

サンプル点における曲面の勾配を考慮した B スプライン近似に基づくレベルセットトポロジー最適化

A LEVEL-SET-BASED TOPOLOGY OPTIMISATION METHOD BASED ON A B-SPLINE APPROXIMATION USING SURFACE GRADIENTS AT SAMPLING POINTS

飯盛 浩司¹⁾

Hiroshi ISAKARI

1) 慶應義塾大学理工学部 (〒 223-8522 横浜市港北区日吉 3-14-1, E-mail: isakari@sd.keio.ac.jp)

In our previous paper, we proposed to discretise the level-set function by a B-spline surface in topology optimisation, which enabled us to implicitly control the geometric complexity of optimal designs by tuning the number of basis functions consisting of the B-spline surface. We later found, however, that the structure optimised by the original method could end up with a configuration having wavy boundaries caused by the Gibbs-like phenomena. This is due to the interpolation of the topological derivative, which is essentially discontinuous, by a smooth function. In this paper, we report that we can ameliorate this by modifying the definition of the B-spline surface approximation. In the present method, the B-spline surface approximating the topological derivative is constructed such that it fits the sampled data as well as specified gradients in a least-square sense.

Key Words: Topology optimisation, Level-set method, B-spline approximation

1. はじめに

トポロジー最適化⁽¹⁾は構造最適化の中でも最も設計自由度の高い方法として知られ、抜本的な性能の改善や新機能を付与するような設計が可能であるとされる。トポロジー最適化では、設計問題を、ユーザが設定した領域における最適な材料分布を求める問題に帰着する。素朴には、有界な設計領域で定義された特性関数(例えば、設計対象内の各点で1, その他の点で0と定義する)を求めれば良いが、このように定義した特性関数はいたるところ不連続であっても構わないことから、その解は製造が不可能なほどに複雑な形状となり得る⁽²⁾。したがって、実際に造形可能であるような工学的に意味のある解を求めるためには工夫を要する。これまでに均質化法に基づく方法⁽¹⁾や solid isotropic material with penalisation (SIMP) 法⁽³⁾などの方法が提案され、広く利用されている。一方で、これらの方法を使用した場合に避けることのできないいわゆるグレースケールの発生を嫌って、レベルセット法^(4, 5, 6, 2)に基づく0/1のデザインを追求する方法も提案されている。

このような長年にわたる努力にも関わらず、設計案の幾何

学的な複雑さをコントロールしながらトポロジー最適化を行うことは簡単ではない。これを実現可能な方法の代表例は Yamada らの方法⁽²⁾である。当手法では、最適解の探索に用いるレベルセット関数の時間発展を反応拡散方程式で記述するが、その拡散係数を大きく(小さく)設定することにより、幾何学的に単純(複雑)な最適設計案を求めることができる。我々も、Amstutz の方法⁽⁶⁾においてレベルセット関数を B スプライン曲面で表現することにより設計案の幾何学的複雑さを指定した上でトポロジー最適化を実行可能であることを示した⁽⁷⁾。B スプライン曲面は有界な台を持つ多項式(B スプライン基底関数)の重ね合わせであることから、多くの基底関数を用いた場合には複雑な形状、少ない基底関数を用いた場合には単純な形状を導くことができる。これまでに、光学迷彩装置⁽⁸⁾、弾性メタサーフェス⁽⁹⁾、広帯域な動作周波数を持つ音響レンズおよび遮音構造⁽¹⁰⁾などの最適設計への適用例を通じて、その有効性を確認してきた。

しかしながら、当手法で得られる最適形状の境界は不自然に波打つ場合がある。この現象は以下のように理解することができる。当手法ではレベルセット関数を、自身とトポロジー導関数⁽¹¹⁾の重み付き和で逐次置き換えていくことにより形状を更新し最適解を探索する。したがって、レベルセッ

ト関数のみならずトポロジー導関数も B スプライン曲面で表現する必要があり、先行研究においてはトポロジー導関数を補間する B スプライン曲面を用いた⁽⁷⁾。一方で、トポロジー導関数は設計対象の境界を跨いで不連続である。良く知られているように(例えば⁽¹²⁾を参照のこと)、不連続関数を滑らかな関数で補間(あるいは近似)すると、不連続点の近傍で Gibbs 現象が発生する。これに伴い、B スプライン曲面で表現したレベルセット関数が意図に反して波打ち、その零等値線で表される設計対象境界も波打ってしまう場合がある。

