(x) = 0. \end{cases} \tag{38}$$

このとき，(38) の解析解は以下のように表される.

$$s_1(x) = \begin{cases} -(\sqrt{a}+\frac{2a}{h})^{-1}\exp\left(\sqrt{\frac{1}{a}}(x+\frac{h}{2})\right), & x < -h/2, \\ 2(\sqrt{a}h+2a)^{-1}x, & |x| \le h/2, \\ (\sqrt{a}+\frac{2a}{h})^{-1}\exp\left(\sqrt{\frac{1}{a}}(x-\frac{h}{2})\right), & x > h/2. \end{cases} \tag{39}$$

ここで，$a \in \mathbb{R}_+$ が十分小さいとき，領域 E 内での状態場の傾きは以下の式を満たす.

$$\frac{\mathrm{d}s_1}{\mathrm{d}x}(x) = 2(\sqrt{a}h+2a)^{-1} \tag{40}$$

$$\simeq 2(\sqrt{a}h)^{-1} \qquad \text{for all } x \in \Omega. \tag{41}$$

すなわち，領域 E において状態場 s_1 の傾きは厚み h に反比例し (14) の妥当性が示唆される.

参考文献

(1) Bendsøe, M.P. and Kikuchi, N.: Generating optimal topologies in structural design using a homogenization

method, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, **71** (1988), pp. 197–224.

(2) Allaire, G., Jouve, F. and Michailidis, G.: Thickness control in structural optimization via a level set method. Structural and Multidisciplinary Optimization, **53** (2016), pp. 1349-1382.

(3) Carroll, J. D. and Guest, J. K.: Topology optimization of uniform thickness structures using discrete object projection Structural and Multidisciplinary Optimization, Structural and Multidisciplinary Optimization, **65** (2022), 271.

(4) Sato, Y., Yamada, T., Izui, K. and Nishiwaki, S.:Manufacturability evaluation for molded parts using fictitious physical models, and its application in topology optimization, The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, **92** (2017), pp. 1391–1409.

(5) Yamada, T. and Noguchi, Y.: Topology optimization with a closed cavity exclusion constraint for additive manufacturing based on the fictitious physical model approach, Additive Manufacturing, **52** (2022), 102630.

(6) Yamada, T.: Geometric shape features extraction using a steady state partial differential equation system, Journal of Computational Design and Engineering, **6** (2019), pp. 647–656.

(7) Yamada, T.: Thickness constraints for topology optimization using the fictitious physical model, Proceedings of the 6th International Conference on Engineering Optimization. EngOpt 2018 (2018), pp. 483-490.

(8) Allaire, G.: *Shape optimization by the homogenization method*, Springer-Verlag, (2002).

(9) Bendsøe, M.P. and Sigmund, O.: Material interpolation schemes in topology optimization, Archive of Applied Mechanics, **69** (1999), pp. 635–654.

(10) Yamada, T., Izui, K., Nishiwaki, S. and Takezawa, A.: A topology optimization method based on the level set method incorporating a fictitious interface energy, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, **199** (2010), pp. 2876–2891.

(11) Sokolowski, J. and Zochowski, A.: On the topological derivative in shape optimization, SIAM Journal on Control and Optimization, **37** (1999), pp. 1251–1272.

(12) Amstutz, S. and Andra, H.: A new algorithm for topology optimization using a level-set method, Journal of Computational Physics, **216** (2006), pp. 573–588.

(13) Hasebe, T., Kuroda, H., Teramoto, H., Masamune, J. and Yamada, T: Construction of normal vector field using the partial differential equations, Transactions of the Japan Society for Industrial and Applied Mathematics, **30** (2020), pp. 249–258.

(14) Otomori, M., Yamada, T., Izui, K. and Nishiwaki, S.: Matlab code for a level set-based topology optimization method using a reaction diffusion equation, Structural and Multidisciplinary Optimization, **51** (2015), pp. 1159–1172.

(15) Hecht, F.: New development in FreeFem++, Journal of Numerical Mathematics, **20** (2012), pp. 251–265.

(16) Allaire, G., Jouve, F. and Toader, A.M.: Structural optimization using sensitivity analysis and a level-set method, Journal of Computational Physics, **194** (2004), pp. 363–393.

Transactions of JASCOME Vol. 22 (Dec. 2022), Paper No. 18-221216 JASCOME

TOPOLOGY OPTIMIZATION ALGORITHM USING TWO-POINT TOPOLOGICAL DERIVATIVE

Masaki NODA[1)], Kei MATSUSHIMA[2)] and Takayuki YAMADA[3)]

1)The University of Tokyo (〒 113-8656 2-11-16, Yayoi, Bunkyo, Tokyo, Japan, E-mail: noda-masaki442@g.ecc.u-tokyo.ac.jp)
2)The University of Tokyo (〒 113-8656 2-11-16, Yayoi, Bunkyo, Tokyo, Japan, E-mail: matsushima@mech.t.u-tokyo.ac.jp)
3)The University of Tokyo (〒 113-8656 2-11-16, Yayoi, Bunkyo, Tokyo, Japan, E-mail: t.yamada@mech.t.u-tokyo.ac.jp)

This paper proposes a topology optimization method that employs the two-point topological derivative as the sensitivity. The sensitivity evaluates the sensitivity of an objective functional relative to the generation of a thin bar connecting two distant portions of a boundary. Using this topological derivative, a topology optimization method is constructed based on the level set method. The proposed method drastically reduces the likelihood of local optima in topology optimization processes. Several numerical examples are given to demonstrate the effectiveness of the proposed method.

Key Words: Topological ligament, Two-point topological derivative, Topology optimization, Level set method, Structural optimization, Finite element method

1. Introduction

The topological derivative[(1–4)] is the sensitivity to emergence of a small hole in the internal domain of a structure, which can cause changes in the external shape and the topology, i.e., the presence or absence of a hole, in a structural optimization problem. This can allow drastic improvement of structural performance.

Beginning with the bubble method proposed by Eschenauer et al. to handle the drawbacks of an unchanged topology in shape optimization[(5)], topology optimization using topological derivatives has been studied actively for elasticity and other problems[(6–14)].

However, this sensitivity has a severe drawback when applied to some physics problems (e.g., elasticity and heat conduction), i.e., the sensitivity is uniformly zero inside a void domain because a small floating island of structural material in the void domain does not improve the stiffness, strength, or conductivity of the overall structure. When an iterative optimization process is performed using this sensitivity, material construction is not promoted inside a void domain. Therefore, domains that are void in the initial design are likely to be void in the final design, i.e., the optimized design is highly dependent on the initial design.

Recieved 2022, Oct., 27, accepted 2022, Nov., 21

In contrast, in the ground structure method [(15–17)], the dimension and presence or absence of each beam of a truss or rigid frame structure is optimized. This method employs the sensitivity to generate a new beam connecting two distant nodes.

In analogy with this method, in this paper, we utilize a bar generating topological derivative that generates a new bar connecting a portion of the boundary of the void domain with a distant portion of the boundary. This sensitivity to generate a bar can be generalized for the generation of arbitrary curvilinear ligaments[(18)]. The sensitivity is called an external topological derivative, topological ligament, or two-point topological derivative. This sensitivity is utilized in shape optimization[(19)] and layout optimization[(20)]. As shown in previous studies, the use of two-point topological derivative for structural optimization further promotes structural changes. That is, not only does the external shape changes or emerges in the structural domain, but the cavity domain is split into two parts by the structural material domain. By these drastic changes in structure, the highest performance structure is more likely to be obtained.

In this study, we utilize the two-point topological derivative in topology optimization. While shape optimization only changes the external shape during the optimization pro-

cess, topology optimization generates new holes, which leads to a better solution. The use of two-point topological derivative in conjunction with conventional single-point topological derivative promotes further drastic structural changes, which can lead to performance improvements.

The remainder of this paper is organized as follows. Section 2 describes the general topology optimization problem. In Section 3, we describe the formulation of two-point topological derivative. In Section 4, a topology optimization method is constructed using the two-point topological derivative. In Section 5, the proposed method is applied to the linear elasticity problem, and a sensitivity analysis is discussed. This sensitivity is validated in a numerical framework in Section 6, and several numerical examples are given in Section 7 to demonstrate the effectiveness of the proposed method. Finally, the paper is concluded in Section 8.

2. Topology optimization problem

Based on the level set method, the topology optimization problem is generally formulated as follows:

$$\min_{\phi, u(\phi)} \quad J(\phi, u),$$

$$\text{subject to} \begin{cases} \phi(\mathbf{x}) > 0 \quad \text{for} \quad \mathbf{x} \in \Omega \\ \text{Governing Equations for} \quad u(\Omega) \\ G_i(\Omega, u) \leq 0 \quad \text{for} \quad i \in \{1, \ldots, n_G\} \\ H_j(\Omega, u) = 0 \quad \text{for} \quad j \in \{1, \ldots, n_H\} \end{cases}, \tag{1}$$

where the scalar function $\phi(\mathbf{x})$ $(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}, d \in \{2, 3\})$ is the level set function that defines the structural domain $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, u is the state variable, J is the objective functional, G_i are inequality constraint functions, H_j are equality constraint functions, and n_G and n_H are the number of constraints.

3. Definition of two-point topological derivative

Here, we consider the domain of a thin bar $\Omega^{\text{bar}}(w, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ that connects a portion of the boundary of the void domain $\mathbf{x}_1 \in \partial\Omega$ to a distant portion of the boundary $\mathbf{x}_2 \in \partial\Omega$ (Fig. 1). As can be seen, the bar has a uniform cross-sectional shape (or uniform width) whose cross-sectional area (or width) is w. We assume that this bar does not intersect the structural domain $\forall \beta \in (0, 1), \mathbf{x}_1 + \beta(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \notin \Omega$, which means that the pairs of coordinates $\mathbf{x}_1'$ and $\mathbf{x}_2'$ shown in Fig. 2 are excluded.

Then, we consider a topological change in which a new bar is generated in the void domain. The two-point topological derivative $\mathcal{D}^2 J(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$, which is a sensitivity to the topology changes of generating a new bar, is defined as follows:

$$\mathcal{D}^2 J(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \lim_{w \to 0} \frac{J(\Omega \cup \Omega^{\text{bar}}(w, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)) - J(\Omega)}{\text{meas}(\Omega^{\text{bar}}(w, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2))}, \tag{2}$$

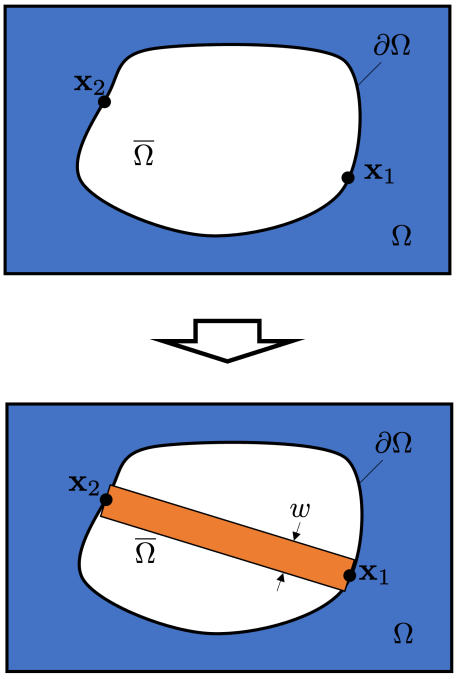


Fig. 1 Generating a bar domain.

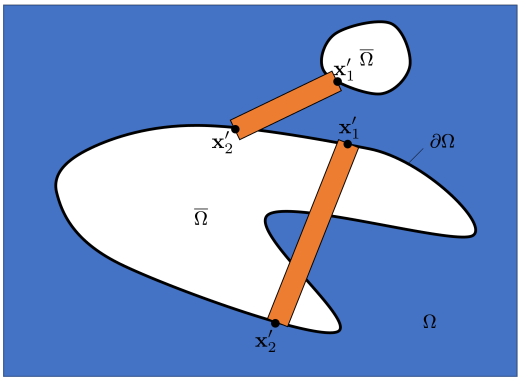


Fig. 2 Excluded pairs of coordinates.

where $\text{meas}(\Omega^{\text{bar}})$ is the measure of the domain Ω^{bar}.

4. Construction of a topology optimization method utilizing two-point topological derivative

In this section, we describe the construction of an iterative topology optimization algorithm driven by the two-point topological derivative $\mathcal{D}^2 J(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$.

The topology optimization problem given in Eq. (1) is difficult to solve directly; thus, we assume an initial value of the level set function and update it using the topological derivatives as follows:

$$\phi'(\mathbf{x}) + \tau \nabla^2 \phi'(\mathbf{x}) = \phi^{\text{old}}(\mathbf{x}) - K \times \begin{cases} \mathcal{D}^1 J(\mathbf{x}) & \text{for } \mathbf{x} \in \Omega \\ h\overline{\mathcal{D}^2} J(\mathbf{x}) & \text{for } \mathbf{x} \notin \Omega \end{cases}, \tag{3}$$

$$\phi = \min\{1, \max\{-1, \phi'\}\}, \tag{4}$$

where the second term on the left side of Eq. (3) is a regularization term used to obtain a smooth optimal structure[21], τ is a regularization factor which can adjust the geometrical complexity[21], K is a coefficient to adjust the change of the design variable ϕ in one step, and $\mathcal{D}^1 J$ is the conventional single point topological derivative, which leads to emergence of a new hole. h is a small positive number, which is set to 0.1 in this study. This means that the bar domain is generated only in domains where it is very useful to improve the objective function. The closer this value h is to 1, the easier it is to avoid local optimums, but instead, problems arise such as repeated appearance and disappearance of bar domains, or the spread of domains where the value of the level set function ϕ is around 0. Note that Eq. (4) limits the level set function to concentrate the effect of regularization term near the boundary, and the sensitivity $\overline{\mathcal{D}^2 J}(\mathbf{x})$ is the solution of the following problem:

$$\overline{\mathcal{D}^2 J}(\mathbf{x}) = \min_{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \partial\Omega} \mathcal{D}^2 J(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2), \tag{5}$$

$$\text{subject to} \begin{cases} \exists \alpha \in (0,1), \mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \alpha(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \\ \forall \beta \in (0,1), \mathbf{x}_1 + \beta(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \notin \Omega \end{cases}. \tag{6}$$

Here, the constraints mean that coordinate $\mathbf{x}$ is in the bar, and the bar does not intersect the structural domain Ω. In addition, from the constraints, there exists at most one $\mathbf{x}_2$ corresponding to $\mathbf{x}$ and $\mathbf{x}_1$.

5. Compliance minimization problem

In this section, the proposed method is applied to the following compliance minimization problem with a volume constraint:

$$\min_{\phi, u} \; J(u) = \int_{\Gamma^{\text{in}}} \mathbf{t} \cdot \mathbf{u} \mathrm{d}\Gamma,$$

$$\text{subject to} \begin{cases} \phi(\mathbf{x}) > 0 \quad \text{for} \;\; \mathbf{x} \in \Omega \\ \int_\Omega \varepsilon(\mathbf{u}) : C : \varepsilon(\mathbf{v}) \mathrm{d}\mathbf{x} = \int_{\Gamma^{\text{in}}} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} \mathrm{d}\Gamma \\ \mathbf{u} = \mathbf{0} \;\; \text{on} \; \Gamma^{\text{fix}} \\ G(\Omega) = \int_\Omega \mathrm{d}\mathbf{x} - \hat{V} \le 0 \end{cases}, \tag{7}$$

where $\mathbf{t}$ is a traction force vector, $\varepsilon(\mathbf{u})$ is the strain tensor of $\mathbf{u}$, whose i, j component is $\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\partial u_i/\partial x_j + \partial u_j/\partial x_i)$, C is the elastic modulus tensor, $\mathbf{v}$ is the test function, Γ^{fix} is a boundary with displacement defined as zero, and $\hat{V}$ is the maximum volume. The conventional topological derivative, which lead to a emergence of a new hole, is computed as follows:

$$\mathcal{D}^1 J(\mathbf{x}) = \varepsilon(\mathbf{u}(\mathbf{x})) : A : \varepsilon(\mathbf{u}(\mathbf{x})), \tag{8}$$

where A is the elastic moment tensor[3].

Here, we evaluate the two-point topological derivative $\mathcal{D}^2 J(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ introduced in Section 3. First, we assume that the displacement field in the presence of an infinitely thin bar domain is approximately equal to the displacement field in the absence of that bar domain. Then, we have

$$\tilde{\mathbf{u}}(\Omega) \equiv \mathbf{u}(\Omega \cup \Omega^{\text{bar}}(w, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)) \simeq \mathbf{u}(\Omega). \tag{9}$$

The above assumption is expected to hold for the generation of thin bars, which is the target of this study. However, if there are Dirichlet or inhomogeneous Neumann boundary conditions at the boundaries of the newly generated domain, or if the structural domain is divided by a thin void domain rather than a bar being generated in a cavity, the above assumption is not valid, and an appropriate evaluation is required.

In addition, we assume that the stress fields are approximately uniform around the thin bar domain.

The generated element supports only an axial force like a bar element. In this case, the axial elasticity modulus $k(w, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ can be computed using Young's modulus E as follows:

$$k(w, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \frac{Ew}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|}. \tag{10}$$

Thus, the additional strain energy for $\Omega^{\text{bar}}(w, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$, i.e., the change of compliance J, can be computed approximately as follows:

$$\begin{aligned} & J(\Omega \cup \Omega^{\text{bar}}(w, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)) - J(\Omega) \\ =& \int_{\Omega \cup \Omega^{\text{bar}}(w, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)} \varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}) : C : \varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}) \mathrm{d}\mathbf{x} - \int_\Omega \varepsilon(\mathbf{u}) : C : \varepsilon(\mathbf{u}) \mathrm{d}\mathbf{x} \\ \simeq& \int_{\Omega^{\text{bar}}(w, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)} \varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}) : C : \varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}) \mathrm{d}\mathbf{x} \\ \simeq& \int_{\Omega^{\text{bar}}(w, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)} \varepsilon(\mathbf{u}) : C : \varepsilon(\mathbf{u}) \mathrm{d}\mathbf{x} \\ \simeq& k(w, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \left((\mathbf{u}(\mathbf{x}_1) - \mathbf{u}(\mathbf{x}_2)) \cdot \frac{(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|} \right)^2. \end{aligned} \tag{11}$$

In addition, the measure of domain $\Omega^{\text{bar}}(w, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ is computed as follows:

$$\text{meas}(\Omega^{\text{bar}}(w, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)) = w|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|. \tag{12}$$

Thus, the two-point topological derivative can be computed approximately as follows:

$$\mathcal{D}^2 J(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \frac{E((\mathbf{u}(\mathbf{x}_1) - \mathbf{u}(\mathbf{x}_2)) \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2))^2}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^4}. \tag{13}$$

See previous studies for more detailed derivation[20,22].

5.1. Numerical implementation and computational cost

The sensitivity $\overline{\mathcal{D}^2 J}(\mathbf{x})$ is calculated as follows. Initialize the value $\overline{\mathcal{D}^2 J}(\mathbf{x})$ for each node as sufficiently large value.

Let $\mathcal{E}$ be the set of edges over the boundary of the domain Ω. Let $\mathcal{N}$ be the set of nodes that belong to these edges $\mathcal{E}$. For every triangles consisting of edge j in $\mathcal{E}$ and two edges, which connect the node i in $\mathcal{N}$ and the both ends of edge j, search the nodes in the triangle and label them as $\mathcal{N}_{ij}$. If all the nodes in $\mathcal{N}_{ij}$ belong to the void, i.e., $\phi < 0$, then calculate the sensitivity $\mathcal{D}^2 J(\mathbf{x}^i, \mathbf{x}^{j1})$ and $\mathcal{D}^2 J(\mathbf{x}^i, \mathbf{x}^{j2})$, where $\mathbf{x}^i$ is the coordinate of the node i and $\mathbf{x}^{j1}$ and $\mathbf{x}^{j2}$ are the coordinate of nodes which belong to the edge j. For each node l in $\mathcal{N}_{ij}$, calculate $\mathcal{D}^2 J(\mathbf{x}^i, \mathbf{x}^*)$ by interpolation using $\mathcal{D}^2 J(\mathbf{x}^i, \mathbf{x}^{j1})$ and $\mathcal{D}^2 J(\mathbf{x}^i, \mathbf{x}^{j2})$, where $\mathbf{x}^*$ is the coordinate that satisfies the constraint Eq. (6). If the value $\mathcal{D}^2 J(\mathbf{x}^i, \mathbf{x}^{j2})$ is smaller than $\overline{\mathcal{D}^2} J(\mathbf{x}^l)$, then substitute the value, where $\mathbf{x}^l$ is the coordinate of node l.

In the following, we assess the computational cost of computing $\overline{\mathcal{D}^2} J$ for each optimization step. Here, let n be the number of nodes on a finite element mesh. Then, the number of nodes or edges on the boundary of voids is given as $\mathcal{O}(n^{(d-1)/d})$. Thus, from the above calculation scheme, the computational complexity of computing $\overline{\mathcal{D}^2} J$ is at most $\mathcal{O}(n^{(d-1)/d}) \times \mathcal{O}(n^{(d-1)/d}) \times \mathcal{O}(n) = \mathcal{O}(n^2)$ or $\mathcal{O}(n^{7/3})$.

Since this calculation is computationally time-consuming, we may choose appropriate steps to calculate it instead of doing it for all optimization steps; however, in this study, we simply did this calculation for all optimization steps.

6. Numerical validation of sensitivity analysis

The analytical formula for the two-point topological derivative given in Eq. (13) can be validated using the following computational framework.

Here for a finite value of ε, we define a numerical difference $\mathcal{D}^2_\varepsilon J(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ as follows:

$$\mathcal{D}^2_\varepsilon J(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \frac{J(\Omega + \Omega^{\mathrm{bar}}(\varepsilon, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)) - J(\Omega)}{\mathrm{meas}(\Omega^{\mathrm{bar}}(\varepsilon, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2))}. \tag{14}$$

Under the two-dimensional linear elastic condition shown in

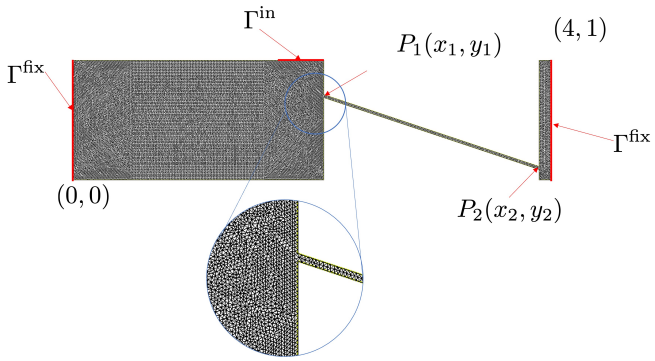


Fig. 3 Domain and conditions for numerical validation of sensitivity analysis.

Fig. 3 with traction force $\mathbf{t} = (0, -1)^T$ and Young's modulus $E = 200$ [GPa], with the finite element method, the numerically approximated values are calculated for $J(\Omega)$ and

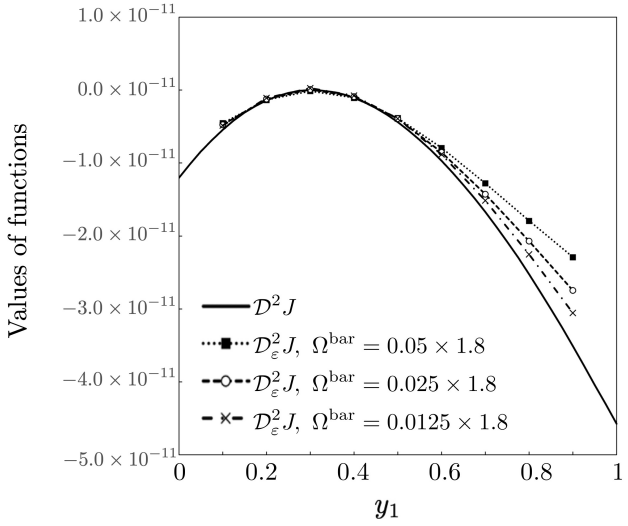


Fig. 4 Results of numerical validation of sensitivity analysis

$J(\Omega + \Omega^{\mathrm{bar}}(\varepsilon, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2))$ for each bar of the area $\mathrm{meas}(\Omega^{\mathrm{bar}}(\varepsilon, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)) \in \{0.0125 \times 1.8, 0.025 \times 1.8, 0.05 \times 1.8\}$ connecting coordinate $\mathbf{x}_1 \in \{(2.1, 0.1)^T, (2.1, 0.2)^T, \ldots, (2.1, 0.9)^T\}$ to $\mathbf{x}_2 = (3.9, 0.1)^T$.

In addition, the analytical value $\mathcal{D}^2 J(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ for the state variables where there is no bar $\mathbf{u}(\Omega)$ is calculated for $\mathbf{x}_1 = (2.1, y_1)^T$, $y_1 \in [0, 1]$ and $\mathbf{x}_2 = (3.9, 0.1)^T$.

The values of $\mathcal{D}^2 J(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ and $\mathcal{D}^2_\varepsilon J(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ are plotted in Fig. 4. As can be seen, the values of $\mathcal{D}^2_\varepsilon J(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ are approximately consistent and become closer to the values of $\mathcal{D}^2 J(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ as the area $\mathrm{meas}(\Omega^{\mathrm{bar}}(\varepsilon, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2))$ becomes smaller. This confirms the usefulness of the analytical formula given in Eq. (13).

7. Numerical examples

In this section, we provide several numerical examples to demonstrate the effectiveness of the proposed method.

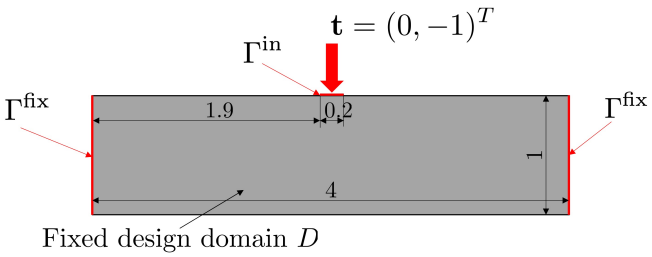


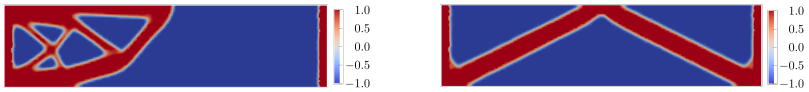
Fig. 5 Domain and boundary conditions for condition 1.

In these examples, the elastic modulus of the structural material is set to $E = 200$ [GPa] and the external domain of the fixed design domain $D \subset \mathbb{R}^d$ is assumed to be void. To avoid numerical instability, the void domain internal fixed design domain $\overline{\Omega} \cap D$ is given Young's modulus $E = 0.1$ [GPa].

