

熱伝導問題を対象とした拡張レベルセット法に基づく 複数材料トポロジー最適化

MULTI-MATERIAL TOPOLOGY OPTIMIZATION FOR A HEAT CONDUCTION PROBLEM BASED ON AN EXTENDED LEVEL SET METHOD

野田 雅貴¹⁾, 野口 悠暉²⁾, 山田 崇恭³⁾

Masaki NODA, Yuki NOGUCHI and Takayuki YAMADA

- 1) 東京大学大学院工学系研究科 (〒 113-8656 文京区弥生 2-11-16, E-mail: noda-masaki442@g.ecc.u-tokyo.ac.jp)
 2) 東京大学大学院工学系研究科 (〒 113-8656 文京区弥生 2-11-16, E-mail: noguchi@mech.t.u-tokyo.ac.jp)
 3) 東京大学大学院工学系研究科 (〒 113-8656 文京区弥生 2-11-16, E-mail: t.yamada@mech.t.u-tokyo.ac.jp)

This paper proposes a topology optimization method for multi-material structures targeting a heat conduction problem. We first introduce the concept of an extended level set method with a matrix-valued level set function. Next, the maximization of thermal diffusion problem is formulated within the framework of the extended level set method. We add some notes on the numerical implementation including the updating scheme of the level set function based on the distribution of the topological derivative. Several numerical examples are provided to demonstrate the validity of the proposed method and the effectiveness of the extended level set method in heat conduction problems.

Key Words: Extended Level Set Method, Multi-material, Topology Optimization, Heat Conduction

1. はじめに

機械製品の更なる性能向上や新機能創出のために、複数の材料を用いて機械構造を設計する、複数材料設計法が注目されている。複数の材料の特性を最大限発揮するためには、各材料を適材適所に配置する必要があり、複数材料トポロジー最適化手法が研究されている。

トポロジー最適化手法の中でもレベルセット法に基づく方法は、明瞭な境界を持つ構造を最適解として得られる利点があり、レベルセット法に基づく複数材料トポロジー最適化手法がいくつか提案されている^(1, 2, 3, 4, 5)。Piecewise Constant Level Set 法⁽²⁾は単一のレベルセット関数の整数値と各材料を対応づける手法である。他の手法と比較して設計変数が少なく、計算コストを抑えられる利点を持つが、多数の材料が存在する場合には各材料間でのトポロジーの変化が限定されるという欠点がある。Color Level Set 法⁽¹⁾および Multi-Material Level Set 法⁽³⁾は複数のレベルセット関数の正負の組み合わせによりそれぞれの材料領域を表現する手法である。Piecewise Level Set 法に比較して材料変更の自

由度は高いが、全ての材料間でトポロジーの変化を考慮できるような設計感度を導出することは難しい。Vector Valued Level Set 法⁽⁴⁾は M 材料の構造を表現するために $M-1$ 次元ベクトル値関数であるレベルセット関数を用いる。レベルセット関数によって張られるベクトル空間を対称的な領域に分割し、各分割領域を最適化で用いる材料と対応づけることで、複数材料の表現を行う。前述の手法とは異なり、この手法では全ての材料間でトポロジーの変化を考慮しつつ設計変数の更新ができる利点を持つものの、材料間の界面はレベルセット関数の零等位面としては直接的に示されないため、材料間の界面の特性を個別に制御することは困難であるなどの課題がある。

Level Set 法を複数材料表現へ一般的に拡張した手法である、eXtended Level Set (拡張レベルセット, 以下 X-LS) 法による材料表現に基づくトポロジー最適化手法⁽⁵⁾は、最適化に用いる材料から 2 材料を選ぶ全ての組み合わせに対してそれぞれレベルセット関数を考え、その零等位面と 2 材料の界面を対応づける。この定義では、各材料を同等に扱うことができ、初期構造依存性が低い点に加えて、レベルセット関

数の各成分に対して正則化が可能であるため、材料界面の複雑度を材料の組み合わせ毎に制御できるという利点がある。さらに先行研究⁽⁵⁾では、X-LS法のレベルセット関数のプロフィールに制約を設けることで前述の手法^(1, 2, 3, 4)で用いる材料表現が得られることが示されており、X-LS法は他のレベルセット法に基づく複数材料トポロジー最適化手法の概念を含んだ汎用性の高い手法であることが示唆される。他方、先行研究⁽⁵⁾では、構造問題を対象にX-LS法に基づく複数材料トポロジー最適化手法が提案されているのみで、複数材料による構造設計が期待される他の物理場への拡張はなされていない。そこで本研究では、機械構造物における熱による材料の劣化、変形を避けるための放熱性能や、熱機関における熱変換効率を高めるために重要な、熱伝導問題を対象として、X-LS法に基づく複数材料トポロジー最適化手法を構築し、手法の有効性を検証する。まず、行列値を持つレベルセット関数を用いたX-LS法の概念について述べる。次に、X-LS法の枠組みの中で、熱拡散最大化問題を定式化する。さらに、トポロジー導関数の分布に基づいてレベルセット関数を更新する方法など、数値的な実装方法についても説明する。最後に、いくつかの数値例を示し、提案手法の妥当性とX-LS法の有効性を示す。