そこで本論文では、先行研究⁽⁷⁾における B スプライン曲面補間の方法を見直すことを検討する。具体的には、サンプル点において計算したトポロジー導関数を最小二乗近似する B スプライン曲面を構成するが、サンプルデータと B スプライン曲面の L_2 misfit を最小化するだけでなく、その勾配値を所望の値に制御する⁽¹³⁾ ことでトポロジー導関数を近似する B スプライン曲面を生成する。

以下、第 2 節で B スプライン曲面を用いたレベルセット法を記述した後に、第 3 節で曲面近似の詳細を述べる。第 4 節においてここで提案する曲面近似の性能を検証し、さらに提案法によるトポロジー最適化の実行例を示す。最後に第 5 節において本論文の結論を述べる。

2. B スプライン曲面を用いたレベルセット法

本節では、B スプライン曲面のレベルセットに基づくトポロジー最適化⁽⁷⁾について述べる。

本論文では、例として、以下で定義される形状汎関数

$$J = \sum_{m=1}^M f(u(\mathbf{x}_m^{\text{obs}})) + \int_{\Gamma} g(u(\mathbf{x}), q(\mathbf{x})) d\Gamma \quad (1)$$

を最小化する領域形状 $\Omega \subset D$ を探索するトポロジー最適化問題を考える。ここに、 $D \subset \mathbb{R}^2$ は有限の大きさの設計領域である。また、 $\mathbf{x}_m^{\text{obs}} \in \Omega \setminus D$ ($m = 1, \dots, M$) において実数値関数 f が定義され、 Ω の境界 Γ で実数値関数 g が定義される。 u は以下の境界値問題

$$\nabla^2 u(\mathbf{x}) + k_1^2 u(\mathbf{x}) = 0 \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega} \quad (2)$$

$$\nabla^2 u(\mathbf{x}) + k_2^2 u(\mathbf{x}) = 0 \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (3)$$

$$\lim_{\eta \downarrow 0} u(\mathbf{x} + \eta \mathbf{n}) = \lim_{\eta \downarrow 0} u(\mathbf{x} - \eta \mathbf{n}) \quad \mathbf{x} \in \Gamma \quad (4)$$

$$\lim_{\eta \downarrow 0} \frac{q(\mathbf{x} + \eta \mathbf{n})}{\epsilon_1} = \lim_{\eta \downarrow 0} \frac{q(\mathbf{x} - \eta \mathbf{n})}{\epsilon_2} \quad \mathbf{x} \in \Gamma \quad (5)$$

$$\frac{\partial u^{\text{sc}}(\mathbf{x})}{\partial |\mathbf{x}|} - ik_1 u^{\text{sc}}(\mathbf{x}) = o\left(\frac{1}{\sqrt{|\mathbf{x}|}}\right) \quad \text{as } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty \quad (6)$$

の解であるとする。また、 $q(\mathbf{x}) := \mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot \nabla u(\mathbf{x})$ は Γ における u の flux であり、単位法線 \mathbf{n} は Ω の外向きを正とする。また、 ϵ_1, ϵ_2 はそれぞれ領域 $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}, \Omega$ で定義される定数であり、これを用いて波数は $k_i = \omega \sqrt{\epsilon_i}$ ($i = 1, 2$) と定義される。 ω は入射波 u^{in} の角周波数であり、 $u^{\text{sc}} := u - u^{\text{in}}$ は散乱波である。