Figure 5 shows the calculation condition 1. In this condition, the upper limit of the volume is set to $\hat{V} = 1.2$ [m^2],



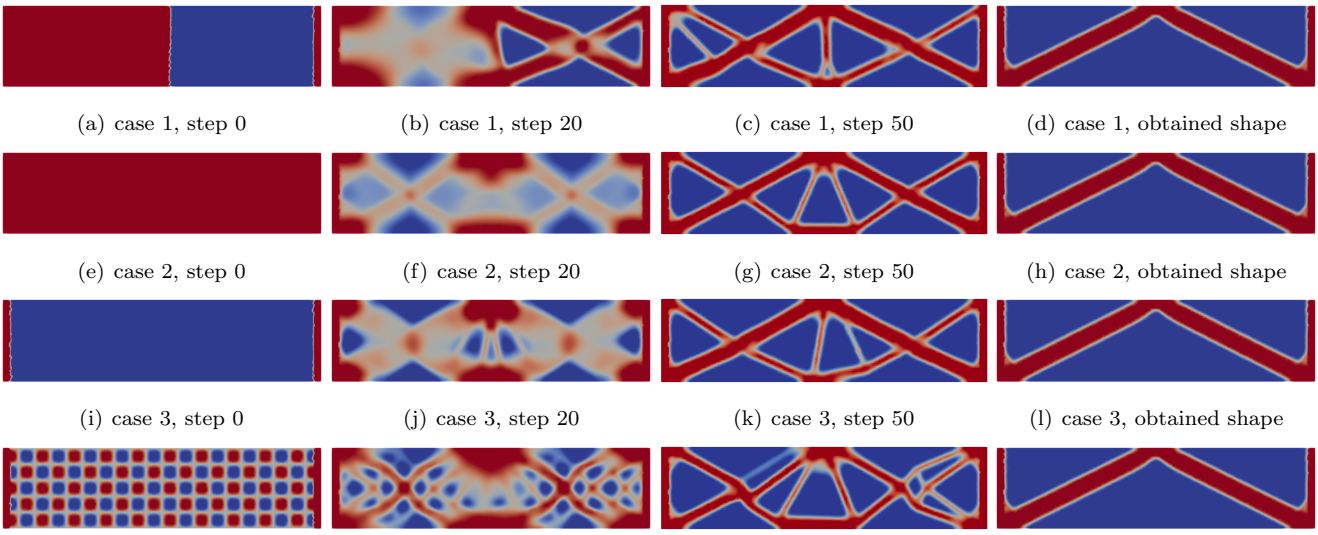
(a) Initial distribution of level set function ϕ (b) Conventional single-point topological derivative $\mathcal{D}^1 J$ for initial design (c) Sensitivity $\overline{\mathcal{D}^2} J$ for initial design



(d) The optimized distribution of ϕ when only single-point topological derivative is used (the compliance is 12.4×10^{-12}).

(e) The optimized distribution of ϕ when both the single-point and two-point topological derivatives are used (the compliance is 5.36×10^{-12}).

Fig. 6 Initial design, topological derivatives and optimized designs for condition 1.



(a) case 1, step 0 (b) case 1, step 20 (c) case 1, step 50 (d) case 1, obtained shape

(e) case 2, step 0 (f) case 2, step 20 (g) case 2, step 50 (h) case 2, obtained shape

(i) case 3, step 0 (j) case 3, step 20 (k) case 3, step 50 (l) case 3, obtained shape

(m) case 4, step 0 (n) case 4, step 20 (o) case 4, step 50 (p) case 4, obtained shape

Fig. 7 Dependency on initial configurations.

and the left and right side 0.1 [m] of D is fixed to structural material domain. As shown in Fig. 6(a), a design of left half consisted of structural material is set as initial design.

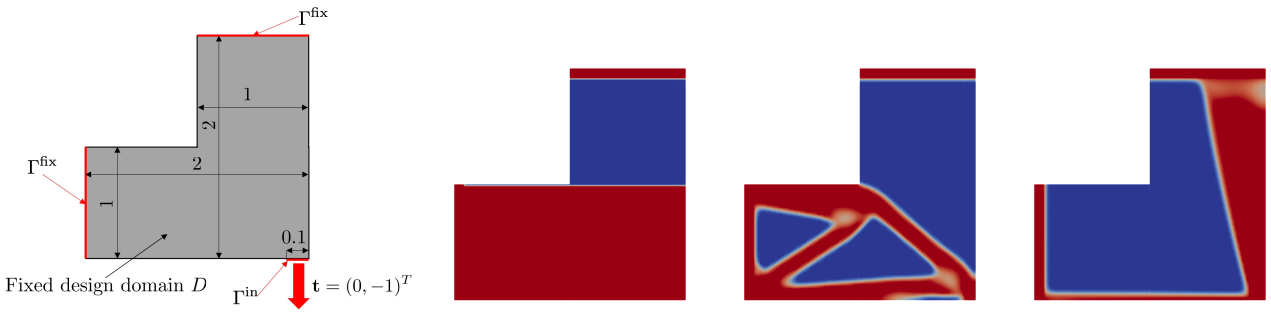
As shown in Fig. 6(c), two-point topological derivative has a sensitivity to generate a new bar from upper center point to lower right point. However, the single-point topological derivative has only a sensitivity to leave necessary structural parts, as can be seen in Fig. 6(b). Thus, as shown in Fig. 6(e), the optimized configuration according to the proposed method is a double-ended support beam, which is considered to be structurally appropriate. In contrast, the optimized configuration according to ordinal topology optimization (Fig. 6(d)) is a cantilever depending on the initial design. With the features of the structure, the value of the objective function obtained by the proposed method is less than half that of the conventional method. This indicates that better performance is obtained using the proposed method.

Figs. 7(a)–7(d) shows the distribution of the level set function in the optimization process. Figs. 7(e),7(i), and 7(m) show the other initial designs. Figs. 7(f)–7(h),7(j)–7(l), and 7(n)–7(p) show the optimization results. It can be seen that the same optimal configurations are obtained.

Fig. 8(a) shows the domain and boundary conditions for the condition 2. In this condition, the upper limit of the volume is set to $\hat{V} = 0.9$ [m^2], and the left and upper side 0.1 [m] of D is fixed to structural material domain. Fig. 8(b) shows the initial design. Fig. 8(c) shows the design obtained by only the single-point topological derivative. Fig. 8(d) shows the design obtained by proposed method. In the design obtained by proposed method, the upper fixed boundary and the load boundary are directly connected by the structural material, and the compliance value is improved by a factor of 10.

8. Conclusion

This paper has proposed a topology optimization method, which uses the two-point topological derivative. Since the two-point topological derivative is a sensitivity to the topological changes to generate a new bar connecting two points



(a) Domain and boundary conditions.

(b) Initial distribution of level set function ϕ.

(c) The optimized distribution of ϕ when only single-point topological derivative is used (the compliance is 4.0×10^{-12}).

(d) The optimized distribution of ϕ when both the single-point and two-point topological derivatives are used (the compliance is 3.8×10^{-13}).

Fig. 8 Optimization settings and results for condition 2.

of boundary, the proposed method can significantly reduce the problem of local optimum problem. Several numerical examples were given under the condition that conventional method are prone to local optimum solutions depending on the initial design. The results confirm the effectiveness of the proposed method.

Acknowledgment

This work was supported by JST FOREST Program (Grant Number JPMJFR202J, Japan).

The authors would like to thank Enago (www.enago.jp) for the English language review.

References

(1) J. Sokolowski, A. Zochowski, On the topological derivative in shape optimization, SIAM Journal on Control and Optimization 37 (4) (1999) 1251–1272. doi:10.1137/S0363012997323230.

(2) A. A. Novotny, R. A. Feijóo, E. Taroco, C. Padra, Topological sensitivity analysis, Computer methods in applied mechanics and engineering 192 (7-8) (2003) 803–829.

(3) M. Bonnet, G. Delgado, The topological derivative in anisotropic elasticity, Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics 66 (4) (2013) 557–586.

(4) G. Delgado, M. Bonnet, The topological derivative of stress-based cost functionals in anisotropic elasticity, Computers & Mathematics with Applications 69 (10) (2015) 1144–1166. doi:10.1016/j.camwa.2015.03.010.

(5) H. A. Eschenauer, V. V. Kobelev, A. Schumacher, Bubble method for topology and shape optimization of structures, Structural and Multidisciplinary Optimization 8 (1) (1994) 42–51.

(6) J. Céa, S. Garreau, P. Guillaume, M. Masmoudi, The shape and topological optimizations connection, Computer methods in applied mechanics and engineering 188 (4) (2000) 713–726.

(7) S. Garreau, P. Guillaume, M. Masmoudi, The topological asymptotic for pde systems: the elasticity case, SIAM journal on control and optimization 39 (6) (2001) 1756–1778.

(8) M. Burger, B. Hackl, W. Ring, Incorporating topological derivatives into level set methods, Journal of computational physics 194 (1) (2004) 344–362.

(9) S. Amstutz, H. Andrä, A new algorithm for topology optimization using a level-set method, Journal of computational physics 216 (2) (2006) 573–588.

(10) O. Sigmund, K. Maute, Topology optimization approaches, Structural and Multidisciplinary Optimization 48 (6) (2013) 1031–1055.

(11) H. Isakari, K. Kuriyama, S. Harada, T. Yamada, T. Takahashi, T. Matsumoto, A topology optimisation for three-dimensional acoustics with the level set method and the fast multipole boundary element method, Mechanical Engineering Journal 1 (4) (2014) CM0039–CM0039.

(12) C. G. Lopes, A. A. Novotny, Topology design of compliant mechanisms with stress constraints based on the topological derivative concept, Structural and Multidisciplinary Optimization 54 (4) (2016) 737–746.

(13) N. Kishimoto, K. Izui, S. Nishiwaki, T. Yamada, Optimal design of electromagnetic cloaks with multiple dielectric materials by topology optimization, Applied Physics Letters 110 (20) (2017) 201104.

(14) M. Noda, Y. Noguchi, T. Yamada, Extended level set method: A multiphase representation with per-

fect symmetric property, and its application to multi-material topology optimization, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 393 (2022) 114742. doi:10.1016/j.cma.2022.114742.

(15) W. Dorn, Automatic design of optimal structures, J. de Mecanique 3 (1964) 25–52.

(16) P. Pedersen, On the optimal layout of multi-purpose trusses, Computers & Structures 2 (5-6) (1972) 695–712.

(17) T. Zegard, G. H. Paulino, Grand—ground structure based topology optimization for arbitrary 2d domains using matlab, Structural and Multidisciplinary Optimization 50 (5) (2014) 861–882.

(18) S. A. Nazarov, J. Sokolowski, The topological derivative of the dirichlet integral under formation of a thin ligament, Siberian Mathematical Journal 45 (2) (2004) 341–355.

(19) C. Dapogny, The topological ligament in shape optimization: a connection with thin tubular inhomogeneities, SMAI Journal of Computational Mathematics 7 (2021) 185–266.

(20) M. H. Kobayashi, R. A. Canfield, R. M. Kolonay, On a cellular developmental method for layout optimization via the two-point topological derivative, Structural and Multidisciplinary Optimization 64 (4) (2021) 2343–2360.

(21) T. Yamada, K. Izui, S. Nishiwaki, A. Takezawa, A topology optimization method based on the level set method incorporating a fictitious interface energy, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 199 (45-48) (2010) 2876–2891. doi:10.1016/j.cma.2010.05.013.

(22) S. A. Nazarov, A. S. Slutskij, J. Sokolowski, Topological derivative of the energy functional due to formation of a thin ligament on a spatial body, Folia Mathematicae, Acta Universitatis Lodziensis 12 (2005) 39–72.

計算数理工学論文集 Vol. 22 (2022 年 12 月), 論文 No. 19-221216 JASCOME

複数周波数MUSIC法を用いた超音波イメージングの実験的検討

EXPERIMENTAL STUDY OF ULTRASONIC IMAGING USING MULTI-FREQUENCY MUSIC METHOD

松尾 太聖 [1)], 丸山 泰蔵 [2)], 中畑 和之 [3)]

Taisei MATSUO, Taizo MARUYAMA and Kazuyuki NAKAHATA

1) 愛媛大学大学院理工学研究科 (〒 790-8577 愛媛県松山市文京町 3, E-mail: matsuo.taisei.17@cee.ehime-u.ac.jp)
2) 愛媛大学大学院理工学研究科 (〒 790-8577 愛媛県松山市文京町 3, E-mail: maruyama@cee.ehime-u.ac.jp)
3) 愛媛大学大学院理工学研究科 (〒 790-8577 愛媛県松山市文京町 3, E-mail: nakahata@cee.ehime-u.ac.jp)

This paper presents ultrasonic imaging using a multi-frequency MUSIC (MUltiple SIgnal Classification) method, which has been proposed recently. In conventional researches, it is pointed out that a single-frequency MUSIC method is sensitive to phase errors and does not provide robust results. In contrast to the single-frequency MUSIC method, a correlation matrix of multi-frequency MUSIC method includes many frequency components. Therefore, performance for measured data is compared between the single- and multi-frequency MUSIC methods. Through imaging results from acoustic measurement via a linear array probe, it is demonstrated that the multi-frequency MUSIC method provides robust results compared to the single-frequency MUSIC method.

Key Words: MUSIC, Inverse Scattering Analysis, Array Probe, Ultrasonic Wave

1. はじめに

部材の内部状態の把握は構造物の健全度評価において重要である．非破壊で正確に部材内部の欠陥を可視化できれば，破壊力学の観点から補修の必要性やその時期の選定を行えるため安全な運用につながる．その際，材料内部の可視化対象の特性に合わせて超音波や電磁波が用いられるが，内部欠陥の位置・サイズを推定するには，取得した波形データを適切に処理する必要がある．本研究では，散乱源の位置推定アルゴリズムとして MUSIC (MUltiple SIgnal Classification) 法 [(1)] を使用する．MUSIC 法は多点観測で取得したデータから成る相関行列の固有値分解に基づく手法であり，受信信号の null 空間と散乱源位置からの信号による空間の基底が直交する関係を利用している．MUSIC 法は高い分解能を有していることが知られており，観測波の伝搬遅延時間や到来方向などの信号パラメータ推定 [(2)] や散乱源位置推定 [(3)] に用いられている．

これまでに実験による信号データを用いた散乱源位置推定 [(4, 5, 6)] がなされており，MUSIC 法による超音波イメージングには一定の性能が期待できる．しかしながら，従来の単一周波数を用いた MUSIC 法（以下では単一周波数 MUSIC 法と呼ぶ）では，位相の誤差に敏感なためロバスト性が低いこと，複数周波数のデータを重ね合わせても精度向上があまり期待できないことが課題であった [(7)]．この問題は，単一周波数 MUSIC 法では一つの周波数による送受信方向の位相情報から構成される相関行列を用いることに起因すると考えられる．その一方で近年，複数周波数のデータを用いて相関行列を構成する方法 [(8)]（以下では複数周波数 MUSIC 法と呼ぶ）が提案されている．複数周波数の情報を相関行列に組み込むことで単純な重ね合わせと異なり，帯域幅を持つ受信波形の位相情報の有効利用が期待できる．しかしながら，複数周波数 MUSIC 法による実験波形を用いた散乱源位置推定の例は報告されていないと思われる．

本研究では基礎的検討として，アレイ探触子から送信された超音波が水中の金属棒によって散乱する音響波動問題を扱う．実験で計測した波形に対して，複数周波数 MUSIC 法を用いた超音波イメージングを行い，単一周波数 MUSIC 法の結果との比較を行う．いずれの MUSIC 法も無限遠における点散乱源からの散乱波に対して定式化しているため，有限距離で有限サイズの散乱体から発生する散乱波に対してイメージングを行い，そのロバスト性を調べる．また，MUSIC 法のイメージングプロセスに含まれる閾値を変化させて，実測データに含まれる装置や環境によるノイズがイメージング結果に及ぼす影響を調べる．

2022 年 10 月 30 日受付，2022 年 11 月 17 日受理

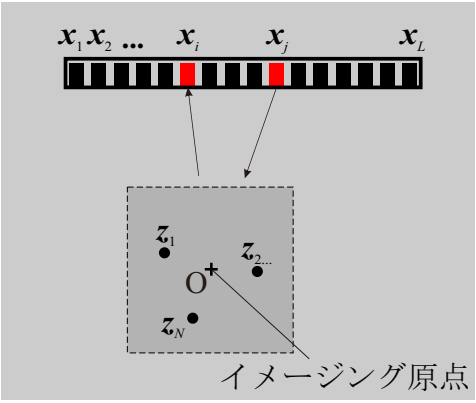


Fig. 1　Model of ultrasonic measurement using linear array probe.

2. MUSIC 法

2.1. 散乱波のモデル化

理論展開は時間因子を $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$ とする時間調和な音響波動場について行う．ここで，i は虚数単位，ω は角周波数，t は時刻である．第 3 節で示す計測実験は 2 次元問題とみなせる条件下で実施するため，本研究では 2 次元音響波動問題に対して理論展開を行う．

Fig. 1 に示すように，リニアアレイ探触子による 2 次元超音波計測モデルを考える．本研究では，簡易的なモデル化として，探触子の指向性は無視し，領域内部で超音波を送受信すると考える．そのため，アレイ探触子の設置表面は無視して，無限に広がる領域中の $\{\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2, \cdots, \boldsymbol{z}_N\}$ に点散乱源，$\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_L\}$ に送受信点が存在するとする．ここで，下付き添字は散乱源，送受信点の番号であり，N，L はそれぞれ点散乱源，送受信点の数である．また，第 i 番の点散乱源の散乱強さは q_i であるとする．送受信点位置から入射波 u^{in} が送信され，点散乱源によって散乱し，発生した散乱波 u^{sc} と入射波の重ね合わせである全波動場 $u = u^{\mathrm{in}} + u^{\mathrm{sc}}$ が送受信点位置で観測される．点 $\boldsymbol{x}$ で観測される入射波は送信位置 $\boldsymbol{y}$ を波源とする円筒波と仮定し，次式で与える．

$$u^{\mathrm{in}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = u_0 U(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \tag{1}$$

ここで，u_0 は入射波の振幅，U は次式で表される 2 次元 Helmholtz 方程式の基本解である．

$$U(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \frac{\mathrm{i}}{4} \mathrm{H}_0^{(1)}(k|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|) \tag{2}$$

ここで，$k(=\omega/c)$ は波数であり，c は音速である．また，$\mathrm{H}_0^{(1)}$ はゼロ次の第 1 種 Hankel 関数である．点 $\boldsymbol{x}_j$ から入射波が送信されたとき，点 $\boldsymbol{x}_i$ で受信される全波動場は次のように表される [3]．

$$u(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_j) = u^{\mathrm{in}}(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_j) + \sum_{n=1}^{N} U(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{z}_n) q_n u(\boldsymbol{z}_n, \boldsymbol{x}_j) \tag{3}$$

式 (3) は点散乱源間の多重散乱を含んでいる．

本研究では先行研究 [3, 8] に倣い，Born 近似と遠方近似を施した散乱波の表現から逆散乱解析の定式化を行う．Born 近似を行うと式 (1)，(3) より，u^{sc} は次のように表される．

$$u^{\mathrm{sc}}(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_j) = u_0 \sum_{n=1}^{N} U(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{z}_n) q_n U(\boldsymbol{z}_n, \boldsymbol{x}_j) \tag{4}$$

式 (2) で表される U はイメージング原点 O に対して $k|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}| \gg 1$ かつ $|\boldsymbol{x}| \gg |\boldsymbol{y}|$ の場合，次のように近似できる．

$$U(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \simeq \frac{1}{\sqrt{8\pi k|\boldsymbol{x}|}} \exp\left[\frac{\mathrm{i}\pi}{4} + \mathrm{i}k|\boldsymbol{x}| - \mathrm{i}k\hat{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{y}\right] \tag{5}$$

ここで，$\hat{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}/|\boldsymbol{x}|$ である．送受信点位置 $\boldsymbol{x}_i$ と点散乱源位置 $\boldsymbol{z}_j$ に

$$|\boldsymbol{x}_i| \gg |\boldsymbol{z}_j| \qquad \forall i, j$$

なる関係が成り立つと仮定し，式 (4) に式 (5) を代入することで遠方近似を適用すると次の表現が得られる．

$$u^{\mathrm{sc}}(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_j) = \frac{u_0}{8\pi k} \frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(|\boldsymbol{x}_i|+|\boldsymbol{x}_j|)}}{\sqrt{|\boldsymbol{x}_i||\boldsymbol{x}_j|}} \sum_{n=1}^{N} q_n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\hat{\boldsymbol{x}}_i \cdot \boldsymbol{z}_n} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\hat{\boldsymbol{x}}_j \cdot \boldsymbol{z}_n} \tag{6}$$

式 (6) に含まれるイメージング原点と素子の位置からなる項

$$\frac{u_0}{8\pi k} \frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(|\boldsymbol{x}_i|+|\boldsymbol{x}_j|)}}{\sqrt{|\boldsymbol{x}_i||\boldsymbol{x}_j|}}$$

は既知量として扱うことができる．そのため，同項を除した次式で表される遠方場パターンを用いて，散乱源のイメージングを行う．

$$u^{\mathrm{far}}(\hat{\boldsymbol{x}}_i, \hat{\boldsymbol{x}}_j, k) = \sum_{n=1}^{N} q_n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\hat{\boldsymbol{x}}_i \cdot \boldsymbol{z}_n} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\hat{\boldsymbol{x}}_j \cdot \boldsymbol{z}_n} \tag{7}$$

2.2. 単一周波数 MUSIC 法

MUSIC 法では相関行列を作成し，その null 空間を利用することで散乱源位置を推定する．単一周波数 MUSIC 法では，L 素子のアレイ探触子で送受信した波形データをすべて使用して $L \times L$ の相関行列 $\boldsymbol{F}$ を作成する．1 つの周波数に対する波数 k についての u^{far} からなる相関行列 $\boldsymbol{F}$ を次のように定義する．

$$\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} u^{\mathrm{far}}(\hat{\boldsymbol{x}}_1, \hat{\boldsymbol{x}}_1, k) & \cdots & u^{\mathrm{far}}(\hat{\boldsymbol{x}}_1, \hat{\boldsymbol{x}}_L, k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u^{\mathrm{far}}(\hat{\boldsymbol{x}}_L, \hat{\boldsymbol{x}}_1, k) & \cdots & u^{\mathrm{far}}(\hat{\boldsymbol{x}}_L, \hat{\boldsymbol{x}}_L, k) \end{bmatrix} \tag{8}$$

仮想的に検査点 $\boldsymbol{z}$ を波源とする波を各素子で受信した場合の位相情報ベクトルを次のように定義する．

$$\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{z}) = \left\{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\hat{\boldsymbol{x}}_1 \cdot \boldsymbol{z}}, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\hat{\boldsymbol{x}}_2 \cdot \boldsymbol{z}}, \cdots, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\hat{\boldsymbol{x}}_L \cdot \boldsymbol{z}}\right\}^{\mathrm{T}} \tag{9}$$

ここで，上付き T は転置を示している．位相情報ベクトル $\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{z})$ と相関行列 $\boldsymbol{F}$ には次の関係が成り立つ．

$$\begin{aligned} \boldsymbol{z} \in \{\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2, \cdots, \boldsymbol{z}_N\} &\Leftrightarrow \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{z}) \in \mathrm{ran}\,(\boldsymbol{F}) \\ &\Leftrightarrow \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{z}) \perp \ker\left(\boldsymbol{F}^{\mathrm{H}}\right) \end{aligned} \tag{10}$$

ここで，上付き H は共役転置を示している．式 (8) で表される相関行列の共役転置の核空間の基底を次のように書く．

$$\ker\left(\boldsymbol{F}^{\mathrm{H}}\right) = \mathrm{span}\left(\boldsymbol{\psi}_1, \boldsymbol{\psi}_2, \cdots, \boldsymbol{\psi}_M\right) \tag{11}$$

ここで，M は $\boldsymbol{F}^{\mathrm{H}}$ の核空間の次元である．関係式 (10) より，位相情報ベクトル $\boldsymbol{\phi}$ と $\boldsymbol{\psi}_m$ が直交しているかどうかを調べることで，散乱源位置の推定が期待できる．そこで次の関数 W を定義する．

$$W(\boldsymbol{z}) = \frac{1}{\sum_{m=1}^{M} |\boldsymbol{\psi}_m^{\mathrm{H}} \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{z})|^2} \tag{12}$$

関係 $\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{z}) \perp \ker(\boldsymbol{F}^{\mathrm{H}})$ が成り立つ場合，W は分母がゼロとなり発散する．

数値計算では，送受信点の数を同じとすると $\boldsymbol{F}$ は正方行列であるため，式 (11) の $\boldsymbol{\psi}_m$ は $\boldsymbol{F}$ の固有値がゼロのときの左固有ベクトルとみなせる．したがって，通常の固有値ソルバーで容易に求めることができる．また，式 (12) で表される W は $\boldsymbol{z}$ が散乱源位置と一致するときに有限の大きい値をとることが期待できる．なお，$\boldsymbol{F}^{\mathrm{H}}$ の核空間の次元は送受信点数から点散乱源数を引いた数になるため，点散乱源数より送受信点数が多い必要がある．

2.3. 複数周波数 MUSIC 法

Griesmaier と Schmiedecke[8] は，1 組の送受信点間でのデータに対して複数周波数の相関行列を作成している．本研究では Griesmaier と Schmiedecke に倣って相関行列を作成し，イメージングの際に複数の送受信点の情報を重ね合わせる．送信点 $\boldsymbol{x}_j$，受信点 $\boldsymbol{x}_i$ に対する相関行列 $\boldsymbol{F}^{(ij)}$ は次のように定義される．

$$\boldsymbol{F}^{(ij)} = \begin{bmatrix} F_{1,1}^{(ij)} & \cdots & F_{1,p+1}^{(ij)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{2q-p,1}^{(ij)} & \cdots & F_{2q-p,p+1}^{(ij)} \end{bmatrix} \tag{13}$$

$$F_{m,n}^{(ij)} = \frac{1}{k_{n+m-1}} u^{\mathrm{far}}(\hat{\boldsymbol{x}}_i, \hat{\boldsymbol{x}}_j, k_{m+n-1}) \tag{14}$$

ここで，$k_n = n\Delta k$ であり，Δk は用いる波数の刻み幅である．また，$p, 2q$ はそれぞれ推定され得る散乱源の数，使用する周波数の数であり，$p < q$ とする必要がある．

検査点 $\boldsymbol{z}$ を波源とする波の位相情報ベクトルを次のように定義する．

$$\boldsymbol{\phi}^{(ij)}(\boldsymbol{z}) = \left[\xi^0, \xi^1, \xi^2, \cdots, \xi^{2q-p-1}\right] \tag{15}$$

ここで，$\xi = e^{\mathrm{i}k_1(-\hat{\boldsymbol{x}}_j - \hat{\boldsymbol{x}}_i)\cdot\boldsymbol{z}}$ である．位相情報ベクトル $\boldsymbol{\phi}^{(ij)}(\boldsymbol{z})$ と相関行列 $\boldsymbol{F}^{(ij)}$ の以下の関係を用いることで散乱源を推定する．

$$\boldsymbol{z} \in \{\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2, \cdots, \boldsymbol{z}_N\} \Leftrightarrow \boldsymbol{\phi}^{(ij)}(\boldsymbol{z}) \perp \ker\left(\boldsymbol{F}^{(ij)\mathrm{H}}\right) \tag{16}$$

複数周波数 MUSIC 法では相関行列 $\boldsymbol{F}^{(ij)}$ は正方行列でないため，次のように相関行列 $\boldsymbol{F}^{(ij)}$ の特異値分解を行う．

$$\boldsymbol{F}^{(ij)} = \sum_{l=1}^{p+1} \sigma_l \boldsymbol{u}_l \boldsymbol{v}_l^{\mathrm{H}} \tag{17}$$

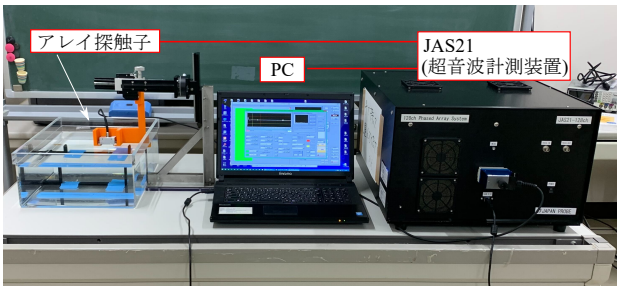


Fig. 2　Measurement system.

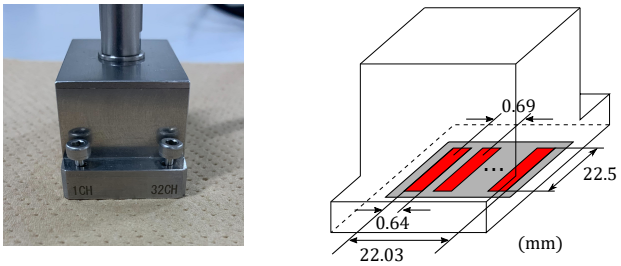


Fig. 3　Linear array probe.