2. X-LS法に基づく構造表現

ここでは、X-LS法に基づく構造表現の定式化について述べる。初めに、従来のレベルセット法では、設計領域 $D \subset \mathbf{R}^d$ (d は扱う問題の次元)において定義される実数値関数であるレベルセット関数 $\phi(\mathbf{x})$ ($\mathbf{x} \in D$)を用いて、2材料(材料0,1)からなる構造を以下のように表現する。

$$\begin{cases} \phi(\mathbf{x}) > 0 & \text{if } \mathbf{x} \in \Omega_1 \\ \phi(\mathbf{x}) = 0 & \text{if } \mathbf{x} \in \Gamma_{01} \\ \phi(\mathbf{x}) < 0 & \text{if } \mathbf{x} \in \Omega_0 \end{cases} \quad (1)$$

ここで、 Ω_0, Ω_1 はそれぞれ材料0,1が占める領域であり、 Γ_{01} はそれらの境界である。

X-LS法では、レベルセット法における材料表現において2材料の境界がレベルセット関数の零等位面 $\phi = 0$ によって示される点に着目し、レベルセット法を複数材料表現へ拡張する。すなわち、 $M (\geq 2)$ 種類の材料のうち各2材料 $i, j \in \{0, 1, \dots, M-1\}$ ($j \neq i$)の組み合わせごとに、対応するレベルセット関数 ϕ_{ij} を設計領域 D において定義し、零等位面 $\phi_{ij} = 0$ を以下のように対応づける。

$$\begin{cases} \phi_{ij}(\mathbf{x}) > 0 & \text{if } \mathbf{x} \in \Omega_i \\ \phi_{ij}(\mathbf{x}) = 0 & \text{if } \mathbf{x} \in \Gamma_{ij} \\ \phi_{ij}(\mathbf{x}) < 0 & \text{if } \mathbf{x} \in \Omega_j \end{cases} \quad (2)$$

ここで、 Ω_i, Ω_j はそれぞれ材料 i, j が占める領域であり、 Γ_{ij} はそれらの境界である。

レベルセット関数 ϕ_{ij} を i, j 成分にもつ行列値関数 Φ をX-LS関数と定義する。なお、 $\phi_{ii} = 0$ とする。式(2)の対称

性から、X-LS関数は以下の等式を満たすものと仮定する。

$$\phi_{ij} = -\phi_{ji} \quad (3)$$

式(2)の拡張レベルセット関数の定義に基づき、複数材料からなる構造を表現することを考える。まず、領域 Ω_m に対する特性関数 ψ_m を以下のように定義する。

$$\psi_m(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \mathbf{x} \in \Omega_m \\ 0 & \mathbf{x} \notin \Omega_m \end{cases} \quad (4)$$

X-LS法では、X-LS関数 Φ を用いて特性関数 ψ_m を以下のように表現する。

$$\psi_m(\Phi) = \prod_{k \neq m} H(\phi_{mk}) \quad (5)$$

$$\sum_m \psi_m = 1 \quad (6)$$

ただし、 $H(s)$ は以下のように定義されるヘビサイド関数である。

$$H(s) = \begin{cases} 1 & s \geq 0 \\ 0 & s < 0 \end{cases} \quad (7)$$

なお、式(6)はX-LS関数に対する制約である。特性関数の定義式(2)より、点 \mathbf{x} において、2つ以上の材料が割り当てられていれば、それらの特性関数がそれぞれ1となり、その総和は2以上である。いずれの材料も割り当てられていなければ、全ての材料の特性関数は0となり、それらの総和は0である。一方、一つの材料だけが割り当てられていれば、その材料の特性関数は1、その他の材料の特性関数は0となるため、総和は1である。従って、式(6)の制約が満たされていれば、各点 \mathbf{x} においていずれかただ一つの材料が割り当てられる。