なお、ここでは後に示す数値計算例の都合上 u を 2 次元 Helmholtz 方程式の transmission 問題の解であるとしたが、

本研究で開発するトポロジー最適化は他の境界値問題を対象とする場合にも適用可能である。

上記の最適化問題を解くため、形状 Ω を以下で定義されるレベルセット関数 ϕ

$$(\mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}) \cup D = \{\mathbf{x} \mid \phi(\mathbf{x}) > 0\} \quad (7)$$

$$\Gamma = \{\mathbf{x} \mid \phi(\mathbf{x}) = 0\} \quad (8)$$

$$\Omega = \{\mathbf{x} \mid \phi(\mathbf{x}) < 0\} \quad (9)$$

$$\|\phi\| = 1 \quad (10)$$

で表現する。ここで、(10) は ϕ の持つ定数倍の自由度を排除するための正規化を表し、ノルム $\|\cdot\|$ の選択については後述する。このように定義したレベルセット関数を、仮想的な時刻 t を導入し、適当な初期仮定から以下

$$\frac{\partial \phi(\mathbf{x})}{\partial t} = \text{sgn}(\phi) \{[\mathcal{D}_T J](\mathbf{x}) - (\mathcal{D}_T J, \phi)(\mathbf{x})\} \quad (11)$$

で時間発展させることでトポロジー最適化問題の(局所)解を求めることができる⁽¹⁴⁾。ここに、 $[\mathcal{D}_T J](\mathbf{x})$ はトポロジー導関数であり、本問題に対しては以下のように定義される。

$$[\mathcal{D}_T J](\mathbf{x}) = \lim_{\rho \downarrow 0} \frac{[\delta J]_{\rho}(\mathbf{x})}{\pi \rho^2} \quad (12)$$

ここに、 $[\delta J]_{\rho}(\mathbf{x})$ は材料定数 ϵ_i ($i = 1, 2$) を持つ物体で満たされた領域内の点 \mathbf{x} に材料定数 ϵ_{3-i} を持つ半径 ρ の円形の材料を配置した時の目的関数の変化量を表す。また、 (\cdot, \cdot) はノルム (10) を誘導する内積である。

本研究では、時間発展方程式 (11) を解くにあたって、 ϕ と $\mathcal{D}_T J$ を以下のように離散化する。

$$\phi(\mathbf{x}) = \sum_{k=0}^n \sum_{\ell=0}^m B_k^p(x_1) B_{\ell}^q(x_2) \hat{\psi}_{k\ell} \quad (13)$$

$$[\mathcal{D}_T J](\mathbf{x}) \simeq \sum_{k=0}^n \sum_{\ell=0}^m B_k^p(x_1) B_{\ell}^q(x_2) \hat{T}_{k\ell} \quad (14)$$

ここに、 B_k^p ($k = 0, \dots, n$) は p 次の B スプライン基底関数であり、ここでは等間隔の clamped な knot⁽¹³⁾ を用いて定義する。 n, m の大きさを調整することにより、最適形状の幾何学的複雑さを調整できる。また、 $\hat{\psi}_{k\ell}, \hat{T}_{k\ell} \in \mathbb{R}$ は制御変数である。このような離散化のもとで、時間発展方程式 (11) に現れるレベルセット関数とトポロジー導関数を形式的にそれぞれに対応する制御変数に置き換えることができる。さらに時間微分を前進差分で近似すれば、(11) の求解は、レベルセット関数の制御変数とその制御変数とトポロジー導関数の制御変数の重み付き和で逐次的に置き換えていくことに帰着される。

3. B スプライン曲面近似

本節では、トポロジー導関数を近似する B スプライン曲面 (14) の制御変数 $\hat{T}_{k\ell}$ を求める方法について述べる。

先行研究においては、 $(n+1)(m+1)$ 個ある Greville 点⁽¹³⁾ で計算したトポロジー導関数 ((14) の左辺) を補間する B スプライン曲面を用いた。しかしながら、トポロジー導関数は

Γ において不連続であり、このような方法で求めたBスプライン曲面は Γ の近傍で振動する。そこで、本研究では

$$P := \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M \left| [\mathcal{D}_T J](\tilde{\mathbf{x}}_{ij}) - \sum_{k=0}^n \sum_{\ell=0}^m B_k^p(\tilde{x}_i) B_\ell^q(\tilde{y}_j) \hat{T}_{k\ell} \right|^2 + \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M c_{ij} \left| X(\tilde{\mathbf{x}}_{ij}) - \sum_{k=0}^n \sum_{\ell=0}^m \frac{dB_k^p(\tilde{x}_i)}{dx_1} B_\ell^q(\tilde{y}_j) \hat{T}_{k\ell} \right|^2 + \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M d_{ij} \left| Y(\tilde{\mathbf{x}}_{ij}) - \sum_{k=0}^n \sum_{\ell=0}^m B_k^p(\tilde{x}_i) \frac{dB_\ell^q(\tilde{y}_j)}{dx_2} \hat{T}_{k\ell} \right|^2 \quad (15)$$