ここで，σ_l，$\boldsymbol{u}_l$，$\boldsymbol{v}_l^{\mathrm{H}}$ は，それぞれ特異値，左特異ベクトル，右特異ベクトルである．特異値 $\sigma_l \neq 0$ のときの左特異ベクトル $\tilde{\boldsymbol{u}}_l$ を用いて，$\boldsymbol{P}^{(ij)}$ を次のように定義する．

$$\boldsymbol{P}^{(ij)} = \sum_{l=1}^{M'} \tilde{\boldsymbol{u}}_l \tilde{\boldsymbol{u}}_l^{\mathrm{H}} \tag{18}$$

ここで，$M' = \mathrm{rank}(\boldsymbol{F}^{(ij)})$ である．検査点が散乱源位置と一致するときに発散する次の関数 W' を定義する．

$$W'(\boldsymbol{z}) = \frac{1}{\sum_{i=1}^{L}\sum_{j=1}^{L} \left|\left[\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P}^{(ij)}\right] \boldsymbol{\phi}^{(ij)}(\boldsymbol{z})\right|^2} \tag{19}$$

ここで，$\boldsymbol{I}$ は単位行列である．数値計算では，式 (19) の W' は散乱源と一致する位置で有限の大きい値をとることが期待できる．

3. 計測波形を用いた MUSIC 法によるイメージング

3.1. 超音波の計測条件

超音波計測で用いる装置の構成を Fig. 2 に示す．超音波計測装置は Japan Probe 製の JAS21 を用いた．JAS21 では，送信波の中心周波数を 30kHz から 10MHz まで，電圧を 10V から 300V まで選択可能であり，最大 128 素子まで用いた送受信が可能である．使用したリニアアレイ探触子を Fig. 3 に示す．リニアアレイ探触子は振動素子を 32 個有しており，公称中心周波数は 5.0MHz である．素子中心間距離（エレメントピッチ）は 0.69mm であり，1 素子の幅は 0.64mm，奥行きが 22.5mm である．

Fig. 4 に示すように，水中に散乱源としてアルミニウム製の針金またはアルミニウム製の丸棒を設置した．針金と丸棒の直径はそれぞれ，0.89mm と 9.0mm である．水中の音速は $c = 1.48$km/s とした．水槽底面からの反射波を受信しないように，測定時間を 102μs と設定して水槽底面から 90mm 程度の高さにアレイ探触子を設置した．また，JAS21 による

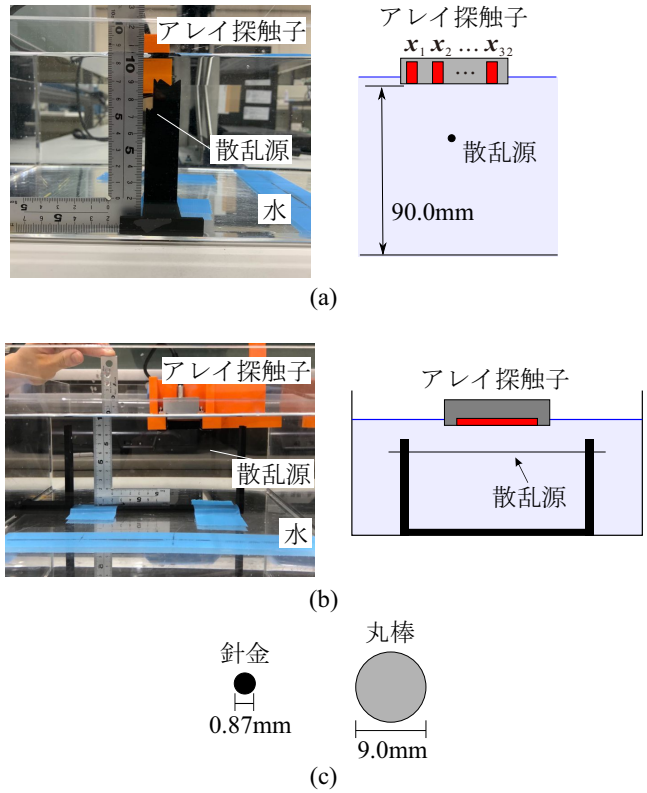


Fig. 4 (a) Front view and (b) side view of experimental instruments. (c) indicates size of scatterers.

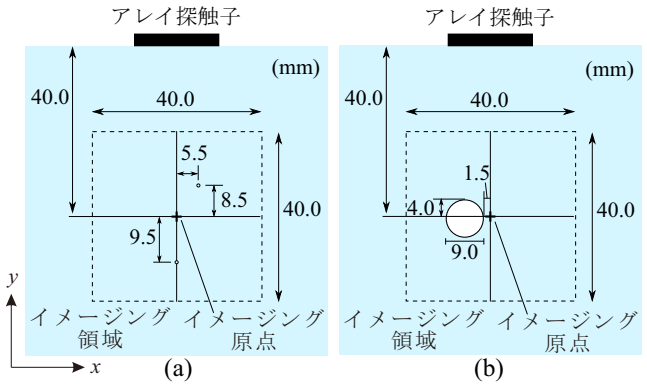


Fig. 5 Arrangement of array probe and scatterers for (a) case 1 and (b) case 2.

印加電圧は 200V，入力中心周波数は 5MHz，サンプリング周波数は 80MHz とした．

以上の超音波計測は 3 次元空間で行うものの，リニアアレイ探触子の奥行きは十分大きく，散乱源として設定した針金と丸棒は 2 次元的な形状を有しているため，2 次元問題とみなせると考える．各アレイ素子による指向性は水中音場では弱いため，入射波は円筒波として考える．また，散乱源は有限の大きさを有しているが，散乱源の境界もしくは内部領域に複数の点散乱源が分布していると考えて MUSIC 法によるイメージングを行う．

3.2. イメージング結果

Fig. 5 に示すケース 1 とケース 2 の 2 つの場合についてイメージングを行った．いずれの場合もアレイ探触子の直下

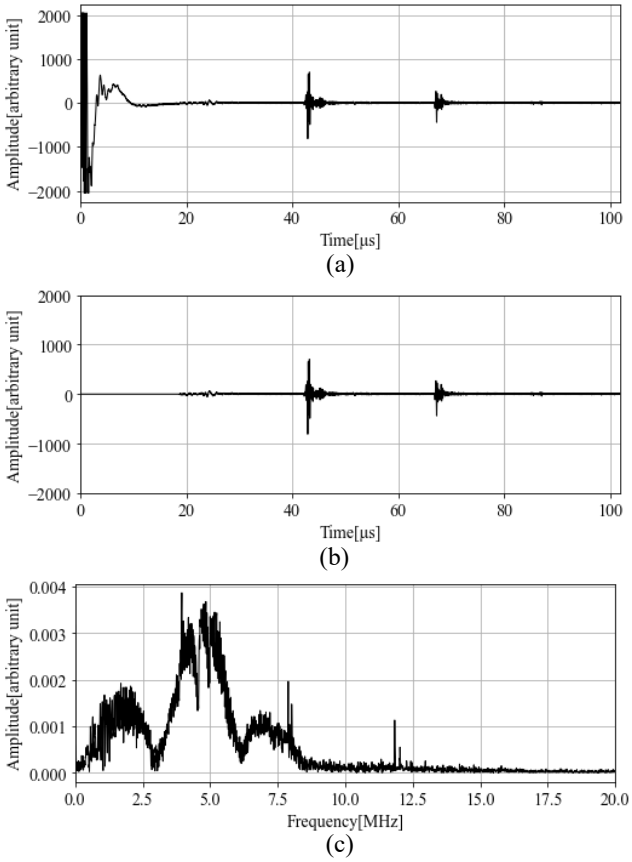


Fig. 6 Example of waveform for case 1. (a), (b), and (c) indicate total wave, scattered wave, and Fourier spectrum of scattered wave, respectively.

40mm をイメージング原点とし，イメージング原点を基準に縦横 40mm の範囲を可視化した．ケース 1 では直径 0.87mm の針金 2 つを散乱源とし，ケース 2 では直径 9.0mm の丸棒 1 つを散乱源とした．ケース 1 で取得した実験波形の一例として 16 番目の素子で超音波を送受信したときの波形を Fig. 6 に示す．MUSIC 法では散乱波のみを使用するため，Fig. 6(b) のように 18.75μs までの振幅をゼロとして入射波を削除した．Fig. 6(c) は Fig. 6(b) のフーリエスペクトルであり，中心周波数が 5MHz 程度であることが分かる．

Fig. 6(b) の時刻歴波形をそのまま FFT した場合，Fig. 6(c) のフーリエスペクトルの周波数刻みは $\Delta f \simeq 0.0098$MHz であった．そのため，複数周波数 MUSIC 法では式 (14) 中の波数 k_n を $k_n = 2n\pi\Delta f/c$ と設定して，式 (13) 中の q については $2q\Delta f < f_{\max}$ となる最大の q を用いた．ここで，$f_{\max}$ は最大周波数であり，複数周波数 MUSIC 法において変化させるパラメータである．そのため，使用する周波数成分は $\{\Delta f, 2\Delta f, \cdots, 2q\Delta f\}$ である．推定され得る散乱源数 p はできるだけ大きくとり，$p = q - 1$ とした．

ケース 1 とケース 2 に対するイメージング結果を Fig. 7 に示す．Fig. 7(a) と Fig. 7(b) はケース 1，Fig. 7(c) と Fig. 7(d) はケース 2 のイメージング結果である．また，Fig. 7(a) と Fig. 7(c) は単一周波数 MUSIC 法，Fig. 7(b) と Fig. 7(d) は複数周波数 MUSIC 法による結果である．プロットしている

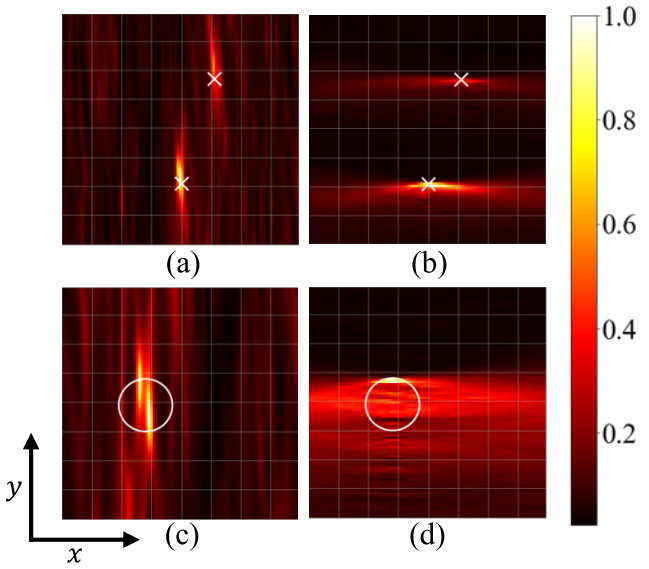


Fig. 7　Imaging results for (a) case 1 by single-frequency MUSIC method, (b) case 1 by multi-frequency MUSIC method, (c) case 2 by single-frequency MUSIC method, and (d) case 2 by multi-frequency MUSIC method.

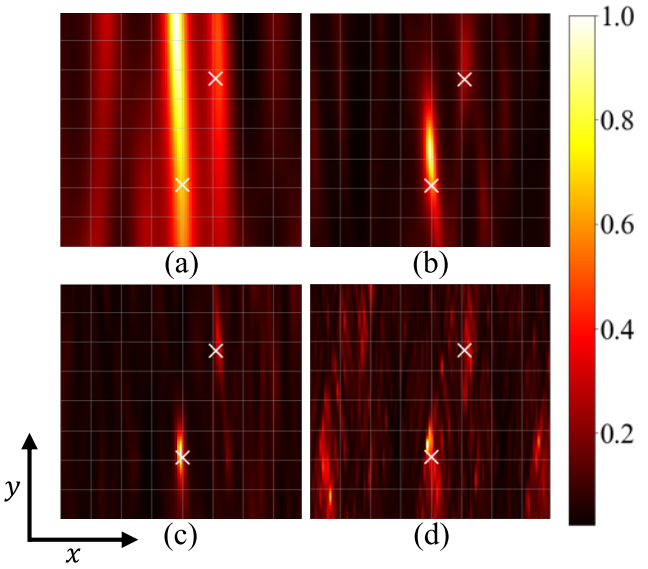


Fig. 8　Imaging results by single-frequency MUSIC method when (a) 0.5MHz, (b) 1.0MHz, (c) 2.0MHz, and (d) 5.0MHz frequency components are used.

値は W，W' をそれぞれのイメージング領域内の最大値で正規化した値である．単一周波数 MUSIC 法ではケース 1 で 2.55MHz，ケース 2 で 1.57MHz の成分を使用した．これらは，様々な周波数成分に対する単一周波数 MUSIC 法の結果の中から比較的良好にイメージングできた例である．一方，複数周波数 MUSIC 法では両ケースに対して $f_{\max} = 6$MHz とした場合の結果を示している．このとき，$q = 306$，$p = 305$ として最大 305 個の点散乱源位置を推定できる条件で数値計算を行った．Fig. 7(a)–(d) より，いずれの手法でも散乱源の位置を概ね検出できていることが分かる．再構成像が単一周波数 MUSIC 法では縦に，複数周波数 MUSIC 法では横に伸びる特徴が見られた．また，ケース 2 のイメージング結果を比較すると，単一周波数 MUSIC 法では丸棒の上と内部の 2ヶ所で，複数周波数 MUSIC 法では丸棒の上側の境界 1ヶ所でピーク値が確認できた．

以上の結果から，本計測条件に対して適切なパラメータ設定の下では，2 次元理論によるイメージングができていることが分かる．ただし，Fig. 7 にはイメージングに用いる周波数成分，固有値と特異値をゼロとみなすための閾値を調整して比較的良好な結果が得られた場合のみを示していることに注意されたい．以下では，これらのパラメータが結果に及ぼす影響について考察する．

3.2.1. イメージングに用いる周波数成分を変化させた場合

Fig. 8 に様々な周波数成分を用いた場合の単一周波数 MUSIC 法によるイメージング結果を示す．Fig. 8 の結果はそれぞれ (a) 0.5MHz, (b) 1.0MHz, (c) 2.0MHz, (d) 5.0MHz の場合である．Fig. 8 より，低い周波数成分を使用した場合，再構成像が縦に広がり，縦方向の位置ずれが顕著になる傾向が見て取れる．一方，高い周波数成分を使用した場合，散乱体がない位置でも W が大きい値を取っている点が散見され，一概に高い周波数成分を用いると高解像度であるとは言えない．Fig. 6(c) より，計測波形は 5MHz 付近で最も大きい振幅が確認できるため，5MHz の周波数成分は含まれている．しかしながら，単一周波数 MUSIC 法は位相の誤差に敏感である [7] ため，高周波数成分はその影響を受けやすいと思われる．以上より，単一周波数 MUSIC 法は限られた周波数帯域でのみ正しい散乱体位置に再構成像が現れるため，散乱体位置が不明の場合における適切な周波数の選定は容易でない．

次に，Fig. 9 に上限周波数を変化させたときの複数周波数 MUSIC 法によるイメージング結果を示す．Fig. 9 は，$f_{\max}$ をそれぞれ (a) 0.5MHz, (b) 1.0MHz, (c) 2.0MHz, (d) 5.0MHz とした場合の結果である．Fig. 9 より，低い周波数成分のみに制限すると，再構成像が横に広がっていることが分かる．しかしながら，高い周波数成分まで用いることで再構成像が収束していく傾向が確認でき，単一周波数 MUSIC 法で見られる検出性能の低下は発生しなかった．以上より，使用する周波数成分によって再構成像が不安定になる単一周波数 MUSIC 法と比較して，複数周波数 MUSIC 法はロバスト性が高いと考えられる．

3.2.2. 固有値と特異値の閾値を変化させた場合

単一周波数 MUSIC 法，複数周波数 MUSIC 法のいずれも固有値，特異値がゼロとなるかどうかの判別に閾値が必要となる．しかしながら，計測実験のようにノイズが含まれる場合は，ノイズレベルに応じてこの閾値を定める必要がある．ケース 1 に対して，単一周波数 MUSIC 法では 2.55MHz の周波数成分を用いた場合，複数周波数 MUSIC 法では $f_{\max} = 6$MHz とした場合について閾値がイメージング結果に与える影響を調べる．

Fig. 10 にゼロとみなす固有値の絶対値を変化させたときの単一周波数 MUSIC 法によるイメージング結果，固有値の絶対値の分布を示す．Fig. 10 より，閾値による大きな結果

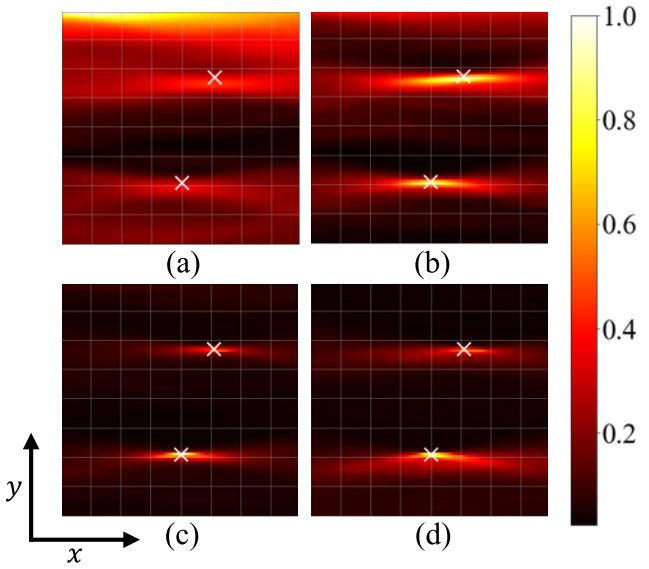


Fig. 9　Imaging results by multi-frequency MUSIC method when frequency components upto (a) 0.5MHz, (b) 1.0MHz, (c) 2.0MHz, and (d) 5.0MHz are used.

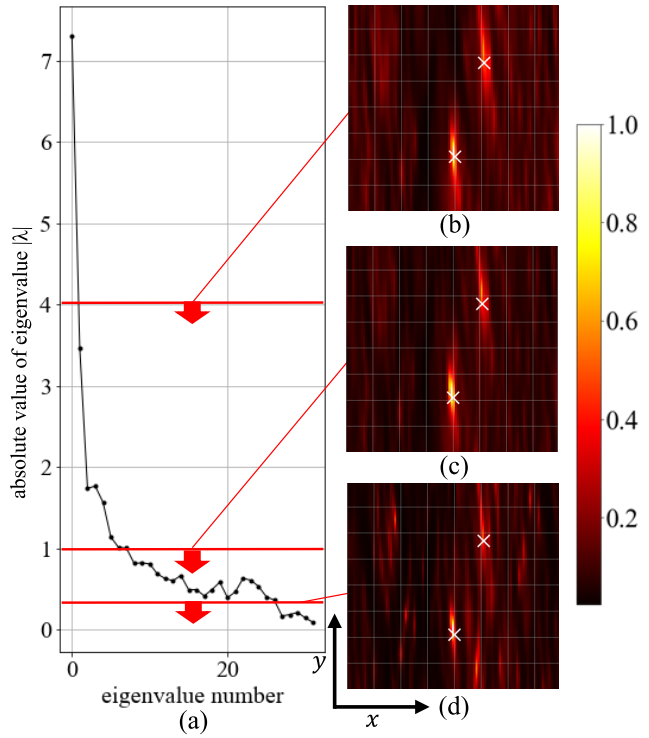


Fig. 10　(a) Distribution of absolute values of eigenvalues $|\lambda|$ and imaging results using (b) $|\lambda| < 4$, (c) $|\lambda| < 1$, and (d) $|\lambda| < 0.3$.

の変化は見られなかったが，閾値を小さくすると散乱体以外の位置で W が大きな値を取る箇所が増加している．次に，Fig. 11 にゼロとみなす特異値を変化させたときの複数周波数 MUSIC 法によるイメージング結果，特異値の分布を示す．Fig. 11 より，複数周波数 MUSIC 法では小さい特異値まで用いるようにすると，再構成像が少し不明瞭になるという影響が確認できたが，散乱体位置の推定は正確にできていることが分かる．また，Fig. 10(a)，11(a) より，単一周波数 MUSIC 法の固有値の数と比較して，複数周波数 MUSIC 法の特異値の数が多く，値の分布も広範囲であるため，閾値の選定が容易であると思われる．

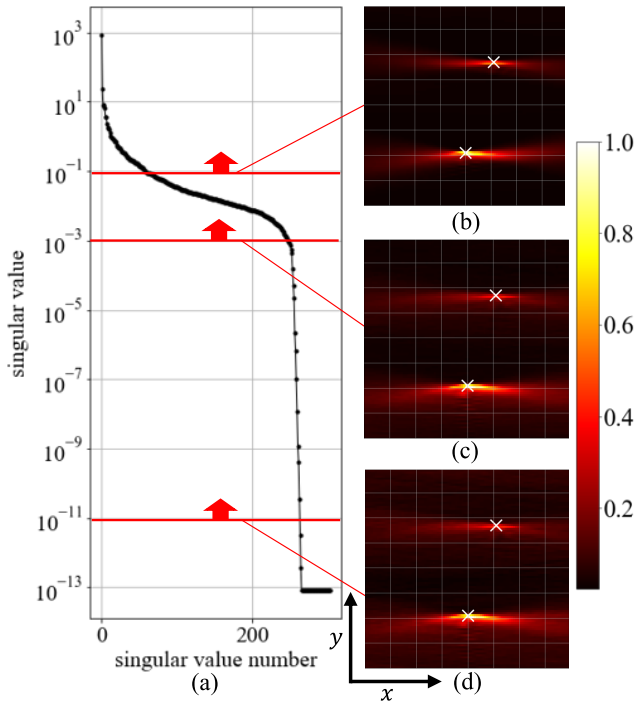


Fig. 11　(a) Distribution of singular values σ and imaging results using (b) $\sigma > 10^{-1}$, (c) $\sigma > 10^{-3}$, and (d) $\sigma > 10^{-11}$.

4. まとめ

本研究では，超音波探傷試験への MUSIC 法の適用を見据え，実測波形を用いた 2 種類の MUSIC 法によるイメージング結果の比較を行った．両手法とも適切なパラメータ設定の下では散乱源位置を概ね推定することができた．

イメージングに使用する周波数成分に関する比較では，両手法で低周波数での再構成像の広がりが確認された．複数周波数 MUSIC 法では高周波数成分まで使用することで推定精度の改善が見られたが，単一周波数 MUSIC 法では高周波数での位相ずれの影響が大きくなった可能性があり，適切な周波数成分を選択する必要があった．

使用する固有値と特異値の判別のための閾値の検討では，単一周波数 MUSIC 法は閾値の影響によって散乱源位置以外に再構成像が現れた．一方，複数周波数 MUSIC 法は閾値の変化によるイメージング精度の悪化はあまり見られず，散乱源位置を精度良く推定できていた．

これらの結果から，単一周波数 MUSIC 法では正確なイメージング結果を得るには適切なパラメータの設定が必要であり，パラメータに対してイメージング結果の精度が敏感であることが分かった．一方，複数周波数 MUSIC 法では，実測波形のようなノイズを含むデータに対してもパラメータ設定は比較的敏感でなく，ロバスト性が高いことが分かった．

謝辞： 本研究は JSPS 科研費 (20H02230) の助成，学際大規模情報基盤共同利用・共同研究拠点の支援 (jh220033) を受けたものです．この場をお借りして感謝申し上げます．

参考文献

(1) R. O. Schmidt: Multiple emitter location and signal parameter estimation, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, **34**(1986), pp. 276–280.

(2) 菊間信良, 安西睦, 小川勝, 山田幸一, 稲垣直樹: 室内無線通信のための MUSIC 法による多重波の到来方向と伝搬遅延時間の推定, 電子情報通信学会論文誌, **J73-B2**(1990), pp. 786–795.

(3) A. Kirsch: The MUSIC-algorithm and the factorization method in inverse scattering theory for inhomogeneous media, *Inverse Problems*, **18**(2002), pp. 1025–1040.

(4) T. Fu, Y. Wang, L. Qiu, and X. Tian: Sector piezoelectric sensor array transmitter beamforming MUSIC algorithm based structure damage imaging method, *Sensors*, **20**(2020), 1265.

(5) S. Fan, A. Zhang, H. Sun, and F. Yun: A local TR-MUSIC algorithm for damage imaging of aircraft structures, *Sensors*, **21**(2021), 3334.

(6) C. Fan, M. Caleap, M. Pan, and B. W. Drinkwater: A comparison between ultrasonic array beamforming and super resolution imaging algorithms for non-destructive evaluation, *Ultrasonics*, **54**(2014), pp. 1842–1850.

(7) M. Moscoso, A. Novikov, G. Papanicolaou, and C. Tsogka: Multifrequency interferometric imaging with intensity-only measurements, *SIAM Journal on Imaging Sciences*, **10**(2017), pp. 1005–1032.

(8) R. Griesmaier and C. Schmiedecke: A multifrequency MUSIC algorithm for locating small inhomogeneities in inverse scattering, *Inverse Problems*, **33**(2017), 035015.

計算数理工学論文集 Vol. 21 (2022 年 12 月)，論文 No. 20-221216 JASCOME

レーザ干渉計による計測データを用いた弾性材料の非破壊評価のためのトポロジー導関数を用いた欠陥決定解析

An identification of defects using topological derivatives for nondestructive evaluation of elastic materials with laser interferometry data

中園　昂志 [1)]，吉川　仁 [2)]

Takashi NAKAZONO and Hitoshi YOSHIKAWA

1) 京都大学大学院　情報学研究科（〒 606-8501 京都市左京区吉田本町, E-mail: nakazono.takashi.54a@st.kyoto-u.ac.jp）
2) 京都大学大学院　情報学研究科（〒 606-8501 京都市左京区吉田本町, E-mail: yoshikawa.hitoshi.5u@kyoto-u.ac.jp）

Identification of defects using topological derivatives with laser measurement data is considered. In previous studies of an identification of defects in an elastic material using topological derivatives, the topological derivatives are defined with the displacement vectors measured on the surface of the material. However, only the normal component of the particle velocity on the surface is able to be obtained with the actual laser ultrasonic measurement. In this study, topological derivatives are calculated using normal particle velocities on the surface of the material. We solve simple defect identification problems using the proposed topological derivatives. We can show that the defects are determined with sufficient accuracy using the topological derivatives calculated with the normal component of the particle velocity on the surface.