3. 最適化問題の定式化

本研究では、代表的な熱伝導問題として内部発熱のある系における熱拡散最大化問題を取り扱う。すなわち、状態場として温度場 u を考える。各材料 m の熱伝導係数 κ_m は温度に依存せず、等方的であるものとし、各2材料 i, j である領域の境界 Γ_{ij} で温度、及び熱流束は連続とする。設計領域における内部発熱 Q は一様であるものとし、断熱境界 Γ_n と温度を0に規定する境界 Γ_d を与える。設計領域内での平均温度を目的関数 F として設定し、各材料に対して上限を \bar{V}_m とする体積制約 G_m を与えた上で、 F を最小化することを考える。

X-LS法による構造表現を用いれば、複数材料トポロジー最適化問題は以下のように定式化される。

$$\begin{aligned}
\inf_{\Phi} \quad & F = \frac{\int_D u d\Omega}{\int_D u^* d\Omega} \\
\text{s.t.} \quad & -\nabla \cdot (\kappa_m \nabla u) = Q & \mathbf{x} \in \Omega_m \\
& u_i = u_j & \mathbf{x} \in \Gamma_{ij} \\
& \kappa_i \nabla u_i \cdot \mathbf{n}_{ij} = \kappa_j \nabla u_j \cdot \mathbf{n}_{ij} & \mathbf{x} \in \Gamma_{ij} \\
& \nabla u \cdot \mathbf{n}_D = 0 & \mathbf{x} \in \Gamma_n \\
& u = 0 & \mathbf{x} \in \Gamma_d \\
& G_m \equiv \frac{\int_D \psi_m d\Omega}{\int_D d\Omega} - \bar{V}_m \\
& \leq 0 \\
& \sum_m \psi_m = 1 & \text{in } D \\
& \psi_i = 1 & \text{in } \Gamma_i \cup \Omega_i^*
\end{aligned} \tag{8}$$

ここで u^* は目的関数を規格化するための基準となる温度場を表す。 u_i, u_j は材料 i, j 内における温度場である。 \mathbf{n}_{ij} は材料 i, j である 2 領域間の境界 Γ_{ij} の法線ベクトル、 \mathbf{n}_D は設計領域 D の境界の法線ベクトルである。 Γ_i, Ω_i^* はそれぞれ、材料 i が割り当てられることを事前に指定されている材料規定境界、および材料規定領域である。

4. 数値実装法

式 (8) の最適化問題の解を直接的に求めることは非常に困難であるため、本研究では勾配法的に求める。すなわち、適当な X-LS 関数の初期値を与え、徐々に目的関数が減少し、かつ制約条件が満たされるように X-LS 関数を更新することで最適解を得る。以下に概要を記す。なお詳細については文献 (5) を参照されたい。

4.1. X-LS 関数の更新

X-LS 関数の更新は、Yamada らの手法 (6) に倣い、以下の偏微分方程式を有限要素法を用いて繰り返し解くことにより行う。

$$\begin{aligned}
\phi_{ij} - \tau_{ij} L^2 \nabla^2 \phi_{ij} &= \phi_{ij}^{\text{old}} \\
&+ C_{ij} \frac{\overline{\mathcal{D}_{ij} F} + \sum_m \lambda_m \mathcal{D}_{ij} G_m}{\int_D |\overline{\mathcal{D}_{ij} F} + \sum_m \lambda_m \mathcal{D}_{ij} G_m| d\Omega} \\
&\quad \text{in } D \\
\phi_{ij} &= 1 & \text{on } \Gamma_i \cup \Omega_i^* \\
\phi_{ij} &= -1 & \text{on } \Gamma_j \cup \Omega_j^* \\
\mathbf{n}_D \cdot \nabla \phi_{ij} &= 0 & \text{on } \partial D \setminus (\Gamma_i \cup \Gamma_j)
\end{aligned} \tag{9}$$

ここで ϕ_{ij}^{old} は更新前の X-LS 関数である。 $\overline{\mathcal{D}_{ij} F}$ は 4.2 節に述べる平均化された拡張トポロジー導関数である。 C_{ij} は X-LS 関数の更新幅を制御する係数である。 λ_m は材料 m の体積制約に対する制御係数であり、体積制約関数の拡張トポロジー導関数 $\mathcal{D}_{ij} G_m$ を制御することで、制約が満たされるように働くものである。左辺第 2 項は正則化項であり、レベルセット関数を拡散させ、平滑化するように働く。これにより、極度に複雑な構造が得られないように最適化を進めることが可能になる。 L は設計領域の代表長さである。 τ_{ij} は正則化の度合いを決める正則化係数であり、この係数を調整す