を最小化する制御変数 $\hat{T}_{k\ell}$ を採用する。ここに、 $\tilde{\mathbf{x}}_{ij} = (\tilde{x}_i, \tilde{y}_j)$ は設計領域 D 内の格子点であり、これらの点においてトポロジー導関数をサンプルする。 $N+1, M+1$ はそれぞれ x_1, x_2 方向の格子点の数、 $c_{ij}, d_{ij} > 0$ は定数である。また、 X と Y は以下で定義される。

$$X(\tilde{\mathbf{x}}_{ij}) = \begin{cases} \frac{[\mathcal{D}_T J](\tilde{\mathbf{x}}_{i+1,j}) - [\mathcal{D}_T J](\tilde{\mathbf{x}}_{i-1,j})}{\tilde{x}_{i+1} - \tilde{x}_{i-1}} & \text{if } \tilde{\mathbf{x}}_{ij} \notin \mathcal{N}(\Gamma) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (16)$$

$$Y(\tilde{\mathbf{x}}_{ij}) = \begin{cases} \frac{[\mathcal{D}_T J](\tilde{\mathbf{x}}_{i,j+1}) - [\mathcal{D}_T J](\tilde{\mathbf{x}}_{i,j-1})}{\tilde{y}_{j+1} - \tilde{y}_{j-1}} & \text{if } \tilde{\mathbf{x}}_{ij} \notin \mathcal{N}(\Gamma) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (17)$$

ここに、 $\mathcal{N}(\Gamma)$ は Γ の近傍であり、ここでは Γ からの距離が格子点間距離の二倍よりも小さい点の集合とする。すなわち、(トポロジー導関数が不連続となる)境界 Γ の近傍では急激な変化を抑制しつつ、それ以外の領域では H_1 ノルムの意味でトポロジー導関数を最小二乗近似するBスプライン曲面を用いる。ただし、トポロジー導関数の勾配は直接求めることが難しいため中央差分を用いて計算する。なお、CADなどの分野においては(16)、(17)の X, Y を恒等的に零とする、すなわち近似曲面の勾配を小さく保ちながら最小二乗近似する方法が用いられることもある⁽¹³⁾が、本研究ではトポロジー導関数を可能な限り精度良く近似するため上記の定義を行った。また、サンプル点 $\tilde{\mathbf{x}}_{ij}$ を格子点に取ることができ、簡単にトポロジー導関数の勾配を推定できることも上記の定義を行った理由のひとつである。(15)を最小にする条件は、

$$\partial P / \partial \hat{T}_{kl} = 0 \quad (18)$$

で与えられる。(18)から得られる $(n+1)(m+1)$ 元の連立一次方程式を解くことにより制御変数 \hat{T}_{kl} を得る。なお、ここに現れる連立一次方程式の係数行列はBスプライン基底関数の台の局所性より疎行列である。しがたって、必要な行列を圧縮行格納(CSR)方式で保持し、GMRESなどの反復法を用いて解けば良い。

本研究ではトポロジー導関数の近似曲面として(15)を用いることから、レベルセット関数の時間発展(11)に現れる内積についても H_1 ノルムを採用する。

4. 数値計算例

4.1. 近似曲面の精度について

本節では、3節で示した曲面近似法の妥当性を検証する目的で実施した数値計算の例を示す。ここでは、以下の不連続な曲面(Fig. 1(f))を参照

$$f(x_1, x_2) = H \left(\frac{1}{36} - \left(x_1 - \frac{1}{4} \right)^2 - \left(x_2 - \frac{1}{4} \right)^2 \right) + \sin 2\pi x_1 \cos 2\pi x_2 H \left(x_1 - \frac{1}{2} \right) H \left(x_2 - \frac{1}{2} \right) \quad (19)$$