Key Words: NDE, topology derivative, TD-BIEM, laser measurement

1. はじめに

Bonnet による 3 次元散乱波動場におけるトポロジー導関数の定式化 [(1)] 以降，トポロジー導関数を用いた最適化手法を応用した散乱体決定解析に関する研究が注目されている．具体的方法としては，例えば近藤らは周波数域の 3 次元スカラー波動問題に対して，推定される散乱体の配置をレベルセット法 [(2)] により再帰的に更新することで正解の散乱体配置を求めている [(3)]．また，時間域のスカラー波動問題についても同様に，吉川, 寺沢によるレベルセット法を用いた散乱体の決定解析 [(4)] などがある．

本研究では，レーザ超音波計測による波形データを用いた定量的非破壊評価への応用を見越し，弾性体を対象としたトポロジー導関数を用いた散乱体決定解析を考える．スカラー波動問題における先行研究 [(3)(4)] と同様に，弾性体を対象とした動弾性波動問題においてもトポロジー導関数及びレベルセット法を用いた散乱体決定解析手法が適用できることが期待される．

一方で，これまでに提案されている弾性体に対するトポロジー導関数を用いた散乱体決定解析では，領域の境界上での変位 $\boldsymbol{u}$ の全ての成分を用いてトポロジー導関数が定義されている [(1)]．実際のレーザ超音波計測では、計測対象物表面をレーザ干渉計を用いて計測する．レーザ干渉計は，機器から照射されるレーザと対象物表面で反射して機器に戻ってくるレーザとの位相差よりレーザ照射点の粒子速度を計測する．照射点からの散乱レーザ光が多く戻ってくる法線方向の粒子速度については精度良く計測が可能である．一方で，粒子速度の水平速度成分の計測は，同一の計測点でレーザを法線方向と，法線方向からある一定角度傾けた方向から照射し，2 つの計測データから水平速度成分を取り出す方法が用いられている．レーザ照射方向が法線方向から少しでも傾くと，対象物からの散乱レーザ光の受光量が減少し，安定したレーザ計測が行えないといった問題がある．また，散乱レーザ光を受光するために照射角度も法線方向から 17° 程度までしか傾けることができず [(5)]，s/n 比の悪い斜め方向からの計測値から取り出す粒子速度の水平速度成分の信頼度は高くない．

2022 年 11 月 07 日受付，2022 年 11 月 16 日受理

そこで，本研究では実際のレーザ超音波計測で十分な精度で計測可能な材料表面の粒子速度成分のみを用いたトポロジー導関数を定義し，レベルセット法の適用を見据えて，散乱体の決定精度について検証する．なお，本論文では 2 次元の弾性体を扱うこととする．

2. トポロジー導関数を用いた散乱体決定解析

まずは，Bonnet の研究 (1) で示された，弾性材料を対象としたトポロジー導関数を用いた散乱体決定解析について記述する．

2.1. 目的汎関数

Fig.1 のように，内部に複数の散乱体を持つ 2 次元の等方弾性体 Ω における初期値境界値問題を考える．Ω の外部境界を S，内部の複数の散乱体の占める領域の集合を D，D の境界を Γ，$\Omega_\Gamma := \Omega \setminus D$ としたときの変位 $\boldsymbol{u}^\Gamma(\boldsymbol{\xi},t)$ についての動弾性方程式の初期値境界値問題を $\mathcal{P}(\Gamma)$ とする．

$\mathcal{P}(\Gamma)$:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Delta}^* \boldsymbol{u}^\Gamma(\boldsymbol{\xi},t) = \rho \ddot{\boldsymbol{u}}^\Gamma(\boldsymbol{\xi},t) & (\boldsymbol{\xi} \in \Omega_\Gamma,\ t>0) \quad (1a) \\ \boldsymbol{t}[\boldsymbol{u}^\Gamma](\boldsymbol{\xi},t) = \boldsymbol{p}(\boldsymbol{\xi},t) & (\boldsymbol{\xi} \in S,\ t>0) \quad (1b) \\ \boldsymbol{t}[\boldsymbol{u}^\Gamma](\boldsymbol{\xi},t) = \boldsymbol{0} & (\boldsymbol{\xi} \in \Gamma,\ t>0) \quad (1c) \\ \boldsymbol{u}^\Gamma(\boldsymbol{\xi},0) = \dot{\boldsymbol{u}}^\Gamma(\boldsymbol{\xi},0) = \boldsymbol{0} & (\boldsymbol{\xi} \in \Omega_\Gamma) \quad (1d) \end{cases}$$

ここに，$\boldsymbol{\Delta}^*$ は弾性方程式の微分作用素，$\boldsymbol{t}$ はトラクションであり，それぞれ

$$(\boldsymbol{\Delta}^* \boldsymbol{u})_i = C_{ijkl} u_{l,kj} \quad (2)$$

$$\boldsymbol{t}[\boldsymbol{u}]_i = C_{ijkl} u_{l,k} n_j \quad (3)$$

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \quad (4)$$

である．また，$\boldsymbol{p}$ は既知ベクトル，$\boldsymbol{n}$ は境界上の外向き単位法線ベクトル，λ, μ はラメ定数，ρ は弾性体の密度，δ_{ij} はクロネッカーのデルタ，$(\ )_{,i}$ は空間座標による微分 $\dfrac{\partial}{\partial \xi_i}$ である．

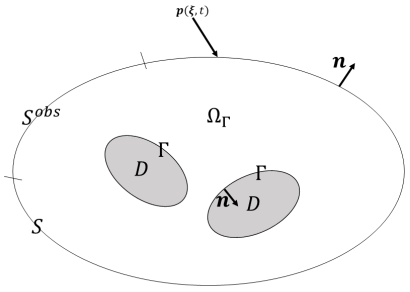


Fig. 1　初期値境界値問題 $\mathcal{P}(\Gamma)$

ここで，散乱体の配置 Γ によって求まる次の目的汎関数 $J(\Omega_\Gamma)$ を導入する．

$$J(\Omega_\Gamma) := \int_0^T \int_{S^{\mathrm{obs}}} \varphi(\boldsymbol{u}^\Gamma(\boldsymbol{\xi},t),\boldsymbol{\xi},t)\mathrm{d}l(\xi)\mathrm{d}t \quad (5)$$

$$\varphi(\boldsymbol{w},\boldsymbol{\xi},t) := |\boldsymbol{w} - \boldsymbol{u}^{\mathrm{true}}(\boldsymbol{\xi},t)|^2 \quad (6)$$

ここに，$\boldsymbol{u}^{\mathrm{true}}$ は正解の散乱体配置 Γ_{true} での初期値境界値問題 $\mathcal{P}(\Gamma_{\mathrm{true}})$ の解であり，Ω の境界の一部 $S^{\mathrm{obs}} \subset S$ で計測できているとする．

導入した目的汎関数 $J(\Omega_\Gamma)$ を最小とする散乱体配置 Γ を求めることで，散乱体の数，位置，形状を決定する逆解析を考える．トポロジー導関数を用いた散乱体決定解析では，散乱体配置 Γ に加えて，Fig.2 のように，中心 $\boldsymbol{x}^0$, 半径 ϵ の微小な円形散乱体 D_ϵ が追加された問題 $\mathcal{P}(\Gamma_\epsilon)$ を考える．ここに，$\Gamma_\epsilon = \Gamma + \partial D_\epsilon$ である．トポロジー導関数 $\mathcal{T}(\boldsymbol{x}^0)$ を

$$\mathcal{T}(\boldsymbol{x}^0) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\pi\epsilon^2}\{J(\Omega_{\Gamma_\epsilon}) - J(\Omega_\Gamma)\} \quad (7)$$

と定義する．点 $\boldsymbol{x}^0$ が正解の散乱体の配置の内点であれば，目的汎関数 J は小さくなる．つまり，トポロジー導関数 $\mathcal{T}(\boldsymbol{x}^0)$ は負になるはずである．この考えに基づき，値が負となるトポロジー導関数を持つ点とその点でのトポロジー導関数の値の分布を用いて散乱体の数，位置，形状を推定する．

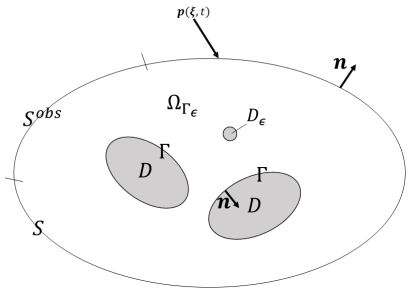


Fig. 2　微小な円形散乱体 D_ϵ が追加された初期値境界値問題 $\mathcal{P}(\Gamma_\epsilon)$

2.2. トポロジー導関数

初期値境界値問題 $\mathcal{P}(\Gamma)$ の随伴問題 $\hat{\mathcal{P}}(\Gamma)$ を以下で定める．

$\hat{\mathcal{P}}(\Gamma)$:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Delta}^* \hat{\boldsymbol{u}}^\Gamma(\boldsymbol{\xi},t) = \rho \ddot{\hat{\boldsymbol{u}}}^\Gamma(\boldsymbol{\xi},t) & (\boldsymbol{\xi} \in \Omega_\Gamma,\ t>0) \quad (8a) \\ \boldsymbol{t}[\hat{\boldsymbol{u}}^\Gamma](\boldsymbol{\xi},t) & \\ = \dfrac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{w}}(\boldsymbol{u}^\Gamma(\boldsymbol{\xi},T-t),\boldsymbol{\xi},T-t) & (\boldsymbol{\xi} \in S^{\mathrm{obs}},\ t>0) \quad (8b) \\ \boldsymbol{t}[\hat{\boldsymbol{u}}^\Gamma](\boldsymbol{\xi},t) = \boldsymbol{0} & (\boldsymbol{\xi} \in S \setminus S^{\mathrm{obs}},\ t>0) \quad (8c) \\ \boldsymbol{t}[\hat{\boldsymbol{u}}^\Gamma](\boldsymbol{\xi},t) = \boldsymbol{0} & (\boldsymbol{\xi} \in \Gamma,\ t>0) \quad (8d) \\ \hat{\boldsymbol{u}}^\Gamma(\boldsymbol{\xi},0) = \dot{\hat{\boldsymbol{u}}}^\Gamma(\boldsymbol{\xi},0) = \boldsymbol{0} & (\boldsymbol{\xi} \in \Omega_\Gamma) \quad (8e) \end{cases}$$

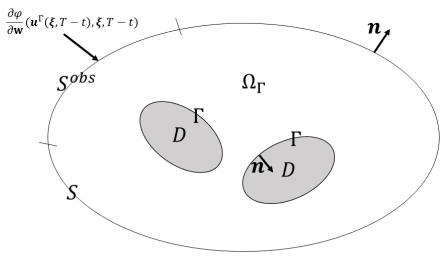


Fig. 3　随伴問題 $\hat{\mathcal{P}}(\Gamma)$

このとき，トポロジー導関数 $\mathcal{T}(\boldsymbol{x}^0)$ は元の問題 $\mathcal{P}(\Gamma)$ の解 $\boldsymbol{u}^{\Gamma}$，及び随伴問題 $\hat{\mathcal{P}}(\Gamma)$ の解 $\hat{\boldsymbol{u}}^{\Gamma}$ により，

$$\mathcal{T}(\boldsymbol{x}^0)=\left(A_{ijkl}\sigma[\hat{\boldsymbol{u}}^{\Gamma}]_{ij}*\sigma[\boldsymbol{u}^{\Gamma}]_{kl}+\rho\dot{\hat{u}}_k^{\Gamma}*\dot{u}_k^{\Gamma}\right)(\boldsymbol{x}^0,T) \quad (9)$$

で求まる [(1)(6)]．ここに，

$$\sigma[\boldsymbol{w}]_{ij}=C_{ijkl}w_{l,k} \quad (10)$$

$$A_{ijkl}=-\frac{1-\nu}{2\mu(1+\nu)}\delta_{ij}\delta_{kl}+\frac{1-\nu}{\mu}(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk}) \quad (11)$$

であり，$(\,)*(\,)$ は時間についての畳み込み，ν はポアソン比である．

3. 計測可能なレーザ超音波計測データを用いたトポロジー導関数による散乱体決定解析

3.1. 計測可能なレーザ超音波計測データを用いたトポロジー導関数

随伴問題の境界条件 (8b) 式右辺は

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\varphi}{\partial \boldsymbol{w}}(\boldsymbol{u}^{\Gamma}(\boldsymbol{\xi},T-t),\boldsymbol{\xi},T-t)\\=&2\left(\boldsymbol{u}^{\Gamma}(\boldsymbol{\xi},T-t)-\boldsymbol{u}^{\mathrm{true}}(\boldsymbol{\xi},T-t)\right)\end{aligned} \quad (12)$$

である．一方で，レーザ干渉計を用いたレーザ超音波計測で十分な精度で測定できるのは対象物表面の法線方向の粒子速度 $\dot{u}^{\mathrm{obs}}(\boldsymbol{\xi},t)=\dot{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{true}}(\boldsymbol{\xi},t)\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{\xi})$ であり，接線方向の成分は精度よく計測できない．そのため，(8b) 式はこのままの形で計算することはできない．

そこで，目的汎関数を次のように計測可能な法線成分 $\dot{u}^{\mathrm{obs}}$ で構成する．

$$\tilde{J}(\Omega_\Gamma):=\int_0^T\int_{S^{\mathrm{obs}}}\tilde{\varphi}(\dot{\boldsymbol{u}}^{\Gamma}(\boldsymbol{\xi},t),\boldsymbol{\xi},t)\mathrm{d}l(\xi)\mathrm{d}t \quad (13)$$

$$\tilde{\varphi}(\boldsymbol{w},\boldsymbol{\xi},t):=\left\{\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{\xi})-\dot{u}^{\mathrm{obs}}(\boldsymbol{\xi},T-t)\right\}^2 \quad (14)$$

このとき，(8b) 式及び随伴問題は次のようになる．

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{t}[\hat{\boldsymbol{u}}^{\Gamma}](\boldsymbol{\xi},t)\\=&\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial \boldsymbol{w}}(\dot{\boldsymbol{u}}^{\Gamma}(\boldsymbol{\xi},T-t),\boldsymbol{\xi},T-t)\\=&2\left\{\dot{\boldsymbol{u}}^{\Gamma}(\boldsymbol{\xi},T-t)\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{\xi})-\dot{u}^{\mathrm{obs}}(\boldsymbol{\xi},T-t)\right\}\boldsymbol{n}(\boldsymbol{\xi})\end{aligned} \quad (8b')$$

$\tilde{\mathcal{P}}(\Gamma)$:

$$\begin{cases}\boldsymbol{\Delta}^*\tilde{\boldsymbol{u}}^{\Gamma}(\boldsymbol{\xi},t)=\rho\ddot{\tilde{\boldsymbol{u}}}^{\Gamma}(\boldsymbol{\xi},t) & (\boldsymbol{\xi}\in\Omega_\Gamma,\ t>0) \quad (15a)\\ \boldsymbol{t}[\tilde{\boldsymbol{u}}^{\Gamma}](\boldsymbol{\xi},t)\\ =\dfrac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial \boldsymbol{w}}(\dot{\boldsymbol{u}}^{\Gamma}(\boldsymbol{\xi},T-t),\boldsymbol{\xi},T-t) & (\boldsymbol{\xi}\in S^{\mathrm{obs}},\ t>0) \quad (15b)\\ \boldsymbol{t}[\tilde{\boldsymbol{u}}^{\Gamma}](\boldsymbol{\xi},t)=\boldsymbol{0} & (\boldsymbol{\xi}\in S\setminus S^{\mathrm{obs}},\ t>0) \quad (15c)\\ \boldsymbol{t}[\tilde{\boldsymbol{u}}^{\Gamma}](\boldsymbol{\xi},t)=\boldsymbol{0} & (\boldsymbol{\xi}\in\Gamma,\ t>0) \quad (15d)\\ \tilde{\boldsymbol{u}}^{\Gamma}(\boldsymbol{\xi},0)=\dot{\tilde{\boldsymbol{u}}}^{\Gamma}(\boldsymbol{\xi},0)=\boldsymbol{0} & (\boldsymbol{\xi}\in\Omega_\Gamma) \quad (15e)\end{cases}$$

元の問題 $\mathcal{P}(\Gamma)$ の解 $\boldsymbol{u}^{\Gamma}$，及び改良された随伴問題 $\tilde{\mathcal{P}}(\Gamma)$ の解 $\tilde{\boldsymbol{u}}^{\Gamma}$ を用いて，レーザ超音波計測データを直接用いるために改良されたトポロジー導関数

$$\tilde{\mathcal{T}}(\boldsymbol{x}^0)=\left(A_{ijkl}\sigma[\tilde{\boldsymbol{u}}^{\Gamma}]_{ij}*\sigma[\dot{\boldsymbol{u}}^{\Gamma}]_{kl}+\rho\dot{\tilde{u}}_k^{\Gamma}*\ddot{u}_k^{\Gamma}\right)(\boldsymbol{x}^0,T) \quad (16)$$

が得られる．

3.2. 比較対象とするトポロジー導関数

粒子速度の法線成分のみで導いたトポロジー導関数との比較対象として対象物表面の粒子速度 $\dot{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{true}}$ の法線成分と接線成分両方を用いるトポロジー導関数 $\breve{\mathcal{T}}(\boldsymbol{x}^0)$ を導入する．そこで，目的汎関数を次のように変更する．

$$\breve{J}(\Omega_\Gamma):=\int_0^T\int_{S^{\mathrm{obs}}}\breve{\varphi}(\dot{\boldsymbol{u}}^{\Gamma}(\boldsymbol{\xi},t),\boldsymbol{\xi},t)\mathrm{d}l(\xi)\mathrm{d}t \quad (17)$$

$$\breve{\varphi}(\boldsymbol{w},\boldsymbol{\xi},t):=|\boldsymbol{w}-\dot{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{true}}(\boldsymbol{\xi},t)|^2 \quad (18)$$

このとき，(8b) 式及び随伴問題は次のようになる．

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{t}[\breve{\boldsymbol{u}}^{\Gamma}](\boldsymbol{\xi},t)\\=&\frac{\partial\breve{\varphi}}{\partial \boldsymbol{w}}(\dot{\boldsymbol{u}}^{\Gamma}(\boldsymbol{\xi},T-t),\boldsymbol{\xi},T-t)\\=&2\left\{\dot{\boldsymbol{u}}^{\Gamma}(\boldsymbol{\xi},T-t)-\dot{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{true}}(\boldsymbol{\xi},T-t)\right\}\end{aligned} \quad (8b'')$$

$\breve{\mathcal{P}}(\Gamma)$:

$$\begin{cases}\boldsymbol{\Delta}^*\breve{\boldsymbol{u}}^{\Gamma}(\boldsymbol{\xi},t)=\rho\ddot{\breve{\boldsymbol{u}}}^{\Gamma}(\boldsymbol{\xi},t) & (\boldsymbol{\xi}\in\Omega_\Gamma,\ t>0) \quad (19a)\\ \boldsymbol{t}[\breve{\boldsymbol{u}}^{\Gamma}](\boldsymbol{\xi},t)\\ =\dfrac{\partial\breve{\varphi}}{\partial \boldsymbol{w}}(\dot{\boldsymbol{u}}^{\Gamma}(\boldsymbol{\xi},T-t),\boldsymbol{\xi},T-t) & (\boldsymbol{\xi}\in S^{\mathrm{obs}},\ t>0) \quad (19b)\\ \boldsymbol{t}[\breve{\boldsymbol{u}}^{\Gamma}](\boldsymbol{\xi},t)=\boldsymbol{0} & (\boldsymbol{\xi}\in S\setminus S^{\mathrm{obs}},\ t>0) \quad (19c)\\ \boldsymbol{t}[\breve{\boldsymbol{u}}^{\Gamma}](\boldsymbol{\xi},t)=\boldsymbol{0} & (\boldsymbol{\xi}\in\Gamma,\ t>0) \quad (19d)\\ \breve{\boldsymbol{u}}^{\Gamma}(\boldsymbol{\xi},0)=\dot{\breve{\boldsymbol{u}}}^{\Gamma}(\boldsymbol{\xi},0)=\boldsymbol{0} & (\boldsymbol{\xi}\in\Omega_\Gamma) \quad (19e)\end{cases}$$

元の問題 $\mathcal{P}(\Gamma)$ の解 $\boldsymbol{u}^{\Gamma}$，及び随伴問題 $\breve{\mathcal{P}}(\Gamma)$ の解 $\breve{\boldsymbol{u}}^{\Gamma}$ を用いて比較対象のトポロジー導関数

$$\breve{\mathcal{T}}(\boldsymbol{x}^0)=\left(A_{ijkl}\sigma[\breve{\boldsymbol{u}}^{\Gamma}]_{ij}*\sigma[\dot{\boldsymbol{u}}^{\Gamma}]_{kl}+\rho\dot{\breve{u}}_k^{\Gamma}*\ddot{u}_k^{\Gamma}\right)(\boldsymbol{x}^0,T) \quad (20)$$

が得られる．

4. 数値計算結果

各初期値境界値問題は区分一定の空間内挿関数，区分線形の時間内挿関数を用いて離散化を行い，時間域の境界積分方程式法 [(7)] により解を求める．

4.1. 数値解析例 1

4.1.1. 問題設定

4 点 $\mathrm{O}(0,0),\mathrm{A}(0,1),\mathrm{B}(1,1),\mathrm{C}(1,0)$ を頂点とする正方形の 2 次元等方弾性体（Fig.4）を考える．この弾性体は中心

$(0.5, 0.5)$，半径 0.1 の円形の空洞を持つ．この空洞を未知として，弾性体表面の粒子速度の法線成分から空洞の配置 $\Gamma^{\text{true}} = \{\boldsymbol{\xi} | (\xi_1 - 0.5)^2 + (\xi_2 - 0.5)^2 = 0.1^2\}$ を決定する問題を考える．材料定数はそれぞれ，$\lambda = 2$，$\mu = 1$，$\rho = 1$ とする．入力として下辺の中点に次のトラクション

$$\boldsymbol{t}[\boldsymbol{u}](\boldsymbol{\xi}, t) = \boldsymbol{p}(\boldsymbol{\xi}, t)$$
$$= \begin{cases} -\delta(\xi_1 - 0.5)\delta(\xi_2)\sin(4\pi t)\ \boldsymbol{n}(x_1, x_2) & (0 < t < 1) \\ \boldsymbol{0} & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

を入射し，時刻 $t = 2$ まで，計測範囲 $S^{\text{obs}} = S$（4 辺全て）で計測を行った．時間域の境界要素法において，時間増分 $\Delta t = 0.02$，境界要素サイズ $\Delta x = 0.02$ とした．散乱体決定解析においては，内部に散乱体が存在しない状態，すなわち，$\Gamma = \varnothing$ とし，弾性体の内点（49×49 個の格子点）でのトポロジー導関数を計算した．

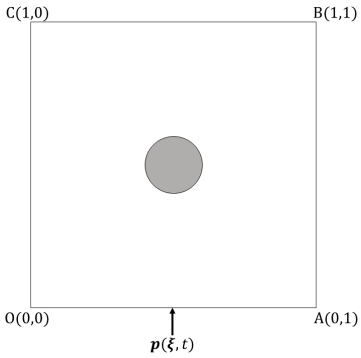


Fig. 4　例 1: 中心に円形空洞を持つ 2 次元等方弾性体

4.1.2. 数値計算結果

計算された内点でのトポロジー導関数の等高線を Fig.5〜6 に示す．なお，これらのトポロジー導関数の値は最も小さな値となるトポロジー導関数の値で正規化されたものである．

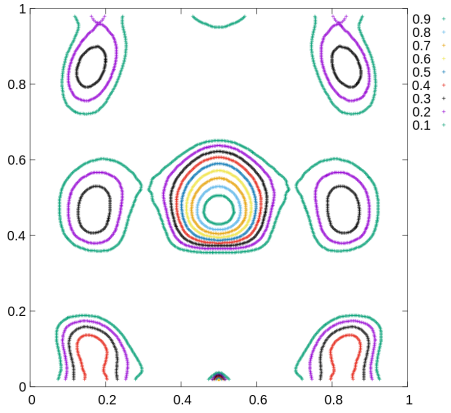


Fig. 5　例 1: 中心に円形空洞を持つ弾性体における粒子速度の法線成分のみを用いたトポロジー導関数の等高線

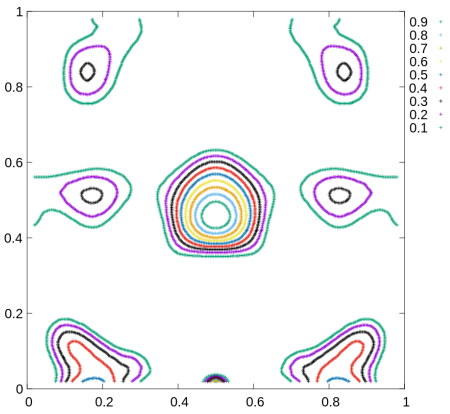


Fig. 6　例 1: 中心に円形空洞を持つ弾性体における粒子速度の法線成分・接線成分両方を用いたトポロジー導関数の等高線

Fig.5 より，計測される粒子速度の法線成分 $\dot{u}^{\text{obs}}$ を用いたトポロジー導関数による散乱体決定解析においても，正解の散乱体位置でトポロジー導関数は符号が負で絶対値の大きな値となって分布しており，正しく散乱体の情報を推定できていることがわかる．また，Fig.6 との比較により，対象物表面の粒子速度の接線成分は散乱体の決定にほぼ関与していないことがわかった．

4.2. 数値解析例 2

4.2.1. 問題設定

4 点 $\mathrm{O}(0,0), \mathrm{A}(0,1), \mathrm{B}(1,1), \mathrm{C}(1,0)$ を頂点とする正方形の 2 次元等方弾性体（Fig.7）を考える．この弾性体は中心がそれぞれ $(0.3, 0.5)$，$(0.7, 0.5)$，半径がそれぞれ 0.04，0.06 の 2 つの円形の空洞を持つ．この空洞を未知として，弾性体表面の粒子速度の法線成分から空洞の配置 $\Gamma^{\text{true}} = \{\boldsymbol{\xi} | (\xi_1 - 0.3)^2 + (\xi_2 - 0.5)^2 = 0.04^2\} \cup \{\boldsymbol{\xi} | (\xi_1 - 0.7)^2 + (\xi_2 - 0.5)^2 = 0.06^2\}$ を決定する問題を考える．材料定数はそれぞれ，$\lambda = 2$，$\mu = 1$，$\rho = 1$ とする．入力として下辺の 3 点 $(x_1, x_2) = (0.2, 0), (0.5, 0), (0.8, 0)$ に次のトラクション

$$\boldsymbol{t}[\boldsymbol{u}](\boldsymbol{\xi}, t) = \boldsymbol{p}(\boldsymbol{\xi}, t)$$
$$= \begin{cases} -\delta(\xi_1 - x_1)\delta(\xi_2 - x_2)\sin(4\pi t)\ \boldsymbol{n}(x_1, x_2) & (0 < t < 1) \\ \boldsymbol{0} & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

を 1 回ずつ，計 3 回入射し，計測範囲 $S^{\text{obs}} = S$（4 辺全て）で時刻 $t = 2$ まで計測を行った．時間域の境界要素法において，時間増分 $\Delta t = 0.02$，境界要素サイズ $\Delta x = 0.02$ とした．散乱体決定解析においては，(1) 内部に散乱体が存在しない状態，すなわち，$\Gamma = \varnothing$，(2) 半径が大きい方の空洞については位置・形状が既知，すなわち，$\Gamma = \{\boldsymbol{\xi} | (\xi_1 - 0.7)^2 + (\xi_2 - 0.5)^2 = 0.06^2\}$ の 2 通りにおいて弾性体の内点（49×49 個の格子点）でのトポロジー導関数を計算した．

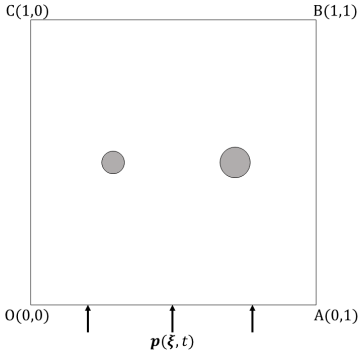


Fig. 7　例 2: 2 つの円形の空洞を持つ 2 次元等方弾性体

4.2.2. 数値計算結果

3 回の計測データを用いて計算された内点でのトポロジー導関数を合計した値の等高線を Fig.8〜11 に示す．なお，これらのトポロジー導関数の値は最も小さな値となるトポロジー導関数の値で正規化した値である．