ることによって、得られる最適構造における、材料境界 Γ_{ij} の幾何学的複雑さを制御することが可能となる。式 (2) の対称性を満たすため、 $\tau_{ij} = \tau_{ji}$ とする。材料規定境界 Γ_m 及び材料規定領域 Ω_m^* では、規定された材料が割り当てられるようにレベルセット関数を 1 または -1 に固定する。設計領域 D の境界で材料規定境界に含まれない場所では、設計領域外部からの影響を排除するためノイマン条件を設定する。なお、トポロジーの変化を阻害させないために、上記の方程式を解いてレベルセット関数の絶対値が 1 を上回った部分については、絶対値が 1 となるように修正を加える。

$$\phi_{ij} \leftarrow \max\{-1, \min\{1, \phi_{ij}\}\} \tag{10}$$

4.2. 感度解析

本研究では、設計感度として以下のように定義される拡張トポロジー導関数 $\mathcal{D}_{ij} F$ を用いる。

$$\mathcal{D}_{ij} F = D_{ij}^T F \times \psi_i - D_{ji}^T F \times \psi_j \tag{11}$$

ここで、 $D_{ij}^T F$ は材料 i である領域中に微小な半径を持つ材料 j である領域が生じたときの目的関数の変化率を示す、2 材料の問題設定におけるトポロジー導関数であり、目的関数が規格化されない $\int_D Q u d\Omega$ であれば、熱拡散最大化問題においては以下のように表される (7)。

$$D_{ij}^T \left(F \int_D Q u^* d\Omega \right) = \frac{2\kappa_i (\kappa_j - \kappa_i)}{\kappa_j + \kappa_i} \nabla u \cdot \nabla u \tag{12}$$

本研究では、目的関数は $\int_D Q u^* d\Omega$ により規格化されているため、2 材料の問題設定におけるトポロジー導関数は以下のように表される。

$$D_{ij}^T F = \left(\int_D Q u^* d\Omega \right)^{-1} \frac{2\kappa_i (\kappa_j - \kappa_i)}{\kappa_j + \kappa_i} \nabla u \cdot \nabla u \tag{13}$$

また、体積制約に関する 2 材料の場合のトポロジー導関数は以下のように表される。

$$D_{ij}^T G_m = \begin{cases} 1 & (j = m) \\ -1 & (i = m) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \tag{14}$$

4.3. トポロジー導関数の平均化

最適化計算の安定化のために、目的関数のトポロジー導関数を以下のように平均化する (5)。

$$\overline{\mathcal{D}_{ij} F} = (1 - K_T) \overline{\mathcal{D}_{ij} F}^{\text{old}} + K_T \mathcal{D}_{ij} F \tag{15}$$

ここで $\overline{\mathcal{D}_{ij} F}^{\text{old}}$ は最適化計算の 1 ステップ前における平均化されたトポロジー導関数 $\overline{\mathcal{D}_{ij} F}$ の値であり、0 ステップ目では 0 とした。 K_T は最適化計算の安定性と収束性に寄与する時定数であり、これが小さいほど安定性が向上するが、収束は遅くなりやすい。収束計算の安定化のためには、式 (4.1) においてレベルセット関数の更新幅に寄与する τ_{ij}, C_{ij} を小さくするという手法がより一般的だが、感度を平均化する手

法は比較的安定化しやすいため、本研究ではこちらの手法を用いた。

4.4. 制御係数の更新

制御係数 λ_m は体積制約関数 G_m を用いて以下のように計算する。

$$I_m = \max\{0, I_m^{\text{old}} + (G_m + (G_m - G_m^{\text{old}}))\} \quad (16)$$

$$\lambda_m = K_m^P \left(\max\{0, G_m\} + (G_m - G_m^{\text{old}}) \right) + K_m^I I_m \quad (17)$$

ここで、 $I_m^{\text{old}}, G_m^{\text{old}}$ は最適化計算の 1 ステップ前における I_m, G_m の値である。0 ステップ目においては、 $I_m^{\text{old}} = 0, G_m^{\text{old}} = 0$ とする。 K_m^P, K_m^I は制御ゲインである。