を考える。ここに、 $H(\cdot)$ はHeaviside関数である。 $0 \leq x_1, x_2 \leq 1$ 内の 101×101 点の等間隔な格子点において f の値をサンプリングし、これを以下の意味で近似するBスプライン曲面を生成する:

- (16)、(17)を用いて(15)を最小化する提案法(Proposed approximation)
- (16)、(17)において X および Y を恒等的に零とした上で(15)を最小化(Regularised L_2 least-square approximation)
- 全てのサンプル点に対して(16)、(17)の上式で定義される X および Y を用いて(15)を最小化(H_1 least-square approximation)
- (15)において $c_{ij} = d_{ij} = 0$ としたものを最小化(L_2 least-square approximation)

また、比較のため

- 先行研究⁽⁷⁾で用いていた方法。すなわち、Greville点でサンプリングした f を補間する方法(Interpolation)

によるBスプライン曲面も生成する。Bスプライン曲面を構成する基底関数の数は x_1, x_2 方向それぞれに51個とし、その次数は2とした。また、 c_{ij}, d_{ij} はサンプル点 $\tilde{\mathbf{x}}_{ij}$ の属するノット区間の幅 Δ を用いて $1/(10\Delta^2)$ と設定した。

Fig. 1に、上記(a)–(e)により得られた近似曲面を「正解」(f)と併せて示す。従来用いていた補間の場合(e)には、Gibbs現象が顕著に現れており、不連続点(左下の円周と $1/2 < x_1 < 1, x_2 = 1/2$)の周辺において曲面が振動している様子が観察される。補間のかわりに近似を用いる(a)–(d)においてそのような現象は抑制されているものの、特に(c)と(d)においては依然として不連続点の周辺で曲面の振動が認められる。一方で、不連続点付近における近似曲面の勾配を零に近づける提案法(a)および(b)は精度良くもとの曲面を復元できているように見える。(a)と(b)の差異は図からはほとんど判別できないが、10201個のサンプル点における正解と近似曲面の絶対誤差の平均 ε_{ave} は(a)の場合に 1.166×10^{-2} 、(b)の場合に 1.198×10^{-2} であり、(a)の方が若干精度が良いことが確認できた。なお、(c)、(d)、(e)の場合には、それぞれ $\varepsilon_{ave} = 1.181 \times 10^{-2}$ 、 1.274×10^{-2} 、 1.250×10^{-2} であった。

4.2. 光学迷彩構造のトポロジー最適化

つぎに、提案法によるトポロジー導関数の近似Bスプライン曲面を用いたトポロジー最適化の実行例を示す。ここで

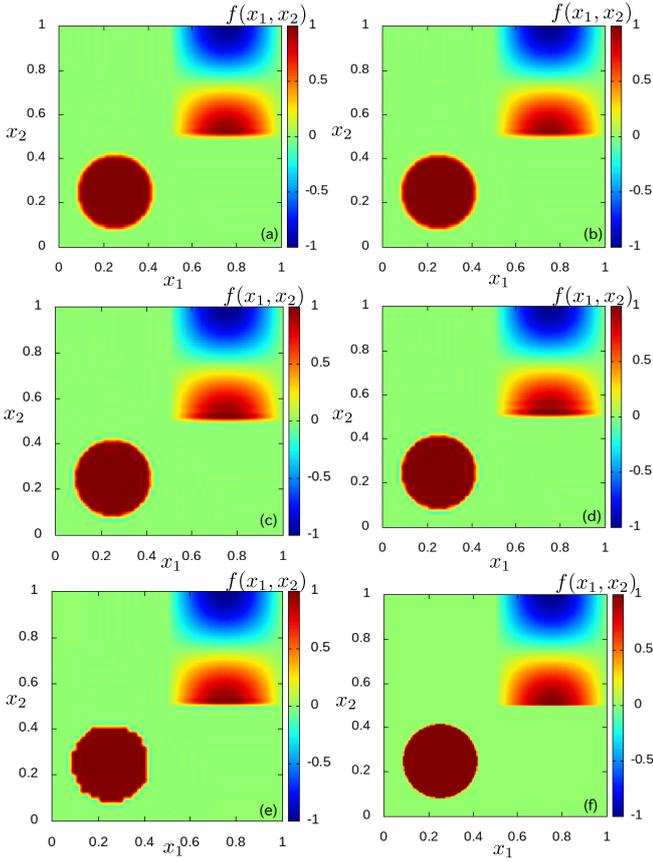


Fig. 1 B-spline surfaces approximating the surface defined by (19) (plotted in (f)) by various approximation and interpolation schemes. See the main text for the detailed algorithms to generate (a)–(e).