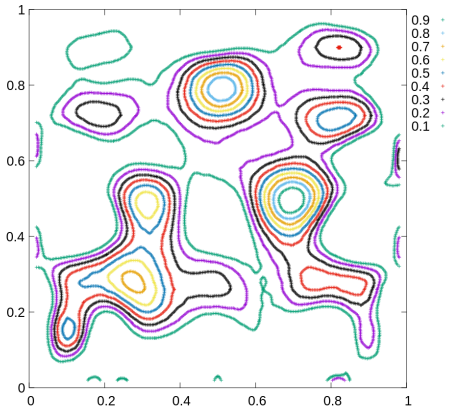


Fig. 8　例 2(1) 2 つの空洞を持つ弾性体における，粒子速度の法線成分のみを用いたトポロジー導関数の等高線

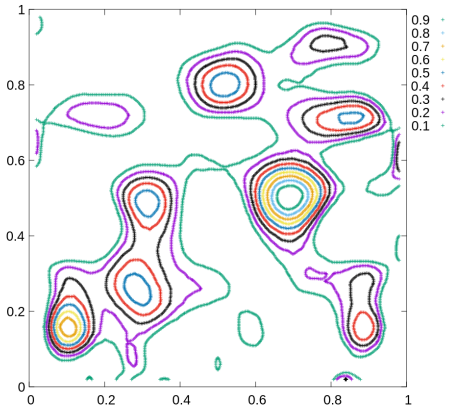


Fig. 9　例 2(1) 2 つの空洞を持つ弾性体における，粒子速度の法線成分・接線成分両方を用いたトポロジー導関数の等高線

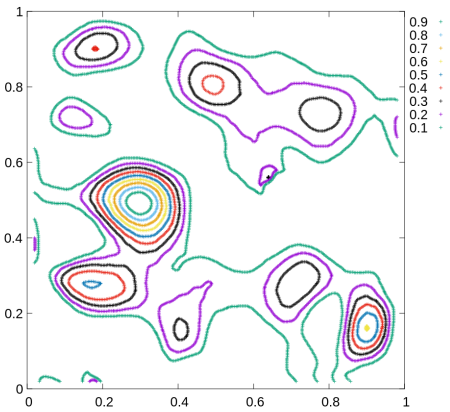


Fig. 10　例 2(2) 2 つの空洞を持つ弾性体において，空洞の 1 つは既知の場合の粒子速度の法線成分のみを用いたトポロジー導関数の等高線

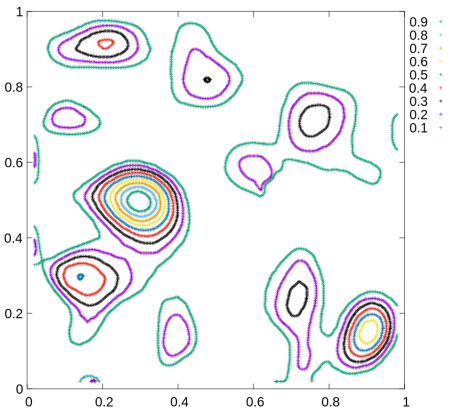


Fig. 11　例 2(2) 2 つの空洞を持つ弾性体において，空洞の 1 つは既知の場合の粒子速度の法線成分・接線成分両方を用いたトポロジー導関数の等高線

Fig.8 では半径が大きい方の散乱体が存在する箇所で，Fig.10 では未知とした散乱体が存在する箇所でトポロジー導関数は符号が負で絶対値の大きな値になっておりレーザ超音波計測データ u^{obs} を用いたトポロジー導関数による散乱体決定解析において一定の精度で散乱体の情報を推定できていることがわかる．また，それぞれ Fig.9, 11 と比較して，推定の精度は大きくは低下していないことが確認できる．

Fig.8, 9 では共通して点 $(0.5, 0.8)$ 付近でトポロジー導関数が符号が負で絶対値の大きな値になっており，あたかもこの位置に散乱体が存在するかのような推定結果となっている．法線成分のみを用いている Fig.8 では特に，実際に散乱体が存在する点 $(0.7, 0.5)$ 付近との比率が大きくなっており，法線成分のみを用いたことによって推定精度が低下したと言える．一方で Fig.8, 9 の点 $(0.1, 0.15)$ 付近に着目すると，実際に散乱体が存在する点 $(0.7, 0.5)$ 付近との比率は法線成分の

みを用いた Fig.8 の方が小さくなっており，必ずしも全ての点において推定精度が低下するわけではない．

4.3. 数値解析例 3

4.3.1. 問題設定

4.2 節では 2 つの散乱体の中心位置が左右対象な数値例を扱ったが，本節では中心位置が非対称な例を扱う．

4 点 $\mathrm{O}(0,0), \mathrm{A}(0,1), \mathrm{B}(1,1), \mathrm{C}(1,0)$ を頂点とする正方形の 2 次元等方弾性体（Fig.12）を考える．この弾性体は半径がともに 0.05，中心がそれぞれ $(0.3, 0.5)$，$(0.6, 0.7)$ の 2 つの円形の空洞を持つ．この空洞を未知として，弾性体表面の粒子速度の法線成分から空洞の配置 $\Gamma^{\mathrm{true}} = \{\boldsymbol{\xi} | (\xi_1 - 0.3)^2 + (\xi_2 - 0.5)^2 = 0.05^2\} \cup \{\boldsymbol{\xi} | (\xi_1 - 0.6)^2 + (\xi_2 - 0.7)^2 = 0.05^2\}$ を決定する問題を考える．材料定数はそれぞれ，$\lambda = 2$，$\mu = 1$，$\rho = 1$ とする．入力として上辺及び下辺のそれぞれ 3 点ずつ，計 6 点 $(x_1, x_2) = (0.2, 0), (0.5, 0), (0.8, 0), (0.2, 1), (0.5, 1), (0.8, 1)$ に次のトラクション

$$\boldsymbol{t}[\boldsymbol{u}](\boldsymbol{\xi}, t) = \boldsymbol{p}(\boldsymbol{\xi}, t)$$
$$= \begin{cases} -\delta(\xi_1 - x_1)\delta(\xi_2 - x_2)\sin(4\pi t)\ \boldsymbol{n}(x_1, x_2) & (0 < t < 1) \\ \boldsymbol{0} & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

を 1 回ずつ，計 6 回入射し，計測範囲 $S^{\mathrm{obs}} = S$（4 辺全て）で時刻 $t = 2$ まで計測を行った．時間域の境界要素法において，時間増分 $\Delta t = 0.02$，境界要素サイズ $\Delta x = 0.02$ とした．散乱体決定解析においては，(1) 内部に散乱体が存在しない状態，すなわち，$\Gamma = \varnothing$，(2) 中心が $(0.3, 0.5)$ の空洞については位置･形状が既知，すなわち，$\Gamma = \{\boldsymbol{\xi} | (\xi_1 - 0.3)^2 + (\xi_2 - 0.5)^2 = 0.05^2\}$ の 2 通りにおいて弾性体の内点（49×49 個の格子点）でのトポロジー導関数を計算した．

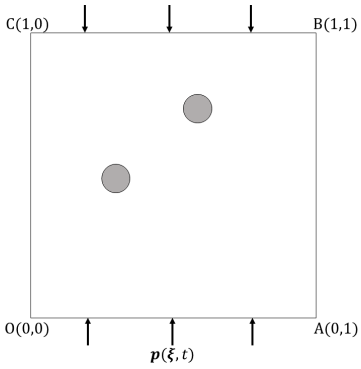


Fig. 12　例 3: 2 つの円形の空洞を持つ 2 次元等方弾性体

4.3.2. 数値計算結果

6 回の計測データを用いて計算された内点でのトポロジー導関数を合計した値の等高線を Fig.13〜16 に示す．なお，これらのトポロジー導関数の値は最も小さな値となるトポロジー導関数の値で正規化した値である．

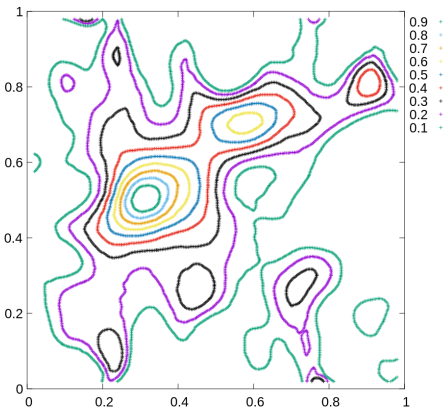


Fig. 13　例 3(1)2 つの空洞を持つ弾性体における，粒子速度の法線成分のみを用いたトポロジー導関数の等高線

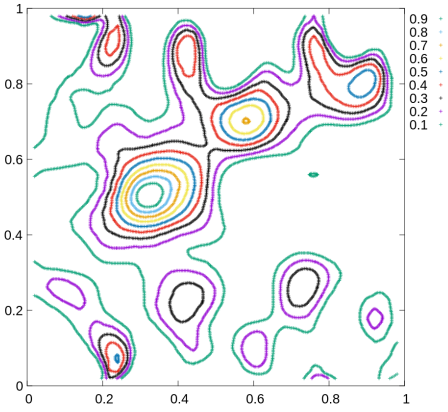


Fig. 14　例 3(1)2 つの空洞を持つ弾性体における，粒子速度の法線成分・接線成分両方を用いたトポロジー導関数の等高線

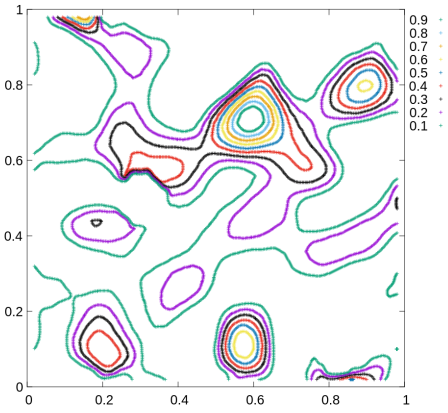


Fig. 15　例 3(2)2 つの空洞を持つ弾性体において，空洞の 1 つは既知の場合の粒子速度の法線成分のみを用いたトポロジー導関数の等高線

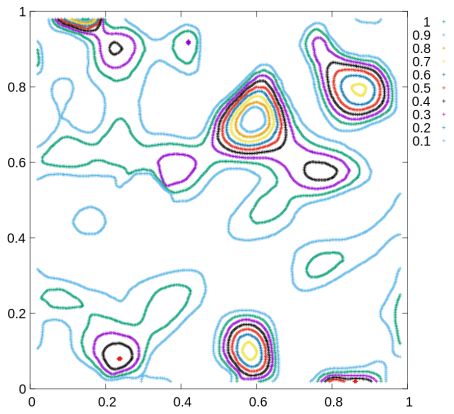


Fig. 16　例 3(2)2 つの空洞を持つ弾性体において，空洞の 1 つは既知の場合の粒子速度の法線成分・接線成分両方を用いたトポロジー導関数の等高線

Fig.13 では中心が $(0.3, 0.5)$ の散乱体が存在する箇所で，Fig.15 では未知とした散乱体が存在する箇所でトポロジー導関数は符号が負で絶対値の大きな値になっておりレーザ超音波計測データ u^{obs} を用いたトポロジー導関数による散乱体決定解析において一定の精度で散乱体の情報を推定できていることがわかる．また，それぞれ Fig.14, 16 と比較して，推定の精度は低下していないことが確認できる．

しかしながら，Fig.13, 14 では全く同じ大きさ・形状の散乱体が内部にあるにもかかわらず，中心が $(0.3, 0.5)$ の散乱体が存在する箇所と比較して中心 $(0.6, 0.7)$ の散乱体が存在する箇所ではトポロジー導関数は絶対値の小さい値となっており，散乱体の大きさ・形状が等しいとしても，弾性体内の位置によってトポロジー導関数の値が変わってしまうことがわかる．

5. 結論

対象物表面の法線方向の粒子速度を用いたトポロジー導関数の精度を簡単な数値例で検証した．今回扱った例では，法線方向・接線方向両方の粒子速度を用いたトポロジー導関数と比較してほとんど遜色ない精度で欠陥の位置の推定を行えることが確認できた．

しかしながら，法線成分のみを用いるもの，法線・接線両方の成分を用いるものを問わず，実際に散乱体が存在しない位置でトポロジー導関数が符号が負で絶対値の大きい値になる場合があること，大きさ・形状が等しいとしても，位置によってトポロジー導関数の値が変わってしまうことが確認できた．今後の課題であるレベルセット法の適用を考える上では，これらの性質について留意する必要がある．

また，3 次元の弾性波動問題に適用した場合の精度を検証することも今後の課題である．

参考文献

(1) Marc Bonnet:　*Topological sensitivity for 3D elastodynamic and acoustic inverse scattering in the time domain*，Comput.Methods Appl.Mech.Engrg. **195**(2006), pp.5239-5254.

(2) Takayuki Yamada, Kazuhiro Izui, Shinji Nishiwaki, Akihiro Takezawa：A topology optimization method based on the level set method incorporating a fictitious interface energy, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol.199, (2010), pp.2876-pp.2891.

(3) 近藤豊大, 飯盛浩司, 高橋徹, 松本敏郎：3 次元音響問題におけるレベルセット法と高速多重極境界要素法に基づくインピーダンス境界を有する散乱体のトポロジー最適化, 計算数理工学論文集，Vol. 14, (2014)，pp.19–pp.24.

(4) 吉川仁・寺沢龍：3 次元スカラー波動問題における時間域境界積分方程式法を用いたトポロジー最適化による散乱体決定解析，土木学会論文集 A2(応用力学)，Vol.71, No.2, (2015)，pp.I 71-I 78.

(5) “三次元光学ユニット　LV-3800”，　株式会社　小野測器，　(2022)，　https://www.onosokki.co.jp/HP-WK/products/keisoku/soundvib/lv3800.htm，　(参照 2022-11-05).

(6) 田代匡彦・斎藤隆泰・木本和志：トポロジー感度を欠陥検出指標に用いた二次元動弾性時間反転解析とリニアアレイ探傷法への応用，土木学会論文集 A2(応用力学), Vol.76, No.2, (2020)，I_15-I_24.

(7) 小林昭一 (編) 波動解析と境界要素法，(2000)，京都大学学術出版会.

計算数理工学論文集 Vol. 22 (2022 年 12 月), 論文 No. 21-221216 JASCOME

3 次元 Helmholtz 方程式に対する CBFM を適用した境界要素法についての基礎的研究

Fundamental study on boundary element method using CBFM for the Helmholtz equation in 3D

池上 明日香 [1)], 新納 和樹 [2)]

Asuka IKEGAMI and Kazuki NIINO

1) 京都大学大学院情報学研究科 (〒606-8501 京都市左京区吉田本町, E-mail:ikegami@acs.i.kyoto-u.ac.jp)

2) 京都大学大学院情報学研究科 (〒606-8501 京都市左京区吉田本町, E-mail: niino@i.kyoto-u.ac.jp)

The characteristic basis function method (CBFM) is known as one of methods to accelerate computation of boundary element methods. In the CBFM, boundaries are divided into several cells, and for each cell, a certain number of problems are solved in advance to generate new basis functions called CBFs. The original problem is solved with the CBFs as basis functions. In this paper, we present a fundamental study on the application of the CBFM to the boundary element method for Helmholtz equation in 3D. We made formulation of the CBFM and numerically show that the CBFM can reduce the number of basis functions without loss of accuracy.

Key Words: characteristic basis function method, boundary element method, Helmholtz equation

1. はじめに

大規模問題に対する境界要素法の計算高速化手法の一 つとして, CBFM(Characteristic Basis Function Method) が知られている [1]. CBFM では, まず境界をいくつかのセルに分割し, それぞれのセルについて複数の入射波に対する問題を解く. 次にこのいくつかの問題に対する解ベクトルから新たに線形独立な基底関数を作る. この新たな基底関数を CBF と呼ぶ. そして元の問題をこの CBF を基底関数として解く.

CBF の数は, CBF を生成するために事前に解いた問題の数以下であり, 一般に元の基底関数より少なくなるので, 基底を CBF に取り直すことで計算時間の短縮が望める. これまで Maxwell 方程式を支配方程式とする電磁波散乱問題への CBFM の適用については多く研究がなされてきたが [2–6], Helmholtz 方程式を支配方程式とする問題に対する CBFM の適用については我々の知る限り研究が行われていない. そこで, 本稿では 3 次元 Helmholtz 方程式を支配方程式とする transmission 問題への, CBFM の適用を試みる. 本稿では CBF の生成方法として田中らが示した, 電磁波散乱問題に対して CBFM と Calderon の前処理を施す方法 [7] を Helmholtz 方程式に適用することを提案する. また本来 CBFM は大規模問題を高速に解くための数値解法であるが, 本稿では基礎的研究として CBFM の定式化と小規模な数値計算による定式化の妥当性検証のみを行っている.

本稿の構成は以下の通りである. 2 節で対象とする問題である, 3 次元 Helmholtz 方程式の transmission 問題を与え, その定式化と離散化を行う. 次に 3 節で CBFM の定式化を行う. 4 節で具体的な問題についての数値計算結果を示し, 5 節で結論を述べる.

2. 対象とする問題と定式化

本節では, 本稿で扱う 3 次元 Helmholtz 方程式を支配方程式とする transmission 問題を定義し, この問題に対する境界積分方程式の定式化, 離散化を行う.

2.1. 対象とする問題

$\mathbb{R}^3$ において滑らかな境界 Γ を持つ有界領域 Ω_2 を考え, その

2022 年 11 月 11 日受付, 2022 年 11 月 26 日受理

外部を $\Omega_1 = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega_2}$ とする．この時, それぞれの領域において Helmholtz 方程式

$$(\Delta + k_i^2)u(\boldsymbol{x}) = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega_i, \quad i = 1, 2$$

を満たす $u(\boldsymbol{x})$ を, 境界 Γ 上での境界条件

$$u_1(\boldsymbol{x}) = u_2(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \Gamma$$
$$q_1(\boldsymbol{x}) = q_2(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \Gamma$$

および, Ω_1 での散乱波 $u^{sca} = u - u^{inc}$ の放射条件のもとで求める．ただし, $u_i(\boldsymbol{x})$ は Ω_i 上の $u(\boldsymbol{x})$ の Γ への極限であり,

$$q_i(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\varepsilon_i}\frac{\partial u_i(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{n}}$$

である．また ε_i は領域 Ω_i で定義される定数である．$\boldsymbol{n}$ は Γ から Ω_1 に向いた単位法線ベクトル, u^{inc} は入射波である．

2.2. PMCHWT 定式化

この問題に対する PMCHWT 定式化による境界積分方程式は, 次のようになる．

$$\sum_{i=1,2}\begin{pmatrix} \mathcal{D}_i & -\varepsilon_i\mathcal{S}_i \\ \frac{1}{\varepsilon_i}\mathcal{N}_i & -\mathcal{D}_i^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u(\boldsymbol{x}) \\ q(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u^{inc}(\boldsymbol{x}) \\ -\frac{1}{\varepsilon_1}\frac{\partial u^{inc}(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{n}} \end{pmatrix} \tag{1}$$

ここに, $\mathcal{S}_i, \mathcal{D}_i, \mathcal{D}_i^*, \mathcal{N}_i$ は積分作用素であり, 以下の通りである．

$$\mathcal{S}_i v(\boldsymbol{x}) = \int_\Gamma G_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})v(\boldsymbol{y})dS_y \tag{2}$$
$$\mathcal{D}_i v(\boldsymbol{x}) = \int_\Gamma \frac{\partial G_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{n}_y}v(\boldsymbol{y})dS_y \tag{3}$$
$$\mathcal{D}_i^* v(\boldsymbol{x}) = \int_\Gamma \frac{\partial G_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{n}_x}v(\boldsymbol{y})dS_y \tag{4}$$
$$\mathcal{N}_i v(\boldsymbol{x}) = \int_\Gamma \frac{1}{\varepsilon_i}\frac{\partial^2 G_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{n}_y \partial \boldsymbol{n}_x}v(\boldsymbol{y})dS_y \tag{5}$$

ただし $\mathcal{D}_i, \mathcal{D}_i^*$ 内の積分は, 必要な時には Cauchy の主値積分を表し, $\mathcal{N}_i$ 内の積分は発散積分の有限部分を表すとする．また, $\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}_x}$, $\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}_y}$ はそれぞれ Γ 上の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ における法線微分を表す．さらに, $G_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ は 3 次元 Helmholtz 方程式の基本解であり, 次のように表される．

$$G_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \frac{\exp(\mathrm{i}k_i|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|)}{4\pi|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|}$$

ここで i は虚数単位である．

2.3. 境界積分方程式の離散化

2.2 節で得た境界積分方程式 (1) を, 区分線形基底を用いた Galerkin 法により離散化し, 線形方程式を得る．以下では, 境界 Γ を節点数 N の三角形メッシュで近似し, その上で定義される区分線形基底を $\psi_m(\boldsymbol{x})$ $(m = 1, 2, ..., N)$ とする．また, $\int_{\psi_m}$ は, $\psi_m(\boldsymbol{x})$ の台を積分範囲とする積分を指す．今, $u(\boldsymbol{x})$, $q(\boldsymbol{x})$ を $\psi_m(\boldsymbol{x})$ により近似し, 次式を得る．

$$u(\boldsymbol{x}) \approx \sum_{m=1}^{N}\alpha_m\psi_m(\boldsymbol{x})$$
$$q(\boldsymbol{x}) \approx \sum_{m=1}^{N}\beta_m\psi_m(\boldsymbol{x})$$

ここで, α_m, $\beta_m \in \mathbb{C}$ $(m = 1, 2, ..., N)$ は未知係数である．次に, Galerkin 法による積分作用素 (2)〜(5) の離散化を次の式で与える．

$$(\boldsymbol{S}_i)_{mn} = \int_{\psi_m}\psi_m(\boldsymbol{x})\int_{\psi_n}\psi_n(\boldsymbol{y})G_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})dS_y dS_x \tag{6}$$
$$(\boldsymbol{D}_i)_{mn} = \int_{\psi_m}\psi_m(\boldsymbol{x})\int_{\psi_n}\psi_n(\boldsymbol{y})\frac{\partial G_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{n}_y}dS_y dS_x \tag{7}$$
$$(\boldsymbol{D}_i^*)_{mn} = \int_{\psi_m}\psi_m(\boldsymbol{x})\int_{\psi_n}\psi_n(\boldsymbol{y})\frac{\partial G_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{n}_x}dS_y dS_x \tag{8}$$
$$(\boldsymbol{N}_i)_{mn} = \int_{\psi_m}\psi_m(\boldsymbol{x})\int_{\psi_n}\psi_n(\boldsymbol{y})\frac{\partial^2 G_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{n}_y \partial \boldsymbol{n}_x}dS_y dS_x \tag{9}$$

また, 式 (1) の右辺を次の式で離散化する．

$$\left(\boldsymbol{u}^{inc}\right)_m = \int_{\psi_m}u^{inc}(\boldsymbol{x})\psi_m(\boldsymbol{x})dS_x \tag{10}$$
$$\left(\boldsymbol{q}^{inc}\right)_m = \int_{\psi_m}\frac{1}{\varepsilon_1}\frac{\partial u^{inc}(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{n}}\psi_m(\boldsymbol{x})dS_x \tag{11}$$

以上の (6)〜 (11) を用いて, 式 (1) から次の線形方程式を得る．

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{f} \tag{12}$$

ただし, $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{f}$ は以下の通りである．

$$\boldsymbol{A} = \sum_{i=1,2}\begin{pmatrix} \boldsymbol{D}_i & -\varepsilon_i\boldsymbol{S}_i \\ \frac{1}{\varepsilon_i}\boldsymbol{N}_i & -\boldsymbol{D}_i^* \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2N\times 2N}$$
$$\boldsymbol{b} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_N)^T \in \mathbb{C}^{2N}$$
$$\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} -\boldsymbol{u}^{inc} \\ -\boldsymbol{q}^{inc} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2N}$$

ここに上付き文字 T は転置を表す．

3. CBFM の適用

本節では, CBFM の定式化と Calderon の式に基づく前処理の定式化を行う．まず, 新たに定義される基底関数 CBF を生成し, 続いて式 (12) に CBFM を適用する．最後に, CBFM を適用した式に対して Calderon の式に基づく前処理を行う．

3.1. CBF の生成

CBFM では, まず境界を N^{cell} 個の互いに交わらない部分集合に分割し（それぞれの部分集合をセルと呼ぶ), それぞれのセルで新しい基底関数 CBF を生成する．ここで, 本稿では境界を分割する際互いに交わらない部分境界をひとつのセルとすることを考え, 連続した境界を複数のセルに分割しないこととする．連続する境界を複数のセルに分割する場合, 以下で定式化する CBFM では精度の高い数値解が得られないことが知られている [7]．図 1 は境界をセルに分割する模式図である．

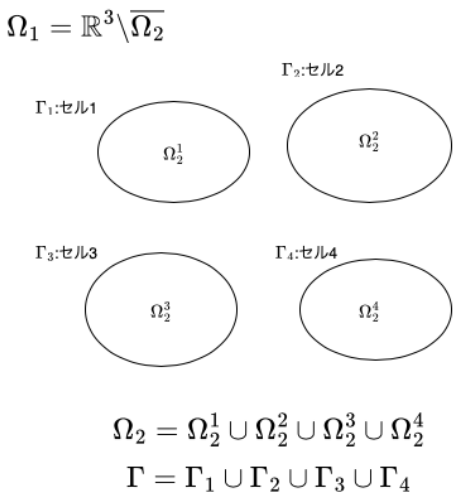


図 1　境界の分割方法の例

本稿では CBF を区分線形基底の線形結合で表す．n 番目のセルの m 番目の CBF を $C_{nm}(\boldsymbol{x})$ とすると, $C_{nm}(\boldsymbol{x})$ は n 番目のセルに含まれる区分線形基底 $\psi_{\nu_{ni}}(\boldsymbol{x})$ と係数 c_{nmi} を用いて次のように書ける．

$$C_{nm}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{N_n} c_{nmi} \psi_{\nu_{ni}}(\boldsymbol{x})$$

ただし, N_n は n 番目のセルに含まれる区分線形基底の数であり, ν_{ni} は n 番目のセルの i 番目の区分線形基底の, 境界全体における通し番号を表している．行列 $\boldsymbol{C}_n$ を $(\boldsymbol{C}_n)_{mi} = c_{nmi}$ とする．次の線形方程式を複数の入射波について解き, その解の係数を並べた行列に特異値分解など直交化の処理を施すことで u, q に対する二つの行列, $\boldsymbol{C}_n^u, \boldsymbol{C}_n^q$ を決定する．

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}_{nn}\boldsymbol{b}_n &= \boldsymbol{f}_n \qquad (13) \\ \boldsymbol{A}_{nn} &= \sum_{i=1,2} \begin{pmatrix} \boldsymbol{D}_{inn} & -\epsilon_i \boldsymbol{S}_{inn} \\ \frac{1}{\epsilon_i}\boldsymbol{N}_{inn} & -\boldsymbol{D}^*_{inn} \end{pmatrix} \\ \boldsymbol{f}_n &= \begin{pmatrix} -\boldsymbol{u}_n^{inc} \\ -\boldsymbol{q}_n^{inc} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ただし, $\boldsymbol{S}_{inn}$ などは式 (6) から式 (9) で定めた行列の部分行列であり, n 番目のセルに含まれる区分線形基底のみからなる部分を表している．また $\boldsymbol{f}_n$ は $\boldsymbol{f}$ の, n 番目のセルに対応する部分列である．式 (13) は, 今考えている n 番目のセルを全境界とした場合の線形方程式 (12) に対応する．本論文では $\boldsymbol{C}_n$ を決定するための入射波に, 単位球面上に適当な間隔でサンプリングした s 本の平面波を使用する．

s 本の入射波に対し同時に解を求める場合, 式 (13) は次のように書ける．

$$\boldsymbol{A}_n \boldsymbol{X}_n = \boldsymbol{F}_n, \quad \boldsymbol{X}_n, \boldsymbol{F}_n \in \mathbb{C}^{2N_n \times s} \qquad (14)$$

$\boldsymbol{F}_n$ は s 本の入射波それぞれに対応する, 式 (13) の右辺 $\boldsymbol{f}_n$ が並んだ行列である．また $\boldsymbol{U}_n, \boldsymbol{Q}_n$ を次のように定める．

$$\boldsymbol{X}_n = \begin{pmatrix} \boldsymbol{U}_n \\ \boldsymbol{Q}_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{U}_n, \boldsymbol{Q}_n \in \mathbb{C}^{N_n \times s}$$