4.5. レベルセット関数の近似による材料の割り当て

式 (6) が満たされない場合、 M 種類のどの材料にも割り当てられない領域が生じることになる。本来は式 (6) の条件をレベルセット関数に対する制約として扱う必要があるが、本研究では簡易的に、条件を満たす以下のような近似されたレベルセット関数 $\tilde{\phi}_{ij}$ を用いる。

$$\hat{\psi}_m = \prod_{k \neq m} \frac{1 + \phi_{mk}(\mathbf{x})}{2} \quad (18)$$

$$\tilde{\phi}_{ij} = \hat{\psi}_i - \hat{\psi}_j \quad (19)$$

なお、このような近似を用いても、例として $\phi_{AB} = 1, \phi_{BC} = 1, \phi_{CA} = 1$ となるような領域では、 $\tilde{\phi}_{AB} = 0, \tilde{\phi}_{BC} = 0, \tilde{\phi}_{CA} = 0$ となってしまう、いずれの材料の領域にも属さない領域となる。(式 (2) の定義では、各材料の“境界である領域”，ということになる。) 本研究では、最適化過程においてこの領域が生じた場合には、3 材料の中間の材料定数を持つ領域として扱うことにより計算を続行する。対象とする問題設定によっては、この中間領域が設計領域の大部分を占めるような結果となり、最適化計算が適切に行われず、工学的に有用な解が得られないなどの問題が生じることが考えられる。そのような場合には式 (6) の条件を制約として考慮しつつ、最適化を行う必要がある。

4.6. 特性関数の近似

有限要素を再生成する手間を省略するため、本研究では Ersatz material approach に基づき熱伝導係数の空間分布を表現することにより、複数材料から成る最適構造を表現する。まず、式 (5) の特性関数 ψ_m を次のように $\tilde{\psi}_m$ に近似する。

$$\tilde{\psi}_m(\mathbf{x}) = \frac{\prod_{k \neq m} \tilde{H}(\tilde{\phi}_{mk}(\mathbf{x}))}{\sum_l \prod_{k \neq l} \tilde{H}(\tilde{\phi}_{lk}(\mathbf{x}))} \quad (20)$$

ここで \tilde{H} は以下に定義される近似ヘビサイド関数である。

$$\tilde{H}(s) \equiv \begin{cases} 0 & (s < -h) \\ \frac{1}{2} + \frac{s}{h} \left[\frac{15}{16} - \frac{s^2}{h^2} \left(\frac{5}{8} - \frac{3}{16} \frac{s^2}{h^2} \right) \right] & (-h \leq s \leq h) \\ 1 & (s > h) \end{cases} \quad (21)$$

ただし h ($0 < h < 1$) は材料定数の遷移幅を制御する定数である。

この近似された特性関数 $\tilde{\psi}_m$ を用いて、複数材料を考慮した熱伝導係数 $\kappa'(\mathbf{x})$ は以下のように表現される。

$$\kappa'(\mathbf{x}) = \sum_m \kappa_m \tilde{\psi}_m(\mathbf{x}) \quad (22)$$

5. 数値解析例

ここでは提案手法の妥当性を検証するため、数値解析例を示す。図 1 に問題設定を示す。赤色の領域は設計領域 D であり、一様な内部発熱 $Q = 1$ を与える。青色で示した境界 Γ_d では温度を $u = 0$ と規定し、灰色で示した境界 Γ_n には断熱条件 $\nabla u \cdot \mathbf{n}_D = 0$ を課す。設計領域 D は一辺の長さが 1 の正方形とした。温度規定境界 Γ_d は長さを 0.2 とし、設計領域の下辺中央に配置した。以下に示す数値例の全てにおいて、

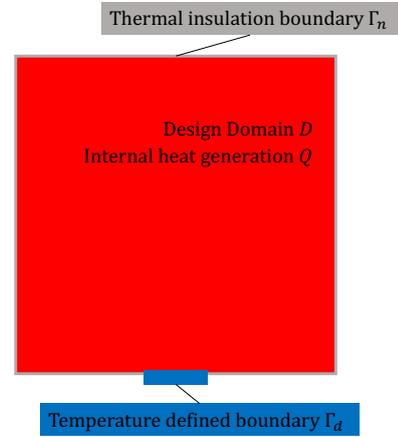
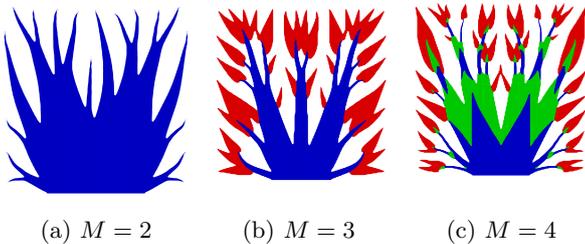