は、光学迷彩装置のトポロジー最適化を例題として取り上げ、先行研究⁽⁸⁾と同じ最適化問題を解いた。すなわち、設計領域を $D = [-30, 30]^2$ とし、 x_1 軸正の方向に伝播する角周波数 $\omega = 0.5$ の平面波に対して、散乱断面積 $\sigma^{(15)}$ と原点を中心とした半径 7 の円内における電磁場の強度を最小化する誘電体分布を探索した。すなわち、目的関数 J を以下のように定義した。

$$J = c_1 \sigma + \frac{c_2}{M} \sum_{m=1}^M |u(\mathbf{x}_m^{\text{obs}})|^2 \quad (20)$$

ここに、 $c_1 = 0.1$ 、 $c_2 = 1.0$ は重み定数、 $\mathbf{x}_m^{\text{obs}}$ ($m = 1, \dots, M$) は電磁場を最小化する円内に M 個配置した観測点の座標を表す。(20) の右辺第一項により不可視化対象および光学迷彩装置による散乱場強度を遠方において最小化する。また、第二項により、与えた円内部の全電磁場を最小化し、そのような領域に配置した任意形状の任意材料を不可視化することができる⁽¹⁶⁾。初期形状としては、 $(x_1, x_2) = (-15, 15)$ 、 $(15, 15)$ 、 $(-15, -15)$ 、 $(15, -15)$ を中心とする半径 8.0 の円形誘電体を 4 つ与えた。材料定数は $\epsilon_1 = 1.0$ 、 $\epsilon_2 = 2.0$ とした。

トポロジー導関数をサンプリングする点として、設計領域内に 101×101 点の格子点を配置し、B スプライン基底関数の数 n_{cp} を $n_{\text{cp}} = 21 \times 21$ 、 31×31 、 41×41 、 51×51 の 4 種類設定して数値計算を実行した。最適化の収束判定の条件は、先行研究⁽⁷⁾と同様に、直線探索によって定まる形状更新のステップ幅 κ (その定義は原著⁽⁷⁾を参照されたい) が 5×10^{-4} を下回ることにした。また、目的関数およびサンプル点におけるトポロジー導関数の計算には境界要素法を用いた。境界要素は、サンプル点におけるレベルセット関数の値をもとにすべての最適化ステップにおいて再生成した⁽¹⁷⁾。

Fig. 2 に得られた最適形状を示す。 n_{cp} が大きくなるにつれて複雑な形状が得られていることが分かる。実際、 Ω_2 の周長と面積の比は、1.190 ($n_{\text{cp}} = 21 \times 21$ のとき)、1.353 ($n_{\text{cp}} = 31 \times 31$ のとき)、1.623 ($n_{\text{cp}} = 41 \times 41$ のとき)、1.970 ($n_{\text{cp}} = 51 \times 51$ のとき) であった。一方で、大まかな形状はいずれの場合にも似たものが得られていることも見てとれる。ユーザは、製造性を鑑み、得られた構造のいずれかを選択して利用することができる。