$\boldsymbol{U}_n, \boldsymbol{Q}_n$ は, s 本の入射波に対する線形方程式 (14) を解くことで得られる s 個の解の, 区分線形基底に対する係数の集合である．この得られた各 s 本の基底 $\boldsymbol{U}_n, \boldsymbol{Q}_n$ は一般に一次従属であるため, 直交化など何らかの操作を施して, CBF の区分線形基底に対する係数の集合, $\boldsymbol{C}_n^u$, $\boldsymbol{C}_n^q$ を決定する必要がある．

$\boldsymbol{C}_n^u$, $\boldsymbol{C}_n^q$ と $\psi_{\nu_{ni}}(\boldsymbol{x})$ を用いて, n 番目のセルの m 番目の CBF $C_{nm}^u(\boldsymbol{x}), C_{nm}^q(\boldsymbol{x})$　は次のように表される．

$$C_{nm}^u(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{N_n} (\boldsymbol{C}_n^u)_{im} \psi_{\nu_{ni}}(\boldsymbol{x})$$
$$C_{nm}^q(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{N_n} (\boldsymbol{C}_n^q)_{im} \psi_{\nu_{ni}}(\boldsymbol{x})$$

本稿では, $C_{nm}^u(\boldsymbol{x}), C_{nm}^q(\boldsymbol{x})$ が次の関係を満たすように, $\boldsymbol{U}_n, \boldsymbol{Q}_n$ から $\boldsymbol{C}_n^u$, $\boldsymbol{C}_n^q$ を構成する．

$$\int (C_{ni}^u(\boldsymbol{x}))^* C_{nj}^q(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} = \begin{cases} a_{ni} \ (\in \mathbb{R}^+) & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \qquad (15)$$

ただし記号 $()^*$ は複素共役, $\mathbb{R}^+$ は正の実数を表す．この要請は $\boldsymbol{C}_n^u$, $\boldsymbol{C}_n^q$ がそれぞれ一次独立な基底から成るだけでなく, 互いに式 (15) の意味で双対基底を構成することを意味する．$\boldsymbol{C}_n^u$, $\boldsymbol{C}_n^q$ を互いに双対になるように構成することの利点として Calderon の前処理が適用できることが挙げられる（詳細は 3.3 節で述べる）．

以下に構成法を示す．まず, 行列 $\boldsymbol{G}_n$ を区分線形基底 $\psi_{\nu_{ni}}(\boldsymbol{x})$ の Gram 行列とする:

$$(\boldsymbol{G}_n)_{ij} := \int (\psi_{\nu_{ni}}(\boldsymbol{x}))^* \psi_{\nu_{nj}}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}$$

続いて, $\boldsymbol{G}'_n$ を次のように定める．

$$\boldsymbol{G}'_n \quad := \boldsymbol{U}_n^H \boldsymbol{G}_n \boldsymbol{Q}_n \in \mathbb{C}^{s \times s}$$

$\boldsymbol{G}'_n$ は $\boldsymbol{U}_n$, $\boldsymbol{Q}_n$ が表す基底関数 φ_{ni}^u, φ_{ni}^q の Gram 行列である．

$$\left(\boldsymbol{G}'_n\right)_{ij} = \int (\varphi_{ni}^u(\boldsymbol{x}))^* \varphi_{nj}^q(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}$$

$$\varphi_{ni}^u(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{N} (\boldsymbol{U})_{ji} \psi_{\nu_{nj}}(\boldsymbol{x})$$
$$\varphi_{ni}^q(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{N} (\boldsymbol{Q})_{ji} \psi_{\nu_{nj}}(\boldsymbol{x})$$

この Gram 行列 $\boldsymbol{G}'_n$ に特異値分解を適用し, あらかじめ定めた閾値より小さい特異値を無視することにより, エルミート行列

$\boldsymbol{U}_L, \boldsymbol{V}_L \in \mathbb{C}^{s\times N_n^{\mathrm{CBF}}}$ を得る;

$$\begin{aligned}\boldsymbol{G}_n' &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{U}_L & \boldsymbol{U}_S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_L & \\ & \boldsymbol{\Sigma}_S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{V}_L^H \\ \boldsymbol{V}_S^H \end{pmatrix} \\ &\approx \boldsymbol{U}_L \boldsymbol{\Sigma}_L \boldsymbol{V}_L^H \end{aligned} \tag{16}$$

$\boldsymbol{\Sigma}_L$ は閾値より大きい特異値を対角項にもつ $N_n^{\mathrm{CBF}} \times N_n^{\mathrm{CBF}}$ の対角行列, $\boldsymbol{\Sigma}_S$ は閾値より小さい特異値を対角項にもつ対角行列である.

$\boldsymbol{U}_L$, $\boldsymbol{V}_L$ を用いて, $\boldsymbol{C}_n^u$, $\boldsymbol{C}_n^q$ を次のように構成する.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{C}_n^u &:= \boldsymbol{U}_n \boldsymbol{U}_L \in \mathbb{C}^{N_n \times N_n^{\mathrm{CBF}}} \\ \boldsymbol{C}_n^q &:= \boldsymbol{Q}_n \boldsymbol{V}_L \in \mathbb{C}^{N_n \times N_n^{\mathrm{CBF}}}\end{aligned}$$

以上により, CBF $C_{nm}^u(\boldsymbol{x})$,$C_{nm}^q(\boldsymbol{x})$ の $\psi_i(\boldsymbol{x})$ に対する係数の集合 $\boldsymbol{C}_n^u, \boldsymbol{C}_n^q$ が得られた.

$C_{nm}^u(\boldsymbol{x})$, $C_{nm}^q(\boldsymbol{x})$, $m = 1, 2, .., N_n^{\mathrm{CBF}}$ が (15) の関係を満たすことは, 次のようにして確認できる.

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{C}_n^u)^H \boldsymbol{G}_n \boldsymbol{C}_n^q &= \boldsymbol{U}_L^H \boldsymbol{U}_n^H \boldsymbol{G}_n \boldsymbol{Q}_n \boldsymbol{V}_L \\ &= \boldsymbol{U}_L^H \boldsymbol{U}_L \boldsymbol{\Sigma}_L \boldsymbol{V}_L^H \boldsymbol{V}_L \\ &= \boldsymbol{\Sigma}_L\end{aligned}$$

一方で, $C_{nm}^u(\boldsymbol{x})$, $C_{nm}^q(\boldsymbol{x})$ は $\varphi_{ni}^u(\boldsymbol{x}), \varphi_{ni}^q(\boldsymbol{x})$ を用いて次のように書けるので,

$$\begin{aligned}C_{nm}^u(\boldsymbol{x}) &= \sum_{i=1}^{s} \left(\boldsymbol{C}^u\right)_{im} \varphi_{ni}^u(\boldsymbol{x}) \\ C_{nm}^q(\boldsymbol{x}) &= \sum_{i=1}^{s} \left(\boldsymbol{C}^q\right)_{im} \varphi_{ni}^q(\boldsymbol{x})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left((\boldsymbol{C}_n^u)^H \boldsymbol{G}_n \boldsymbol{C}_n^q\right)_{ij} &= \left(\boldsymbol{U}_L^H \boldsymbol{U}^H \boldsymbol{G}_n \boldsymbol{Q} \boldsymbol{V}_L\right)_{ij} \\ &= \left(\boldsymbol{U}_L^H \boldsymbol{G}_n' \boldsymbol{V}_L\right)_{ij} \\ &= \int (C_{ni}^u(\boldsymbol{x}))^* C_{nj}^q d\boldsymbol{x}\end{aligned}$$

である. 行列 $\boldsymbol{G}_n^{''}$ を次のように定義すると,

$$\left(\boldsymbol{G}_n^{''}\right)_{ij} := \int (C_{ni}^u(\boldsymbol{x}))^* C_{nj}^q(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}$$

$\boldsymbol{G}_n^{''}$ は対角成分が全て正の対角行列となり, $C_{nm}^u(\boldsymbol{x}), C_{nm}^q(\boldsymbol{x})$ は (15) の関係を満足している.

3.2. CBFM を適用した線形方程式

まず, $\boldsymbol{C}^{uq}, \boldsymbol{C}^{qu}$ を次のように定義する.

$$\boldsymbol{C}^{uq} := \begin{pmatrix} \boldsymbol{C}_1^u & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \boldsymbol{C}_{N^{\mathrm{cell}}}^u & & & \\ & & & \boldsymbol{C}_1^q & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \boldsymbol{C}_{N^{\mathrm{cell}}}^q \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2N \times 2N^{\mathrm{CBF}}}$$

$$\boldsymbol{C}^{qu} := \begin{pmatrix} \boldsymbol{C}_1^q & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \boldsymbol{C}_{N^{\mathrm{cell}}}^q & & & \\ & & & \boldsymbol{C}_1^u & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \boldsymbol{C}_{N^{\mathrm{cell}}}^u \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2N \times 2N^{\mathrm{CBF}}}$$

ここで,

$$N^{\mathrm{CBF}} = \sum_{i=1}^{N^{\mathrm{cell}}} N_i^{\mathrm{CBF}}$$

である. 次の式により, $\boldsymbol{C}^{uq}, \boldsymbol{C}^{qu}$ を用いて, 線形方程式 (12) の基底を区分線形基底から CBF に変換する.

$$\left(\boldsymbol{C}^{qu}\right)^H \boldsymbol{A} \boldsymbol{C}^{uq} \boldsymbol{b}_{\mathrm{CBF}} = \left(\boldsymbol{C}^{qu}\right)^H \boldsymbol{f} \tag{17}$$

ただし,

$$\begin{aligned}\left(\boldsymbol{C}^{qu}\right)^H \boldsymbol{A} \boldsymbol{C}^{uq} &\in \mathbb{C}^{2N^{\mathrm{CBF}} \times 2N^{\mathrm{CBF}}} \\ \boldsymbol{b}_{\mathrm{CBF}},\ \left(\boldsymbol{C}^{qu}\right)^H \boldsymbol{f} &\in \mathbb{C}^{2N^{\mathrm{CBF}}}\end{aligned}$$

である. $\boldsymbol{b}_{\mathrm{CBF}}$ は線形方程式 (12) の解を CBF を基底として表した時の係数の組であり, 次の式で元の区分線形基底 $\psi_i(\boldsymbol{x})$ の係数の組 $\boldsymbol{b}$ を得る.

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{C}^{uq} \boldsymbol{b}_{\mathrm{CBF}} \tag{18}$$

$\left(\boldsymbol{C}^{qu}\right)^H \boldsymbol{A} \boldsymbol{C}^{uq}$ の成分は, 次のように書き下すことができる.

$$\left(\boldsymbol{C}^{qu}\right)^H \boldsymbol{A} \boldsymbol{C}^{uq} = \sum_{i=1,2} \begin{pmatrix} \boldsymbol{D}_i^{qu} & -\varepsilon_i \boldsymbol{S}_i^{qq} \\ \frac{1}{\varepsilon_i} \boldsymbol{N}_i^{uu} & -\boldsymbol{D}_i^{*uq} \end{pmatrix}$$

$$\left(\boldsymbol{S}_i^{qq}\right)_{mn} = \int \left(\hat{C}_m^q(\boldsymbol{x})\right)^* \int \hat{C}_n^q(\boldsymbol{y}) G_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) dS_y dS_x$$

$$\left(\boldsymbol{D}_i^{qu}\right)_{mn} = \int \left(\hat{C}_m^q(\boldsymbol{x})\right)^* \int \hat{C}_n^u(\boldsymbol{y}) \frac{\partial G_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{n}_y} dS_y dS_x$$

$$\left(\boldsymbol{D}_i^{*uq}\right)_{mn} = \int \left(\hat{C}_m^u(\boldsymbol{x})\right)^* \int \hat{C}_n^q(\boldsymbol{y}) \frac{\partial G_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{n}_x} dS_y dS_x$$

$$\left(\boldsymbol{N}_i^{uu}\right)_{mn} = \int \left(\hat{C}_m^u(\boldsymbol{x})\right)^* \int \hat{C}_n^u(\boldsymbol{y}) \frac{\partial^2 G_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{n}_y \partial \boldsymbol{n}_x} dS_y dS_x$$

これは, 行列 $\boldsymbol{A}$ で積分作用素の離散化に用いている基底を, 区分線形基底 $\psi_i(\boldsymbol{x})$ から CBF $\hat{C}_i^u(\boldsymbol{x}), \hat{C}_i^q(\boldsymbol{x})$ に取り替えたものであると理解できる. ただし, $\hat{C}_i^u(\boldsymbol{x})$, $\hat{C}_i^q(\boldsymbol{x})$ は, 境界を N^{cell} 個に分割したそれぞれのセルで生成した $C_{ni}^u(\boldsymbol{x})$, $C_{ni}^q(\boldsymbol{x})$ に, 新たに境界全体にわたって通し番号を与えたものである.

3.3. Calderon の前処理

積分作用素 (2)〜(5) は, 次の Calderon の式を満たすことが知られている [8].

$$\begin{pmatrix} \mathcal{D}_i & -\mathcal{S}_i \\ \mathcal{N}_i & -\mathcal{D}_i^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{D}_i & -\mathcal{S}_i \\ \mathcal{N}_i & -\mathcal{D}_i^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\mathcal{I}}{4} & \\ & \frac{\mathcal{I}}{4} \end{pmatrix} \tag{19}$$

ここで, $\mathcal{I}$ は単位作用素とする. 今, (19) の性質により,

$$\boldsymbol{A}_{quuq} \left(\boldsymbol{G}_{quuq}\right)^{-1} \boldsymbol{A}_{quuq} \left(\boldsymbol{G}_{quuq}\right)^{-1} \tag{20}$$

は良条件な行列になると考えられる. ここに, $\boldsymbol{A}_{quuq}$, $\boldsymbol{G}_{quuq}$ は

$$\boldsymbol{A}_{quuq} = \left(\boldsymbol{C}^{qu}\right)^H \boldsymbol{A}\boldsymbol{C}^{uq}$$

$$\boldsymbol{G}_{quuq} = \begin{pmatrix} \int \left(\hat{C}_i^q(\boldsymbol{x})\right)^* \hat{C}_j^u(\boldsymbol{x}) dS_x & \\ & \int \left(\hat{C}_i^u(\boldsymbol{x})\right)^* \hat{C}_j^q(\boldsymbol{x}) dS_x \end{pmatrix}$$

である. 今, セル同士は互いに交わらない境界であるから $\boldsymbol{G}_{quuq}$ は各セルの Gram 行列を対角要素に持つブロック対角行列

$$\boldsymbol{G}_{quuq} = \begin{pmatrix} \int \left(C_{1i}^q(\boldsymbol{x})\right)^* C_{1j}^u(\boldsymbol{x}) dS_x & & \\ & \ddots & \\ & & \int \left(C_{1i}^u(\boldsymbol{x})\right)^* C_{1j}^q(\boldsymbol{x}) dS_x \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \left(\boldsymbol{G}_1''\right)^H & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \left(\boldsymbol{G}_{N^{\mathrm{cell}}}''\right)^H & & & \\ & & & \boldsymbol{G}_1'' & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \boldsymbol{G}_{N^{\mathrm{cell}}}'' \end{pmatrix}$$

となる. $\boldsymbol{G}_n''$ は対角行列であったので, $\boldsymbol{G}_{quuq}$ も対角行列である. さらに, 式 (20) は $\boldsymbol{A}_{quuq} \left(\boldsymbol{G}_{quuq}\right)^{-1}$ の二乗の形になっているため $\boldsymbol{A}_{quuq} \left(\boldsymbol{G}_{quuq}\right)^{-1}$ も良条件な行列であると考えられる. 以上より, 式 (17) に次のような前処理を施すと数値計算をする上で反復回数の削減が見込める.

$$\left(\boldsymbol{C}^{qu}\right)^H \boldsymbol{A}\boldsymbol{C}^{uq} \left(\boldsymbol{G}_{quuq}\right)^{-1} \boldsymbol{y} = \left(\boldsymbol{C}^{qu}\right)^H \boldsymbol{f} \tag{21}$$

$$\boldsymbol{b}_{\mathrm{CBF}} = \left(\boldsymbol{G}_{quuq}\right)^{-1} \boldsymbol{y}$$

4. 数値計算

本節では, 式 (12) を素朴に解いた場合と, Calderon の前処理を施した CBFM の式 (21) を解いた場合とで結果を比較する.

4.1. 境界が単一の球の場合

まず, 境界が単一の球体である場合について数値計算を行う. ここでは境界の分割は行わず, 球体全体がひとつのセルであるとして CBFM を適用する.

4.1.1. 問題設定

境界 Γ を, 原点を中心とする直径 1 の球とする. $k_1 = 0.25\pi$, $k_2 = \sqrt{\varepsilon_r} k_1$ とし, 様々な ε_r に対して数値計算を行った. 離散化に用いる区分線形基底の数 N は $N = 913$ とした. また, サンプリングする入射波の間隔は, 特に記述が無ければ θ 方向に $N_\theta = 6$ 分割, ϕ 方向に $N_\phi = 12$ 分割し, $s = 72$ とした. s 本の平面波の伝播方向 (θ, ϕ) は

$$(\theta, \phi) = \left(\frac{\pi}{N_\theta} n_\theta, \frac{2\pi}{N_\phi} n_\phi\right)$$
$$(n_\theta = 0, 1, ..., N_\theta - 1,\ n_\phi = 0, 1, ..., N_\phi - 1)$$

である.

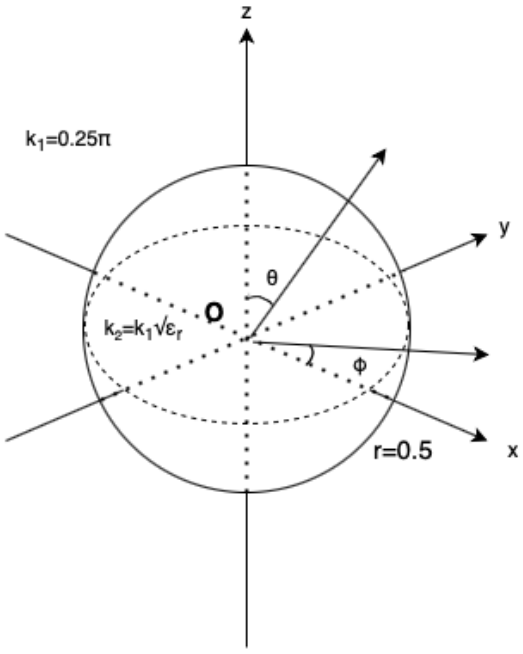


図 2　問題設定

図 2 に問題設定を示す. 線形方程式の反復解法には GMRES を用い, 許容誤差を 10^{-10} とした. また, 簡単のため行列の計算には高速多重極法などの高速化を用いず全ての要素を直接計算した. 計算精度の検証にあたっては, CBFM を用いた境界要素法による数値解 (式 (17), (18) の

解 $\boldsymbol{b}$) を $\boldsymbol{a}$, 区分線形基底を用いた従来的な境界要素法の数値解 (式 (12) の解 $\boldsymbol{b}$) を $\boldsymbol{a}_t$ として, 以下の式で与えられる相対誤差を用いた. ただし, 記号 $\|\cdot\|_2$ は l^2 ノルムを表す.

$$\eta = \frac{\|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}_t\|_2}{\|\boldsymbol{a_t}\|_2} \tag{22}$$

全ての検証は, 伝播方向が $(\theta, \phi) = \left(\frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{10}\right)$ である平面波を入射波とする問題で行った.

4.1.2. 妥当性の検証

上記の問題設定で実験を行う前に, 計算手法の妥当性を検証する. 具体的には, サンプリング数を増やしたとき, それに伴って CBFM を用いた場合とそうでない場合の計算結果の相対誤差が減少していくかを確認する. サンプリング数 s は表 1 の通りである. また, GMRES の許容誤差を 10^{-15} とし, 式 (16) において使用する特異値は, 最大特異値との比が 10^{-15} 以上のものとした.

図 3 は縦軸を相対誤差, 横軸をサンプリング数としたグラフである. このグラフから, サンプリング数の増加に従って相対誤差が減少していることがわかる. このことから, 計算手法の妥当性が確認できた. また, いずれの ε_r についてもある程度サンプリング数を増やすと相対誤差に変化が見られなくなっているが, これは解を表現するために十分な数の CBF があるため, これ以上 CBF の数を増やしても数値解の精度に影響を与えないためだと考えられる.

表 1　サンプリングに用いた N_θ, N_ϕ とサンプリング数 s

N_θ	N_ϕ	s
2	4	8
3	6	18
4	8	32
5	10	50
6	12	72
7	14	98
8	16	128
9	18	162

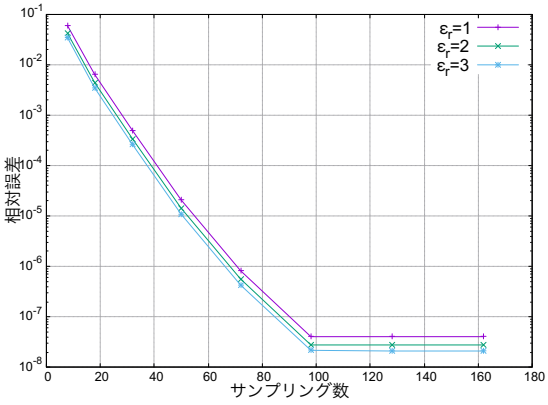


図 3　サンプリング数と相対誤差

4.1.3. 計算精度の検証

CBFM を用いた場合の計算精度について検証する. 図 4 は $\varepsilon_r = 1, 2, 3$ の場合の, 式 (16) における特異値を, 最大値 σ_M で正規化し大きいものから順に並べたグラフである. 横軸が特異値を大きいものから降順に並べた番号, 縦軸が最大特異値で正規化された特異値の大きさを表している. このグラフから, ε_r の値によらず, 最大特異値で正規化された特異値はその大きさごとにグループを形成していることがわかる. 値が大きい順に数えて i 番目のグループに含まれる特異値の数は i 次の 3 次元球面調和関数の空間の次元と一致している. 以後の検証では, 図 4 において上から 4 番目までのグループに含まれる 25 個までの特異値を CBF の生成に用いることにする.

表 2 は, 4 次までの球面調和関数の数に相当する, 大きい順に 25 番までの特異値を用いて CBF を生成した場合の, CBFM を用いない場合の結果との相対誤差 η を示した表である. いずれの ε_r についても相対誤差 10^{-5} 程度の精度で解が求まっている.

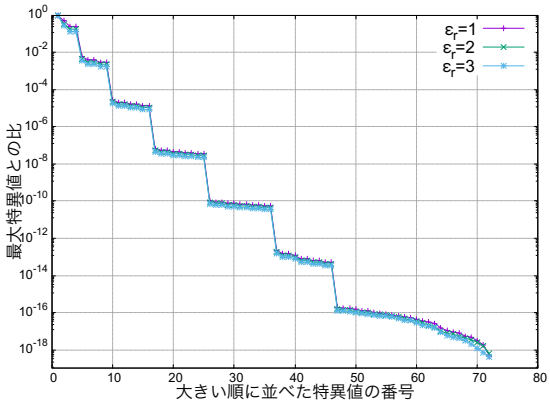


図 4　最大特異値で正規化された特異値の大きさの分布

表 2　25 番までの特異値で CBF を生成した場合の相対誤差

ε_r	相対誤差
1	$3.090\mathrm{e}-5$
2	$2.117\mathrm{e}-5$
3	$1.615\mathrm{e}-5$

4.1.4. 反復回数の検証

元の境界要素法の式 (12) と Calderon の前処理を施した CBFM の式 (21) を計算し, 反復回数を比較する. また, Calderon の前処理による効果を検証するため, Calderon の前処理を行わない CBFM の式 (17) についても計算し比較を行う.

図 5 は, 表 3 に示すそれぞれの場合についての GMRES の反復回数を表すグラフであり, 横軸が反復回数, 縦軸が残差ノルムである. 表 3 の計算手法の欄は, 'Original' が元の境界要素法の式 (12), 'CBFM&Calderon' が CBFM と Calderon の前処理を行う式 (21), 'CBFM' が Calderon の前処理を行わない CBFM の式 (17) を計算したことを表している.

図 5 から, CBFM を用いた場合, (12) を解いた場合よりも顕著に反復回数が少なくなっていることがわかる. また, Calderon の前処理を行うことで, さらに少ない反復回数で収束していることがわかる.

表 3　図 5 における計算の条件

	計算手法	ε_r
Calc1	Original	1
Calc2	Original	2
Calc3	Original	3
Calc4	CBFM&Calderon	1
Calc5	CBFM&Calderon	2
Calc6	CBFM&Calderon	3
Calc7	CBFM	1
Calc8	CBFM	2
Calc9	CBFM	3

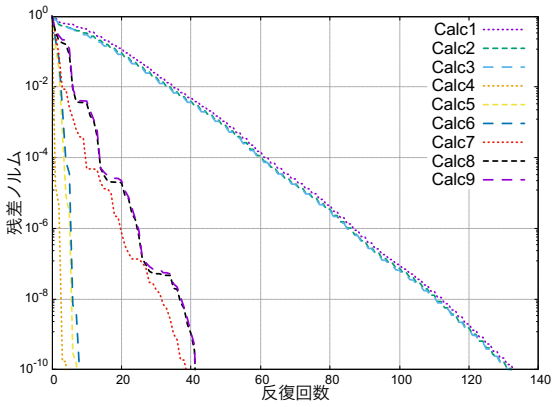


図 5　反復回数

4.2. 境界が複数の球の場合

次に, 領域が複数の球体である場合について数値計算を行う. ここでは, 各球体を一つのセルとして CBF を生成する.

4.2.1. 問題設定

直径 1 の球が, 中心間距離 1.5 で x, y 軸方向に 2 つずつ, 計 4 つ並んだものを領域 Ω_2 とする. 各球面をひとつのセルとし, $N^{\mathrm{cell}} = 4$ で CBFM を適用する. また $\varepsilon_r = 3$ とし, k_i や入射波は前小節と同様であるとする. ひとつの球に含まれる区分線形基底の数を前小節と同様 913 とし, Γ 全体に含まれる区分線形基底の数を $N = 913 \times 4 = 3652$ とした. 線形方程式の反復解法には GMRES を用い, 許容誤差を 10^{-10} とした. また計算精度の検証にあたっては前

節同様 CBFM を用いた境界要素法の数値解と従来的な境界要素法の数値解の相対誤差 (式 (22)) を用いた.

4.2.2. 計算精度の検証

CBFM を用いた場合の計算精度について検証する. 図 6 は入射波のサンプリング数ごとの, CBF の生成に用いた特異値の数と相対誤差のグラフである. 横軸が CBF の生成に用いた特異値の数であり, 縦軸が相対誤差である. またそれぞれのグラフは入射波のサンプリング数を 50, 72, 98(表 3) とした場合のものである. 特異値の数を増やすほど相対誤差が小さくなるが, ある程度まで増やすとほとんど相対誤差の減少が見られなくなっている. また, サンプリング数を大きくするほど相対誤差の減少が特異値の数をより大きくした場合でも見られることがわかる.

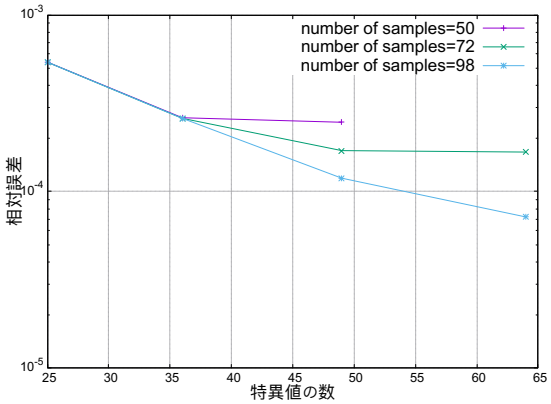


図 6　特異値の数と相対誤差の関係

境界を単一の球としていた前小節と同様の設定であるサンプリング数 72, 使用する特異値を 25 個とした場合, 相対誤差は 5.398×10^{-4} となった.