Fig. 1: Design domain and problem settings

解析領域を 8 万個の三角形要素によって分割しており、代表長さは $L = 1$ とした。用いる材料は材料 0,1,2,3 の順にプラスチック、銅、銅、アルミを仮定し、それぞれ熱伝導率を 4.0, 372, 40, 204 [W/mK] とした。以下に示す最適構造を表す図では、それぞれ白、青、赤、緑色の領域に対応する。なお、熱伝導率の比が大きい場合には、最適化計算が不安定になるため、プラスチックの熱伝導率を実際の値よりも大きく設定している。X-LS 法において最適化の対象とする材料の種類を $M = 2, 3, 4$ とし、それぞれの条件で最適化計算を行った。このとき用いる材料は、 $M = 2$ の場合はプラスチックと銅とし、 $M = 3$ の場合はそれに銅を加え、 $M = 4$ の場合はさらにアルミを加えた。各材料領域に対して与える体積制約については、プラスチックに対しては導入せず、その他の材料については、設計領域の 50% を $M - 1$ で割った値をそれぞれの上限值 \bar{V}_m とした。レベルセット関数の初期値は $\phi_{ij} = 0$ とした。いずれの材料 $m \in \{0, 1, 2, 3\}$ に対しても、材料規定境界 Γ_m 及び材料規定領域 Ω_m^* は設定しない。目的関数を規格化するための温度場 u^* はそれぞれの初期構造における温度場とした。X-LS 関数の更新幅を制御する係数は $C_{ij} = 1$ とした。制御ゲインの値はそれぞれ $K_m^P = 0.2, K_m^I = 0.2$ とした。トポロジー導関数の平均化における時定数は $K_T = 0.05$

とした．材料定数の遷移幅を制御する定数の値は $h = 0.2$ とした．

初めに，正則化係数を $\tau_{ij} = 4.0 \times 10^{-6}$ と固定したとき，最適化計算に用いる材料の種類を $M = 2, 3, 4$ とした場合について最適化結果を示す．それぞれの条件について，十分な回数の最適化ステップの後，体積制約関数は 0.1%未満となること，規格化された目的関数の 1 ステップでの変化量は 0.1%未満となることを確認し，最適化結果とした．得られた最適構造を図 2 に示す．また， $M = 3$ の最適構造における温度場の分布を図 3 に示す．また，図 4 に材料の数が $M = 4$ である条件における収束履歴を示す．



(a) $M = 2$ (b) $M = 3$ (c) $M = 4$
 Fig. 2: Optimized configurations for different numbers of materials when regularization parameter $\tau_{ij} = 4.0 \times 10^{-6}$

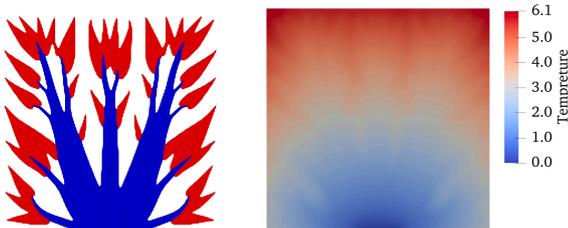


Fig. 3: Optimized configuration for $M = 3$ (left) and the temperature field for the optimized configuration (right)

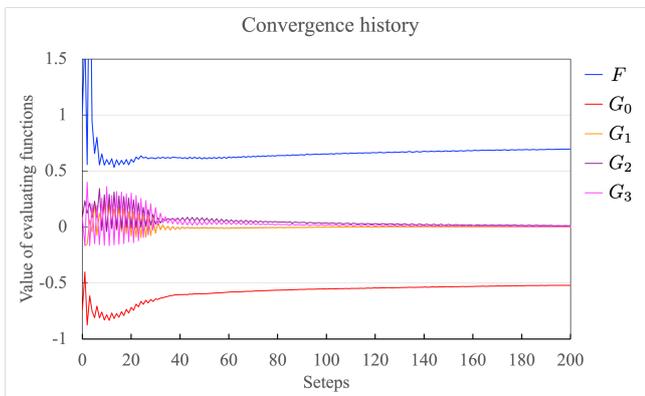
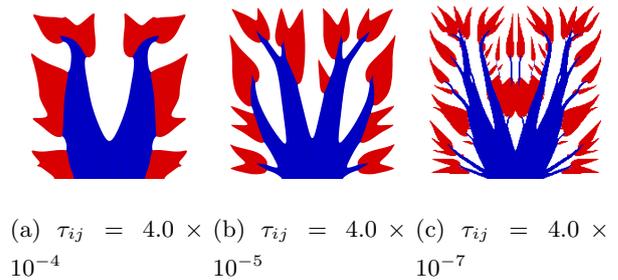


Fig. 4: Convergence history of objective function F and constraint functions for volume constraints G_m for $M = 4$