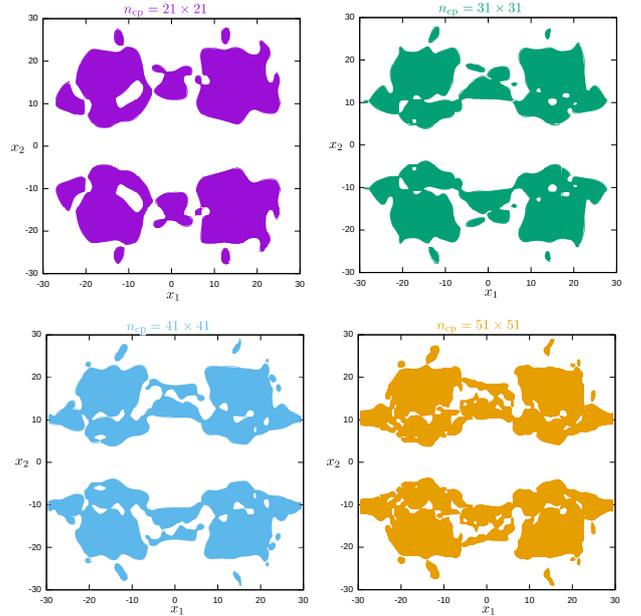


Fig. 2 Optimised cloaking devices for $n_{\text{cp}} = 21 \times 21$, 31×31 , 41×41 , 51×51 . The coloured area indicates Ω_2 in which dielectric ($w/\epsilon = 2.0$) is allocated. As n_{cp} increases, geometrically complicated configuration is obtained.

さらに、最適化の過程における目的関数の推移を Fig. 3 に、最適形状周辺の磁場 (実部) を Fig. 4 に示す。 n_{cp} が大きいほど目的関数の値は小さくなり、クロッキングデバイスとして優れたものが得られていることが分かる。また、先行研究⁽⁸⁾で得られた構造のうち、得られた散乱断面積の最小値は 0.3064 であったが、 $n_{\text{cp}} = 51 \times 51$ の場合にはこれを 0.05701 まで減少させることができた。従来法を用いた場合

よりも性能の良い構造を得ることができたと言える。

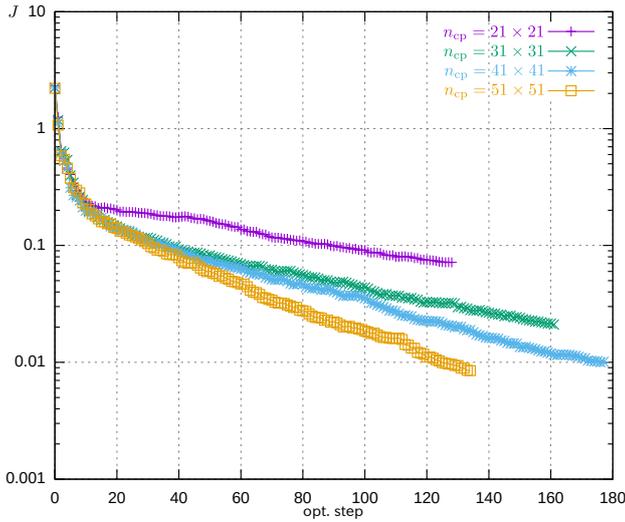


Fig. 3 History of the objective function.

5. おわりに

本論文では、Bスプライン曲面のレベルセットを用いたトポロジー最適化⁽⁷⁾において、トポロジー導関数をBスプラインで近似する際にその勾配の情報を用いる方法、そのような曲面で表現したトポロジー導関数を用いたトポロジー最適化を提案した。開発した手法を用いると、波動問題に関連するトポロジー最適化の中でも比較的難しい問題であると考えられる光学迷彩装置の最適設計を、得られる設計案の幾何学的複雑さを制御しながら実行できることを示した。また、目的関数の値をより小さくできるという意味で、従来法を改良できたと言える。今後の課題としては、3次元問題に対する提案法の実装を行うこと、局所的に形状の複雑さを制御可能な手法を開発することなどが挙げられる。

参考文献

- (1) M. P. Bendsøe and N. Kikuchi. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 71, No. 2, pp. 197–224, 1988.
- (2) T. Yamada, K. Izui, S. Nishiwaki, and A. Takezawa. A topology optimization method based on the level set method incorporating a fictitious interface energy. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 199, No. 45, pp. 2876–2891, 2010.
- (3) M. P. Bendsøe and O. Sigmund. Material interpolation schemes in topology optimization. *Archive of applied mechanics*, Vol. 69, No. 9, pp. 635–654, 1999.
- (4) M. Y. Wang, X. Wang, and D. Guo. A level set method for structural topology optimization. *Computer methods*