4.2.3. 反復回数の検証

従来の境界要素法の式 (12) と CBFM と Calderon の前処理を適用した式 (21) について, GMRES の反復回数を比較する. ここで, 入射波のサンプリング数は 72, 使用する特異値の数は 25 とした. 図 7 は CBFM と Calderon を適用した式 (21) と従来の式 (12) での反復回数を表すグラフであり, 横軸が反復回数, 縦軸が GMRES の残差ノルムである. CBFM と Calderon の前処理を行うことで, 反復回数が削減できていることがわかる.

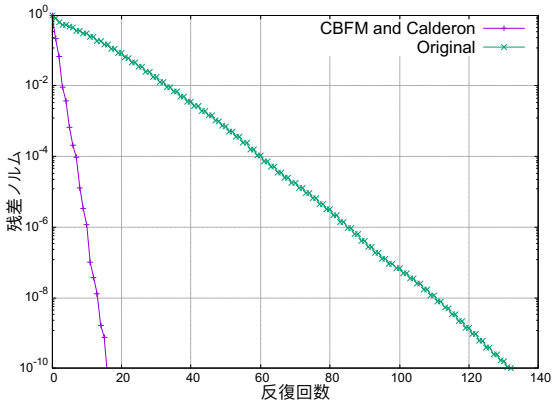


図 7　反復回数

5. 結言

本稿では, 3 次元 Helmholtz 方程式に対する境界要素法に CBFM を適用する基礎的研究として, CBFM の定式化といくつかの問題に対する数値計算を行い, CBFM を用いない従来の境界要素法と結果を比較し, 十分な計算精度を保って反復計算の反復回数を短縮できることを示した. とくに提案手法では行列 (15) を特異値分解により直交化することで, この行列が対角行列になるという意味での基底関数の直交性を保ちつつ, 基底関数を支配的なものから順に構成することができる.

一方で, 本来 CBFM は多数の入射方向の入射波に対する散乱問題を同じ CBF で解くことで, 従来法より高速に数値解を求める方法であるが, 本稿では 1 方向入射の問題しか解いておらず, また高速多重極法などの係数行列計算の高速化法を実装できていないため, 計算時間が評価できていない. 今後の課題として, 行列の計算に高速化手法を導入し, 大規模問題において提案法の計算時間を検討することが挙げられる. また, 今回は元の基底関数を全て区分線形基底としたが, 区分線形基底以外の基底関数を用いる場合, あるいは複数の種類の基底関数を用いる場合の解析も, 今後の課題である. セルサイズやセル間距離, 各種パラメータの値が CBFM の性能に与える影響の解析や randomized SVD 等を利用することで本手法をさらに高

速化することなども今後の課題として挙げられる.

参考文献

(1) V. Prakash, and R. Mittra, *Characteristic basis function method: a new technique for efficient solution of method of moments matrix equations*, Microw. Opt. Techn. Let., vol.36, no.2, pp.95-100, 2003.

(2) R. Mittra and K. Du, *Characteristic basis function method for iterationfree solution of large method of moments problems*, Progress In Electromagnetics Research B, vol.6, pp.307-336, Apr. 2008.

(3) R. Maaskant, R. Mittra, and A. G.Tijhuis, *Fast analysis of large antennas arrays using the characteristic basis function method and the adaptive cross approximation algorithm*, IEEE Trans. Antennas Propag., vol.56, no.11, pp.3440-3451, Nov. 2008.

(4) E. Garcia, C. Delgado, I. G. Diego, and M. F. Catedra, *An iterative solution for electrically large problems combining the characteristic basis function method and the multilevel fast multipole algorithm*, IEEE Trans. Antennas Propag., vol.56, no.8, pp.2363-2371, Aug. 2008.

(5) X. Chen, C. Gu, J. Ding, Z. Li, and Z. Niu, *Multilevel Fast Adaptive Cross-Approximation Algorithm With Characteristic Basis Functions*, IEEE Trans. Antennas Propag., vol.63, no.9, pp.3994-4002, Sep. 2015.

(6) T. Tanaka, Y. Inasawa, Y. Nishioka, H. Miyashita, *Improved primary characteristic basis function method for monostatic radar cross section of specific coordinate plane*, IEICE Trans. Electron. vol.99-C, no.1, pp.28-35, Jan. 2016.

(7) Tai Tanaka, Kazuki Niino, Naoshi Nishimura, *Characteristic Basis Function Method Combined with Calderón Multiplicative Preconditioner for PMCHWT Formulation*, arXiv:2111.11058, 2021.

(8) Jean-Claude Nédélec, *Acoustic and Electromagnetic Equations : Integral Representations for Harmonic Problems*, Springer, 2001.

Transactions of JASCOME Vol. 22 (Dec. 2022), Paper No. 22-221216 JASCOME

The influence of volume constraint method on achieving the exact boundary representation in FEM-based topology optimization: Case studies

Yi CUI[1)], Toru TAKAHASHI[2)], Koichi TAJI[3)], Toshiro MATSUMOTO[4)]

1) Nagoya University (〒 464-8603 Furo-cho, Chikusa-ku, Nagoya, E-mail: yi.cui@mae.nagoya-u.ac.jp)
2) Nagoya University (〒 464-8603 Furo-cho, Chikusa-ku, Nagoya, E-mail: toru.takahashi@mae.nagoya-u.ac.jp)
3) Nagoya University (〒 464-8603 Furo-cho, Chikusa-ku, Nagoya, E-mail: kouichi.taji@mae.nagoya-u.ac.jp)
4) Nagoya University (〒 464-8603 Furo-cho, Chikusa-ku, Nagoya, E-mail: t.matsumoto@nuem.nagoya-u.ac.jp)

Intuitively, exact boundary representation would be the most preferable for the finite element method (FEM) based topology optimization of structures. With exact boundary representation, the material domain can be defined in an exact fashion, which allows imposing arbitrary boundary condition on newly generated boundaries during optimization. However, with the conventional method to constrain volume (the Augmented Lagrangian for volume-constrained problems), topology optimization with exact boundary representation encounters convergence issue. This work indicates that the difference between the FEM mesh for the stress equilibrium and that for the reaction-diffusion equation (RDE) of level set function could be responsible for the convergence issue. In addition, the influence of conventional volume constraint on this convergence has been examined in this study.

Key Words: Exact boundary representation, Volume constraint, Topology optimization, Topological derivative, Finite element method

1. Introduction

In the modern manufacturing process, structural topology optimization has been playing a crucial role with the development of computer technology. As a well-established topology optimization approach, the SIMP (solid isotropic material with penalization) method[(1, 2)] interpolates material constants by using the distribution of density. In the numerical implementation, a nonzero lower bound of Young's modulus is set to prevent singularity in solving the stress equilibrium equation. To prevent drawbacks of severe degree of grayscale problem in the original SIMP method, the level set method, in particular, the one via solving the reaction diffusion equation (RDE), has been proposed by Yamada et al.[(3)] It has since been viewed as an attracting alternative for various topology optimization problems.[(4, 5, 6, 7, 8, 9)] In particular, topology optimizations [(6, 7, 8)] using updated body-fitted mesh have been successfully carried out by adopting variations of augmented Lagrangian method for volume-constrained problems. However, in aforementioned studies, mesh inside the void domain is still necessary and a nonzero lower bound is needed to prevent the singularity problem in solving the stress equilibrium equation. As we have showed and compared in the appendix of the recent work [(9)], such an approach can achieve convergence even with the conventional volume constraint method since the nonzero lower bound assigned inside void domain (similar to the SIMP method) can help stabilize the optimization process. Unlike in the mainstream body-fitted remeshing approach, exact boundary representation (no mesh assigned in void domain) has barely been achieved. Not to mention that the now widely adopted topological derivative[(10)] for sensitivity analysis should be associated with the exact boundary representation since it bases on the idea of insertion of holes rather than the distribution of density. The obstacle to achieving exact boundary representation likely arises from adopting the conventional volume constraint method.[(11, 12, 13)] In contrast, the recently proposed exact method for volume constraint[(9)] has rather enabled such convergence under the exact boundary representation. However, in the

Received Nov. 10, 2022, Accepted Nov. 23, 2022

previous work [9], whether or not exact boundary representation is achievable by adopting the conventional volume constrain method with different penalty parameters has not been investigated. In addition, the validity of the proposed exact boundary representation has not been examined for an extremely small constraint of volume such as 5% of the design domain, when a deteriorated connectivity of the reconstructed domain Ω could occur due to the sudden drop of the actual material volume. Also, case studies of different aspect ratio of the design domain have not been provided either. Regarding the topology optimization with exact boundary representation, the aim of this work is hence to further investigate the above issues such as the influence of penalty parameters in the conventional volume constraint method, the extreme setup of constrained volume and the aspect ratio of the design domain.

2. The Methodology

To perform the structural topology optimization, first we define the level-set function ϕ. The following level set function ϕ is introduced to represent the material domain Ω, the material boundary $\partial\Omega$ and the complementary void domain $D\backslash\Omega$:

$$\begin{cases} 0 < \phi(\boldsymbol{x}) \leq 1 & \text{for } \boldsymbol{x} \in \Omega, \\ \phi(\boldsymbol{x}) = 0 & \text{for } \boldsymbol{x} \in \partial\Omega, \\ -1 \leq \phi(\boldsymbol{x}) < 0 & \text{for } \boldsymbol{x} \in D\backslash\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

A characteristic function as defined below is necessary in performing the volume integration.

$$\chi_\phi = H(\phi) = \begin{cases} 0 & \text{if } \phi < 0, \\ 1 & \text{if } \phi \geq 0. \end{cases} \tag{2}$$

The minimum compliance problem by considering the level set function $\phi(\boldsymbol{x}) \in [-1, 1]$ as a spatial function inside the design domain can be formulated as follows:

$$\inf_{\phi} \; F(\phi) = l(\boldsymbol{u}), \tag{3}$$

$$\text{subject to } \; a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = l(\boldsymbol{v}), \tag{4}$$

$$\text{and } G(\phi) = \int_D \chi_\phi \, \mathrm{d}\Omega - V_{\text{req}} \leq 0. \tag{5}$$

The weak form of the governing equation reads

$$a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) := \int_\Omega \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) : \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}) \, \mathrm{d}\Omega, \tag{6}$$

$$l(\boldsymbol{v}) := \int_{\Gamma_N} \boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{v} \, \mathrm{d}\Gamma. \tag{7}$$

Here D is the design domain, V_{req} is the volume constraint, $\boldsymbol{u}$ is the displacement, $\boldsymbol{v}$ is the virtual displacement, $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})$ is the corresponding total strain, $\mathbb{C}$ is the fourth-order elasticity tensor and the vector $\boldsymbol{t}$ is the given external boundary load. Since the boundary representation becomes exact, the same weak form is based on the reconstructed material domain Ω:

$$\int_\Omega \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) : \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}) \, \mathrm{d}\Omega = \int_{\Gamma_N} \boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{v} \, \mathrm{d}\Gamma. \tag{8}$$

The boundary value problem to update the level set function is as follow.

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial t} = K(-\overline{\mathcal{T}} + \Lambda + \tau \nabla^2 \phi) & \text{in } D, \\ \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 & \text{on } \partial D \backslash \partial \Gamma_N, \\ \phi = 1 & \text{on } \partial \Gamma_N. \end{cases} \tag{9}$$

Here t is the fictitious time, K is the coefficient of proportionality, τ is a regularization parameter for the fictitious interface energy, and $\mathcal{T}$ stands for the topological derivative and can be expressed as:

$$\mathcal{T} = -\boldsymbol{\sigma} : \mathbb{P} : \boldsymbol{\varepsilon}. \tag{10}$$

The normalized topological derivative can be expressed as:

$$\begin{cases} \overline{\mathcal{T}} = C_0 \mathcal{T}, \\ C_0 = \frac{\int_D \mathrm{d}\Omega}{2 \int_D |\mathcal{T}| \mathrm{d}\Omega}. \end{cases} \tag{11}$$

The polarization tensor $\mathbb{P}$ for the plane stress case can be found, for example, in Lopes et al.:[10]

$$\mathbb{P} = \frac{1}{1+\nu} \left(2\mathbb{I} - \frac{1-3\nu}{2(1-\nu)} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right). \tag{12}$$

Verification has been made by comparing the above topological derivative with the corresponding result from the direct FEM calculation. During the numerical implementation, it is the normalized topological derivative $\overline{\mathcal{T}}$ that has been used.

Our finite element analysis has been carried out by FreeFEM++,[14, 15] and it is an open-source software package that requires formulating the weak form of governing equation to carry out the finite element simulation. As for the remeshing process, the open-source software package Mmg has been employed. For illustration, the design domain D, the material domain Ω and the void domain $D\backslash\Omega$ are shown in Fig. 1, alongside the geometry and boundary conditions.

2.1. The augmented Lagrangian method for volume-constrained problems[11, 12, 13, 16]

The Augmented Lagrangian for volume-constrained problems, as referred as the conventional method, for the current step $t_{n+1} = t + \Delta t$, is formulated as:

$$\Lambda_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{V}(q_n + r_n G_n) & \text{if } G_n \geq -\frac{q_n}{r_n} \\ 0 & \text{if } G_n < \frac{q_n}{r_n} \end{cases} \tag{13}$$

It should be noted that all above parameters are from the previous optimization step t_n:

$$G_n = \int_D \chi(\phi_n) \, \mathrm{d}\Omega - V_{\text{req}}. \tag{14}$$

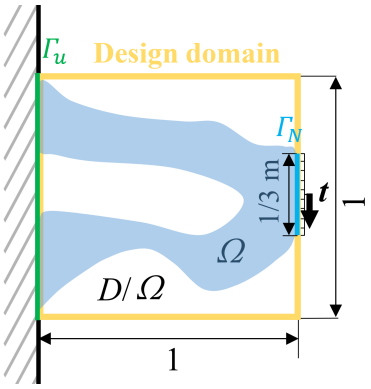


Fig. 1: The schematic illustration of design domain, material domain, complementary void domain and boundary conditions. The aspect ratios for the last two numerical cases are set as 3:1 and 6:1.

Only after knowing the current Λ_{n+1} (and hence ϕ_{n+1}) can all other parameters be updated as follows to be used in the next optimization step. Given the initial values of the two parameters and the constant γ are $q_1 = 0$, $r_1 = 0.1$ or 0.2 and $\gamma = 1.025$., they are updated in the optimization process by:

$$\begin{cases} q_{n+1} = & q_n + r_n \max(G_n, -q_n/r_n), \\ r_{n+1} = & \gamma r_n. \end{cases} \tag{15}$$

2.2. The exact volume constraint method[9]

The pivotal idea of the exact volume constraint method is to split the original RDE into two terms by letting:

$$\phi = \phi^* + \Lambda\, \hat{\phi}. \tag{16}$$

Once split, ϕ^* within the interval from t to $t + \Delta t$ is governed by:

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi^*}{\partial t} = K(-\overline{\mathcal{T}} + \tau \nabla^2 \phi^*) & \text{in } D, \\ \frac{\partial \phi^*}{\partial n} = 0 & \text{on } \partial D \backslash \partial \Gamma_N, \\ \phi^* = 1 & \text{on } \partial \Gamma_N, \\ \phi^*|_t = \phi|_t. \end{cases} \tag{17}$$

By subtracting Eq. (17) from the original RDE Eq. (9), after the elimination of Λ, $\hat{\phi}$ satisfies the following initial boundary value problem:[9]

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial t} = K(1 + \tau \nabla^2 \hat{\phi}) & \text{in } D, \\ \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial n} = 0 & \text{on } \partial D \backslash \partial \Gamma_N, \\ \hat{\phi} = 0 & \text{on } \partial \Gamma_N, \\ \hat{\phi}|_t = 0. \end{cases} \tag{18}$$

Owing to the Dirichlet boundary condition, analytical solution of $\hat{\phi}$ is not attainable. Notably, Eq. (18) does not depend on either the topological derivative or the value of ϕ. Consequently, solving $\hat{\phi}$ just adds a one-time cost to the whole loop. In light of the time independence, we hereafter denote:

$$\hat{\phi} := \hat{\phi}|_{t+\Delta t}. \tag{19}$$

The volume constraint can then be viewed as an implicit equation for Λ:

$$g(\Lambda) = \int_D \chi_{\phi(\Lambda)} \mathrm{d}\Omega - V_{\text{req}} = 0. \tag{20}$$

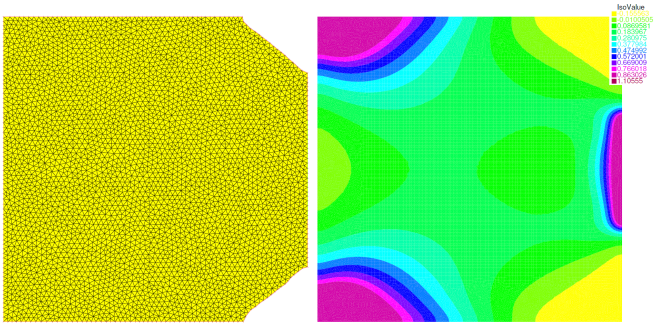
For Eq. (20), Newton-Raphson iteration is needed to find $\Lambda^{(9)}$. In the beginning of the optimization loop, as required to calculate the volume integration, a smoothed Heaviside function capable of converging to the rigorous Heaviside function has been adopted. Instead of an invariantly smoothed Heaviside function, a stepwise one is adopted:

$$H(\phi) = \max(\tanh(k\phi), 0). \tag{21}$$

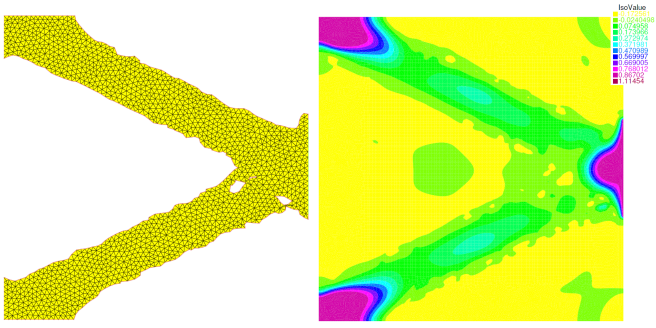
In the numerical implementation, we simply let $k = n^q + 1$ ($q = 0.5$) at the nth time step. Besides, all other conditions, such as the use of smoothed Heaviside function have been made identical in the comparison between the two volume constraint methods.

3. Results and discussions

In this section, results of topology optimization by using either the conventional or the recently proposed volume constraint method as introduced in the preceding section will be examined and discussed.

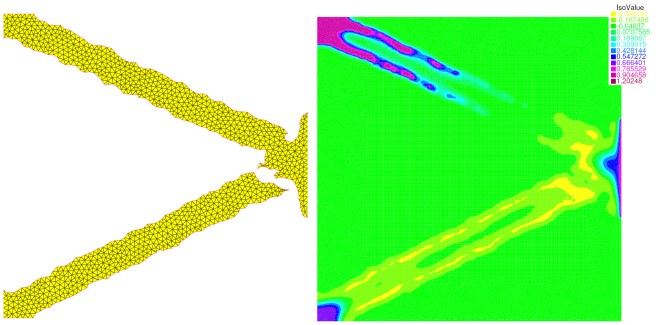


(a) Step 8



(b) Step 30

The volume constraint is set as $V_{\text{req}} = 0.05,$ or $0.2,$ or $0.5,$ or 0.9



(c) Step 174

Fig. 2: The remeshed material domain (each left subfigure) and the corresponding ϕ distribution (each right subfigure) under the exact boundary representation by using the conventional augmented Lagrangian method (penalty parameter $r_1 = 0.1$). The volume constraint is $V_{\text{req}} = 0.2$. Convergence cannot be reached.

in this study. The other parameters can be found elsewhere [9]. The convergence criterion of structural topology optimization for ϕ is normally defined as

$$\|\phi|_{t+\Delta t} - \phi_t\|_{L^\infty} < 0.02. \tag{22}$$

Fig. 2 plots the remeshed material domain and the corresponding ϕ by applying the conventional volume constraint method. It has failed to reach convergence. During its optimization process, the remeshed and reconstructed domain has kept varying, and its volume is either much bigger or smaller than the required $V_{\text{req}} = 0.2$. At step 8 of Fig. 2, the reconstructed material domain is outlined by a smooth boundary. The corresponding ϕ contour also displays a quite smooth distribution. However, at step 30 in Fig. 2, zigzag patterns can be spotted all along its remeshed material boundary. The zigzag boundaries are also related to the mesh density. Under extremely fine meshes, both volume constraint methods result in almost no zigzag, while the conventional method still cannot attain convergence. Under rather coarse meshes, the recently proposed method can not only achieve convergence, but also suppress the zigzag pattern and hence enhance the smoothness. Likewise, the distribution of its level set function changes into a disordered state. The accumulated instability leads to the unnecessary insertion of holes in the place near the traction boundary. Finally, at step 174, the stress analysis is unable to proceed due to that the structure loses load-carrying capacity in the horizontal direction.

For the case of penalty parameter $r_1 = 0.1$ in the conventional way to constrain volume, the resulted volume ratio in Fig. 3 drops from 100% to near 20% and yet keeps fluctuating around the targeted ratio. Correlating with Fig. 2, it can be known that not only that the volume ratio is constantly varying, but the zigzag outline of the material domain is also evolving. As a consequence, the structural compliance in Fig. 3 has a considerable fluctuation before it

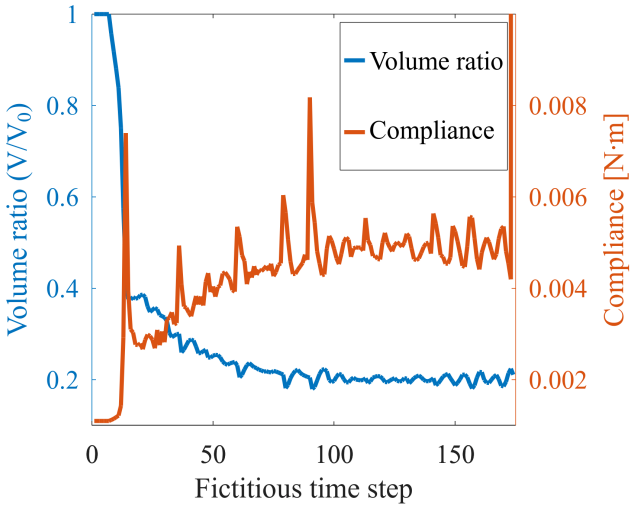
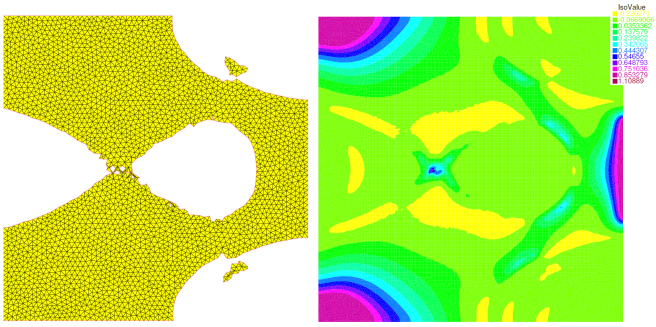
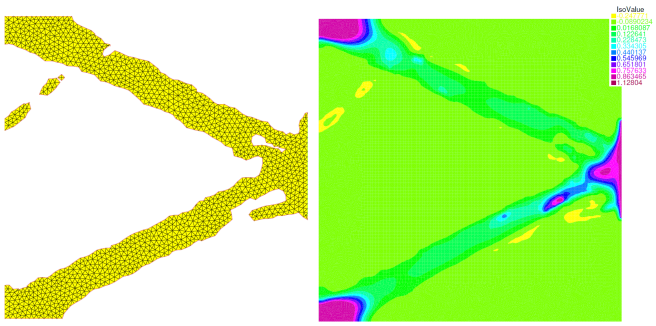


Fig. 3: The actual volume ratio of material and the structural compliance under the exact boundary representation by using the conventional augmented Lagrangian method (penalty parameter $r_1 = 0.1$). The second last structural compliance reaches 0.733 [N· m] before finally approaching infinity. The volume constraint is $V_{\text{req}} = 0.2$.

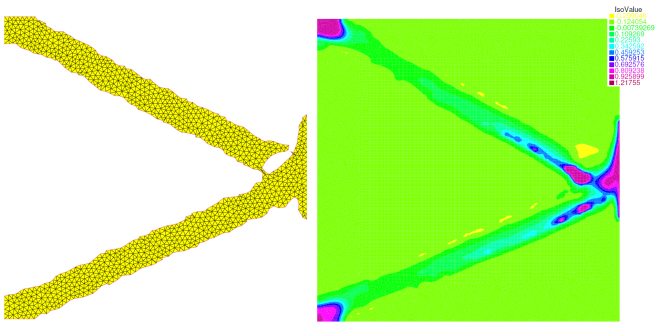
approaches infinity when the resulted structure totally loses load-carrying capacity.



(a) Step 8



(b) Step 30



(c) Step 70

Fig. 4: The remeshed material domain (each left subfigure) and the corresponding ϕ distribution (each right subfigure) under the exact boundary representation by using the conventional augmented Lagrangian method (penalty parameter $r_1 = 0.2$). The volume constraint is $V_{\text{req}} = 0.2$. Convergence cannot be reached either.

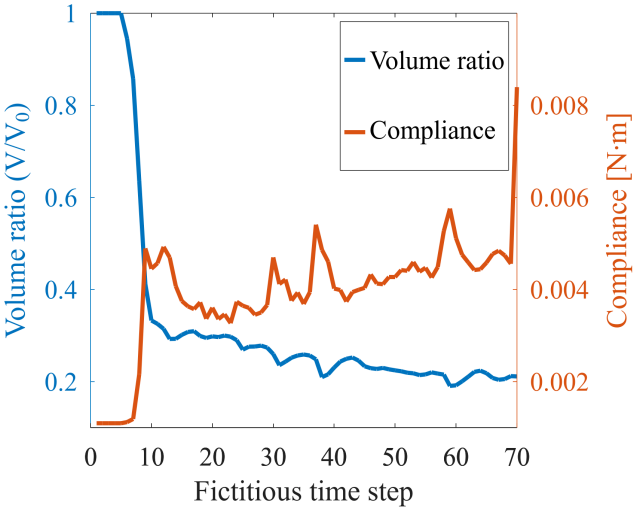


Fig. 5: The actual volume ratio of material and the structural compliance under the exact boundary representation by using the conventional augmented Lagrangian method (penalty parameter $r_1 = 0.2$). In the next optimization step, the final compliance would approach infinity. The volume constraint is $V_{\text{req}} = 0.2$.

Once the penalty parameter in the conventional method of volume constraint is doubled in Fig. 4, the convergence still cannot be achieved. Comparing step 8 in Fig. 2 with that in Fig. 4, the larger penalty parameter has somehow accelerated the reduction of the material volume from the initial hole-free configuration. At the same time, the zigzag pattern along the material boundary occurs earlier than in Fig. 2. It is also faster for the optimization process to reach a failed structure, whose compliance approach infinity. Compared with Fig. 3, the volume ratio in Fig. 5 appears smoother and hence fewer spikes are seen in its structural compliance curve. It seems that the convergence issue is an inherent obstacle to achieving exact boundary representation by using conventional method of volume constraint.

Fig. 6 plots the remeshed material domain and the corresponding ϕ at different steps by using the recently proposed exact volume constraint method.[9] Comparing step 8 in Fig. 6 with those in Fig. 2 and Fig. 4, the search process for the optimized structure is obviously more efficient by using the exact volume constraint method. In a sharp contrast, the boundary outline in Fig. 6 is almost free of zigzag patterns. Not only convergence has been achieved in Fig. 6, but also the final compliance of the structure is lower than that by using the SIMP method, whose boundary representation is based on density and therefore not exact. Since Newton-Raphson iteration is implemented, the volume and hence the overall optimization loop becomes much more stable.