図 4 から，200 ステップにおいて目的関数値および制約関

数値の 1 ステップごとの変動はそれぞれおおよそ 0.01 を下回っており，ほぼ収束している． $M = 2, 3, 4$ の時の目的関数はそれぞれ 0.610, 0.653, 0.719 となった．それぞれの最適化結果において，各材料の体積はそれぞれの上限值となった．得られた構造は，枝分かれした構造が設計領域全体を覆うように分布して局所的に高温になるような領域をなくすように配置されている点，枝状の構造はそれぞれ直線的に温度規定境界から伸びている点，熱流束の集中する温度規定境界に近づくにつれ金属部材が太くなっている点，図 2(b),(c) では温度規定境界に近い部分に比較的熱伝導率の高い銅（青色領域）やアルミ（緑色領域）が配置され，それらの先端に熱伝導率の低い鋼（赤色領域）が集中している点から，物理的に妥当な構造であると言える．また最適構造の材料分布は全体に滑らかであり，チェッカーボードのような構造は見られず，それぞれの領域の界面においても，メッシュ粗さ程度の凹凸は見られるものの，微細な棘状の構造等は見られず，正則化が適切に行われたことがわかる．

次に，用いる材料の数を $M = 3$ に固定し，正則化係数 τ_{ij} を $\tau_{ij} = 4.0 \times 10^{-4}, 4.0 \times 10^{-5}, 4.0 \times 10^{-7}$ と設定した場合について最適化を行なった．最適化結果を図 5 に示す．図 2(b)



(a) $\tau_{ij} = 4.0 \times 10^{-4}$ (b) $\tau_{ij} = 4.0 \times 10^{-5}$ (c) $\tau_{ij} = 4.0 \times 10^{-7}$
 Fig. 5: Optimized configurations for different values of regularization parameters τ_{ij}

及び，図 5 を比較すると，正則化係数 τ_{ij} の値が大きいほど，細かな枝が一つにまとまった構造が得られており， τ_{ij} の設定によって幾何学的複雑さを制御可能であることが示された． $\tau_{ij} = 4.0 \times 10^{-4}, 4.0 \times 10^{-5}, 4.0 \times 10^{-7}$ の時の目的関数はそれぞれ 0.732, 0.666, 0.654 となった．また，図 2(b) に示した $M = 3$ かつ $\tau_{ij} = 4.0 \times 10^{-6}$ の時の目的関数値は 0.653 であった．このことから， τ_{ij} が小さければ幾何学的複雑さが許容され，目的関数値がより良い値を示す傾向が確認できた．なお， $\tau_{ij} = 4.0 \times 10^{-6}$ と $\tau_{ij} = 4.0 \times 10^{-7}$ の 2 条件では目的関数値には大きな違いが無いが，これは $\tau_{ij} = 4.0 \times 10^{-7}$ の場合には構造の細かさに対してメッシュの細かさが十分でなく，解析の精度が得られなかったことなどが原因として考えられる．そこで， $\tau_{ij} = 4.0 \times 10^{-7}$ の場合について，要素数を 4 倍の 32 万個に増やして計算を行った．得られた最適構造を図 6 に示す．この場合には目的関数値は 0.648 となり， $\tau_{ij} = 4.0 \times 10^{-6}$ の時の目的関数値 0.653 より良い目的関数値が得られることが確認できた．

さらに，用いる材料の数を $M = 3$ に固定し，3 つの正則

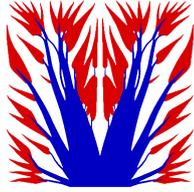


Fig. 6: Optimized configurations with fine mesh, where $M = 3$ and regularization parameters $\tau_{ij} = 4.0 \times 10^{-7}$

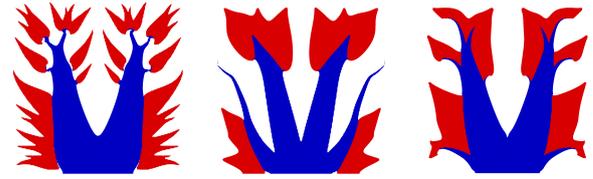
化係数 $\tau_{01} = \tau_{10}, \tau_{12} = \tau_{21}, \tau_{20} = \tau_{02}$ のうち、1つを他の2つの正則化係数と比較して大きく設定した場合と、逆に小さく設定した場合について最適化計算を行った。図7は、一つを大きく $\tau_{ij} = 4.0 \times 10^{-4}$ 、その他を小さく $\tau_{ij} = 4.0 \times 10^{-6}$ 設定した場合の最適構造である。一方、図8は、一つを小さく $\tau_{ij} = 4.0 \times 10^{-6}$ 、その他を大きく $\tau_{ij} = 4.0 \times 10^{-4}$ 設定して最適化を行なった場合の結果である。プラスチックと銅の境界に対する正則化係数が小さい3つの条件については、十分な回数の最適化ステップの後、体積制約関数は0.1%未満となること、規格化された目的関数の1ステップでの変化量は0.1%未満となることを確認し、最適化結果とした。プラスチックと銅の境界に対する正則化係数が大きい残りの3つの条件については、体積制約の収束が悪く、最適化の過程で構造が大きく変化しながら繰り返し同様の構造が現れる傾向にあったため、構造が大きく変化し始める前の構造を結果として示す。なお、構造が大きく変化し始める前においては、体積制約関数 G_m の値は0.1%未満となり、目的関数 F の値の1ステップでの変化量は0.1%程度であった。