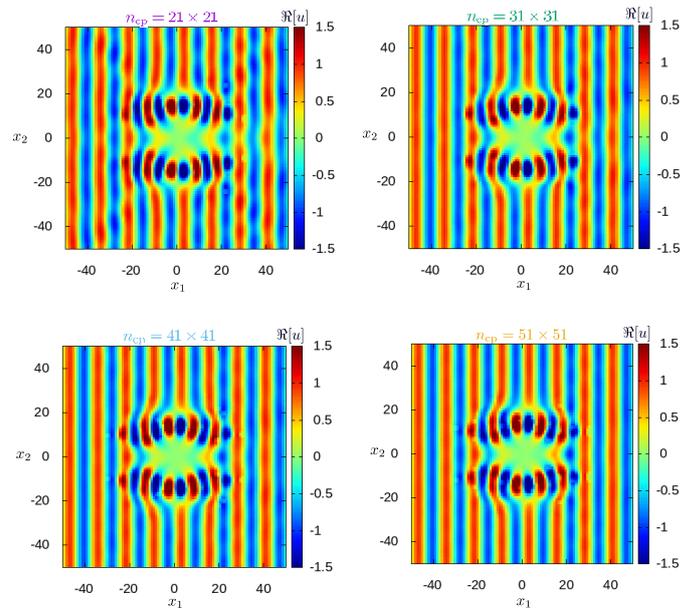


Fig. 4 The magnetic intensities around the design domain. The optimised structure with large n_{cp} can reduce the scattering more effectively.

in applied mechanics and engineering, Vol. 192, No. 1, pp. 227–246, 2003.

- (5) G. Allaire, F. Jouve, and A. M. Toader. Structural optimization using sensitivity analysis and a level-set method. *Journal of computational physics*, Vol. 194, No. 1, pp. 363–393, 2004.
- (6) S. Amstutz and H. André. A new algorithm for topology optimization using a level-set method. *Journal of Computational Physics*, Vol. 216, No. 2, pp. 573–588, 2006.
- (7) 飯盛浩司, 高橋徹, 松本敏郎. Bスプライン曲面のレベルセットを用いたトポロジー最適化. 計算数理工学論文集, Vol. 17, pp. 125–130, 2017.
- (8) 山本遼, 飯盛浩司, 高橋徹, 松本敏郎. 散乱断面積最小化によるクロッキングデバイスのトポロジー最適設計. 計算数理工学論文集, Vol. 19, pp. 67–72, 2019.
- (9) K. Matsushima, H. Isakari, T. Takahashi, and T. Matsumoto. A topology optimisation of composite elastic metamaterial slabs based on the manipulation of far-field behaviours. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 63, No. 1, pp. 231–243, 2021.
- (10) J. Qin, H. Isakari, K. Taji, T. Takahashi, and T. Matsumoto. A robust topology optimization for enlarging working bandwidth of acoustic devices. *Internation-*

- tional Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 122, No. 11, pp. 2694–2711, 2021.
- (11) A. Sokolowski, J. and Zochowski. On the topological derivative in shape optimization. *SIAM journal on control and optimization*, Vol. 37, No. 4, pp. 1251–1272, 1999.
- (12) T. J. R. Hughes, J. A. Cottrell, and Y. Bazilevs. Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, Vol. 194, No. 39-41, pp. 4135–4195, 2005.
- (13) L. Piegl and W. Tiller. *The NURBS book*. Springer Science & Business Media, 1996.
- (14) S. Amstutz. Analysis of a level set method for topology optimization. *Optimization Methods and Software*, Vol. 26, No. 4-5, pp. 555–573, 2011.
- (15) H. Ammari, B. Fitzpatrick, H. Kang, M. Ruiz, S. Yu, and H. Zhang. *Mathematical and computational methods in photonics and phononics*, Vol. 235. American Mathematical Soc., 2018.
- (16) K. Nakamoto, H. Isakari, T. Takahashi, and T. Matsumoto. A fast topology optimisation for material- and geometry-independent cloaking devices with the BEM and the \mathcal{H} -matrix method. *arXiv preprint arXiv:1611.08072*, 2016.
- (17) H. Isakari, K. Nakamoto, T. Kitabayashi, T. Takahashi, and T. Matsumoto. A multi-objective topology optimization for 2D electro-magnetic wave problems with the level set method and BEM. *European Journal of Computational Mechanics*, Vol. 25, No. 1-2, pp. 165–193, 2016.