At the beginning, the smoothed Heaviside function was involved in the volume integration from the distribution of ϕ. Therefore, the constraint is rather imposed on the volume ratio of the material that is defined by the smoothed Heaviside function. In our numerical implementation, the smoothed Heaviside function gradually approaches the real one during the optimization process. As a result, the actual volume ratio, as seen in Fig. 7, decreases from 100% to 20%. By applying the exact volume constraint method, the actual volume ratio swiftly turns into an almost horizontal line after just 20 steps. This is totally different from that in Fig. 3 or Fig. 5. The well-constrained volume leads to no spike and almost no fluctuation in the structural compliance curve. On the structural compliance curve, its initial rise is just due to the sudden reduction of the actual material volume.

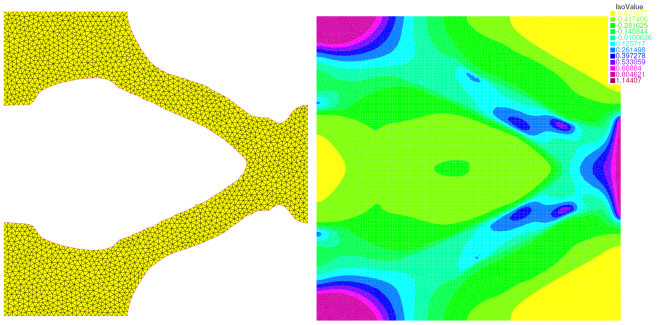
Last but not least, the probable cause of the convergence issue is to be examined. From optimization step n to step $n+1$, when $G_n \geq -q_n/r_n$ is assumed, the volume constraint equation at step $n+1$ for the augmented Lagrangian method is:

$$\begin{cases} G_{n+1} = & \int_D \chi(\phi_n(\Lambda_{n+1}))\,\mathrm{d}\Omega - V_{\text{req}}. \\ \Lambda_{n+1} = & \frac{1}{V}(q_n + r_n G_n) \end{cases} \tag{23}$$

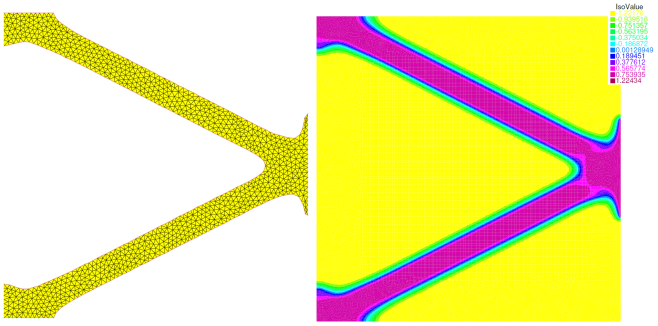
It can be easily noted that since the update in Eq. (23) is akin to an explicit time-stepping scheme, instability would be built up inside the optimization loop. The change in the level set function ϕ_{n+1} with respect to ϕ_n is simply governed by:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \phi_{n+1} - \partial \phi_n}{\partial t} \\ &= K[-(\overline{\mathcal{T}}_{n+1} - \overline{\mathcal{T}}_n) + \Lambda_{n+1} - \Lambda_n + \tau \nabla^2(\phi_{n+1} - \phi_n)] \end{aligned} \tag{24}$$

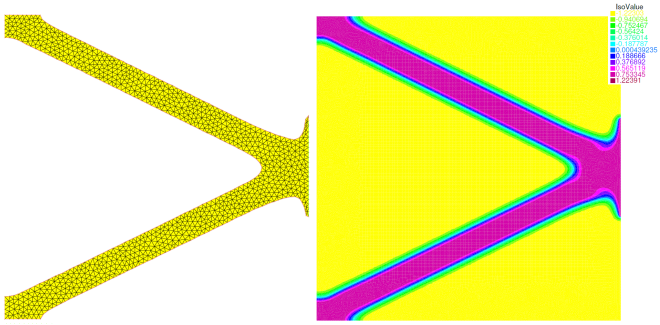
As shown in Fig. 8, interpolation error between the two meshes inevitably occurs during the remeshing of the actual material domain. In other words, this is caused by the term $\overline{\mathcal{T}}_{n+1} - \overline{\mathcal{T}}_n$ and cannot be fixed since Λ_{n+1} is explicitly determined from step n+1 in the conventional augmented Lagrangian method. In a sharp



(a) Step 8



(b) Step 30



(c) Step 92

Fig. 6: The remeshed material domain (each left subfigure) and the corresponding ϕ distribution (each right subfigure) under the exact boundary representation by using the recently proposed exact volume constraint method. The volume constraint is $V_{\text{req}} = 0.2$. Convergence has been reached.

contrast, Λ_{n+1} in the recently proposed exact volume constraint method is determined by Newton-Raphson iteration at the current time step, and therefore it can offset the instability issue caused by $\overline{\mathcal{T}}_{n+1} - \overline{\mathcal{T}}_n$. Thanks to the implementation of Newton-Raphson iteration, the overall optimization process is stabilized and hence convergence can be attained.

Next, we replace the volume constraint from $V_{\text{req}} = 0.2$ with an extremely large one $V_{\text{req}} = 0.9$ or an extremely small one $V_{\text{req}} = 0.05$. For an extremely small constraint of volume, a deteriorated connectivity of the reconstructed domain Ω could occur horizontally due to the sudden decrease of the actual material volume. To solve this issue, one can either start from a rough estimation of the ϕ distribution such as the one from using a fixed and coarse mesh,

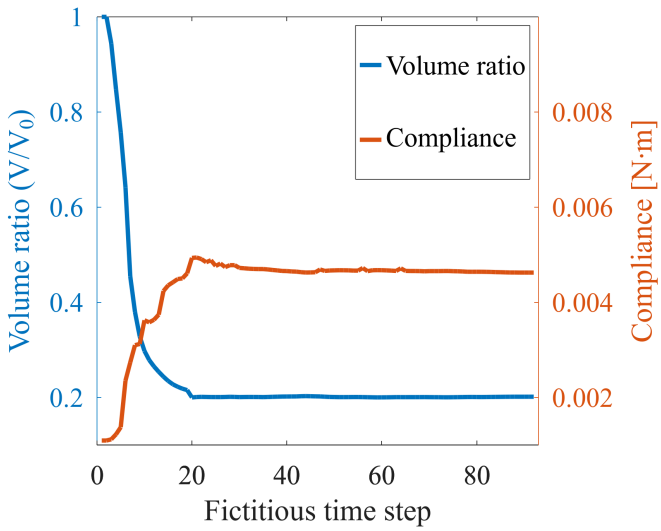


Fig. 7: The actual volume ratio of material and the structural compliance under the exact boundary representation by using the recently proposed exact volume constraint method.

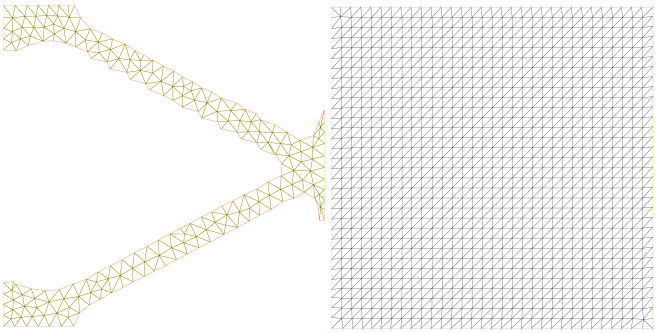


Fig. 8: The FEM mesh for the stress equilibrium (left subfigure) and that for the reaction-diffusion equation (RDE) of ϕ (right subfigure). Coarse meshes are shown here for better illustration.

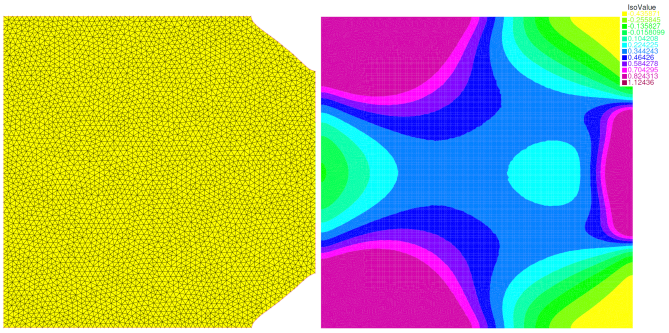
or one can simply set the volume constraint at the nth step as:

$$V_{\text{req},n} = V_n + \beta(V_{\text{req}} - V_n). \tag{25}$$

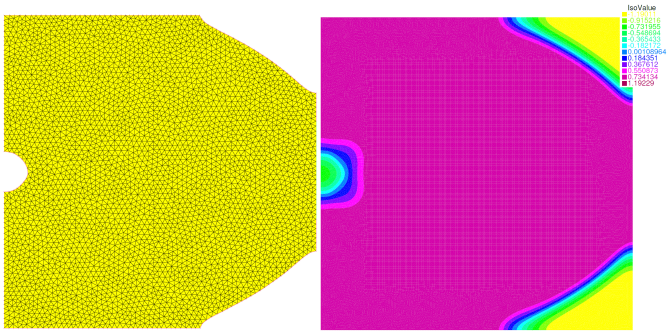
Here $V_{\text{req},n}$ represents the volume constraint imposed at the nth optimization step, V_n is the actual material volume ratio at the nth step, V_{req} is the initial volume constraint, and $\beta \in [0, 1]$ is an coefficient to smooth the decrease of the actual volume. Initially $\beta = 0.5$, and at the final stage of optimization $\beta = 1.0$ ensures that $V_{\text{req},n} = V_{\text{req}}$, when V_n comes close enough to V_{req} (e.g. within 10%).

From now on, V_{req} is replaced by $V_{\text{req},n}$ in imposing the volume constraint at nth optimization step. Fig. 9 and Fig. 10 indicate that our approach of exact boundary representation (by using the exact volume constraint) is valid even for an extremely small volume constraint. The thin beam-like structure in Fig. 10 requires a fine mesh density (0.004) in remeshing, otherwise the mesh resolution would

not be enough for its slenderness.



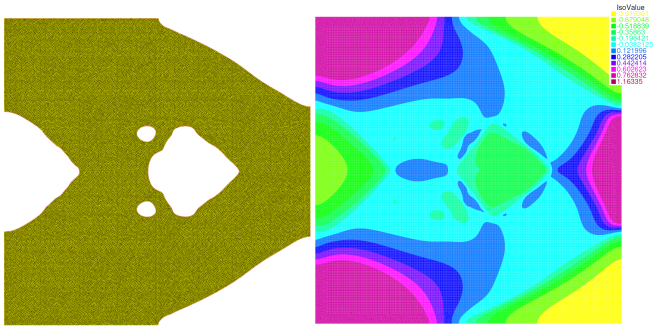
(a) Step 10



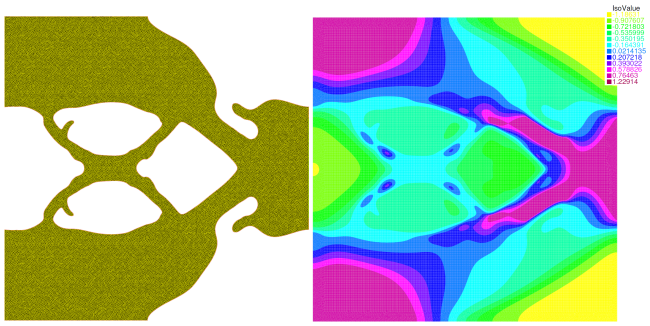
(b) Step 43

Fig. 9: The remeshed material domain (each left subfigure) and the corresponding ϕ distribution (each right subfigure) under the exact boundary representation by using the recently proposed exact volume constraint method. The volume constraint is $V_{\text{req}} = 0.9$. The compliance and actual volume ratio at Step 10 and Step 43 are 0.00110 [N·m] and 0.9601 and 0.00105 [N·m] and 0.8996, respectively.

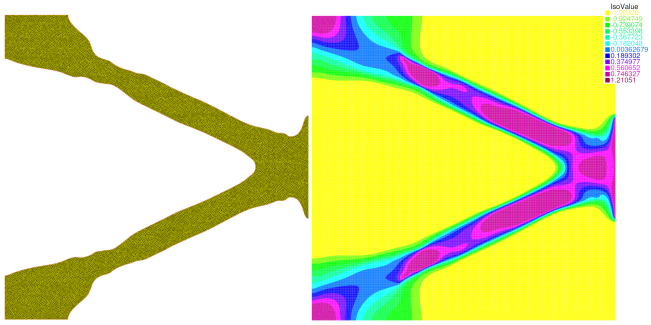
Fig. 11 and Fig. 12 show that our approach of exact boundary representation (by using the exact volume constraint) is valid even when the aspect ratio in the horizontal direction becomes extremely large than the vertical direction. Under such a situation, the topology of the optimized structures are more complex since more holes are introduced. Overall, the structure near the boundary traction is seen slimmer than that near the fixed end. In Fig. 12, for the same reason, the same very fine mesh is adopted in remeshing, otherwise the mesh resolution would not be enough for the slenderness.



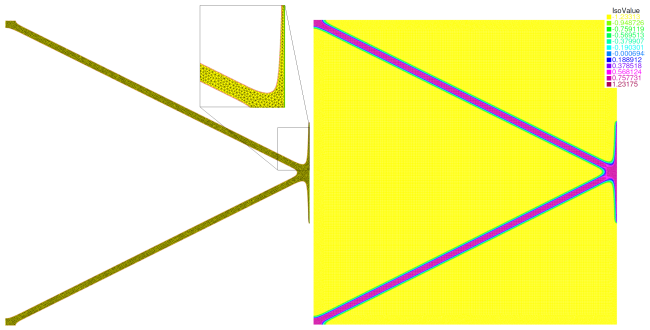
(a) Step 10



(b) Step 12



(c) Step 16



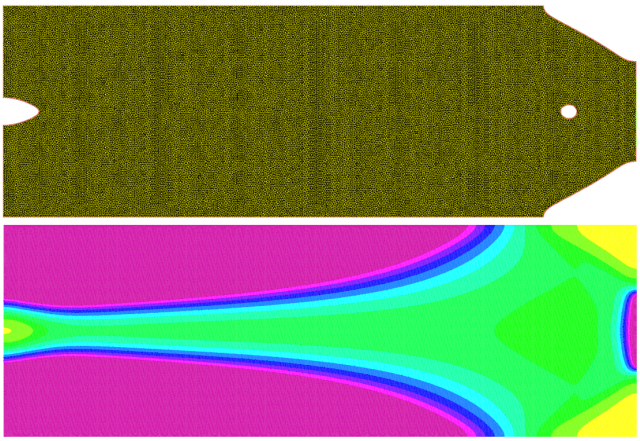
(d) Step 92

Fig. 10: The remeshed material domain (each left subfigure) and the corresponding ϕ distribution (each right subfigure) under the exact boundary representation by using the recently proposed exact volume constraint method. The volume constraint is $V_{\text{req}} = 0.05$. The compliance and actual volume ratio at Step 10, Step 12, Step 16, Step 30 and Step 92 are 0.001428 [N·m] and 0.7333, 0.004964 [N·m] and 0.5533, 0.004917 [N·m] and 0.2400, and 0.02125 [N·m] and 0.04995, respectively. The zoom-in inset shows the adopted fine mesh.

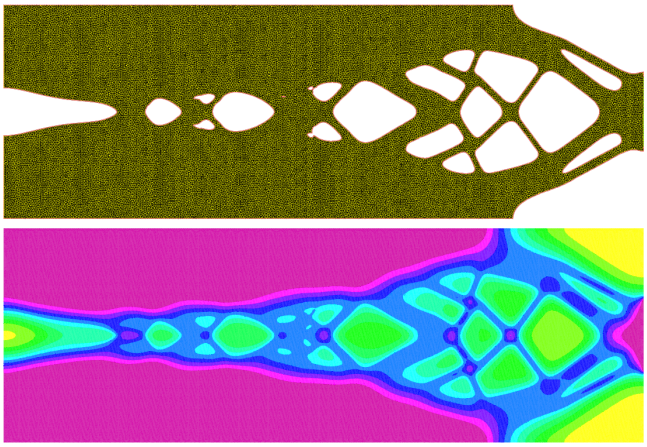
4. Conclusions

Regarding the topology optimization with exact boundary representation, we have further investigated those aforementioned issues in Section 1 such as the influence of penalty parameters in the conventional volume constraint method, the extreme setup of constrained volume and the aspect ratio of the design domain. It is indicated that the difference between the FEM mesh for the stress equilibrium and that for the reaction-diffusion equation (RDE) of level

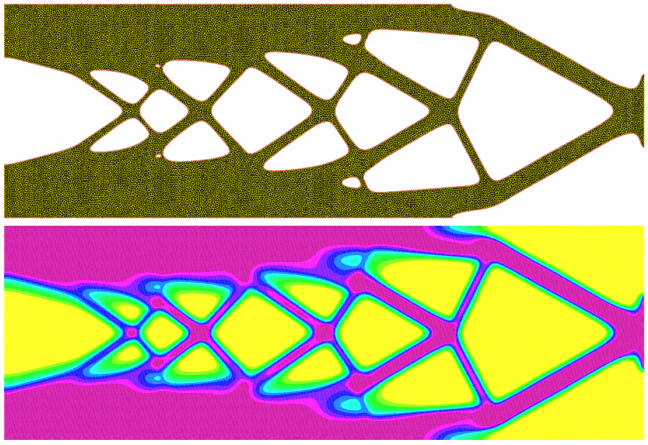
set function could be responsible for the convergence issue. Since the conventional volume constraint method is akin to an explicit time-stepping scheme, instability is built up inside the optimization loop. In this regard, the new exact volume constraint method can stabilize the overall optimization and hence attain the convergence.



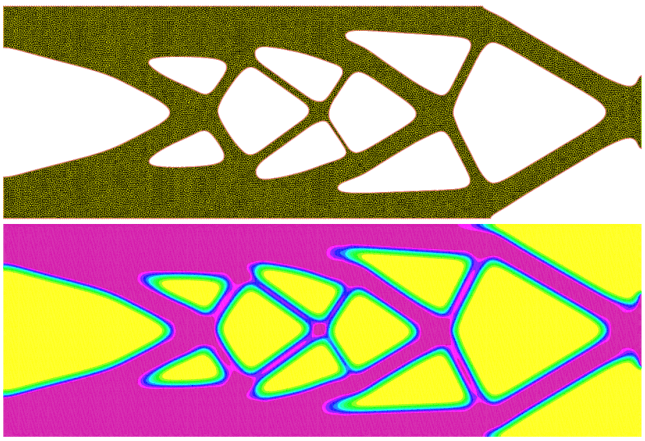
(a) Step 20



(b) Step 40

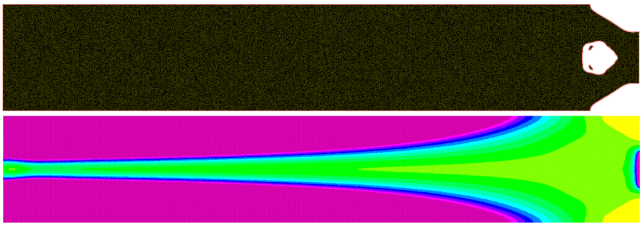


(c) Step 60

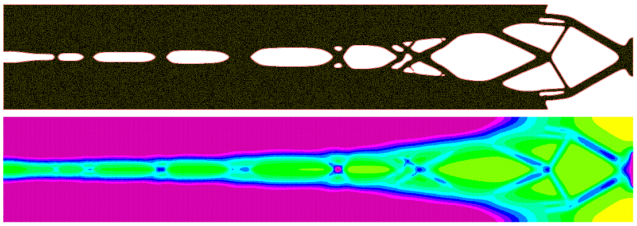


(d) Step 167

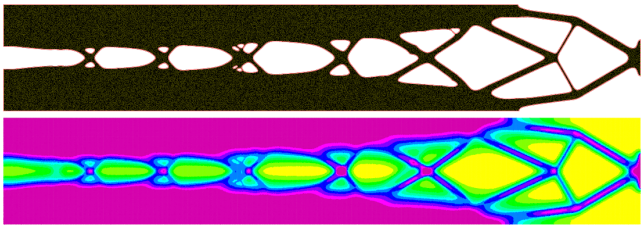
Fig. 11: The remeshed material domain (each upper subfigure) and the corresponding ϕ distribution (each lower subfigure) under the exact boundary representation by using the recently proposed exact volume constraint method. The volume constraint is $V_{\text{req}} = 0.5$, and the aspect ratio of design domain is 3:1. The compliance and actual volume ratio at Step 20, Step 40, Step 60 and Step 167 are 0.01871 [N·m] and 0.7709, 0.02017 [N·m] and 0.6534, 0.02570 [N·m] and 0.5004, and 0.02518 [N·m] and 0.04997, respectively.



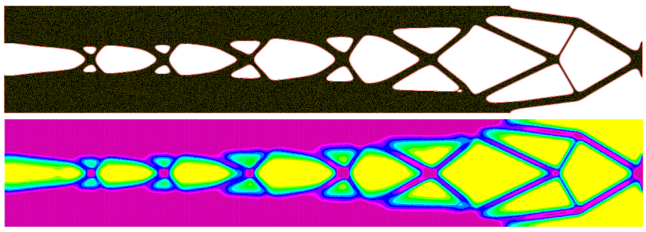
(a) Step 30



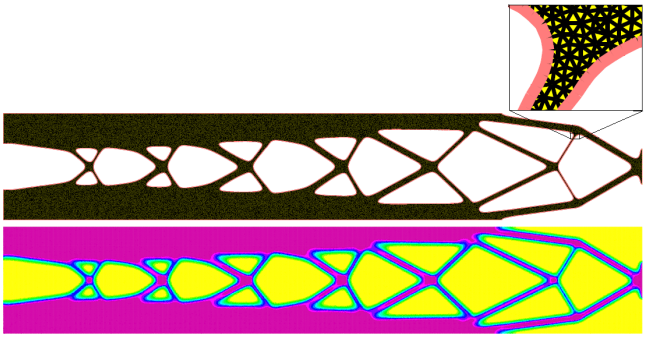
(b) Step 40



(c) Step 50



(d) Step 60



(e) Step 86

Fig. 12: The remeshed material domain (each upper subfigure) and the corresponding ϕ distribution (each lower subfigure) under the exact boundary representation by using the recently proposed exact volume constraint method. The volume constraint is $V_{\text{req}} = 0.5$, and the aspect ratio of design domain is 6:1. The compliance and actual volume ratio at Step 30, Step 40, Step 50, Step 60 and Step 86 are 0.1351 [N·m] and 0.7333, 0.1483 [N·m] and 0.7467, 0.1547[N·m] and 0.6416, 0.1637 [N·m] and 0.5934 and 0.1747 [N·m] and 0.5005, respectively. The zoom-in inset shows the adopted fine mesh.

5. Acknowledgements

The author Y. Cui acknowledges the support of the Makimakoto Commemorative Research Grant and Nagoya University Faculty of Engineering Support Research Grant.

Reference

(1) Bendsøe, M.P., Sigmund, O.. Material interpolation schemes in topology optimization. Archive of Applied Mechanics (Ingenieur Archiv) Vol.69, No.(9-10), (1999), pp.635-654. doi:10.1007/s004190050248.

(2) Bendsøe, M.P., Sigmund, O.. Topology Optimization. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, (2004), doi:10.1007/978-3-662-05086-6.

(3) Yamada, T., Izui, K., Nishiwaki, S., Takezawa, A.. A topology optimization method based on the level set method incorporating a fictitious interface energy. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering Vol.199, No.45-48, (2010), pp.2876-2891. doi:10.1016/j.cma.2010.05.013.

(4) Emmendoerfer, H., Silva, E.C.N., Fancello, E.A.. Stress-constrained level set topology optimization for design-dependent pressure load problems. Computer Methodsin Applied Mechanics and Engineering Vol.344, (2019), pp.569-601. doi:10.1016/j.cma.2018.10.004.

(5) Zhang, Z., Xie, Y.M., Li, Q., Zhou, S.. A reaction-diffusion based level set method for image segmentation in three dimensions. Engineering Applications of Artificial Intelligence Vol.96, (2020), pp.103998. doi:10.1016/j.engappai.2020.103998.

(6) Li, H., Yamada, T., Jolivet, P., Furuta, K., Kondoh, T., Izui, K., Nishiwaki, S.. Full-scale 3D structural topology optimization using adaptive meshrefinement based on the level-set method. Finite Elements in Analysis and Design Vol.194, (2021), pp.103561. doi:10.1016/j.finel.2021.103561.

(7) Zhuang, Z., Xie, Y., Zhou, S., A reaction diffusion-based level set method using body-fitted mesh for structural topology optimization. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering Vol.381, No.1 (2021), pp. 113829. doi: https://doi.org/10.1016/j.cma.2021.113829.

(8) Zhuang, Z., Xie, Li, Q., Y., Zhou, S., Body-fitted bi-directional evolutionary structural optimization using nonlinear diffusion regularization. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering Vol.396, No.1 (2022), pp. 115114.https://doi.org/10.1016/j.cma.2022.115114.

(9) Cui, Y., and Takahashi, T., and Matsumoto, T., An exact volume constraint method for topology optimization via reaction-diffusion equation (May 17, 2022). Available at SSRN: https://ssrn.com/abstract=4112073 or http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.4112073.

(10) Lopes, C.G., Santos, R.B.d., Novotny, A.A.. Topological derivative based topology optimization of structures subject to multiple loadcases. Latin American Journal of Solids and Structures Vol.12, No.5, (2015), pp.834-860. doi:10.1590/1679-78251252.

(11) Hestenes, M. R.. Multiplier and gradient methods. Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. 4, No.5, (1969), pp.303–320. doi:10.1007/BF00927673.

(12) Rockafellar, R. T.. The multiplier method of Hestenes and Powell applied to convex programming. Journal of Optimization Theory and Applications, Vol.12, No.6, (1973), pp.555–562. doi:10.1007/BF00934777.

(13) Powell M. J. D.. Algorithms for nonlinear constraints that use Lagrangian functions. Mathematical Programming, Vol. 14, (1978), pp.224–248. doi:10.1007/BF01588967.

(14) Hecht, F.. New development in freefem++. Journal of Numerical Mathematics Vol.20, No.3-4, (2012), pp. 251-265, doi:10.1515/jnum-2012-0013.

(15) Jolivet, P., Dolean, V., Hecht, F., Nataf, F., Pru' Homme, C., Spillane, N.. High performance domain decomposition methods on massively parallel architectures with freefem++. Journal of Numerical Mathematics vol. 20, no. 3-4, (2012), pp. 287-302. doi:10.1515/jnum-2012-0015.

(16) Kim, C., Jung, M., Yamada, T., Nishiwaki, S., Yoo, J.. FreeFEM++ code for reaction-diffusion equation-based topology optimization: for high-resolution boundary representation using adaptive mesh refinement. Structural and Multidisciplinary Optimization Vol. 62, No.1, (2020), pp.439-455. doi:10.1007/s00158-020-02498-3

© 著者 2022
本論文集に収録されているすべての論文は、原著論文として計算数理工学論文集 第 22 巻（2022）に発表されたもので、著作権は著者に属し、特に断らない限りクリエイティブ・コモンズ・ライセンスの CC BY NC ND を採用しています (http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/)。

© The author(s) 2022
All the articles in this volume are originally published in Transactions of the Japan Society for Computational Methods in Engineering, Vol.22, 2022, under the terms of the Creative Commons Attribution License CC BY NC ND (http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/) unless otherwise noted. The copyright of each article belongs to the author(s).

計算数理工学論文集 第 22 巻

令和 4 年 12 月 16 日発行
編集発行：日本計算数理工学会

（問合せ先）
〒464-8603 名古屋市千種区不老町
名古屋大学大学院工学研究科 機械システム工学専攻 計算力学研究グループ 内
日本計算数理工学会・事務局
TEL: 052-789-2780
FAX: 052-789-3123

（ホームページ）
http://www.matsumoto.nuem.nagoya-u.ac.jp/jascome/

Printed in Japan / ISSN 1348-5245