(a) $\tau_{02} = 4.0 \times 10^{-4}$ (b) $\tau_{01} = 4.0 \times 10^{-4}$ (c) $\tau_{12} = 4.0 \times 10^{-4}$

Fig. 7: Optimized configurations with one regularization factor set to large $\tau_{ij} = 4.0 \times 10^{-4}$ and the other two to small $\tau_{ij} = 4.0 \times 10^{-6}$

それぞれの最適化結果において、各材料の体積はそれぞれの上限值となった。図7(a),(b),(c)に示した最適構造では、目的関数値はそれぞれ0.668, 0.694, 0.663となった。図8(a),(b),(c)に対しては、目的関数値はそれぞれ0.708, 0.689, 0.711となった。いずれの場合でも目的関数値は、全ての τ_{ij} を大きく ($\tau_{ij} = 4.0 \times 10^{-4}$) 設定した時の目的関数値0.732より小さく、全ての τ_{ij} を小さく ($\tau_{ij} = 4.0 \times 10^{-6}$) 設定した時の目的関数値0.653より大きくなっている。また、図2(b)と図7(c)を比較すると、全体的な構造の複雑さに相違は見られないものの、図7(c)では、赤色で示された銅である領域



(a) $\tau_{02} = 4.0 \times 10^{-6}$ (b) $\tau_{01} = 4.0 \times 10^{-6}$ (c) $\tau_{12} = 4.0 \times 10^{-6}$

Fig. 8: Optimized configurations with one regularization factor set to small $\tau_{ij} = 4.0 \times 10^{-6}$ and the other two to large $\tau_{ij} = 4.0 \times 10^{-4}$

に、青色で示された銅である領域が入り込むような構造は見られなくなっており、銅と銅の境界の幾何学的複雑さが小さい構造が得られている。図5(a)と図8(b)を比較すると、全体的な構造の複雑さは同様であるものの、図8(b)左右中央部分にはプラスチックである白色領域中に、銅である青色の細長い領域が生じており、幾何学的複雑さが許容されて最適化が行われていることがわかる。このように、それぞれの2材料の組み合わせごとに、幾何学的複雑さを制御可能であることが示された。

6. 結言

本研究では、X-LS法に基づく複数材料トポロジー最適化手法を熱問題へ適用し、内部発熱のある系において数値解析例を示した。また、正則化係数を境界ごとに別個に設定し、境界ごとに幾何学的複雑さを制御可能であることを示し、熱伝導問題においてもX-LS法の利点が得られることを示した。

7. 謝 辞

本研究の一部は、JST 創発的研究支援事業、JPMJFR202Jの支援を受けたものです。ここに記して感謝します。

参考文献

- (1) Wang, M. Y. and Wang, X.: “Color” level sets: a multi-phase method for structural topology optimization with multiple materials, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **193.6–8**(2004), pp. 469–496.
- (2) Wei, P. and Wang, M. Y.: Piecewise constant level set method for structural topology optimization, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **78.4**(2009), pp. 379–402.
- (3) Wang, Y., Luo, Z., Kang, Z. and Zhang, N.: A multi-material level set-based topology and shape optimization method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **283**(2015), pp. 1570–1586.
- (4) Gangl, P.: A multi-material topology optimization algorithm based on the topological derivative, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **366**(2020), p. 113090.

- (5) Noda, M., Noguchi, Y., and Yamada, T.: Extended level set method: a multiphase representation with perfect symmetric property, and its application to multi material topology optimization, arXiv preprint arXiv:2108.06482.
- (6) Yamada, T., Izui, K., Nishiwaki, S., and Takezawa, A.: A topology optimization method based on the level set method incorporating a fictitious interface energy, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **199.45**(2010), pp. 2876–2891.
- (7) Amstutz, S.: Sensitivity analysis with respect to a local perturbation of the material property, *Asymptotic analysis*, **49.1, 2**(2006), pp. 87–108.

